Γενικά Μαθηματικά

Δημήτρης Φ. Παπαδόπουλος
dimfpap@upatras.gr

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας
Πανεπιστήμιο Πατρών

Πίνακες

Έννοια Πίνακα

Ένας πίνακας (έστω $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$), είναι μια ορθογώνια παράταξη αριθμών, με την γενική μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Ο πίνακας A αποτελείται από τα στοιχεία a_{ij}, όπου $i = 1(1)m,\ j = 1(1)n$. Η θέση του κάθε στοιχείου μέσα στον πίνακα καθορίζεται από τη γραμμή i και τη στήλη j.

Έννοια Πίνακα

- Ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες, καλείται $m \times n$ πίνακας.
- Το ζεύγος των αριθμών m και n, καλείται μέγεθος του πίνακα.
- Δύο πίνακες A και B είναι ίσοι (A=B), όταν έχουν το ίδιο μέγεθος και τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα.
- Ο πίνακας που περιέχει μόνο μια γραμμή καλείται πίνακας γραμμής ή διάνυσμα γραμμής.
- Ο πίνακας που περιέχει μόνο μια στήλη καλείται πίνακας στήλης ή διάνυσμα στήλης.
- Ο πίνακας που περιέχει μόνο μηδενικά στοιχεία καλείται μηδενικός πίνακας.

Παράδειγμα

Να βρείτε τις τιμές των x, y, z, w, ώστε να ισχύει:

$$\begin{bmatrix} x-y & 2y+z \\ x+y & 1+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε 2 πίνακες 2×2 οι οποίοι απαιτούμε να είναι ίσοι. Άρα από τον ορισμό της ισότητας πινάκων οδηγούμαστε στο ακόλουθο σύστημα εξισώσεων που είναι προς επίλυση.

$x - y = 5$

$x + y = 3$

$2y + z = 8$

$1 + w = 2$

Επιλύοντας το σύστημα οδηγούμαστε στις εξής τιμές για τα x, y, z, w: $(x = 4, y = -1, z = 10, w = 1)$

Πρόσθεση Πινάκων

Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης 2 πινάκων (έστω A+B) με το ίδιο μέγεθος, λαμβάνεται από την πρόσθεση των αντίστοιχων στοιχείων τους και οδηγεί σε έναν νέο πίνακα με το ίδιο μέγεθος.

Παράδειγμα:

Έστω οι πίνακες A και B με μέγεθος 3×2. Να βρεθεί το αποτέλεσμα της πρόσθεσής τους.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 6 & -3 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός

Το αποτέλεσμα του γινομένου ενός πίνακα A και ενός αριθμού k, λαμβάνεται πολλαπλασιάζοντας το κάθε στοιχείο του πίνακα A με τον αριθμό k.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας A του προηγούμενου παραδείγματος και ένας αριθμός k (τέτοιος ώστε $k = 3$), τότε:

$$kA = 3\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 15 & 9 \\ 21 & -18 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων (1)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*2+3*5 & 1*0+3*(-2) & 1*(-4)+3*6 \\ 2*2+(-1)*5 & 2*0+(-1)*(-2) & 2*(-4)+(-1)*6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+15 & 0-6 & -4+18 \\ 4-5 & 0+2 & -8-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -6 & 14 \\ -1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$2 \times 2 \quad 2 \times 3 \ \rightarrow \ 2 \times 3$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων (2)

Έστω οι πίνακες $A = [8, -4, 5]$ και $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Τότε το γινόμενο AB προκύπτει από το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων κατά σειρά στοιχείων από τη γραμμή του A και τη στήλη του B. Δηλαδή AB=8(3)+(-4)(2)+5(1)=21. Άρα το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του πίνακα A με μέγεθος 1×3 και του πίνακα B με μέγεθος 3×1 θα είναι ένας πίνακας 1×1. Ως κανόνα μπορούμε να πούμε ότι πάντα το γινόμενο AB ενός πίνακα A με μέγεθος $i \times j$ και ενός πίνακα B με μέγεθος $j \times k$ θα είναι ένας πίνακας Γ με μέγεθος $i \times k$.

Ιδιότητες Πινάκων

Έστω ότι έχουμε τους πίνακες A, B, C και τους αριθμούς $k.l$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- $(A+B)+C = A+(B+C)$.
- $A+\mathbf{0} = \mathbf{0}+A = A$.
- $A+(-A) = (-A)+A = \mathbf{0}$.
- $A+B = B+A$.
- $k(A+B) = kA+kB$.
- $(k+l)A = kA+lA$.
- $(kl)A = k(lA)$.
- $1 \cdot A = A$

Ιδιότητες Πινάκων

- $(AB)C = A(BC)$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(B + C)A = BA + CA$.
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

* Σημειώνεται ότι οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν για όπου ορίζονται οι συγκεκριμένες πράξεις.

Ανάστροφος Πίνακα

Ανάστροφος ενός πίνακα A (A^T), είναι ο πίνακας που προκύπτει, τοποθετώντας τις στήλες του A με τη σειρά ως γραμμές.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -6 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$, τότε ο ανάστροφος του A

είναι: $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 9 \end{bmatrix}$.

Τετραγωνικός Πίνακας

- Τετραγωνικός πίνακας καλείται ο πίνακας που περιέχει ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών, είναι δηλαδή μεγέθους $n \times n, n \in N$.
- Στους τετραγωνικούς πίνακες ορίζεται η έννοια της διαγωνίου και του ίχνους.
- Η διαγώνιος ενός τετραγωνικού πίνακα αποτελείται από το σύνολο των στοιχείων a_{ij} για $i = j$.
- Το ίχνος (*trace*) ενός τετραγωνικού πίνακα Α προκύπτει από το άθροισμα των στοιχείων που αποτελούν την διαγώνιο του Α.
- Ο τετραγωνικός πίνακας ο οποίος έχει διαγώνιο με στοιχεία μόνο τον αριθμό 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδενικά, ονομάζεται μοναδιαίος πίνακας (I) και ικανοποιεί τη σχέση: $IA = AI = A$, όπου Α οποιοσδήποτε τετραγωνικός πίνακας.

Παράδειγμα Τετραγωνικού Πίνακα

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -6 & 7 \\ 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$. Τότε η διαγώνιος του A είναι $[3, -6, -2]$ και το ίχνος του $tr(A) = -5$.

Ιδιότητες Τετραγωνικών Πινάκων

Για τους τετραγωνικούς πίνακες A και B, εκτός από τις ιδιότητες που εξετάσαμε νωρίτερα ισχύουν και οι εξής:

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.
- $tr(kA) = ktr(A)$.
- $tr(A^T) = tr(A)$.
- $tr(AB) = tr(BA)$.
- $A^2 = AA, A^3 = A^2A, \ldots$.
- $A^0 = I$.

Πολυώνυμα σε Πίνακες

Για οποιοδήποτε τετραγωνικό πίνακα A και αριθμό $a_i, i = 1(1)n$, με βάση το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα
$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n$.

Παράδειγμα:

Έστω ότι $f(x) = x^2 + 3x - 10$ και $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, τότε για $f(A)$ έχουμε:

$$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Σημειώνεται ότι από τη στιγμή που ο $f(A)$ είναι ο μηδενικός πίνακας, ο A είναι ρίζα του $f(x)$.

Αντιστρέψιμος Πίνακας

Ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται αντιστρέψιμος αν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε να ισχύει ότι: $AB = BA = I$. Τον αντίστροφο του πίνακα A τον συμβολίζουμε με A^{-1}.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος 2×2 Πίνακα

Έστω ο τετραγωνικός 2×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Τότε για να βρούμε τον αντίστροφο A^{-1} ισχύει:

$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Αντί να λύσουμε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων που προκύπτει, μπορούμε να βρούμε τους αγνώστους x_1, x_2, y_1, y_2, χρησιμοποιώντας την ορίζουσα του A. Άρα για $|A| \neq 0$ έχουμε: $|A| = ad - bc$. Οι τιμές για τα x_1, x_2, y_1, y_2 προκύπτουν από τις ακόλουθες σχέσεις:

$x_1 = \frac{d}{|A|}, x_2 = \frac{-b}{|A|}, y_1 = \frac{-c}{|A|}, y_2 = \frac{a}{|A|}$. Οπότε

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Παράδειγμα Αντίστροφου 2×2 Πίνακα

Έστω ο τετραγωνικός 2×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Τότε $|A| = 5 * 2 - 4 * 3 = -2$. Άρα

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Άσκηση

Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

Να υπολογιστούν (όπου ορίζονται):

- A^2
- B^2
- AB
- BA
- A^T
- B^T
- A^{-1}
- B^{-1}

Λοιπές Κατηγορίες Τετραγωνικών Πινάκων

Ανάλογα με την μορφή που έχει ένας τετραγωνικός πίνακας, μπορεί να χαρακτηριστεί ως:

- Διαγώνιος.
- Τριγωνικός.
- Συμμετρικός.
- Ορθογώνιος.
- Κανονικός.

Διαγώνιοι και Τριγωνικοί Πίνακες

- Διαγώνιος, καλείται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A όπου όλα τα μη-διαγώνια στοιχεία του είναι μηδέν ($A = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$).
- Άνω τριγωνικός, καλείται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A όπου όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την διαγώνιό του είναι μηδέν ($a_{ij} = 0, i > j$).
- Κάτω τριγωνικός, καλείται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A όπου όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την διαγώνιό του είναι μηδέν ($a_{ij} = 0, i < j$).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Διαγώνιοι και Τριγωνικοί Πίνακες

Για δύο $n \times n$ τριγωνικούς ή διαγώνιους πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ ισχύει ότι:

- Οι πίνακες που προκύπτουν από τις πράξεις $A + B, kA, AB$ είναι επίσης τριγωνικοί πίνακες.
- Για ένα πολυώνυμο $f(x)$, ο πίνακας $f(A)$ είναι επίσης τριγωνικός ή διαγώνιος.
- Ο Α είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν το κάθε διαγώνιο στοιχείο του $a_{ii} \neq 0$, και όταν υπάρχει ο A^{-1} είναι επίσης τριγωνικός.
- Η ορίζουσα ενός διαγώνιου ή τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του.

Συμμετρικός και Αντισυμμετρικός Πίνακας

- Συμμετρικός καλείται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ για τον οποίο ισχύει, $a_{ij} = a_{ji}$ ή εναλλακτικά $A^T = A$.
- Αντισυμμετρικός καλείται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ για τον οποίο ισχύει, $a_{ij} = -a_{ji}$ και $a_{ii} = 0$ ή εναλλακτικά $A^T = -A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & -2 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 9 \\ 3 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

Ορθογώνιος Πίνακας

Ορθογώνιος καλείται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ για τον οποίο ισχύει, $A^T = A^{-1}$ ή εναλλακτικά $AA^T = A^T A = I$.

Παράδειγμα:

$$A^T A = AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Κανονικός Πίνακας

Κανονικός καλείται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ για τον οποίο ισχύει, $AA^T = A^T A$.
*Αν ο A είναι συμμετρικός, αντισυμμετρικός ή ορθογώνιος είναι και κανονικός. **Παραδείγματα**:

$$A^T A = AA^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = AA^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$