Γενικά Μαθηματικά

Δημήτρης Φ. Παπαδόπουλος
dimfpap@upatras.gr

Τμήμα Διοικητικής Επιστήμης και Τεχνολογίας
Πανεπιστήμιο Πατρών

Όρια

Ορισμός Ορίου

Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο διάστημα $A = (a, x_0) \cup (x_0, b)$, όπου $a < x_0 < b$, τότε θα λέμε ότι η f έχει στο σημείο x_0 όριο $l \in \mathbb{R}$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$), όταν $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

Αν a και b είναι σταθερές τότε: $\lim_{x \to x_0} ax + b = ax_0 + b$

Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$ όπου $l, m \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει:

- $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l + m.$
- $\lim_{x \to x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \to x_0} f(x) = cl, \forall c \in \mathbb{R}.$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = lm.$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{l}{m}, m \neq 0.$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^n = l^n$, όπου $n > 0$.
- $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{l}$, όπου $n > 0$ και $l \geq 0$.

Για δύο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ισχύει:

- $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0), \forall x \in \Re.$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \forall x_0 \in \Re, Q(x_0) \neq 0.$

Παράδειγμα:

Αν $f(x) = \frac{-x^2+4x-2}{-x^3+7}$. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to 2} f(x)$

Για $x \to 2$ ισχύει ότι $-x^3+7 \neq 0$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{-x^2+4x-2}{-x^3+7} = \frac{\lim_{x\to 2}(-x^2+4x-2)}{\lim_{x\to 2}(-x^3+7)} = \frac{-\lim_{x\to 2} x^2+4\lim_{x\to 2} x-2}{-\lim_{x\to 2} x^3+7} =$$

$$\frac{-2^2+4*2-2}{-2^3+7} = \frac{2}{-1} = -2$$

- Κριτήριο Παρεμβολής: Αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ και $\forall x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει ότι $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει και ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.
- Για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ισχύουν:
  - $\lim_{x \to x_0} sinx = sinx_0$
  - $\lim_{x \to x_0} cosx = cosx_0$
  - $\lim_{x \to x_0} tanx = tanx_0$
  - $\lim_{x \to x_0} cotx = cotx_0$
  - $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$
- Θεώρημα σύνθετης συνάρτησης: Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = k$, $f(x) \neq x_0$ και $\lim_{y \to k} g(y) = l$, τότε $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$.

- Για μια συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, ισχύει και ότι $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$.
- Αν $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ και $\forall x \in A$, με $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει ότι $|f(x)| \leq g(x)$, τότε ισχύει και ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.
- Αν $limf(x) = l \neq 0$, τότε $\exists \delta > 0 : \forall x \in A$, με $0 < |x - x_0| < \delta$ οι τιμές $f(x)$ να είναι ομόσημες του l.
- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = l, l \in \Re$, τότε $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.
- Αν $f(x) \geq 0$ και $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$, τότε $\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$.
- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, όπου $l, m \in \Re$ και $\forall x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \epsilon$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$, τότε ισχύει και ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq \lim_{x \to x_0} g(x)$

Ορισμός

Ισχύει ότι $lim_{x \to x_0} = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta : x \in A$ με
$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$
Αντίστοιχα ισχύει ότι: Ισχύει ότι
$lim_{x \to x_0} = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta : x \in A$ με
$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$
Παράδειγμα:
Να δείξετε ότι για $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ ισχύει $lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$
Έστω ότι ισχύει $M > 0$, τότε $f(x) > M \Leftrightarrow lim_{x \to 2}(\frac{1}{(x-2)^2}) >$
$M \Leftrightarrow (x-2)^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow |x-2| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.
Άρα $\forall M > 0 \exists \delta \leq \frac{1}{\sqrt{M}} : \forall x \in \Re - 2$ με
$0 < |x-2| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow f(x) > M$. Επομένως $lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$.

Θεωρήματα Μη Πεπερασμένων Ορίων

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty.$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty.$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ και $g(x) > 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$
  - $+\infty$, αν $l > 0$
  - $-\infty$, αν $l < 0$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ και $g(x) < 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$
  - $-\infty$, αν $l > 0$.
  - $+\infty$, αν $l < 0$.
- Αν $f(x) \leq g(x)$ τότε
  - $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.
  - $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, αν $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$.

Παράδειγμα Μη Πεπερασμένων Οριών

Να βρεθεί το όριο: α) $lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-}(\frac{1}{cosx})$
Ισχύει ότι $lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-}(cosx) = 0$ Επίσης $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει ότι $cosx > 0$. Άρα $lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-}(\frac{1}{cosx}) = +\infty$.

Ορισμοί στο πεδίο $(a, +\infty)$

Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(a, +\infty)$ ισχύουν τα εξής:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \Re \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists x_0 > 0 : \forall x \in (a, +\infty)$ με $x > x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \in \Re \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists x_0 > 0 : \forall x \in (a, +\infty)$ με $x > x_0 \Rightarrow f(x) > M$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \in \Re \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists x_0 > 0 : \forall x \in (a, +\infty)$ με $x > x_0 \Rightarrow f(x) < -M$

Ορισμοί στο πεδίο $(-\infty, a)$

Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(-\infty, a)$ ισχύουν τα εξής:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \Re \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists x_0 > 0 : \forall x \in (-\infty, a)$ με $x < -x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \in \Re \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists x_0 > 0 : \forall x \in (-\infty, a)$ με $x < -x_0 \Rightarrow f(x) > M$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \in \Re \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists x_0 > 0 : \forall x \in (-\infty, a)$ με $x < -x_0 \Rightarrow f(x) < -M$

Εφαρμογή ορισμών

Με την χρήση των ανωτέρω ορισμών αποδεικνύεται εύκολα ότι για κάθε θετικό ακέραιο (λ) ισχύουν τα ακόλουθα:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\lambda} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\lambda}} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\lambda} = +\infty$, όπου λ άρτιος αριθμός.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\lambda} = -\infty$, όπου λ περιττός αριθμός.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\lambda}} = 0$.

Θεωρήματα

- Αν $a_v, b_v \neq 0$ και
  $P(x) = a_v x^v + a_{v-1}x^{v-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,
  $Q(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + a_0$, τότε:
  α) $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = a_v \lim\limits_{x\to+\infty} x^v$.
  β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_v}{b_k} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^v}{x^k}$.
- Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

Ορισμός

Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $A \subseteq \Re$ και $x_0 \in A$ θα λέγεται συνεχής στο x_0, αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Παράδειγμα:

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, αν για $x \geq 2, f(x) = \sqrt{x-2}$ και για $x < 2, f(x) = x - 2$.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (\sqrt{x-2}) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2 - x) = 0$$

$$f(x_0) = f(2) = \sqrt{2-2} = 0.$$

Αφού ισχύει ότι $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Πλευρική Συνέχεια

- Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $A \subseteq \Re$ και $x_0 \in A$ θα λέγεται δεξιά συνεχής στο x_0, αν ισχύει ότι: $lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $A \subseteq \Re$ και $x_0 \in A$ θα λέγεται αριστερά συνεχής στο x_0, αν ισχύει ότι: $lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Θεώρημα Bolzano

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι:

- Είναι συνεχής στο $[a, b]$ και
- $f(a)f(b) < 0$, τότε
  η f ισούται με το μηδέν σ'ένα τουλάχιστον σημείο του (a, b), δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$

Παράδειγμα:
Να δείξετε ότι η $f(x) = x^2 - 2 = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα στο διάστημα (1,2).
Η f είναι συνεχής στο [1,2] και $f(1)f(2) = -1 \cdot 2 < 0$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι:

- Είναι συνεχής στο $[a, b]$ και
- $f(a) \neq f(b)$, τότε
  η f παίρνει τιμές μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, δηλαδή $\forall k \in \Re$ με $f(a) < k < f(b)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b) : f(\xi) = k$

Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον
$x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x \in [a, b]$