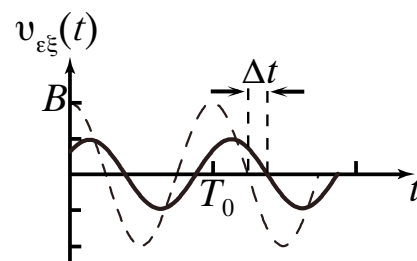
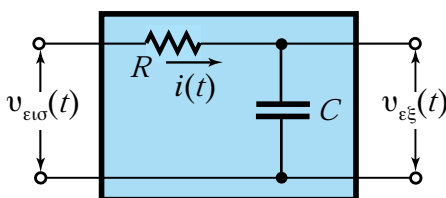
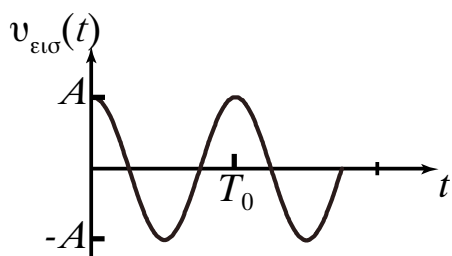


ΣΕΡΑΦΕΙΜ ΚΑΡΑΜΠΟΓΙΑΣ

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΣΕΡΑΦΕΙΜ ΚΑΡΑΜΠΟΓΙΑΣ
Επίκουρος Καθηγητής

Σήματα και Συστήματα



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

Σήματα και Συστήματα

Συγγραφή

Σεραφείμ Καραμπογιάς

Κριτικός αναγνώστης

Στέφανος Κόλλιας

ISBN: 978-960-603-327-8

Copyright © ΣΕΑΒ, 2015



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 3.0. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/gr/>

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε εσάς που παρακολουθείτε Τμήματα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών και αποτελεί καταστάλαγμα της εμπειρίας από τη διδασκαλία του μαθήματος Σήματα και Συστήματα για αρκετά χρόνια.

Στη σημερινή εποχή της Κοινωνίας της Πληροφορίας, που χαρακτηρίζεται από τη σύγκλιση και ενοποίηση διαφορετικών μέχρι τώρα επιστημονικών περιοχών, το πεδίο των σημάτων και των συστημάτων αποτελεί πλέον ένα ενιαίο σύνολο βασικών και θεμελιωδών γνώσεων για ένα ευρύ φάσμα περιοχών που σχετίζονται με τον ένα ή άλλο τρόπο με την παραγωγή, την επεξεργασία, την αποθήκευση και τη μετάδοση της πληροφορίας.

Βασικός σκοπός του βιβλίου είναι να εισαγάγει τον αναγνώστη στις βασικές τεχνικές ανάλυσης και μελέτης των σημάτων και συστημάτων με ενιαίο τρόπο και να του προσφέρει τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία, με τα οποία μπορεί να χειριστεί τα σήματα και τα συστήματα. Έχει καταβληθεί προσπάθεια να δοθούν οι θεωρητικές έννοιες με απλό τρόπο και να συνδεθούν με αντίστοιχες έννοιες της φυσικής. Η επιλογή των παραδειγμάτων έγινε με γνώμονα τη χρησιμότητά τους ώστε να βοηθούν τον αναγνώστη να εμπεδώσει τη θεωρία και να κατανοήσει τις τεχνικές προσέγγισης και αντιμετώπισης των προβλημάτων.

Οι βασικές θεματικές ενότητες του Μαθήματος Σήματα και Συστήματα αναπτύσσονται σε Επτά κεφάλαια.

Επισκόπηση του Βιβλίου

Στο **Κεφάλαιο 1** δίνεται μια γενική εικόνα του τι είναι σήμα και παρουσιάζονται οι ιδιότητες των σημάτων. Επίσης ορίζονται μερικά στοιχειώδη σήματα, τα οποία παίζουν ιδιαίτερο ρόλο στη θεωρία των σημάτων.

Στο **Κεφάλαιο 2** δίνεται ο ορισμός του συστήματος, παρουσιάζονται οι κατηγορίες συστημάτων, οι τρόποι σύνδεσής τους και μερικές βασικές ιδιότητές τους. Το κεφάλαιο αυτό οδηγεί τον αναγνώστη στην κατανόηση θεμελιωδών σχέσεων, όπως η σχέση που συνδέει το σήμα εισόδου και το σήμα εξόδου ενός συστήματος, και βασικών εννοιών,

όπως οι έννοιες της γραμμικότητας, της ευστάθειας και της αιτιότητας.

Στο **Κεφάλαιο 3** περιγράφεται η μέθοδος ανάλυσης ενός αναλογικού σήματος κατά Fourier, δηλαδή ως υπέρθεση στοιχειωδών ημιτονοειδών σημάτων και εισάγονται οι έννοιες της σειράς Fourier και του μετασχηματισμού Fourier. Επίσης αναφέρονται οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζονται βασικές εφαρμογές του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου. Επίσης εισάγεται η έννοια του φίλτρου.

Στο **Κεφάλαιο 5** περιγράφεται η μέθοδος ανάλυσης ενός σήματος διακριτού χρόνου κατά Fourier, δηλαδή, ως υπέρθεση στοιχειωδών ημιτονοειδών σημάτων διακριτού χρόνου και εισάγονται οι έννοιες της σειράς Fourier, του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, του διακριτού μετασχηματισμού Fourier και του ταχέος μετασχηματισμού Fourier. Επίσης αναφέρονται οι ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier. Τέλος παρουσιάζονται βασικές εφαρμογές του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Στο **Κεφάλαιο 6** ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace, αναφέρονται οι ιδιότητές του και παρουσιάζεται η στενή σχέση του με το μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου. Επίσης παρουσιάζεται ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace. Τέλος, παρουσιάζεται η χρήση του μετασχηματισμού Laplace στην ανάλυση αναλογικών συστημάτων και τη μελέτη της ευστάθειας και της αιτιότητάς τους.

Στο **Κεφάλαιο 7** ορίζεται ο μετασχηματισμός z , αναφέρονται οι ιδιότητές του και παρουσιάζεται η στενή σχέση του με το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου. Επίσης παρουσιάζεται ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z . Τέλος, παρουσιάζεται η χρήση του μετασχηματισμού z στην ανάλυση συστημάτων διακριτού χρόνου και τη μελέτη της ευστάθειας και της αιτιότητάς τους.

Το βιβλίο ολοκληρώνεται με τρία παραρτήματα. Στο **πρώτο Παράρτημα** παρουσιάζονται βασικά στοιχεία για τους μιγαδικούς αριθμούς. Στο **δεύτερο Παράρτημα** παρουσιάζεται ο τρόπος ανάπτυξης μιας ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα. Τα στοιχεία των δύο αυτών παραρτημάτων είναι ήδη γνωστά από το Λύκειο. Τέλος στο **τρίτο Παράρτημα** παρατίθενται χρήσιμοι μαθηματικοί τύποι.

Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχουν προβλήματα. Μετά από τη μελέτη κάθε κεφαλαίου, σας συνιστούμε να προσπαθείτε να τα λύσετε. Τα προβλήματα αυτά σας δίνουν τη δυνατότητα να παρακολουθείτε την πρόοδό σας και εξασφαλίζουν ότι έχετε αφομοιώσει το υλικό του αντίστοιχου κεφαλαίου.

Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι το βιβλίο αυτό έχει καθαρά εισαγωγικό χαρακτήρα. Στο τέλος του υπάρχει βιβλιογραφία στην οποία μπορείτε να ανατρέξετε για πλέον εξειδικευμένες γνώσεις.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους σπουδαστές εκείνους, προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς, που με προσοχή μελέτησαν μέρη του βιβλίου και με τις παρατηρήσεις τους βοήθησαν στη βελτίωσή του.

Αν και καταβλήθηκε η μέγιστη δυνατή προσπάθεια να μην υπάρχουν παροράμα-

τα, στην περίπτωση που διαπιστωθεί ότι υπάρχουν, θα επισημαίνονται στη διεύθυνση <http://sig-sys-book.di.uoa.gr/> του δικτύου. Στη διεύθυνση αυτή, η οποία ευελπιστούμε ότι θα αποτελέσει μια ανοικτή γραμμή επικοινωνίας, θα παρουσιάζουμε νέες ασκήσεις, ώστε να έχετε περισσότερες δυνατότητες εξάσκησης.

Σεραφείμ Καραμπογιάς
Επίκουρος Καθηγητής
Εθνικού και Καποδιστριακού
Πανεπιστημίου Αθηνών

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	vi
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΗΜΑΤΑ	1
1.1 Ταξινόμηση Σημάτων	2
1.1.1 Σήματα συνεχούς χρόνου ή αναλογικά σήματα,	2
1.1.2 Σήματα διακριτού χρόνου,	2
1.1.3 Ψηφιακά σήματα,	2
1.2 Ιδιότητες Αναλογικών Σημάτων	3
1.2.1 Περιοδικά και μη περιοδικά σήματα,	3
1.2.2 Αιτιάτα και μη αιτιάτα σήματα,	4
1.2.3 Σήματα πεπερασμένα και σήματα πεπερασμένης και άπειρης διάρκειας,	5
1.2.4 Άρτια και περιττά σήματα,	5
1.2.5 Ενεργειακά σήματα - Σήματα ισχύος,	6
1.2.6 Αιτιοκρατικά και Τυχαία - Στοχαστικά σήματα,	7
1.3 Μετατροπές Σήματος ως προς το Χρόνο	8
1.3.1 Ανάκλαση,	8
1.3.2 Αλλαγή κλίμακας χρόνου,	8
1.3.3 Χρονική μετατόπιση,	9
1.4 Στοιχειώδη Σήματα	10
1.4.1 Μιγαδικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου,	10
1.4.2 Μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου,	14
1.4.3 Ιδιότητες των εκθετικών σημάτων,	15
1.4.4 Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος συνεχούς χρόνου,	18
1.4.5 Η κρουστική συνάρτηση συνεχούς χρόνου ή Συνάρτηση δέλτα,	19
1.4.6 Ο ορθογώνιος παλμός,	24
1.4.7 Ο τριγωνικός παλμός,	24
1.4.8 Η συνάρτηση κλίσης,	25
1.4.9 Η συνάρτηση προσήμου,	25
1.4.10 Μοναδιαία βηματική ακολουθία - Μοναδιαίο βήμα διακριτού χρόνου,	26

1.4.11	Το μοναδιαίο δείγμα - Κρουστική ακολουθία,	26
	Προβλήματα	28

2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ **31**

2.1	Ορισμός Συστήματος - Κατηγορίες Συστημάτων	32
2.2	Συνδέσεις Συστημάτων	35
2.3	Ιδιότητες Συστημάτων	37
2.3.1	Γραμμικότητα,	37
2.3.2	Αιτιότητα,	37
2.3.3	Αντιστρέψιμα και μη αντιστρέψιμα συστήματα,	38
2.3.4	Συστήματα στατικά και δυναμικά,	39
2.3.5	Χρονικά αναλλοίωτα συστήματα,	39
2.3.6	Ευστάθεια,	40
2.4	Σχέση μεταξύ Εισόδου - Εξόδου Συστήματος	41
2.4.1	Γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα συνεχούς χρόνου. - Το ολοκλήρωμα της συνέλιξης,	41
2.4.2	Ιδιότητες της συνέλιξης,	45
2.4.3	Γραφικός προσδιορισμός της συνέλιξης,	47
2.4.4	Γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα διακριτού χρόνου. - Το άθροισμα της συνέλιξης,	49
2.5	Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων σε Εκθετικές Εισόδους	54
2.5.1	Συνεχής περίπτωση,	54
2.5.2	Διακριτή περίπτωση,	56
	Προβλήματα	60

3 ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ - ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER **63** **ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ**

3.1	Η Ιδέα του Χώρου των Σημάτων	63
3.1.1	Το σύνολο των ορθογωνίων εκθετικών περιοδικών σημάτων,	67
3.1.2	Το σύνολο των ορθογωνίων τριγωνομετρικών περιοδικών σημάτων,	68
3.2	Ανάπτυγμα Fourier - Σειρά Fourier	69
3.2.1	Εκθετική σειρά Fourier,	69
3.2.2	Τριγωνομετρική σειρά Fourier,	70
3.2.3	Σειρές Fourier περιοδικών σημάτων,	72
3.2.4	Υπαρξη σειράς Fourier,	72
3.2.5	Ταυτότητα του Parseval,	77
3.2.6	Φαινόμενο Gibbs,	81

3.3	Μετασχηματισμός Fourier	82
3.3.1	Υπαρξη του μετασχηματισμού Fourier,	91
3.3.2	Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier,	93
3.3.3	Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων,	109
3.4	Ενέργεια και Ισχύς	110
3.4.1	Ενεργειακά σήματα,	111
3.4.2	Σήματα ισχύος,	113
	Προβλήματα	115
4	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER	119
4.1	Απόκριση Συχνότητας Συστήματος	119
4.1.1	Η απόκριση συχνότητας για συστήματα τα οποία περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές,	120
4.2	Υπολογισμός του Αντιστρόφου Μετασχηματισμού Fourier	122
4.3	Διαγράμματα Bode	125
4.4	Ιδανικό Φίλτρο Βασικής Ζώνης - Κατωπερατό Φίλτρο	128
	Προβλήματα	133
5	ΣΕΙΡΑ - ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ	137
5.1	Παράσταση Περιοδικών Σημάτων στο Πεδίο του Χρόνου Σειρά Fourier Διακριτού Χρόνου	138
5.1.1	Προσδιορισμός της σειράς Fourier διακριτού χρόνου,	138
5.2	Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου	143
5.3	Ιδιότητες του FM Διακριτού Χρόνου	151
5.3.1	Αποδεκίαση στο χρόνο,	152
5.3.2	Παρεμβολή,	154
5.3.3	Άθροισμα,	156
5.3.4	Ιδιότητα της διαμόρφωσης,	157
5.3.5	Ο MF διακριτού χρόνου για περιοδικά σήματα,	160
5.4	Σήματα από δειγματοληψία στο Πεδίο Συχνότητας	163
5.4.1	Θεώρημα δειγματοληψίας,	167
5.4.2	Οι Συντελεστές Fourier ως δείγματα σε μία περίοδο του MF,	168
5.5	Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier	170
5.5.1	Κυκλική ανάκλαση ακολουθίας,	173
5.5.2	Κυκλική ολίσθηση ακολουθίας,	174
5.5.3	Κυκλική συνέλιξη ακολουθιών,	175

5.5.4	<i>Ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier</i> , 176	
5.5.5	<i>Η γραμμική συνέλιξη με τη βοήθεια του διακριτού MF</i> , 177	
5.5.6	<i>Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier σε μορφή πινάκων</i> , 180	
5.5.7	<i>Ταχύς μετασχηματισμός Fourier</i> , 181	
5.6	Εφαρμογές του MF Διακριτού Χρόνου	186
5.6.1	<i>Η απόκριση συχνότητας για συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές</i> , 187	
	Προβλήματα	195
6	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE	199
6.1	Ορισμοί	200
6.1.1	<i>Μετασχηματισμός Laplace στοιχειωδών σημάτων</i> , 202	
6.1.2	<i>Ιδιότητες της περιοχής σύγκλισης-Ύπαρξη μετασχηματισμού Laplace</i> , 206	
6.1.3	<i>Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace</i> , 209	
6.2	Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace	211
6.2.1	<i>Υπολογισμός του αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace</i> , 213	
6.3	Ο μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace	216
6.4	Εφαρμογές των Μετασχηματισμών Laplace	219
6.4.1	<i>Επίλυση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με τη βοήθεια MML</i> , 220	
6.4.2	<i>Η χρήση του ML στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων</i> , 221	
6.4.3	<i>Παρατηρήσεις για την περιοχή σύγκλισης του ML</i> , 226	
	Προβλήματα	231
7	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z	233
7.1	Ορισμοί	234
7.1.1	<i>Μετασχηματισμός z στοιχειωδών ακολουθιών</i> , 236	
7.1.2	<i>Ιδιότητες της περιοχής σύγκλισης-Ύπαρξη μετασχηματισμού z</i> , 241	
7.2	Ιδιότητες του Μετασχηματισμού z	245
7.3	Ο Μονόπλευρος Μετασχηματισμός z	250
7.4	Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός z	256
7.4.1	<i>Υπολογισμός του αντιστρόφου Mz για ρητές συναρτήσεις</i> , 257	
7.4.2	<i>Υπολογισμός με ανάπτυξη σε απλά κλάσματα</i> , 257	
7.4.2	<i>Υπολογισμός με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά</i> , 261	
7.5	Εφαρμογές των Μετασχηματισμών z	262
7.5.1	<i>Συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές</i> , 263	
7.5.1	<i>Μελέτη ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια Mz</i> , 270	

Προβλήματα	274	
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΜΕΡΙΚΑ ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ		279
A.1	Παράσταση μιγαδικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο	279
A.2	Συζυγής μιγαδικός αριθμός - Ιδιότητες	280
	Προβλήματα	282
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ		283
B.1	Ο βαθμός του $N(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του $D(x)$	283
	B.1.1	Ρίζες διακεκριμένες και πραγματικές, 284
	B.1.2	Ρίζες πολλαπλές και πραγματικές, 285
	B.1.3	Μιγαδικές ρίζες, 286
B.2	Ο βαθμός του $N(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του $D(x)$	286
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ		287
Γ.1	Τριγωνομετρία	287
Γ.2	Αόριστα ολοκληρώματα	288
	Γ.2.1	Ρητών αλγεβρικών συναρτήσεων, 288
	Γ.2.2	Τριγωνομετρικών συναρτήσεων, 289
	Γ.2.3	Εκθετικών συναρτήσεων, 289
	Γ.2.4	Ορισμένα ολοκληρώματα, 289
Γ.3	Γεωμετρικές σειρές	290
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ		291

Πίνακας συντομεύσεων-ακρωνύμια

		Desibel
dB		Desibel
A/D	αναλογοψηφιακός μετατροπέας	analog to digital converter
IDFT	αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier	inverse discrete Fourier transform
LPF	βαθυπερατό φίλτρο ή φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων	lowpass filter
ΓΣ	γραμμικό σύστημα	linear system
ΓΧΑΣ	γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο Σύστημα	linear time invariant system
DFT	διακριτός μετασχηματισμός Fourier	discrete Fourier transform
2-D	δισδιάστατα σήματα	two-dimensional signals
ΦΕΦΕ	ευστάθεια φραγμένης εισόδου φραγμένης εξόδου	bounded input bounded output
BPF	ζωνοπερατό φίλτρο ή ζωνοδιαβατό φίλτρο ή φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων	bandpass filter
BSF	ζωνοφρακτικό φίλτρο ή φίλτρο αποκοπής ζώνης συχνοτήτων	bandstop filter
MF	μετασχηματισμός Fourier	Fourier transform
DTFT	μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου	discrete time Fourier transform
ML	μετασχηματισμός Laplace	Laplace transform
Mz	μετασχηματισμός z	z Transform
1-D	μονοδιάστατα σήματα	One-dimensional signal
MML	μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace	unilateral Laplace transform
MMz	μονόπλευρος μετασχηματισμός z	unilateral z Transform
ΠΣ	πεδίο σύγκλισης	Region of convergence
ROC	πεδίο σύγκλισης	Region of convergence
DTFS	σειρά Fourier διακριτού χρόνου	discrete-time Fourier series
ΧΑΣ	σύστημα χρονικά αναλλοίωτο	Time invariant system
MISO	συστήματα με πολλές εισόδους-μίας εξόδου	multi-input, single-output
MIMO	συστήματα με πολλές εισόδους-πολλές εξόδους	multi-input, multi-output
SISO	συστήματα μίας εισόδου-μίας εξόδου	single-input, single-output
HPF	υψιπερατό φίλτρο ή φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων	highpass filter
D/A	ψηφιοαναλογικός μετατροπέας	digital to analog converter

Πίνακας βασικών συμβόλων

j	τετραγωνική ρίζα του -1	square root of -1
$ z $	μέτρο μιγαδικού αριθμού z	magnitude of complex quantity z
$\arg\{z\}$	φάση (όρισμα) του z	phase angle of z
$\Re\{z\}$	πραγματικό μέρος του z	imaginary part of z
$\Im\{z\}$	φανταστικό μέρος του z	imaginary part of z
z^*	συζυγής μιγαδικός αριθμός του z	complex conjugate of z
ω	(κυκλική) συχνότητα για σήματα συνεχούς χρόνου	frequency for continuous-time signal
Ω	(κυκλική) συχνότητα για σήματα διακριτού χρόνου	frequency for discrete-time signal
$u(t)$	βηματική συνάρτηση	step function
$\delta(t)$	συνάρτηση δέλτα (dirac)-κρουστική συνάρτηση	unit impulse
$\Pi(t)$	ορθογώνιος παλμός	rectangular pulse
$\Lambda(t)$	τριγωνικός παλμός	triangular pulse
$r(t)$	συνάρτηση κλίσης	ramb function
$\operatorname{sgn}(t)$	συνάρτηση προσήμου	signum function
$*$	συμβολίζει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης	denotes convolution operation
\otimes	κυκλική συνέλιξη N -σημείων	N -point circular convolution
$h(t)$	κρουστική συνάρτηση	impulse response
$H(s)$	συνάρτηση μεταφοράς	transfer function
$H(\omega)$	απόκριση συχνότητας	frequency response
$\operatorname{sinc}(t)$	συνάρτηση δειγματοληψίας	sampling function
$X(\omega)$	μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$	Fourier transform of $x(t)$
$X(\Omega)$	μετασχηματισμός Fourier της $x(n)$	Fourier transform of $x(n)$
$X(k)$	διακριτός μετασχηματισμός Fourier της $x(n)$	discrete Fourier transform of $x(n)$
$X(s)$	μετασχηματισμός Laplace του $x(t)$	Laplace transform of $x(t)$
$\mathcal{X}(s)$	μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace του $x(t)$	unilateral Laplace transform of $x(t)$
$X(z)$	μετασχηματισμός z της $x(n)$	z transform of $x(n)$
$\mathcal{X}(z)$	μονόπλευρος μετασχηματισμός z της $x(n)$	unilateral z transform of $x(n)$
$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	υποδεικνύει ζεύγος μετασχηματισμών Fourier	Fourier transform pair
$\xleftrightarrow{\mathcal{L}}$	υποδεικνύει ζεύγος μετασχηματισμών Laplace	Laplace transform pair
$\xleftrightarrow{\mathcal{L}^-}$	υποδεικνύει μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace	unilateral Laplace transform pair
$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	υποδεικνύει ζεύγος μετασχηματισμών z	z transform pair
$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}^-}$	υποδεικνύει μονόπλευρο μετασχηματισμό z	unilateral z transform pair

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΗΜΑΤΑ

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να δώσει μία γενική εικόνα του τι είναι σήμα και να κατατάξει τα διάφορα σήματα σε κατηγορίες ανάλογα με τις βασικές τους ιδιότητες. Επιπρόσθετα θα οριστούν αντιπροσωπευτικά σήματα, τα οποία έχουν ιδιαίτερη σημασία στη θεωρία σημάτων.

Το κεφάλαιο αυτό, πραγματεύεται τα κριτήρια βάσει των οποίων ορίζονται τα σήματα και ταξινομεί τα σήματα. Επίσης, αναφέρει τις βασικές ιδιότητες που παρουσιάζουν τα σήματα και τις μετατροπές σήματος ως προς το χρόνο. Στη συνέχεια ορίζονται στοιχειώδη σήματα, τα οποία παίζουν έναν ιδιαίτερο ρόλο στη θεωρία σημάτων, ως εργαλεία για τη μελέτη πολυπλοκότερων σημάτων. Σημειώνεται ότι στο Παράρτημα Α υπάρχουν μερικά βασικά στοιχεία για τους μιγαδικούς αριθμούς.

Εισαγωγή

Ως σήμα ορίζεται ένα φυσικό μέγεθος το οποίο μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο ή το χώρο ή με οποιαδήποτε άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή ή μεταβλητές. Για παράδειγμα, το σήμα ομιλίας αντιστοιχεί στις μεταβολές της ακουστικής πίεσης σε σχέση με το χρόνο και προέρχεται από τις κινήσεις των φωνητικών χορδών. Το σήμα εικόνας αντιστοιχεί στις μεταβολές της φωτεινότητας σε σχέση με τις δύο χωρικές μεταβλητές. Άλλα παραδείγματα σημάτων είναι τα σεισμικά σήματα, τα ιατρικά σήματα (όπως το καρδιογράφημα), ο ετήσιος δείκτης τιμών καταναλωτή, ο δείκτης του ποσοστού ανεργίας ανά μήνα κ.λ.π.

Από μαθηματική άποψη, ένα σήμα εκφράζεται ως συνάρτηση μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών.

$$t \rightarrow x(t)$$

Η ανεξάρτητη μεταβλητή t είναι συνήθως ο χρόνος, η οποία μπορεί να έχει και άλλη φυσική σημασία. Με $x(t)$ συμβολίζεται η τιμή του σήματος τη χρονική t .

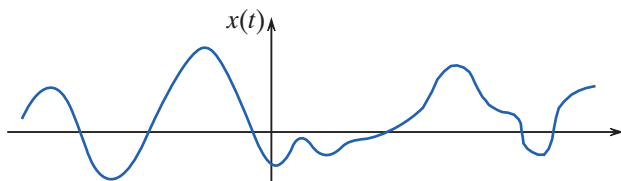
Ανάλογα με το πλήθος των ανεξαρτητών μεταβλητών τα σήματα χαρακτηρίζονται ως μονοδιάστατα σήματα (1-D), διδιάστατα (2-D), πολυδιάστατα σήματα.

1.1 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ

Ανάλογα με τον τύπο της ανεξάρτητης ή της εξαρτημένης μεταβλητής της συνάρτησης τα σήματα κατατάσσονται στις παρακάτω κατηγορίες:

1.1.1 Σήματα συνεχούς χρόνου ή αναλογικά σήματα

Σήματα *συνεχούς χρόνου ή αναλογικά σήματα* είναι τα σήματα των οποίων η ανεξάρτητη μεταβλητή μεταβάλλεται σε ένα συνεχές διάστημα τιμών. Στα μονοδιάστατα σήματα το πεδίο ορισμού του σήματος είναι διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Στο Σχήμα 1.1 έχει σχεδιαστεί ένα αναλογικό σήμα. Επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή t συνήθως είναι ο χρόνος, τα σήματα αυτά ονομάζονται *σήματα συνεχούς χρόνου ή σήματα συνεχούς μεταβλητής*.



Σχήμα 1.1 Γραφική αναπαράσταση ενός αναλογικού σήματος.

1.1.2 Σήματα διακριτού χρόνου

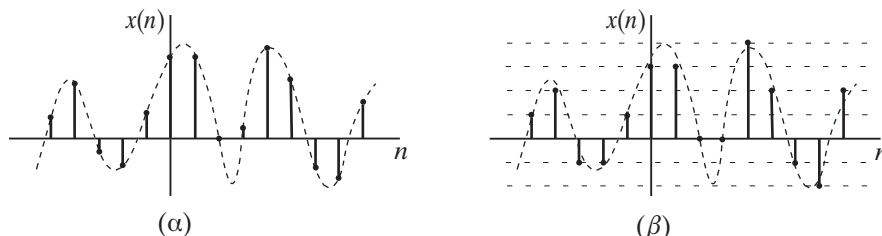
Ένα αναλογικό σήμα $x_a(t)$ είναι δυνατό να αναπαραχθεί από τις τιμές των δειγμάτων του $x(n)$ που λαμβάνονται ανά χρονικά διαστήματα T_δ . Τα χρονικά διαστήματα T_δ καθορίζονται ανάλογα με το είδος του αναλογικού σήματος και την επιθυμητή πιστότητα αναπαραγωγής.

$$x(n) \equiv x_a(nT_\delta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.1)$$

Η διαδικασία ονομάζεται *δειγματοληψία* και το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών δειγμάτων *περίοδος δειγματοληψίας* T_δ . Με τη διαδικασία της δειγματοληψίας ενός αναλογικού σήματος προκύπτει ένα σήμα διακριτού χρόνου.

Σήματα *διακριτού χρόνου* είναι τα σήματα των οποίων το πεδίο ορισμού είναι κάποιο διακριτό σύνολο π.χ. το σύνολο των ακεραίων αριθμών ενώ η εξαρτημένη μεταβλητή είναι δυνατόν να λαμβάνει οποιαδήποτε τιμή. Το σήμα στο Σχήμα 1.2α είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου.

Στις εφαρμογές στις οποίες είναι αναγκαίο να μεταδίδουμε ή να αποθηκεύουμε ένα αναλογικό σήμα μεταδίδουμε ή αποθηκεύουμε τα δείγματά του.



Σχήμα 1.2 Γραφική αναπαράσταση (α) ενός σήματος διακριτού χρόνου και (β) ενός ψηφιακού σήματος.

1.1.3 Ψηφιακά σήματα

Η αναπαράσταση των αναλογικών δειγματοληπτημένων τιμών $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ με ένα πεπερασμένο σύνολο επιτρεπόμενων τιμών λέγεται *κβάντιση*. Με τη διαδικασία της κβάντισης οι τιμές $x(n)$ ενός διακριτού σήματος στρογγυλοποιούνται στην πλησιέστερη επιτρεπόμενη τιμή και έτσι προκύπτει ένα ψηφιακό σήμα.

Ψηφιακά σήματα είναι τα σήματα στα οποία τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή, όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή μπορούν να λαμβάνουν μόνο διακριτές τιμές. Στο Σχήμα 1.2β φαίνεται ένα ψηφιακό σήμα.

Αφού δειγματοληπτηθεί και κβαντιστεί η έξοδος μίας αναλογικής πηγής πληροφορίας, δημιουργείται μία ακολουθία από κβαντισμένες τιμές. Κάθε κβαντισμένη στάθμη *κωδικοποιείται* σε μία δυαδική ακολουθία μήκους ν , όπου $N = 2^\nu$ είναι ο αριθμός των επιτρεπόμενων τιμών.

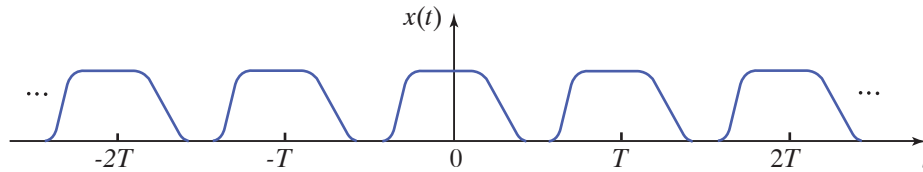
Ένα σύστημα ψηφιακής μετάδοσης ή καταγραφής ήχου μετατρέπει ένα ακουστικό σήμα σε μία σειρά από αριθμούς bit τους οποίους μεταδίδει ή καταγράφει π.χ. σε οπτικό δίσκο. Η μετατροπή ενός αναλογικού σήματος σε μία δυαδική ακολουθία ονομάζεται *παλμοκωδική διαμόρφωση*.

1.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται μερικές βασικές ιδιότητες που έχουν τα αναλογικά σήματα. Ανάλογες ιδιότητες έχουν και τα σήματα διακριτού χρόνου.

1.2.1 Περιοδικά και Μη Περιοδικά Σήματα

Ένα αναλογικό σήμα $x(t)$ λέγεται *περιοδικό*, όταν υπάρχει ένας θετικός αριθμός T για τον οποίο ισχύει $x(t) = x(t+T)$ για κάθε τιμή του t . Στο Σχήμα 1.3 έχει σχεδιαστεί ένα περιοδικό σήμα. Ο σταθερός αριθμός T λέγεται *περίοδος*. Η ελαχίστη δυνατή περίοδος είναι γνωστή ως *θεμελιώδης περίοδος* και συμβολίζεται με T_0 . Στην πράξη πολλές φορές αναφερόμαστε απλώς στην περίοδο και εννοούμε τη θεμελιώδη.



Σχήμα 1.3 Περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου.

Παράδειγμα περιοδικού σήματος είναι το ημιτονοειδές σήμα

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta) \quad (1.2.1)$$

με περίοδο $T = 2\pi/\omega$. Το ω είναι γνωστό ως *κυκλική συχνότητα* και είναι $\omega = 2\pi f$, όπου f η *συχνότητα* του ημίτονου.

Ένα άλλο περιοδικό σήμα είναι το μιγαδικό σήμα

$$y(t) = Ae^{j\omega t} \quad (1.2.2)$$

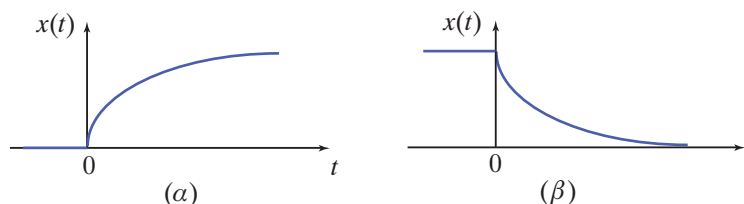
με την ίδια περίοδο $T = 2\pi/\omega$. Αν και τα μιγαδικά σήματα δεν έχουν φυσική υπόσταση, είναι “ελκυστικά” από άποψη μαθηματικού φορμαλισμού, επειδή απλουστεύουν την άλγεβρα των πράξεων. Για παράδειγμα, πολλαπλασιασμός δύο εκθετικών σημάτων αντιστοιχεί απλώς στην πρόσθεση των εκθετών τους. Πράγματι, αν $y_1(t) = Ae^{j\omega_1 t}$ και $y_2(t) = Ae^{j\omega_2 t}$, τότε $y_1(t) \cdot y_2(t) = A^2 e^{j(\omega_1 + \omega_2)t}$. Στο Παράρτημα Α υπάρχει μία σύντομη παρουσίαση των μιγαδικών αριθμών και των ιδιοτήτων τους.

1.2.2 Αιτιατά και Μη Αιτιατά Σήματα

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται *αιτιατό*, εάν είναι μηδενικό για αρνητικές τιμές του χρόνου t , δηλαδή

$$x(t) = 0 \quad \text{για} \quad t < 0 \quad (1.2.3)$$

Στην αντίθετη περίπτωση, το σήμα λέγεται *μη αιτιατό*. Στο Σχήμα 1.4 εικονίζονται ένα αιτιατό και ένα μη αιτιατό σήμα.



Σχήμα 1.4 Παράδειγμα (α) αιτιατού σήματος και (β) μη αιτιατού σήματος.

1.2.3 Σήματα Πεπερασμένα και Σήματα Πεπερασμένης και Άπειρης Διάρκειας

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται *πεπερασμένο* αν $|x(t)| < \infty$, για κάθε τιμή του χρόνου t . Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται *σήμα πεπερασμένης διάρκειας* αν

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq T_1 \\ 0, & t \geq T_2 \end{cases} \quad (1.2.4)$$

όπου T_1 και T_2 , ($T_1 < T_2$), είναι πεπερασμένοι αριθμοί. Αν T_1 γίνει ίσο με το μείον άπειρο ή και T_2 γίνει ίσο με το άπειρο, τότε το σήμα έχει *άπειρη διάρκεια*.

1.2.4 Άρτια και Περιττά Σήματα

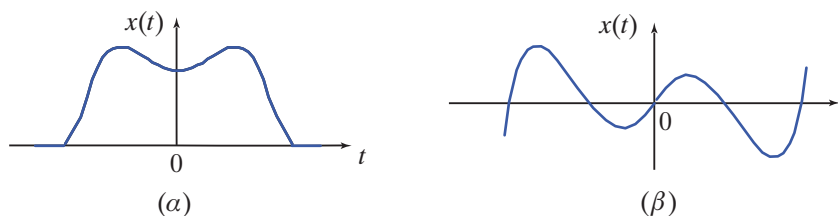
Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται *άρτιο* ή παρουσιάζει *άρτια συμμετρία* αν

$$x(-t) = x(t), \quad -\infty < t < +\infty \quad (1.2.5)$$

Αντίθετα, λέγεται *περιττό* ή παρουσιάζει *περιττή συμμετρία* αν

$$x(-t) = -x(t), \quad -\infty < t < +\infty \quad (1.2.6)$$

Το σήμα στο Σχήμα 1.5α παρουσιάζει *άρτια συμμετρία* και το σήμα στο Σχήμα 1.5β



Σχήμα 1.5 Σήματα συνεχούς χρόνου τα οποία παρουσιάζουν (α) *άρτια* συμμετρία και (β) *περιττή* συμμετρία.

περιττή συμμετρία. Κάθε σήμα μιγαδικό ή πραγματικό μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα ενός *άρτιου* (*even*), $x_e(t)$, και ενός *περιττού* (*odd*) σήματος, $x_o(t)$,

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (1.2.7)$$

όπου

$$x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x^*(-t)] \quad x_o(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x^*(-t)] \quad (1.2.8)$$

με \star δηλώνεται ο συζυγής μιγαδικός αριθμός.

Παράδειγμα 1.2.1

Δίνεται το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} -3t, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Να εκφράσετε το σήμα ως άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού σήματος.

Λύση Το άρτιο σήμα $x_e(t)$ είναι

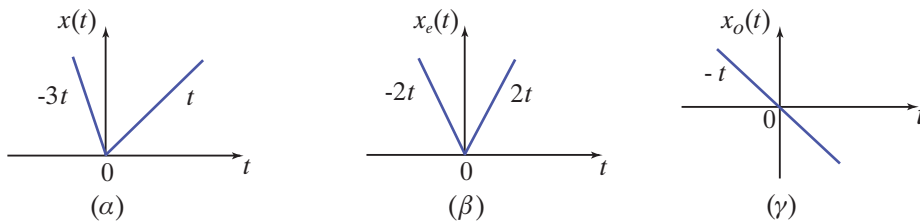
$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}[-3t - t], & t < 0 \\ \frac{1}{2}[t + 3t], & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -2t, & t < 0 \\ 2t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.2.10)$$

ενώ το περιττό σήμα $x_o(t)$ είναι

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}[-3t + t], & t < 0 \\ \frac{1}{2}[t - 3t], & t \geq 0 \end{cases} \implies x_o(t) = -t \quad (1.2.11)$$

Στο Σχήμα 1.6 εικονίζονται το σήμα $x(t)$, το $x_e(t)$ και το $x_o(t)$. Από τις γραφικές παραστάσεις των σημάτων αυτών φαίνεται ότι

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (1.2.12)$$



Σχήμα 1.6 Γραφικές παραστάσεις για τα σήματα (α) $x(t)$, (β) $x_e(t)$ και (γ) $x_o(t)$.

1.2.5 Ενεργειακά Σήματα - Σήματα Ισχύος

Για κάθε αναλογικό σήμα $x(t)$, η *ενέργεια* του σήματος \mathcal{E}_x , δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{E}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1.2.13)$$

όπου $|x(t)|$ είναι το μέτρο του σήματος. Για κάθε σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$, η *ενέργειά* του \mathcal{E}_x , δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.2.14)$$

όπου $|x(n)|$ είναι το μέτρο του σήματος και T_δ είναι η περίοδος δειγματοληψίας.

Ένα σήμα χαρακτηρίζεται ως *ενεργειακό σήμα* αν

$$0 < \mathcal{E}_x < \infty \quad (1.2.15)$$

Η μέση ισχύς \mathcal{P}_x , του αναλογικού σήματος $x(t)$, δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1.2.16)$$

Αν το σήμα είναι περιοδικό, τότε η μέση ισχύς του \mathcal{P}_x δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} |x(t)|^2 dt \quad (1.2.17)$$

Η μέση ισχύς \mathcal{P}_x , του σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$, δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{P}_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.2.18)$$

Αν το σήμα είναι περιοδικό, τότε η μέση ισχύς του \mathcal{P}_x δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x(n)|^2 \quad (1.2.19)$$

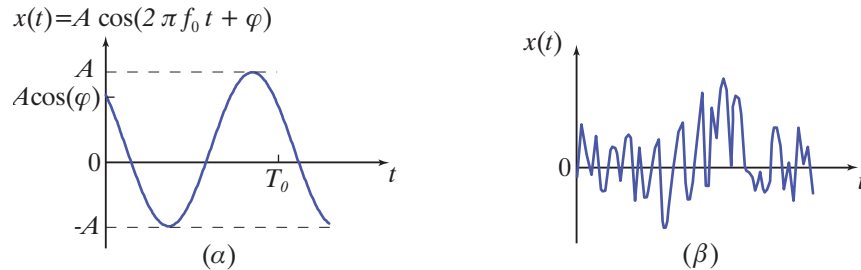
Ένα σήμα χαρακτηρίζεται ως *σήμα ισχύος* αν

$$0 < \mathcal{P}_x < \infty \quad (1.2.20)$$

Σημειώνεται ότι για πραγματικά σήματα $|x(t)|^2 = x^2(t)$ (βλέπε Παράρτημα Α).

1.2.6 Αιτιοκρατικά και Τυχαία - Στοχαστικά Σήματα

Όταν οι τιμές που παίρνει ένα σήμα σε κάθε χρονική στιγμή ορίζονται χωρίς αβεβαιότητα, το σήμα χαρακτηρίζεται ως *αιτιοκρατικό σήμα* ή *νομοτελειακό σήμα*. Ένα τέτοιο σήμα, για παράδειγμα, είναι το συνημίτονο (Σχήμα 1.7α). Στην πράξη, όμως, συναντάμε πολλά σήματα, όπως ο θερμικός θόρυβος, στα οποία η τιμή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή δεν μπορεί να προκαθορισθεί με βεβαιότητα πριν εμφανιστούν. Τα σήματα αυτά ονομάζονται *τυχαία* ή *στοχαστικά σήματα* (Σχήμα 1.7β). Για να επεξεργαστούμε τέτοιου είδους σήματα αναγκαστικά καταφεύγουμε στη θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής. Στο βιβλίο αυτό θα περιοριστούμε μόνο στα αιτιοκρατικά σήματα.



Σχήμα 1.7 Παράδειγμα (α) νομοτελειακού σήματος και (β) στοχαστικού σήματος.

1.3 ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΣ ΣΗΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΧΡΟΝΟ

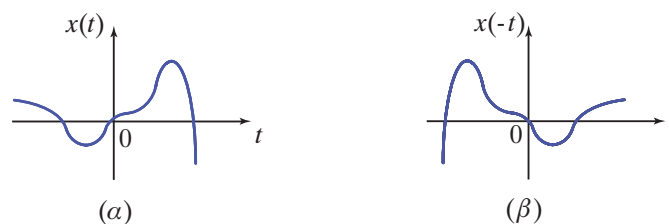
Πολλές φορές στην πράξη παρουσιάζονται σήματα τα οποία σχετίζονται μεταξύ τους με αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής, δηλαδή του χρόνου. Στη συνέχεια αναφέρονται οι βασικές μετατροπές σήματος ως προς το χρόνο.

1.3.1 Ανάκλαση

Ένα σήμα $y(t)$ αποτελεί την *ανάκλαση* του σήματος $x(t)$ ως προς $t = 0$ αν

$$y(t) = x(-t) \quad (1.3.1)$$

Η μετατροπή της ανάκλασης έχει ως αποτέλεσμα την εναλλαγή μεταξύ “παρελθόντος” και “μέλλοντος” ενός σήματος. Αν το σήμα $x(t)$ είναι η έξοδος ενός μαγνητοφώνου, τότε το σήμα $x(-t)$ είναι η έξοδος του ίδιου μαγνητοφώνου, όταν αυτό περιστρέφεται αντίθετα. Στο Σχήμα 1.8 έχει σχεδιαστεί ένα σήμα συνεχούς χρόνου και η ανάκλασή του ως προς $t = 0$.



Σχήμα 1.8 (α) Ένα σήμα συνεχούς χρόνου και (β) η ανάκλασή του ως προς $t = 0$.

1.3.2 Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου

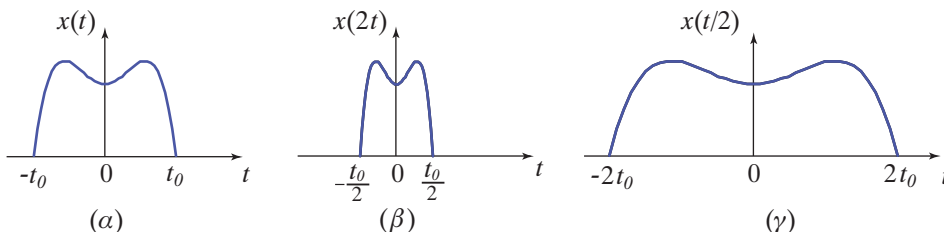
Το σήμα $x_1(t)$ αποτελεί μία *χρονική συστολή* του σήματος $x(t)$, αν

$$x_1(t) = x(at) \text{ με } a > 1 \quad (1.3.2)$$

Το σήμα $x_2(t)$ αποτελεί μία *χρονική διαστολή* του σήματος $x(t)$, αν

$$x_2(t) = x(at) \text{ με } 0 < a < 1 \quad (1.3.3)$$

Αν το σήμα $x(t)$ είναι η έξοδος ενός μαγνητοφώνου, τότε το σήμα $x(2t)$ είναι η έξοδος του ίδιου μαγνητοφώνου, όταν αυτό περιστρέφεται με διπλάσια ταχύτητα και $x(t/2)$ είναι η έξοδος, όταν αυτό περιστρέφεται με υποδιπλάσια ταχύτητα. Στο Σχήμα 1.9 έχουν σχεδιαστεί η χρονική συστολή και διαστολή ενός σήματος.



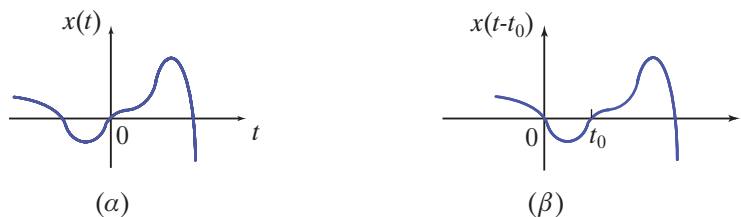
Σχήμα 1.9 (α) Σήμα, (β) η χρονική συστολή του και (γ) η χρονική διαστολή του.

1.3.3 Χρονική Μετατόπιση

Ένα σήμα $y(t)$ είναι μία *χρονικά μετατοπισμένη* κατά t_0 μορφή του σήματος $x(t)$ αν

$$y(t) = x(t - t_0) \quad (1.3.4)$$

Στο Σχήμα 1.10 έχει σχεδιαστεί ένα σήμα $x(t)$ και η χρονικά μετατοπισμένη μορφή του. Η χρονική μετατόπιση είναι μία πολύ συνηθισμένη μεταβολή στην πράξη. Σε περιπτώσεις μετάδοσης ενός σήματος έχουμε χρονικές καθυστερήσεις, οι οποίες εξαρτώνται από τις ιδιότητες του μέσου μετάδοσης. Για παράδειγμα, σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης είναι χρονικά καθυστερημένο σε σχέση με αυτό που εκπέμπεται από τον πομπό.



Σχήμα 1.10 (α) Το σήμα $x(t)$ και (β) η χρονικά μετατοπισμένη μορφή του.

Παράδειγμα 1.3.1

Δίνεται το σήμα

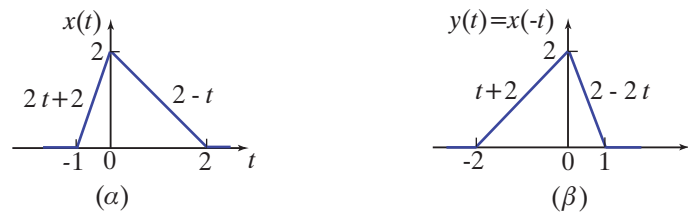
$$x(t) = \begin{cases} 2t + 2, & -1 \leq t < 0 \\ 2 - t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Να σχεδιάσετε το σήμα $y(t) = x(-t)$.

Λύση Το σήμα $x(t)$ εικονίζεται στο Σχήμα 1.11α. Το σήμα $y(t)$ αποτελεί την ανάκλαση του σήματος $x(t)$. Θα προσδιορίσουμε τη συνάρτηση του σήματος $y(t)$

$$\begin{aligned}
 y(t) = x(-t) &= \begin{cases} 2(-t) + 2, & -1 \leq -t < 0 \\ 2 - (-t), & 0 \leq -t < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -2t + 2, & 1 \geq t > 0 \\ 2 + t, & 0 \geq t > -2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} t + 2, & -2 \leq t < 0 \\ 2 - 2t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.3.6)
 \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση του σήματος $y(t) = x(-t)$ δίνεται στο Σχήμα 1.11β.



Σχήμα 1.11 Η γραφική παράσταση (α) του σήματος $x(t)$ και (β) του σήματος $y(t)$ στο Παράδειγμα 1.3.1

1.4 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΗΜΑΤΑ

Η ανάλυση ενός σήματος σε απλούστερα σήματα, των οποίων η συμπεριφορά είναι είτε γνωστή είτε ευκολότερο να μελετηθεί, αποτελεί βασική μεθοδολογία στην επεξεργασία σήματος. Στη συνέχεια θα ορίσουμε έναν αριθμό στοιχειωδών σημάτων που παίζουν έναν ιδιαίτερο ρόλο στη θεωρία σημάτων, ως εργαλεία για τη μελέτη πολυπλοκότερων σημάτων.

1.4.1 Μιγαδικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου

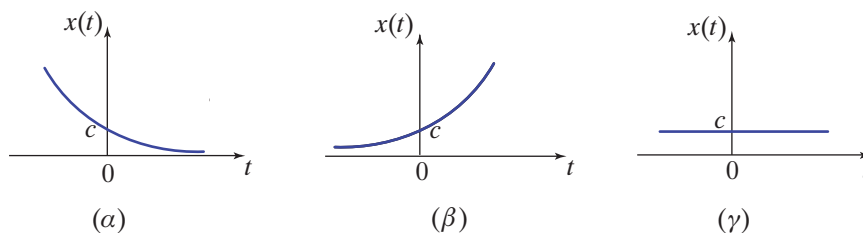
Το μιγαδικό εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου ορίζεται από τη σχέση

$$x(t) = c \cdot e^{st} \quad (1.4.1)$$

όπου $s = \sigma + j\omega$ έτσι $x(t) = c \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Είναι αντιστρέψιμο $(ce^{st})^{-1} = c^{-1} \cdot e^{-st}$.
2. Είναι διαφορίσιμο $\frac{d}{dt}(ce^{st}) = c \cdot se^{st}$.

Μία σημαντική κατηγορία εκθετικών σημάτων συνεχούς χρόνου προκύπτει αν το s είναι πραγματικός αριθμός, ($s = \sigma$) οπότε το $x(t) = ce^{\sigma t}$ ονομάζεται *πραγματικό εκθετικό σήμα*, και παρουσιάζει ασυμπτωτική συμπεριφορά ανάλογα με τις τιμές του σ (βλέπε Σχήμα 1.12).



Σχήμα 1.12 Το πραγματικό εκθετικό σήμα (α) για $\sigma < 0$, (β) για $\sigma > 0$ και για $\sigma = 0$.

Μία άλλη σημαντική κατηγορία εκθετικών σημάτων συνεχούς χρόνου προκύπτει αν το s είναι φανταστικός αριθμός ($s = j\omega_0$), δηλαδή, $x(t) = ce^{j\omega_0 t}$. Το σήμα $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ είναι περιοδικό με περίοδο T , όταν

- $\omega_0 = 0$, τότε $x(t) = 1$, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί περιοδικό για κάθε T .
- $\omega_0 \neq 0$, τότε η θεμελιώδης περίοδος T_0 , δηλαδή η μικρότερη τιμή του T , είναι $T_0 = 2\pi/|\omega_0|$. Πράγματι, από τον ορισμό ισχύει:

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0(t+T)} \Rightarrow e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T} \Rightarrow e^{j\omega_0 T} = 1 \Rightarrow \cos(\omega_0 T) + j \sin(\omega_0 T) = 1 \Rightarrow \omega_0 T = 2k\pi \Rightarrow T_0 = 2\pi/|\omega_0|$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση του Euler $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$.

Το γνωστό συνημιτονοειδές σήμα $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ (βλέπε Σχήμα 1.13) είναι, επίσης, περιοδικό με *θεμελιώδη αναλογική περίοδο* T_0 , *θεμελιώδη αναλογική κυκλική συχνότητα* ω_0 και *θεμελιώδη αναλογική συχνότητα* f_0 όπου $f_0 = 1/T_0$ και $\omega_0 = 2\pi f_0$.

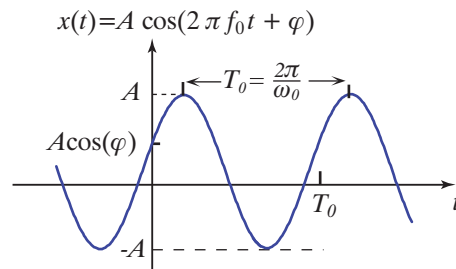
Το συνημιτονοειδές σήμα σχετίζεται άμεσα με το μιγαδικό εκθετικό σήμα. Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση του Euler, μπορούμε να εκφράσουμε το μιγαδικό εκθετικό σήμα με τη βοήθεια ημιτονοειδών σημάτων της ίδιας θεμελιώδους περιόδου από τη σχέση

$$e^{j(\omega_0 t + \varphi)} = \cos(\omega_0 t + \varphi) + j \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.4.2)$$

Μπορούμε, προφανώς, να γράψουμε

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) = \Re[e^{j(\omega_0 t + \varphi)}] \text{ και } \sin(\omega_0 t + \varphi) = \Im[e^{j(\omega_0 t + \varphi)}] \quad (1.4.3)$$

όπου $\Re[\cdot]$ συμβολίζει το πραγματικό και $\Im m[\cdot]$ το φανταστικό μέρος μιγαδικού αριθμού.



Σχήμα 1.13 Το συνημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου.

Η σχέση του Euler αντιστρέφεται και έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το ημίτονο ή το συνημίτονο με τη βοήθεια εκθετικών μιγαδικών όρων

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \text{ και } \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \quad (1.4.4)$$

Το μιγαδικό εκθετικό σήμα $e^{j\omega_0 t}$, όπως το (συν)ημιτονοειδές σήμα $\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$, είναι γνωστά ως *σήματα μιας συχνότητας* ή *σήματα απλής συχνότητας*. Όπως θα δούμε, τα σήματα αυτά χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τα χαρακτηριστικά πολλών φυσικών διαδικασιών.

Στο Σχήμα 1.14 δίνονται τρία παραδείγματα συνημιτονοειδών σημάτων με διαφορετική κυκλική συχνότητα και περίοδο. Παρατηρούμε ότι, όταν η κυκλική συχνότητα αυξάνει, $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, η θεμελιώδης περίοδος ελαττώνεται, $T_1 > T_2 > T_3$, και αυξάνει ο ρυθμός των ταλαντώσεων του σήματος, δηλαδή αυξάνει ο ρυθμός μεταβολής του σήματος. Ένα σήμα χαμηλής συχνότητας μεταβάλλεται με αργό ρυθμό σε αντίθεση με ένα σήμα υψηλής συχνότητας που μεταβάλλεται με γρήγορο ρυθμό.

Η γενική περίπτωση μιγαδικού εκθετικού σήματος συνεχούς χρόνου είναι

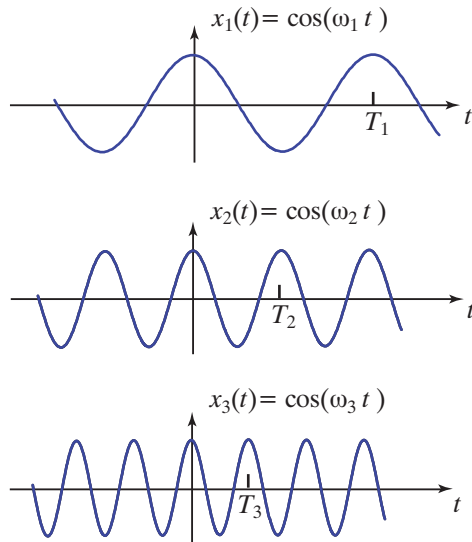
$$x(t) = c \cdot e^{st}, \quad \text{όπου } c = |c|e^{j\theta}, \quad \text{και } s = \sigma + j\omega_0 \quad (1.4.5)$$

έτσι

$$x(t) = |c| e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega_0)t} = |c| e^{\sigma t} e^{j(\omega_0 t + \theta)} \quad (1.4.6)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler έχουμε:

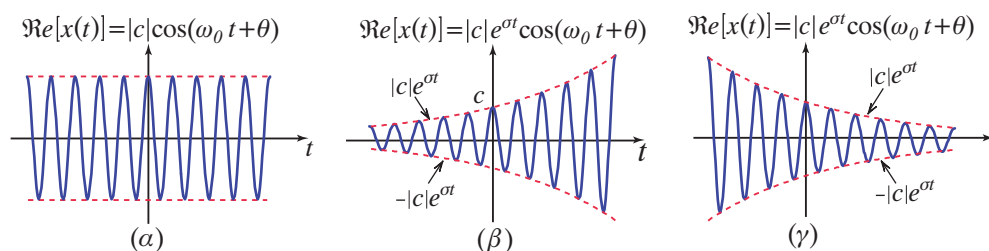
$$\begin{aligned} x(t) &= |c| e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t + \theta) + j|c| e^{\sigma t} \sin(\omega_0 t + \theta) \\ &= |c| e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t + \theta) + j|c| e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t + \theta - \pi/2) \end{aligned} \quad (1.4.7)$$



Σχήμα 1.14 Η συμπεριφορά του συνημιτόνου για διαφορετικές κυκλικές συχνότητες $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$.

- Για $\sigma = 0$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος (τμήμα) είναι (συν)ημιτονοειδή σήματα (Σχήμα 1.15α).
- Για $\sigma > 0$ τα αντίστοιχα (συν)ημιτονοειδή σήματα πολλαπλασιάζονται με έναν αυξανόμενο εκθετικό παράγοντα ($e^{\sigma t}$) (Σχήμα 1.15β).
- Για $\sigma < 0$ τα αντίστοιχα (συν)ημιτονοειδή σήματα πολλαπλασιάζονται με έναν εκθετικό παράγοντα ($e^{\sigma t}$) που φθίνει (Σχήμα 1.15γ). Τα σήματα αυτά είναι γνωστά ως *φθίνοντα ημιτονοειδή σήματα* και εμφανίζονται στις φθίνουσες αρμονικές μηχανικές ή ηλεκτρικές ταλαντώσεις όπως θα δούμε.

Στο Σχήμα 1.15 οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $\pm |c| e^{\sigma t}$ και αποτελούν την *περιβάλλουσα* της καμπύλης ταλάντωσης.



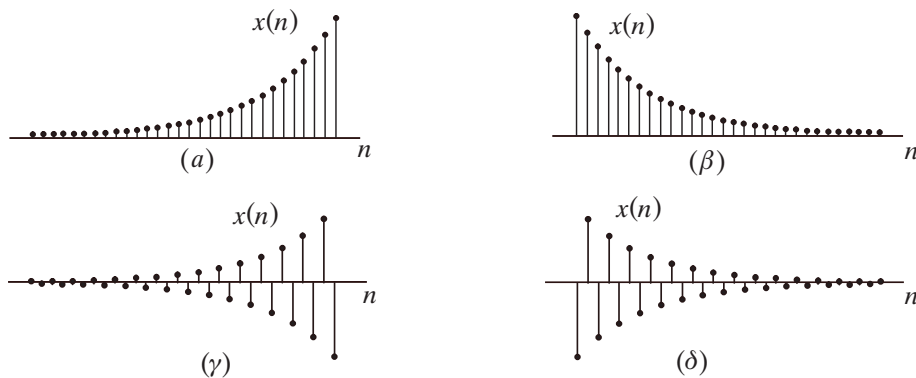
Σχήμα 1.15 Γραφική αναπαράσταση του πραγματικού μέρους του μιγαδικού εκθετικού σήματος (α) για $\sigma = 0$, (β) για $\sigma > 0$ και (γ) για $\sigma < 0$.

1.4.2 Μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου

Το μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου ορίζεται από τη σχέση

$$x(n) = c \cdot \alpha^n \quad (1.4.8)$$

όπου c και α είναι γενικά μιγαδικοί αριθμοί (εναλλακτικά ορίζεται από τη $x(n) = c \cdot e^{\beta n}$ όπου $\alpha = e^{\beta}$).



Σχήμα 1.16 Το πραγματικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου (α) για $\alpha > 1$, (β) για $0 < \alpha < 1$, (γ) για $\alpha < -1$ και (δ) για $-1 < \alpha < 0$.

1. Αν c και α είναι πραγματικοί αριθμοί, έχουμε τις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 1.16
2. Αν β είναι φανταστικός αριθμός ($\beta = j\Omega_0$) και $c = Ae^{j\phi}$, τότε $x(n) = Ae^{j\Omega_0 n}$. Το σήμα αυτό συνδέεται με το (συν)ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου $x(n) = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$ με τη βοήθεια της σχέσης του Euler. Πράγματι,

$$A \cos(\Omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\Omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\Omega_0 n}$$

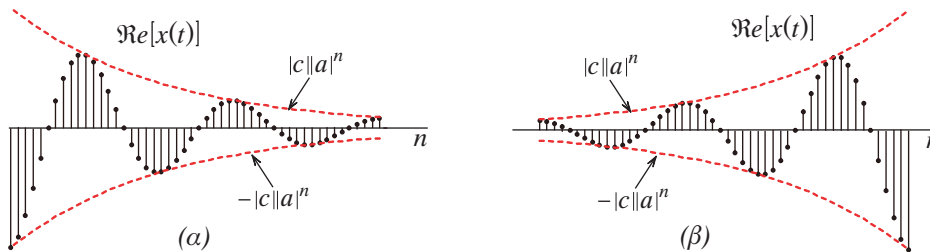
όπου Ω_0 είναι η θεμελιώδης ψηφιακή κυκλική συχνότητα.

3. Η γενική περίπτωση $c = |c| e^{j\theta}$ και $\alpha = |\alpha| e^{j\Omega_0}$ δίνει

$$\begin{aligned} x(n) &= |c| |\alpha| e^{j(\Omega_0 n + \theta)} \\ &= |c| |\alpha|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + j |c| |\alpha|^n \sin(\Omega_0 n + \theta) \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Στο Σχήμα 1.17 εικονίζονται το πραγματικό μέρος του μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου, για τις περιπτώσεις όπου $|a| < 1$ και $|a| > 1$.

Αν το n δεν έχει διαστάσεις, τότε η ψηφιακή κυκλική συχνότητα Ω_0 και η γωνία θ έχουν διαστάσεις γωνίας (rad).



Σχήμα 1.17 Το πραγματικό μέρος του μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου (α) για $|\alpha| < 1$, και (β) για $|\alpha| > 1$.

1.4.3 Ιδιότητες των εκθετικών σημάτων

1. Η πρώτη ιδιότητα αφορά την περιοδικότητα του μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου, ως προς τη συχνότητα. Τα μιγαδικά εκθετικά σήματα συνεχούς χρόνου, $e^{j\omega_1 t}$ και $e^{j\omega_2 t}$, αν $\omega_1 \neq \omega_2$ είναι διαφορετικά σήματα. Το μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου, με κυκλική συχνότητα $\Omega_0 + 2\pi$ είναι το ίδιο με το αντίστοιχο της κυκλικής συχνότητας Ω_0 . Πράγματι,

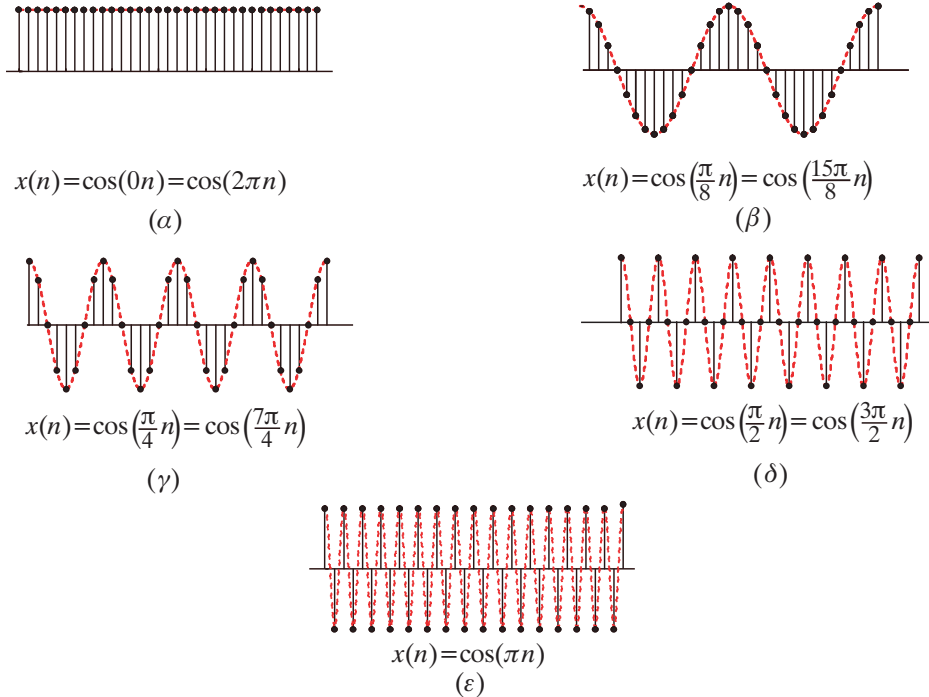
$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 n}$$

Έτσι, το εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου με κυκλική συχνότητα Ω_0 είναι το ίδιο με τα εκθετικά σήματα που έχουν κυκλικές συχνότητες $\Omega_0 + 2\pi$, $\Omega_0 + 4\pi$, ... και για το λόγο αυτό το μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου χρειάζεται να περιγραφεί στο διάστημα κυκλικών συχνοτήτων $0 \leq \Omega_0 < 2\pi$ ή $-\pi \leq \Omega_0 < \pi$.

Στο εκθετικό σήμα συνεχούς χρόνου παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η ω τόσο αυξάνει και ο ρυθμός των ταλαντώσεων. Στα εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου, όσο το Ω_0 αυξάνει από 0 μέχρι την τιμή π , έχουμε σήματα με ρυθμό ταλάντωσης που επίσης αυξάνεται (Σχήμα 1.18). Αν το Ω_0 αυξάνεται από την τιμή π μέχρι την τιμή 2π , έχουμε τώρα μείωση του ρυθμού ταλάντωσης. Έτσι, σήματα διακριτού χρόνου, τα οποία παρουσιάζουν μικρούς ρυθμούς μεταβολής (χαμηλές συχνότητες), αποτελούνται από συχνότητες που βρίσκονται στη περιοχή του 0 και σε κάθε άρτιο πολλαπλάσιο του π . Αντίθετα, σήματα διακριτού χρόνου, τα οποία παρουσιάζουν μεγάλους ρυθμούς μεταβολής (υψηλές συχνότητες), αποτελούνται από συχνότητες στην περιοχή του π και σε κάθε περιττό πολλαπλάσιο του π .

2. Η δεύτερη ιδιότητα αφορά την περιοδικότητα του μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου, ως προς τη μεταβλητή n . Αν το $e^{j\Omega_0 n}$ είναι περιοδικό με περίοδο $N > 0$, πρέπει

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} \implies e^{j\Omega_0 N} = 1 \implies \cos(\Omega_0 N) + j \sin(\Omega_0 N) = 1$$



Σχήμα 1.18 Ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου για συχνότητες (α) 0 και 2π , (β) $\pi/8$ και $15\pi/8$, (γ) $\pi/4$ και $7\pi/4$, (δ) $\pi/2$ και $3\pi/2$ και (ε) π .

δηλαδή, το $\Omega_0 N$ πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 2π έτσι

$$\Omega_0 N = 2\pi k \implies \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \quad (1.4.10)$$

Παρατηρούμε ότι το μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου δεν είναι γενικά περιοδικό, είναι περιοδικό αν $\Omega_0/2\pi$ είναι ρητός αριθμός.

Έχουμε, λοιπόν, για τα μιγαδικά εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου

- Αν $x(n)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο N , η θεμελιώδης συχνότητα είναι $2\pi/N$.
- Για να είναι περιοδικό πρέπει $\Omega_0/2\pi = k/N$. Αν οι k και N είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε η θεμελιώδης περίοδος είναι N .
- Η θεμελιώδης περίοδος μπορεί να γραφεί $N = k(2\pi/\Omega_0)$.
- Τα μιγαδικά εκθετικά σήματα συνεχούς χρόνου που έχουν κυκλικές συχνότητες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους $\omega_0 = 2\pi/T_0$ (αρμονικές), $e^{jk(2\pi/T_0)t}$, είναι δι-

αφορετικά, δηλαδή

$$e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \neq e^{jm\frac{2\pi}{T}t} \quad k \neq m$$

- Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τα διακριτού χρόνου, όπου λόγω της $e^{j(\Omega_0+2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n}$ τα σήματα $f_k(n) = e^{jk(2\pi/N)n}$, $k = 0, \pm 1, \dots$ είναι τα ίδια για τιμές του k που διαφέρουν πολλαπλάσιο του N . Πράγματι,

$$f_{k+N}(n) = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{j2\pi n} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = f_k(n)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν μόνο N διαφορετικά μιγαδικά εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου των οποίων οι συχνότητες είναι πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Τα σήματα αυτά ορίζουν το σύνολο $A = \{f_0(n), f_1(n), f_2(n), \dots, f_{N-1}(n)\}$. Αν $f_k(n)$ δεν ανήκει στο A , τότε είναι ίδιο με ένα από αυτά, δηλαδή $f_N(n) = f_0(n)$, $f_{-1}(n) = f_{N-1}(n)$ και ούτω καθεξής.

Έστω $x(n)$ η ακολουθία διακριτού χρόνου, η οποία προέρχεται από τη δειγματοληψία του εκθετικού σήματος $e^{j\omega_0 t}$ σε σημεία τα οποία ισαπέχουν κατά χρονικά διαστήματα ίσα με T_δ

$$x(n) = e^{j\omega_0 n T_\delta} = e^{j(\omega_0 T_\delta)n}$$

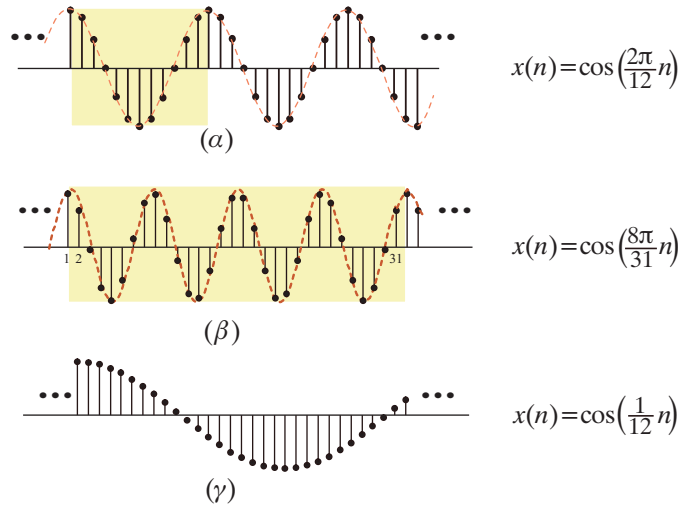
Αν Ω_0 είναι η ψηφιακή κυκλική συχνότητα τότε $x(n) = e^{j\Omega_0 n}$. Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις του $x(n)$ έχουμε τη σχέση μεταξύ αναλογικής και ψηφιακής κυκλικής συχνότητας

$$\Omega_0 = \omega_0 T_\delta \quad (1.4.11)$$

Το αναλογικό σήμα $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ είναι για κάθε τιμή της ω_0 περιοδικό. Το σήμα διακριτού χρόνου $x(n) = \cos(\Omega_0 n)$ είναι περιοδικό μόνο όταν $\Omega_0/2\pi = k/N$ ή $\omega_0 T_\delta/2\pi = k/N$. Παρατηρούμε ότι το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$, το οποίο προκύπτει από το περιοδικό αναλογικό σήμα $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, είναι περιοδικό αν ο λόγος της περιόδου δειγματοληψίας T_δ προς την περίοδο T_0 του αναλογικού σήματος είναι ρητός αριθμός, δηλαδή

$$\frac{T_\delta}{T_0} = \frac{k}{N} \quad (1.4.12)$$

Πράγματι, αν δειγματοληψήσουμε το περιοδικό αναλογικό σήμα $x(t) = \cos(2\pi t)$ με περίοδο $T_\delta = 1/12$, προκύπτει το σήμα διακριτού χρόνου $x(n) = \cos(2\pi n/12)$, (βλέπε Σχήμα 1.19α), το οποίο είναι περιοδικό, αφού ικανοποιείται η συνθήκη (1.4.12). Παρατηρούμε ότι η περίοδος του αναλογικού σήματος, γραμμοσκιασμένη περιοχή, συμπίπτει με την περίοδο του σήματος διακριτού χρόνου. Σε ανάλογα συμπεράσματα καταλήγουμε όταν η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T_\delta = 4/31$ (βλέπε Σχήμα 1.19β). Στην περίπτωση αυτή η περίοδος του σήματος διακριτού χρόνου είναι ίση με τέσσερις περιόδους του αναλογικού σήματος. Αντίθετα, αν η περίοδος είναι $T_\delta = 1/12\pi$, το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$, σε αντίθεση με το $x(t)$, δεν είναι περιοδικό (βλέπε Σχήμα 1.19γ).



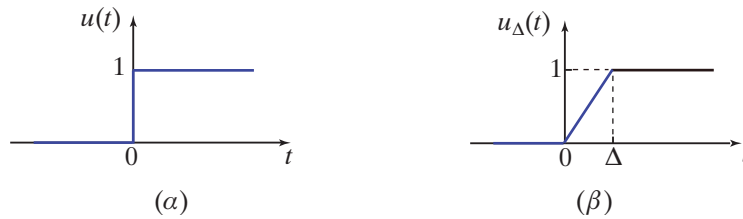
Σχήμα 1.19 Ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου, (α) και (β) περιοδικά (γ) μη περιοδικό.

1.4.4 Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος συνεχούς χρόνου

Μία ειδική μορφή σήματος είναι η *συνάρτηση μοναδιαίου βήματος* συνεχούς χρόνου, η οποία ορίζεται ως

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1.4.13)$$

και έχει τη μορφή του Σχήματος 1.20α.



Σχήμα 1.20 (α) Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος (συνεχούς χρόνου) και (β) η συνεχής προσέγγιση της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος.

Η συνάρτηση $u(t)$ είναι ασυνεχής και δεν ορίζεται στο $t = 0$. Ένας άλλος τρόπος να δούμε τη συνάρτηση $u(t)$ είναι ως όριο της

$$u_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta}t, & 0 < t < \Delta \\ 1, & t \geq \Delta \end{cases} \quad (1.4.14)$$

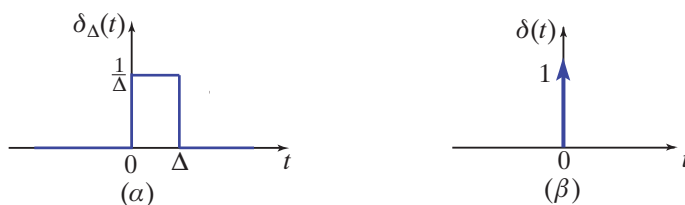
Η συνάρτηση $u_{\Delta}(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 1.20β. Παρατηρούμε ότι $u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\Delta}(t)$.

1.4.5 Η κρουστική συνάρτηση συνεχούς χρόνου ή συνάρτηση δέλτα

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παράγωγος της συνάρτησης $u_{\Delta}(t)$

$$\delta_{\Delta}(t) \equiv \frac{du_{\Delta}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \\ 0, & t > \Delta \end{cases} \quad (1.4.15)$$

η οποία δεν ορίζεται στα σημεία ασυνέχειας 0 και Δ και φαίνεται στο Σχήμα 1.21α.



Σχήμα 1.21 (α) Η παράγωγος της συνάρτησης $u_{\Delta}(t)$ και (β) η συνάρτηση δέλτα $\delta(t)$.

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό της $\delta_{\Delta}(t)$ είναι ίσο με τη μονάδα για κάθε τιμή της Δ και ότι η συνάρτηση $\delta_{\Delta}(t)$ είναι ίση με το μηδέν έξω από το διάστημα $0 \leq t \leq \Delta$. Όταν $\Delta \rightarrow 0$ η χρονική διάρκεια του παλμού ελαττώνεται, και αυξάνεται το πλάτος του, ενώ το εμβαδό παραμένει σταθερό και ίσο με τη μονάδα.

Στο όριο $\Delta \rightarrow 0$ το εύρος του παλμού τείνει στο μηδέν και το πλάτος τείνει στο άπειρο. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\delta(t)$ ως

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) \quad (1.4.16)$$

Η $\delta(t)$ ονομάζεται *συνάρτηση δέλτα* ή *συνάρτηση dirac* ή *κρουστική συνάρτηση*.

Παρατηρούμε ότι η κρουστική συνάρτηση είναι ίση με την παράγωγο της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος.

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (1.4.17)$$

Ένας γενικότερος ορισμός της $\delta(t)$ είναι

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (1.4.18)$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \quad (1.4.19)$$

όπου $x(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο t_0 . Η (1.4.19) αναφέρεται και ως *ιδιότητα ολίσθησης* της κρουστικής συνάρτησης. Από την (1.4.19) παρατηρούμε ότι, αν $x(t) = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.4.20)$$

Η συνάρτηση $\delta(t)$ γραφικά παριστάνεται όπως στο Σχήμα 1.21β. Το μέτρο του διανύσματος, το οποίο χρησιμοποιούμε για να αποδώσουμε τη συνάρτηση δέλτα, επιλέγεται ώστε να είναι ίσο με το εμβαδό της, δηλαδή ίσο με 1.

Μία βασική ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα είναι

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

Μία άλλη χρήσιμη ιδιότητα της $\delta(t)$ είναι η ιδιότητα της αλλαγής κλίμακας χρόνου

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \delta(t), \quad \alpha > 0 \quad (1.4.21)$$

Παράδειγμα 1.4.1

Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά ή όχι. Αν το σήμα είναι περιοδικό, να υπολογιστεί η θεμελιώδης συχνότητά του.

1. $x(t) = 3 \cos(5t + \pi/4)$
2. $x(t) = 2e^{j(\pi t - 1)}$
3. $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-2n)^2}$
4. $x(t) = (\cos(2\pi t))u(t)$

Λύση

1. Εξετάζουμε αν υπάρχει θετικός αριθμός T για τον οποίο $x(t+T) = x(t)$ για κάθε τιμή του χρόνου t . Έτσι έχουμε

$$x(t+T) = x(t) \implies 3 \cos(5t + 5T + \pi/4) = 3 \cos(5t + \pi/4) \quad (1.4.22)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι αν $\cos \theta = \cos \phi$, τότε $\varphi \pm \theta = 2k\pi$, και επομένως προκύπτει ότι:

$$(5t + 5T + \pi/4) + (5t + \pi/4) = 2k\pi \implies T = (2k\pi)/5 - 2t - \pi/10 \quad (1.4.23)$$

ή

$$(5t + 5T + \pi/4) - (5t + \pi/4) = 2k\pi \implies T = (2k\pi)/5 \quad (1.4.24)$$

Από την (1.4.23) δεν προκύπτει σταθερή τιμή για την περίοδο. Από την (1.4.24) παρατηρούμε ότι το σήμα είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $T_0 = 2\pi/5$ και θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 5/2\pi$.

2. Με όμοιο τρόπο έχουμε

$$x(t+T) = x(t) \Rightarrow 2e^{j(\pi t + \pi T - 1)} = 2e^{j(\pi t - 1)} \Rightarrow e^{j\pi T} = 1$$

$$\cos(\pi T) + j \sin(\pi T) = 1 \Rightarrow \pi T = 2k\pi \Rightarrow T = 2k$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $T_0 = 2$ και θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 1/2$.

3. Η χρονικά μετατοπισμένη κατά T μορφή του σήματος

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-2n)^2} \quad (1.4.25)$$

είναι $x(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t+T-2n)^2}$ θέτοντας $T = 2k$ έχουμε $x(t+2k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-[t-2(n-k)]^2}$ με αλλαγή μεταβλητής $n-k = m$ το σήμα αποκτά τη μορφή

$$x(t+2k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(t-2m)^2} \quad (1.4.26)$$

Συγκρίνοντας τις (1.4.25) και (1.4.26) παρατηρούμε ότι $x(t+2k) = x(t)$, άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T = 2k$. Η θεμελιώδης περίοδος του σήματος είναι $T_0 = 2$ και η θεμελιώδης συχνότητα $f_0 = 1/2$.

4. Παρατηρούμε ότι το σήμα

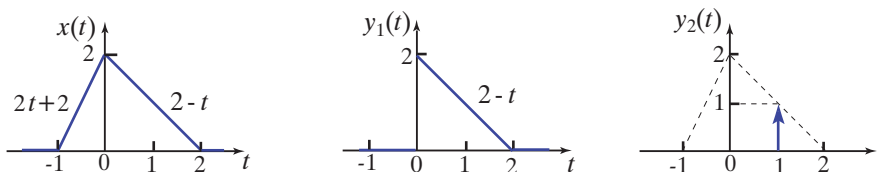
$$x(t) = (\cos(2\pi t))u(t) = \begin{cases} \cos(2\pi t), & t > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.4.27)$$

δεν είναι περιοδικό.

Παράδειγμα 1.4.2

Αν $x(t)$ είναι το σήμα που δίνεται στο Παράδειγμα 1.3.1 (1.3.5), να υπολογιστούν τα

1. $y_1(t) = x(t)u(t)$
2. $y_2(t) = x(t)\delta(t-1)$



Σχήμα 1.22 Γραφικές παραστάσεις για τα σήματα $x(t)$, $y_1(t)$ και $y_2(t)$.

Λύση

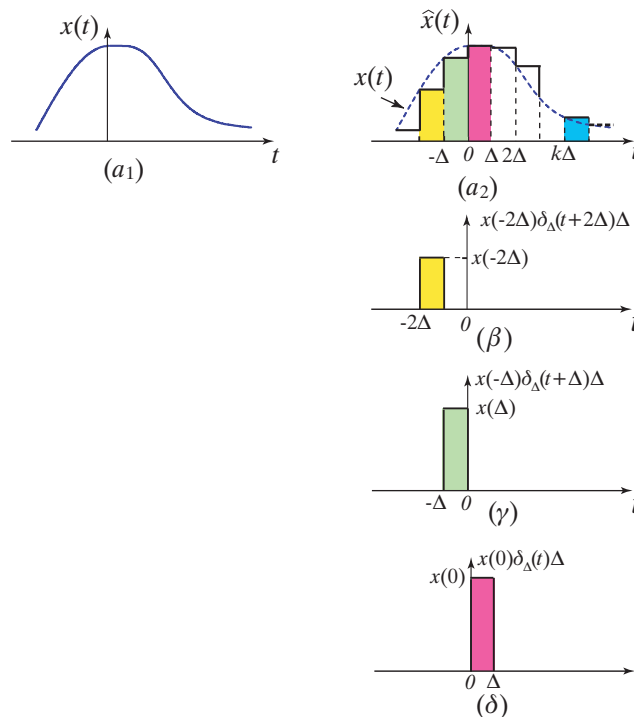
1. Με τη βοήθεια της σχέσης ορισμού της συνάρτησης $u(t)$ παρατηρούμε ότι το σήμα $y_1(t)$ είναι το αιτιατό τμήμα του σήματος $x(t)$, δηλαδή, $y_1(t) = \begin{cases} 2-t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$.

2. Το σήμα $y_2(t)$ είναι η συνάρτηση δέλτα χρονικά μετατοπισμένη κατά 1 με πλάτος $x(1) = 1$, δηλαδή, $y_2(t) = x(1)\delta(t - 1)$.

Στο Σχήμα 1.22 εικονίζονται τα σήματα $x(t)$, $y_1(t)$ και $y_2(t)$.

Παράδειγμα 1.4.3

Να αναπτυχθεί ένα τυχαίο αναλογικό σήμα σε άθροισμα από ολισθήσεις της κρουστικής συνάρτησης.



Σχήμα 1.23 Ανάπτυγμα σήματος συνεχούς χρόνου σε ολισθήσεις της κρουστικής συνάρτησης.

Λύση Έστω το τυχαίο αναλογικό σήμα $x(t)$ του Σχήματος 1.23a₁. Θεωρούμε το κλιμακωτής μορφής σήμα $\hat{x}(t)$, του Σχήματος 1.23a₂, το οποίο προσεγγίζει το σήμα $x(t)$.

Υπενθυμίζουμε ότι η $\Delta \cdot \delta_{\Delta}(t - t_0)$ είναι ένας παλμός με αρχή τη χρονική στιγμή t_0 , με διάρκεια Δ και πλάτος ίσο με ένα. Ο παλμός, του Σχήματος 1.23β, με αρχή τη χρονική στιγμή $t = -2\Delta$ και ύψος ίσο με την τιμή του σήματος την ίδια χρονική στιγμή, $x(-2\Delta)$ εκφράζεται από την

$$x(-2\Delta)\delta_{\Delta}(t + 2\Delta)\Delta \quad (1.4.28)$$

Με ανάλογο τρόπο εκφράζονται και οι άλλοι παλμοί, οι οποίοι προσδιορίζονται από το

σήμα $\hat{x}(t)$ (βλέπε Σχήμα 1.23γ και δ). Έτσι το σήμα $\hat{x}(t)$ εκφράζεται από την εξίσωση

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta \quad (1.4.29)$$

Αν $\Delta \rightarrow 0$, το σήμα $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$, έτσι

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta \quad (1.4.30)$$

Όταν $\Delta \rightarrow 0$, το $k\Delta$ γίνεται η συνεχής μεταβλητή τ , το παραπάνω άθροισμα γράφεται ως ολοκλήρωμα και επειδή $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$, το σήμα $x(t)$ δίνεται από την εξίσωση

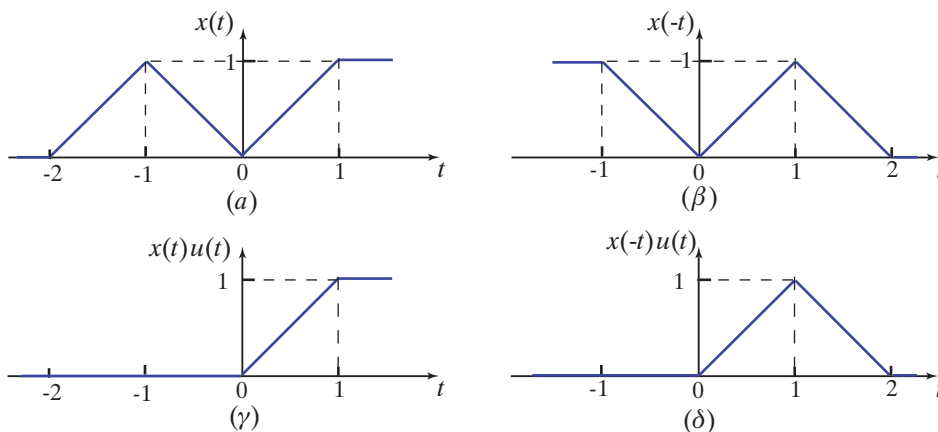
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau - t) d\tau \quad (1.4.31)$$

Το παράδειγμα αυτό αναδεικνύει μια φυσική προέκταση της (1.4.19) και θα μας φανεί χρήσιμη στο επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 1.4.4

Δίνεται το σήμα του Σχήματος 1.24α. Να σχεδιάσετε τα σήματα $x^+(t) = x(t)u(t)$ και $x^-(t) = x(-t)u(t)$. Παρατηρήστε ότι τα $x^+(t)$ και $x^-(t)$ είναι αιτιατά σήματα και το μη αιτιατό σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα των δύο αυτών σημάτων με τη βοήθεια της σχέσης

$$x(t) = x^+(t) + x^-(t) \quad (1.4.32)$$



Σχήμα 1.24 Τα σήματα του Παραδείγματος 1.4.4.

Λύση Στο Σχήμα 1.24α εικονίζεται το σήμα $x(t)$, και στο Σχήμα 1.24β η ανάκλασή του $x(-t)$. Το αιτιατό τμήμα του σήματος $x(t)$, $x^+(t) = x(t)u(t)$ εικονίζεται στο Σχήμα 1.24γ και το αιτιατό τμήμα του σήματος $x(-t)$, $x^-(t) = x(-t)u(t)$ εικονίζεται στο Σχήμα 1.24δ.

Παρατηρούμε από τα διαγράμματα ότι το σήμα $x(t)$ είναι ίσο με το άθροισμα του σήματος $x^+(t)$ και της ανάκλασης $x^-(-t)$ του σήματος $x^-(t)$, δηλαδή, είναι

$$x(t) = x^+(t) + x^-(-t)$$

1.4.6 Ο ορθογώνιος παλμός

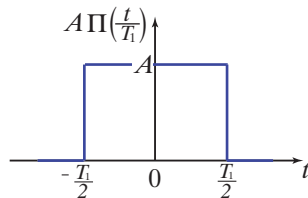
Ο ορθογώνιος παλμός μοναδιαίου πλάτους με μοναδιαία χρονική διάρκεια συμβολίζεται ως $\Pi(t)$ και δίνεται από το μαθηματικό τύπο

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.4.33)$$

Ο ορθογώνιος παλμός εκφράζεται ως διαφορά δύο κατάλληλα ολισθημένων βηματικών συναρτήσεων. Πράγματι,

$$\Pi(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) \quad (1.4.34)$$

Στο Σχήμα 1.25 υπάρχει η γραφική παράσταση του $A\Pi(t/T_1)$, δηλαδή, ενός ορθογώνιου παλμού χρονικής διάρκειας T_1 και πλάτους A .



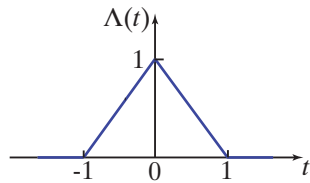
Σχήμα 1.25 Ο ορθογώνιος παλμός χρονικής διάρκειας T_1 και πλάτους A .

1.4.7 Ο τριγωνικός παλμός

Ο τριγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους συμβολίζεται ως $\Lambda(t)$ και δίνεται από το μαθηματικό τύπο

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t + 1, & -1 \leq t < 0 \\ -t + 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.4.35)$$

Στο Σχήμα 1.26 υπάρχει η γραφική παράσταση τριγωνικού παλμού.



Σχήμα 1.26 Ο τριγωνικός παλμός $\Lambda(t)$.

1.4.8 Η συνάρτηση κλίσης

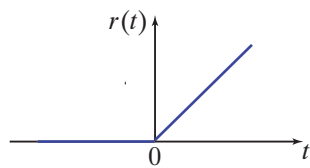
Η *συνάρτηση κλίσης* συμβολίζεται ως $r(t)$ και δίνεται από το μαθηματικό τύπο

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.4.36)$$

Η συνάρτηση κλίσης εκφράζεται και

$$r(t) = tu(t) \quad (1.4.37)$$

Στο Σχήμα 1.27 υπάρχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης κλίσης.



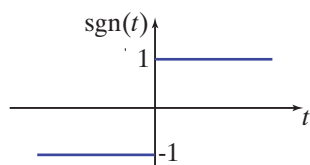
Σχήμα 1.27 Η συνάρτηση κλίσης $r(t)$.

1.4.9 Η συνάρτηση προσήμου

Η *συνάρτηση προσήμου* συμβολίζεται ως $\text{sgn}(t)$ και δίνεται από το μαθηματικό τύπο

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \quad (1.4.38)$$

Στο Σχήμα 1.28 υπάρχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης προσήμου.



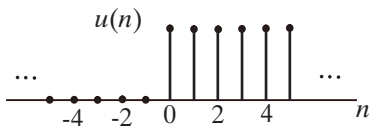
Σχήμα 1.28 Η συνάρτηση προσήμου $\text{sgn}(t)$.

1.4.10 Μοναδιαία βηματική ακολουθία - Μοναδιαίο βήμα διακριτού χρόνου

Η μοναδιαία βηματική ακολουθία ή το μοναδιαίο βήμα διακριτού χρόνου λαμβάνεται από τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος, αν αντικαταστήσουμε το t με το n και υπολογίσουμε αυτό μόνο για ακέραιες τιμές του χρόνου. Έτσι, έχουμε

$$u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \quad (1.4.39)$$

Στο Σχήμα 1.29 έχουμε τη γραφική παράσταση του μοναδιαίου βήματος διακριτού χρόνου.



Σχήμα 1.29 Η μοναδιαία βηματική ακολουθία.

1.4.11 Το μοναδιαίο δείγμα - Κρουστική ακολουθία

Το μοναδιαίο δείγμα ή η κρουστική ακολουθία ορίζεται με τη σχέση

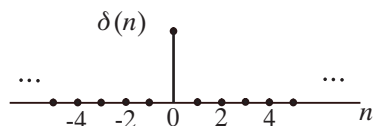
$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.4.40)$$

Στο Σχήμα 1.30 έχουμε τη γραφική παράσταση της κρουστικής ακολουθίας. Η μοναδιαία βηματική ακολουθία συνδέεται με τη κρουστική ακολουθία με τη σχέση

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k) \quad (1.4.41)$$

ενώ η κρουστική ακολουθία συνδέεται με τη μοναδιαία βηματική ακολουθία με τη σχέση

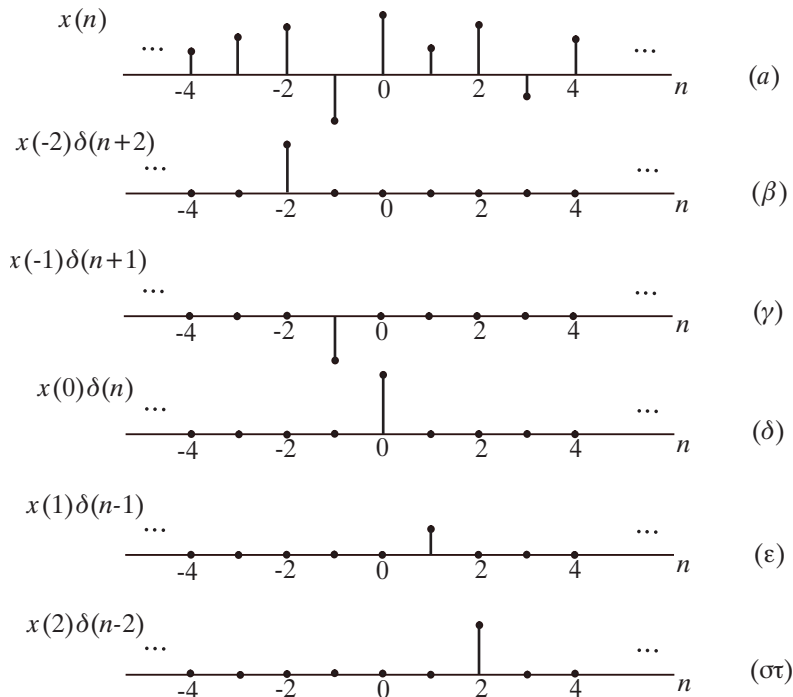
$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1) \quad (1.4.42)$$



Σχήμα 1.30 Η κρουστική ακολουθία.

Παράδειγμα 1.4.5

Να αναπτυχθεί το σήμα διακριτού χρόνου $x(n]$, του Σχήματος 1.31α, σε άθροισμα από ολισθήσεις μοναδιαίου δείγματος.



Σχήμα 1.31 Ανάπτυγμα σήματος διακριτού χρόνου σε ολισθήσεις μοναδιαίου δείγματος.

Λύση Υπενθυμίζουμε ότι $\delta(n - n_0)$ είναι η ακολουθία της οποίας όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά, εκτός από το στοιχείο για $n = n_0$, το οποίο είναι ίσο με ένα. Η ακολουθία του Σχήματος 1.31β, της οποίας όλα τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν, εκτός από το στοιχείο τη χρονική στιγμή $n = -2$, το οποίο είναι ίσο με $x(-2)$, εκφράζεται από τη

$$x(-2)\delta(n + 2)$$

Με ανάλογο τρόπο εκφράζονται και οι ακολουθίες στα Σχήματα 1.31γ έως στ. Έτσι το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ του Σχήματος 1.31α, μπορεί να εκφραστεί ως

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) \quad (1.4.43)$$

Σύνοψη Κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό δόθηκε ο ορισμός της έννοιας “σήμα” και η μαθηματική της έκφραση. Κατατάξαμε τα σήματα σε τρεις κατηγορίες, τα αναλογικά σήματα, τα σήματα διακριτού χρόνου και τα ψηφιακά σήματα. Περιγράψαμε τις βασικές ιδιότητες που έχουν τα αναλογικά και ψηφιακά σήματα, που αποτελούν το αντικείμενο αυτού του βιβλίου, και αναφέραμε τις μεταβολές που υφίσταται ένα σήμα ως προς το χρόνο.

Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό περιγράψαμε το μιγαδικό εκθετικό σήμα και το ημιτονοειδές σήμα. Αναφέραμε δύο σημαντικές συναρτήσεις, τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος και τη συνάρτηση δέλτα. Τέλος, αναφέραμε τη συνάρτηση του ορθογώνιου παλμού, την τριγωνική συνάρτηση, τη συνάρτηση κλίσης και τη συνάρτηση προσήμου.

1.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.1 Ποιά από τα σήματα είναι περιοδικά;

1. $x_1(t) = \sin(10\pi t)$
2. $x_2(t) = \sin(20\pi t)$
3. $x_3(t) = \sin(31t)$
4. $x_4(t) = x_1(t) + x_2(t)$
5. $x_5(t) = x_1(t) + x_3(t)$

1.2 Δίνεται το σήμα,

$$x(t) = \begin{cases} 2t + 2, & -1 \leq t < 0 \\ 2 - t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να σχεδιάσετε τα σήματα

1. $y_1(t) = x(t + 1)$
2. $y_2(t) = x(2t)$
3. $y_3(t) = x(t/2)$
4. $y_4(t) = x(1 - t)$
5. $y_5(t) = x(2t - 1)$

1.3 Να σχεδιαστούν τα σήματα

1. $x_1(t) = \Pi(2t + 6)$
2. $x_2(t) = \Lambda(2t - 1)$
3. $x_3(t) = r(-0, 5t + 2)$
4. $x_4(t) = \text{sinc}(2(t - 3))$

1.4 Δίνεται το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ -t + 2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να σχεδιαστούν τα σήματα

1. $y_1(t) = x_o(t)u(t)$

2. $y_2(t) = x_e(t)u(t)$

όπου $x_o(t)$ είναι το περιττό μέρος του σήματος $x(t)$ και $x_e(t)$ είναι το άρτιο μέρος του.

1.5 Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά ή όχι. Αν το σήμα είναι περιοδικό, να υπολογιστεί η θεμελιώδης συχνότητά του.

1. $x_1(t) = 2 \cos(3t + \pi/4)$

2. $x_2(t) = e^{j(\pi t - 1)}$

3. $x_3(n) = \cos(8\pi n/7 + 2)$

4. $x_4(n) = e^{j(n/8 - \pi)}$

5. $x_5(n) = \sin^2(t - \pi/6)$

6. $x_6(n) = \cos(\pi n^2/8)$

7. $x_7(n) = \cos(n/4) \cos(\pi n/4)$

8. $x_8(n) = 2 \cos(\pi n/4) + \sin(\pi n/8) - 2 \cos(\pi n/2 - \pi/6)$

9. $x_9(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3n)^2}$

1.6 Να εξεταστεί αν τα σήματα είναι ενεργειακά σήματα ή σήματα ισχύος και να υπολογιστεί η ενέργειά τους ή η ισχύς τους.

1. $x_1(t) = c \cdot e^{-\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0$

2. $x_2(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$

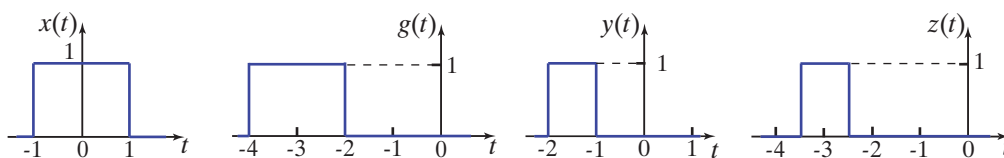
3. $x_3(t) = A e^{j(\omega_0 t + \theta)}$

1.7 Να σχεδιασθούν τα σήματα.

1. $x(t) = 2\delta_{\Delta}(t) + 3\delta_{\Delta}(t - 1) + 5\delta_{\Delta}(t - 2) \quad \Delta = 1$

2. $y(t) = u(t + 2) - u(t - 1)$

1.8 Δίνεται το σήμα $x(t)$ του Σχήματος 1.32.

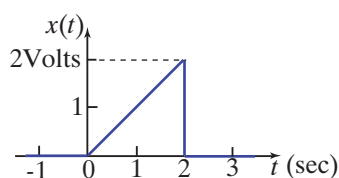


Σχήμα 1.32 Τα σήματα του Προβλήματος 1.8.

1. Να εκφράσετε το σήμα $x(t)$ με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης $u(t)$.
2. Να εκφράσετε τα σήματα $g(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ του Σχήματος 1.32 με τη βοήθεια του σήματος $x(t)$.

1.9 Χρησιμοποιώντας τις μετατροπές σήματος ως προς το χρόνο, να γίνει η γραφική παράσταση σε συνάρτηση με το χρόνο του σήματος $x(t) = \Lambda(2t - 3)$ όπου $\Lambda(t)$ είναι ο τριγωνικός παλμός

1.10 Δίνεται το σήμα $x(t)$ του Σχήματος 1.33.



Σχήμα 1.33 Το σήμα του Προβλήματος 1.10.

1. Να εκφραστεί το σήμα $x(t)$ με τη βοήθεια της συνάρτησης κλίσης και του ορθογώνιου παλμού.
2. Να βρεθεί η ενέργεια του σήματος.

1.11 Να βρεθεί η παράγωγος των σημάτων

1. του ορθογώνιου παλμού $\Pi(t)$
2. του τριγωνικού παλμού $\Lambda(t)$
3. της συνάρτησης προσήμου $\text{sgn}(t)$.

και να γίνει η γραφική παράσταση των αντίστοιχων παραγώγων.

Βιβλιογραφία

- 1.1 Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, Λ. Κοφίδης, “Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων”, *Τυπωθήτω - Γιώργος Δαρδανός*, Αθήνα 2003.
- 1.2 Α. Μάργαρης, “Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου”, *Εκδόσεις Τζιόλα* 2012.
- 1.3 S. Haykin, B. Veen, “Signal and Systems”, *John & Wiley Sons, Inc.* 2003
- 1.4 A. V. Oppenheim, R. S. Willsky, I. T. Young, “Signal and Systems”, *Prentice - Hall Inc.*, N. Y., 1983.
- 1.5 R. E. Siemer, W. H. Tranter, D. R. Fannin, “Signals & Systems Continuous and Discrete”, *Prentice Hall*, 1998.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

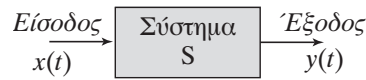
Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να δώσει μία γενική εικόνα του τι είναι σύστημα, να κατατάξει τα συστήματα ανάλογα με τον αριθμό και το είδος των επιτρεπόμενων εισόδων και εξόδων και να περιγράψει τις βασικές ιδιότητές τους. Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγραφεί η μέθοδος προσδιορισμού της εξόδου ενός συστήματος, όταν γνωρίζουμε την είσοδό του, καθώς και την έξοδό του όταν η είσοδός του διεγείρεται από τη συνάρτηση δέλτα. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι σε μία ειδική κατηγορία συστημάτων, όταν η είσοδος είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα κυκλικής συχνότητας ω_0 , τότε και η αντίστοιχη έξοδος είναι, επίσης, ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα με την ίδια κυκλική συχνότητα, το πλάτος και η φάση του οποίου έχουν υποστεί μία αλλαγή που προκαλεί το σύστημα. Τέλος, θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω σε απλά ηλεκτρικά και μηχανικά συστήματα.

Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με βασικούς ορισμούς και έννοιες που αφορούν στα σήματα. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα συστήματα. Το περιεχόμενο της έννοιας του συστήματος είναι γενικό. Συχνά χρησιμοποιούμε τη λέξη “σύστημα” για να αναφερθούμε σε ένα “σύνολο δομών” και “λειτουργιών”. Εμείς όμως θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας σε μία ειδική σημασία της έννοιας του συστήματος, αυτήν που έχει άμεση σχέση με τα σήματα. Συγκεκριμένα, στη Θεωρία Συστημάτων σύστημα είναι η οντότητα εκείνη που επεξεργάζεται, μεταβάλλει, καταγράφει, ή μεταδίδει σήματα. Για παράδειγμα, ένα σύστημα ψηφιακής καταγραφής ήχου μετατρέπει ένα ακουστικό σήμα σε μια σειρά από αριθμούς (bits) τους οποίους καταγράφει, π.χ., σε οπτικό δίσκο. Αντίθετα, το CD player είναι ένα σύστημα το οποίο διαβάζει τους αριθμούς, οι οποίοι είναι αποθηκευμένοι στον οπτικό δίσκο, και αναπαράγει το ηχητικό σήμα το οποίο μπορούμε να ακούσουμε. Ένα σύστημα επικοινωνίας μεταφέρει πληροφορία, π.χ. το σήμα φωνής, από ένα σημείο του χώρου, που λέγεται πηγή, σε ένα άλλο σημείο, που είναι ο προορισμός χρήσης της.

2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ - ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ως σύστημα ορίζουμε, την οντότητα εκείνη η οποία επενεργώντας σε ένα σήμα $x(t)$ έχει ως αποτέλεσμα ένα άλλο σήμα $y(t)$. Από μαθηματική άποψη, ένα σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μετασχηματισμός S που μετασχηματίζει ένα σήμα, $x(t)$, σε ένα άλλο σήμα $y(t) = S\{x(t)\}$. Η δράση ενός συστήματος περιγράφεται σχηματικά στο Σχήμα 2.1. Το αρχικό σήμα $x(t)$, το οποίο διεγείρει το σύστημα, λέγεται *σήμα εισόδου* ή απλά *είσοδος του συστήματος*, ενώ το αποτέλεσμα στη διαδικασία διέγερσης, δηλαδή το σήμα $y(t)$ λέγεται *σήμα εξόδου* ή απλά *έξοδος του συστήματος*.



Σχήμα 2.1 Σχηματική περιγραφή συστήματος.

Ο παραπάνω ορισμός είναι πολύ γενικός και μπορεί να περιγράψει πολλά φυσικά συστήματα, όπως: ηλεκτρικά κυκλώματα (π.χ. ραδιόφωνο), μηχανικά συστήματα (π.χ. αυτοκίνητο, ένα ρομποτικό βραχίονα), ένα επικοινωνιακό κανάλι, έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή και πολλά άλλα.

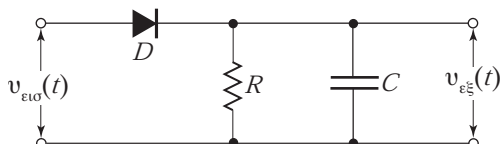
Ανάλογα με τον αριθμό και το είδος των επιτρεπόμενων εισόδων και εξόδων, τα συστήματα διακρίνονται σε:

1. *Συστήματα μίας εισόδου - μίας εξόδου* ή **SISO (Single-Input, Single-Output)**. Τα πιο απλά συστήματα μίας εισόδου - μίας εξόδου είναι ο βαθμωτός πολλαπλασιαστής $y(t) = ax(t)$ και το σύστημα καθυστέρησης $y(t) = x(t - t_0)$.
2. *Συστήματα με πολλές εισόδους και μία έξοδο* που είναι γνωστά ως συστήματα **MISO (Multi-Input, Single-Output)**. Ένα τέτοιο σύστημα είναι ο αθροιστής δύο ή περισσότερων σημάτων $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ και ο πολλαπλασιαστής $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$.
3. *Συστήματα με πολλές εισόδους και πολλές εξόδους*, γνωστά ως συστήματα **MIMO (Multi-Input, Multi-Output)**.

Ανάλογα με τη φύση των επιτρεπόμενων εισόδων και εξόδων, τα συστήματα διακρίνονται ως εξής

1. *Συστήματα συνεχούς χρόνου ή αναλογικά συστήματα*, όταν τα σήματα εισόδου και τα σήματα εξόδου είναι αναλογικά σήματα. Όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι σήματα διακριτού χρόνου, τότε τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως *συστήματα διακριτού χρόνου*.
2. *Αιτιοκρατικά συστήματα*, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι αιτιοκρατικά σήματα. Όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι στοχαστικά σήματα, τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως *στοχαστικά συστήματα*.

Ένα παράδειγμα αναλογικού και συγχρόνως στοχαστικού συστήματος είναι το γνωστό κύκλωμα ανόρθωσης και εξομάλυνσης της εναλλασσόμενης τάσης του Σχήματος 2.2, στο οποίο το σήμα εισόδου είναι η εφαρμοζόμενη τάση $v_{\text{εισ}}(t)$ και σήμα εξόδου η αναπτυσσόμενη τάση στα άκρα της αντίστασης R , $v_{\text{εξ}}(t)$.



Σχήμα 2.2 Παράδειγμα αναλογικού συστήματος.

Ένα σύστημα επικοινωνίας είναι ένα στοχαστικό σύστημα εφόσον η εισόδός του και η εξόδός του είναι στοχαστικά σήματα.

Υπάρχουν, επίσης, συστήματα τα οποία μετασχηματίζουν αναλογικές εισόδους σε διακριτές εξόδους και αντιθέτως. Τέτοια συστήματα είναι γνωστά ως *υβριδικά συστήματα*. Ο *αναλογοψηφιακός μετατροπέας* (A/D *Analog to Digital converter*), ο οποίος μετατρέπει ένα αναλογικό σήμα σε ψηφιακό και ο *ψηφιοαναλογικός μετατροπέας* (D/A), είναι υβριδικά συστήματα.

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε την εξίσωση η οποία περιγράφει τη σχέση μεταξύ του σήματος εισόδου και του σήματος εξόδου ενός ηλεκτρικού και ενός μηχανικού συστήματος.

Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα γνωρίζουμε ότι η τάση $v_R(t)$ στα άκρα μιας ωμικής αντίστασης R , που διαρρέεται από ρεύμα έντασης $i(t)$, είναι

$$v_R(t) = R i(t) \quad (2.1.1)$$

Η τάση $v_L(t)$ στα άκρα πηνίου, αυτεπαγωγής L , που διαρρέεται από ρεύμα έντασης $i(t)$ είναι

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.1.2)$$

και η ένταση του ρεύματος φόρτισης ενός πυκνωτή, χωρητικότητας C είναι

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (2.1.3)$$

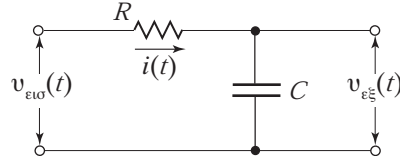
όπου $v_C(t)$ είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή.

Παράδειγμα 2.1.1

Να διατυπωθεί η σχέση της τάσης εισόδου $v_{\text{εισ}}(t)$ και της τάσης εξόδου $v_{\text{εξ}}(t)$ για το κύκλωμα του Σχήματος 2.3.

Λύση Εφαρμόζοντας το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο του κυκλώματος έχουμε

$$Ri(t) + v_{\text{εξ}}(t) = v_{\text{εισ}}(t) \quad (2.1.4)$$



Σχήμα 2.3 Το κύκλωμα του Παραδείγματος 2.1.1.

Λαμβάνοντας υπόψη την (2.1.3), η (2.1.4) γράφεται

$$RC \frac{dv_{\text{εξ}}(t)}{dt} + v_{\text{εξ}}(t) = v_{\text{εισ}}(t) \quad (2.1.5)$$

Η (2.1.5) είναι μία διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, η οποία περιγράφει τη σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου του συστήματος. Η εξίσωση έχει τη γενική μορφή

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (2.1.6)$$

Η τάξη του συστήματος προσδιορίζεται από τη μεγαλύτερη παράγωγο της εξόδου $y(t)$, η οποία εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση. Έτσι, η (2.1.6) περιγράφει ένα σύστημα πρώτης τάξης.

Σε ένα μηχανικό σύστημα γνωρίζουμε ότι ισχύει ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής

$$\sum_k \mathbf{F}_k = m\mathbf{a} \quad \text{ή} \quad \sum_k \mathbf{F}_k = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \quad (2.1.7)$$

όπου \mathbf{F}_k είναι οι δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στη μάζα m , \mathbf{x} η θέση της και \mathbf{a} η επιτάχυνσή της.

Ο νόμος του Hook, ο οποίος δίνει το μέτρο της δύναμης $F_{\text{ελ}}$ που ασκείται από ένα ελατήριο, ως συνάρτηση της μεταβολής του μήκους του κατά x , είναι

$$F_{\text{ελ}} = kx \quad (2.1.8)$$

όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου.

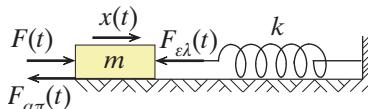
Επίσης, γνωρίζουμε ότι η δύναμη η οποία αντιδρά στην κίνηση ενός σώματος (δύναμη απόσβεσης) είναι ανάλογη της ταχύτητάς του, v , και δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{F}_{\text{απ}} = -b \cdot \mathbf{v} \quad \text{ή} \quad \mathbf{F}_{\text{απ}} = -b \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.1.9)$$

όπου b είναι η σταθερά απόσβεσης του συστήματος.

Παράδειγμα 2.1.2

Να διατυπωθεί η σχέση μεταξύ εφαρμοζόμενης δύναμης $F(t)$ και μετατόπισης $x(t)$ για τη μάζα m του Σχήματος 2.4.



Σχήμα 2.4 Το μηχανικό σύστημα για το Παράδειγμα 2.1.2.

Λύση Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μάζα m έχουμε

$$F - F_{\alpha\pi} - F_{\epsilon\lambda} = ma \quad (2.1.10)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.1.8) και (2.1.9) παίρνουμε

$$F - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{ή} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{1}{m} F \quad (2.1.11)$$

η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές και περιγράφει το γραμμικό ταλαντωτή με απόσβεση. Στη διαφορική εξίσωση (2.1.11) περιέχεται η δεύτερη παράγωγος της εξόδου με αποτέλεσμα, το σύστημα, με είσοδο τη δύναμη F και έξοδο την απομάκρυνση x να είναι *δεύτερης τάξης*.

2.2 ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

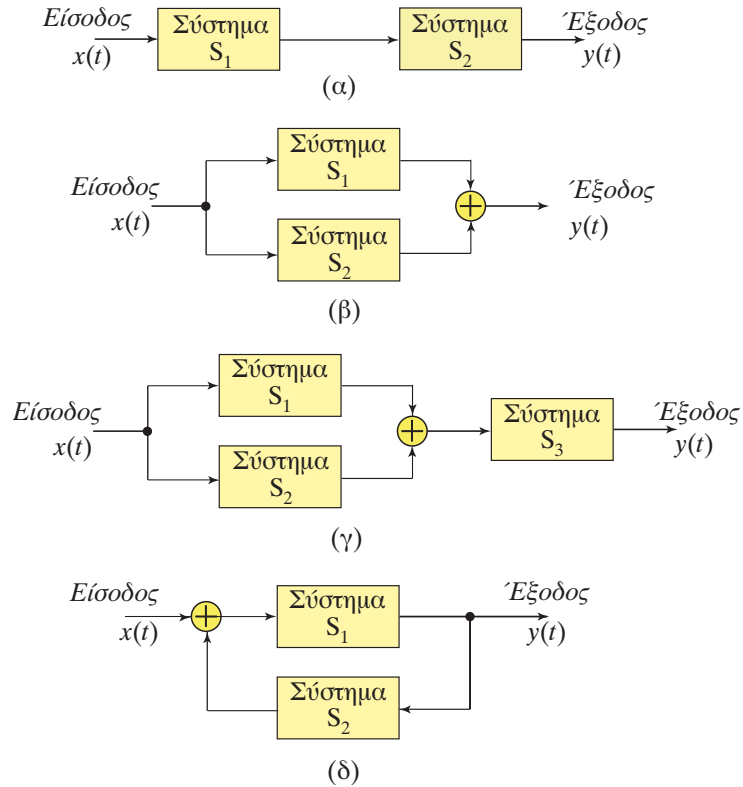
Σε πολλές περιπτώσεις, η ανάλυση ενός πολύπλοκου συστήματος διευκολύνεται σημαντικά αν δούμε το σύστημα ως αποτέλεσμα διασύνδεσης λιγότερο πολύπλοκων συστημάτων.

Οι πιο βασικές συνδέσεις μεταξύ συστημάτων είναι η *σειριακή*, η *παράλληλη*, η *μεικτή* και η *σύνδεση με ανατροφοδότηση ή ανάδραση* (Σχήμα 2.5).

Η σχηματική αναπαράσταση δύο συστημάτων τα οποία έχουν συνδεθεί σειριακά φαίνεται στο Σχήμα 2.5α. Παρατηρούμε ότι, όταν δύο συστήματα S_1 και S_2 συνδέονται σειριακά, με το σύστημα S_1 να προηγείται του S_2 , η έξοδος του S_1 είναι είσοδος του S_2 . Μία σημαντική διαδικασία, η οποία σχετίζεται με τη σειριακή σύνδεση, είναι η *αντιστροφή συστήματος*, για την οποία θα μιλήσουμε στην Ενότητα 2.3.3.

Η σχηματική αναπαράσταση δύο συστημάτων, τα οποία έχουν συνδεθεί παράλληλα, φαίνεται στο Σχήμα 2.5β. Παρατηρούμε ότι η ίδια είσοδος τροφοδοτεί και τα δύο συστήματα. Αυτά λειτουργούν ταυτόχρονα και οι δύο επιμέρους έξοδοι αθροίζονται και παράγουν την έξοδο της παράλληλης σύνδεσης των δύο συστημάτων. Η υλοποίηση ενός συστήματος, το οποίο περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου: $y(t) = a \cdot x(t) + x(t - t_0)$, γίνεται με την παράλληλη σύνδεση ενός βαθμωτού συστήματος και ενός συστήματος που προκαλεί καθυστέρηση κατά t_0 .

Στη μεικτή σύνδεση, Σχήμα 2.5γ, έχουμε τα συστήματα S_1 και S_2 , τα οποία έχουν συνδεθεί παράλληλα, και το σύστημα S_3 , το οποίο έχει συνδεθεί σειριακά.



Σχήμα 2.5 (α) Σειριακή σύνδεση δύο συστημάτων, (β) παράλληλη σύνδεση δύο συστημάτων (γ) μεικτή σύνδεση συστημάτων και (δ) σύνδεση με ανατροφοδότηση.

Το σύστημα αυτόματης πλοήγησης ενός οχήματος δέχεται ως είσοδο μία τροχιά την οποία θέλουμε να διαγράψει το όχημα. Το σύστημα παρακολουθεί την τροχιά που έχει το όχημα, συγκρίνει τη θέση του οχήματος με την επιθυμητή θέση, δηλαδή προσδιορίζει το σφάλμα και, όταν εξωτερικοί παράγοντες προκαλούν παρέκλιση από την προκαθορισμένη τροχιά, προβαίνει στις αναγκαίες ρυθμίσεις, ώστε το όχημα να ακολουθεί την προδιαγεγραμμένη τροχιά. Το παραπάνω σύστημα μπορεί να παρασταθεί σχηματικά με τα συστήματα S_1 και S_2 τα οποία έχουν συνδεθεί με ανατροφοδότηση. Στο Σχήμα 2.5δ φαίνεται η σύνδεση των S_1 και S_2 με ανατροφοδότηση. Παρατηρούμε ότι ανατροφοδοτούμε την έξοδο του συστήματος S_1 στο σύστημα S_2 και, αφού την επεξεργαστούμε με τον ελεγκτή S_2 , την συγκρίνουμε με το σήμα αναφοράς $x(t)$ και χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα της σύγκρισης για να οδηγήσουμε το σύστημα S_1 . Με άλλα λόγια, το σύστημα S_2 τροποποιεί την έξοδο $y(t)$ με τρόπο ώστε να μπορεί να συγκριθεί με το επιθυμητό σήμα εισόδου.

2.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

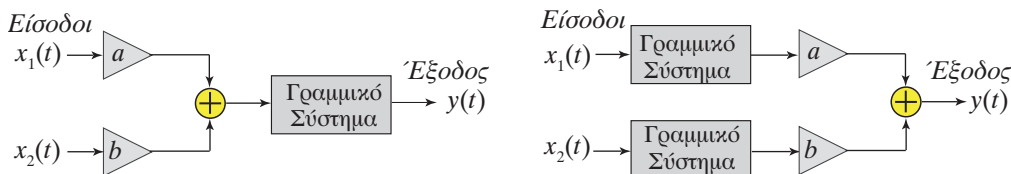
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται μερικές βασικές ιδιότητες που έχουν τα συστήματα. Πριν αναφέρουμε τις ιδιότητες των συστημάτων είναι σκόπιμο να περιγράψουμε μία βασική έννοια, η οποία πολλές φορές παραλείπεται στα εγχειρίδια. Θα λέμε ότι ένα σύστημα βρίσκεται σε *κατάσταση ηρεμίας* τη χρονική στιγμή t_0 , εάν αυτό δεν έχει υποστεί διέγερση από άλλο σήμα για κάθε χρονική στιγμή $t < t_0$. Από φυσική άποψη, ένα σύστημα που είναι σε κατάσταση ηρεμίας σε δεδομένη χρονική στιγμή t_0 , σημαίνει ότι δεν είχε αποθηκευμένη ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = t_0$.

2.3.1 Γραμμικότητα

Ένα σύστημα που είναι σε αρχική ηρεμία θα λέγεται *γραμμικό σύστημα* (ΓΣ), αν, και μόνο αν, δοθέντων δύο σημάτων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ ισχύει:

$$S\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot S\{x_1(t)\} + b \cdot S\{x_2(t)\} \quad (2.3.1)$$

όπου a και b σταθερές. Δηλαδή η απόκριση του συστήματος σε μία είσοδο, που είναι ο γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων, ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων του συστήματος στο καθένα από τα σήματα αυτά. Στο Σχήμα 2.6 περιγράφεται σχηματικά η ιδιότητα της γραμμικότητας δύο συστημάτων.



Σχήμα 2.6 Σχηματική περιγραφή της γραμμικότητας ενός συστήματος.

Η παραπάνω ιδιότητα γενικεύεται για οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό πεπερασμένου αριθμού σημάτων εισόδου. Γενίκευση της (2.3.1) οδηγεί στην ακόλουθη σχέση:

$$S\{\sum_k a_k x_k(t)\} = \sum_k a_k y_k(t) \quad (2.3.2)$$

όπου $y_k(t)$ είναι έξοδος του συστήματος, όταν η είσοδος είναι το $x_k(t)$.

2.3.2 Αιτιότητα

Ένα σύστημα είναι *αιτιατό*, αν η έξοδός του τη χρονική στιγμή t_0 , $y(t_0)$, εξαρτάται από τις τιμές του σήματος εισόδου, $x(t)$, για $t \leq t_0$. Δηλαδή, για κάθε σήμα εισόδου $x(t)$, η αντίστοιχη έξοδος $y(t)$ εξαρτάται μόνο από την *παρούσα* ή και *προηγούμενες* τιμές

της εισόδου. Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι αιτιατό, αν οι μεταβολές στην έξοδο (αποτέλεσμα) του συστήματος ποτέ δεν προηγούνται των μεταβολών που επιτελούνται στην είσοδο του συστήματος (αιτία).

Τα συστήματα τα οποία περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$y(t) = a \cdot x(t), \quad y(t) = b \cdot x(t - 1) \text{ και } y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (2.3.3)$$

είναι αιτιατά, ενώ το σύστημα διακριτού χρόνου υπολογισμού μέσης τιμής που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(n) = \frac{1}{2M + 1} \sum_{k=-M}^M x(n - k) \quad (2.3.4)$$

είναι μη αιτιατό σύστημα.

2.3.3 Αντιστρέψιμο και μη αντιστρέψιμο συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται *αντιστρέψιμο*, αν η γνώση της εξόδου καθιστά εφικτό τον υπολογισμό του σήματος εισόδου. Η διαδικασία αντιστροφής ενός συστήματος S συνίσταται στον προσδιορισμό ενός συστήματος, το οποίο συνδεδεμένο σε σειρά με το σύστημα S , παρέχει στην έξοδό του το σήμα εισόδου του συστήματος S . Η αντιστροφή παρουσιάζεται σε πολλές εφαρμογές στις οποίες είναι επιθυμητή η αφαίρεση της επίδρασης ενός συστήματος πάνω σε ένα σήμα. Σε ένα επικοινωνιακό σύστημα, το οποίο έχει στόχο την ανάκτηση του μεταδιδόμενου σήματος από το λαμβανόμενο σήμα, ο δέκτης αποτελεί ένα αντιστροφέα του καναλιού, που καταπολεμά τα διάφορα φαινόμενα διαταραχών. Τα συστήματα τα οποία περιγράφονται από τις σχέσεις

$$y(t) = c \cdot x(t) \text{ και } y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \quad (2.3.5)$$

είναι αντιστρέψιμο και έχουν ως αντίστροφα τα συστήματα με σχέσεις εισόδου-εξόδου

$$y(t) = \frac{1}{c} x(t) \text{ και } y(n) = x(n) - x(n - 1) \quad (2.3.6)$$

αντίστοιχα. Σε αντίθεση, το σύστημα

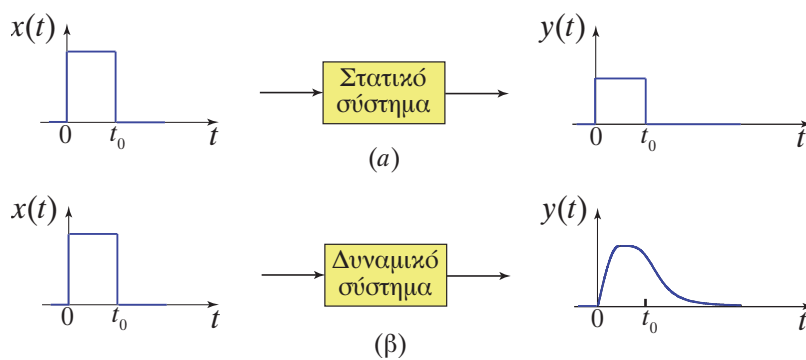
$$y(t) = x^2(t) \quad (2.3.7)$$

δεν είναι αντιστρέψιμο, γιατί κάθε τιμή της εξόδου μπορεί να προέρχεται από δύο διαφορετικές τιμές της εισόδου.

2.3.4 Συστήματα Στατικά και Δυναμικά

Ένα σύστημα καλείται *στατικό* ή *σύστημα χωρίς μνήμη*, εάν για κάθε σήμα εισόδου η αντίστοιχη έξοδος, για κάθε χρονική στιγμή, εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου την ίδια χρονική στιγμή (Σχήμα 27α). Η ωμική αντίσταση είναι ένα παράδειγμα συστήματος χωρίς μνήμη, αφού η τάση στα άκρα της $v_R(t)$ (έξοδος) κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από την ένταση του ρεύματος $i(t)$ (είσοδος) από την οποία διαρρέεται την ίδια χρονική στιγμή.

$$v_R(t) = R \cdot i(t) \quad (2.3.8)$$



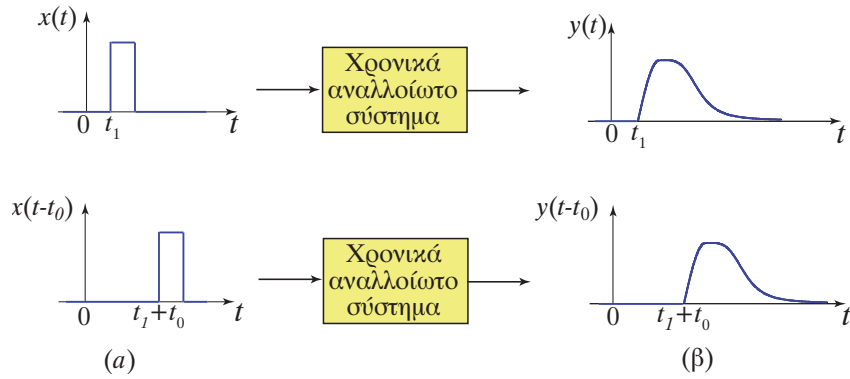
Σχήμα 2.7 Η είσοδος και η έξοδος (α) ενός στατικού συστήματος και (β) ενός δυναμικού συστήματος.

Εάν ένα σύστημα δεν είναι στατικό, καλείται *δυναμικό* ή *σύστημα με μνήμη* (Σχήμα 2.7β). Ο πυκνωτής, αν θεωρηθεί ως σύστημα με έξοδο την τάση στα άκρα του, $v_C(t)$, και είσοδο το ρεύμα που το φορτίζει $i(t)$, είναι ένα σύστημα με μνήμη, αφού η τάση κάθε χρονική στιγμή είναι αποτέλεσμα του όλου ιστορικού της συνάρτησης $i(t)$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (2.3.9)$$

2.3.5 Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται *χρονικά αναλλοίωτο* (ΧΑ) (αμετάβλητο) αν, και μόνο αν, χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στην έξοδο. Με άλλα λόγια, αν $y(t)$ είναι η έξοδος σε ένα σήμα εισόδου $x(t)$, τότε για είσοδο $x(t - t_0)$ παράγεται η έξοδος $y(t - t_0)$. Δηλαδή, το σήμα εξόδου παραμένει το ίδιο, ανεξάρτητα από το ποια χρονική στιγμή διεγείρουμε την είσοδο. Το μόνο που υφίσταται είναι η αντίστοιχη χρονική μετατόπιση. Στο Σχήμα 2.8 δίνεται ένα παράδειγμα σημάτων εισόδου-εξόδου ενός χρονικά αναλλοίωτου συστήματος.



Σχήμα 2.8 (α) Η είσοδος και (β) η έξοδος ενός συστήματος χρονικά αναλλοίωτου.

2.3.6 Ευστάθεια

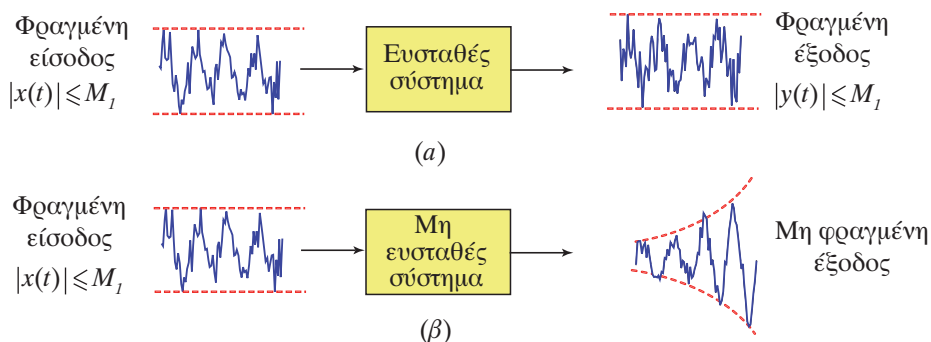
Ένα σύστημα λέγεται ότι είναι ΦΕΦΕ *ευσταθές* (*Ευστάθεια Φραγμένης Εισόδου Φραγμένης Εξόδου*) (Bounded Input Bounded Output (BIBO) stable), αν και μόνον αν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδος του παραμένει φραγμένη. Με άλλα λόγια, ένα σύστημα λέγεται ΦΕΦΕ - ευσταθές, αν για κάθε θετικό αριθμό $M_1 < \infty$ για τον οποίο ισχύει

$$|x(t)| \leq M_1 \tag{2.3.10}$$

υπάρχει θετικός αριθμός $M_2 < \infty$ για τον οποίο ισχύει

$$|y(t)| \leq M_2 \tag{2.3.11}$$

Παρατηρούμε ότι η απαίτησή μας για ευστάθεια ενός συστήματος ταυτίζεται με την απαίτηση τα σήματα εισόδου και εξόδου να παραμένουν πεπερασμένα σε πλάτος (Σχήμα 2.9).



Σχήμα 2.9 (α) Σύστημα ευσταθές και (β) σύστημα μη ευσταθές, η έξοδος τείνει στο άπειρο.

Παράδειγμα 2.3.1

Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από την παρακάτω σχέση εισόδου $x(t)$ εξόδου $y(t)$

$$y(t) = S \{x(t)\} = \frac{d}{dt}x(t) \quad (2.3.12)$$

αναφέρεται ως *διαφοριστής*. Να εξετάσετε, αν το σύστημα είναι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο, αιτιατό και αντιστρέψιμο.

Λύση Αν το σήμα $x_1(t)$ είναι η είσοδος του διαφοριστή, τότε η έξοδος του είναι η παράγωγος $\dot{x}_1(t)$ του σήματος εισόδου. Ομοίως, αν $x_2(t)$ είναι το σήμα εισόδου, η έξοδος είναι η παράγωγος $\dot{x}_2(t)$. Αν η είσοδος του συστήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός $ax_1(t) + bx_2(t)$, τότε η έξοδος είναι

$$\frac{d}{dt}[ax_1(t) + bx_2(t)] = a\frac{d}{dt}x_1(t) + b\frac{d}{dt}x_2(t) \quad (2.3.13)$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι γραμμικό. Ο διαφοριστής είναι χρονικά αναλλοίωτο σύστημα, αφού

$$\frac{d}{dt}x(t - t_0) = \frac{d}{dt}x(t) \Big|_{t=t-t_0} \quad (2.3.14)$$

Ο διαφοριστής είναι αιτιατό σύστημα αφού η έξοδος του εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή της εισόδου του. Ο διαφοριστής δεν αντιστρέφεται, γιατί δύο σήματα τα οποία διαφέρουν κατά μία σταθερά έχουν την ίδια παράγωγο.

2.4 ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΕΙΣΟΔΟΥ - ΕΞΟΔΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

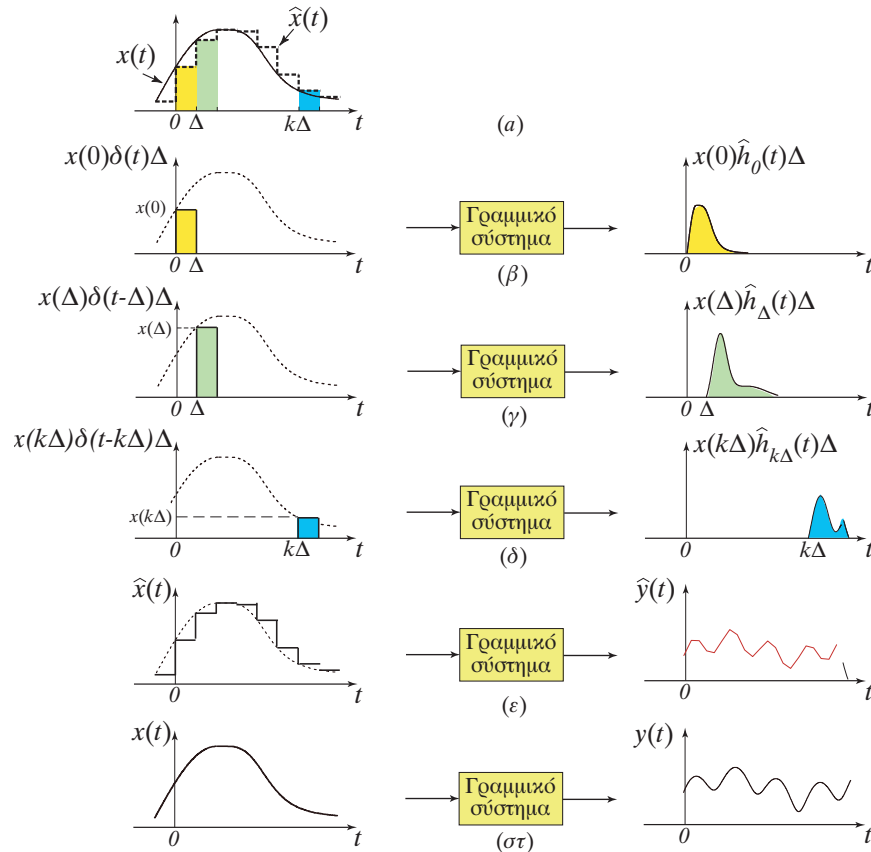
Στην ενότητα αυτή θα διατυπώσουμε μία βασική σχέση της θεωρίας συστημάτων. Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής θα μπορούμε να προσδιορίζουμε την έξοδο $y(t)$ ενός γραμμικού συστήματος, αν γνωρίζουμε α) την είσοδο $x(t)$ του συστήματος και β) την απόκριση του συστήματος, όταν αυτό διεγείρεται από τη συνάρτηση $\delta(t)$.

2.4.1 Γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα συνεχούς χρόνου. - Το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

Από το Παράδειγμα 1.4.3 γνωρίζουμε ότι κάθε σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να προσεγγιστεί, όπως στο Σχήμα 2.9α, από ένα σήμα της μορφής

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta \quad (2.4.1)$$

Έστω $\hat{h}_0(t)$ η έξοδος του υπό μελέτη γραμμικού συστήματος, όταν η είσοδος είναι ο παλμός $\delta_{\Delta}(t)$. Λόγω της γραμμικότητας, όταν η είσοδος του συστήματος είναι ο παλμός



Σχήμα 2.10 Η γραφική ερμηνεία της απόκρισης ενός γραμμικού χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος, όπως αυτή εκφράζεται από την Εξίσωση (2.4.6).

$x(0)\delta_{\Delta}(t)\Delta$, η έξοδος του είναι η $x(0)\hat{h}_0(t)\Delta$ (βλέπε Σχήμα 2.10β). Γενικά, αν $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ είναι η απόκριση του γραμμικού συστήματος στην είσοδο $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$, δηλαδή,

$$\hat{h}_{k\Delta}(t) = S \{ \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \} \quad (2.4.2)$$

τότε για είσοδο $x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$, η έξοδος θα είναι $x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta$ (βλέπε Σχήμα 2.10δ).

Αν εφαρμοστεί στην είσοδο του συστήματος το σήμα $\hat{x}(t)$, τότε η έξοδος του θα είναι

$$\hat{y}(t) = S \{ \hat{x}(t) \} = S \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta \right\} \quad (2.4.3)$$

Για την πλειονότητα των σημάτων και των συστημάτων που συναντάμε στην πράξη, η

γραμμικότητα ισχύει και για άπειρους όρους. Έτσι, η (2.4.3) γίνεται

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) S \{ \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \} \Delta \quad (2.4.4)$$

έτσι από την (2.4.4) και με τη βοήθεια της (2.4.2), η έξοδος του συστήματος δίνεται από

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta \quad (2.4.5)$$

Στο Σχήμα 2.10ε έχει σχεδιαστεί η έξοδος $\hat{y}(t)$ του συστήματος, όταν η είσοδος του είναι το σήμα $\hat{x}(t)$. Η έξοδος του συστήματος, λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας, είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους εξόδων του συστήματος, που εικονίζονται στα Σχήματα 2.10β-δ.

Παρατηρούμε ότι για να προσδιορίσουμε την έξοδο ενός γραμμικού συστήματος για οποιοδήποτε σήμα εισόδου με τη βοήθεια της σχέσης (2.4.5), χρειαζόμαστε την $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ για κάθε τιμή του k .

Αν $\Delta \rightarrow 0$, $\delta_{\Delta}(t) \rightarrow \delta(t)$ και $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$, δηλαδή, $x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$. Έτσι, αν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα $x(t)$, η έξοδος του συστήματος θα είναι

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{y}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta \quad (2.4.6)$$

Στο Σχήμα 2.10στ έχει σχεδιαστεί η είσοδος $x(t)$, που είναι το όριο της κλιμακωτής μορφής συνάρτησης $\hat{x}(t)$, και η έξοδος $y(t)$, η οποία είναι το όριο της $\hat{y}(t)$.

Έστω $h_{\tau}(t)$ η έξοδος του συστήματος που παράγεται από την είσοδο $\delta(t - \tau)$, δηλαδή,

$$h_{\tau}(t) = S \{ \delta(t - \tau) \} \quad (2.4.7)$$

Αν η χρονική διάρκεια Δ των παλμών μικραίνει και τείνει στο μηδέν, $\Delta \rightarrow 0$, το $k\Delta$ γίνεται η συνεχής μεταβλητή τ ($k\Delta \rightarrow \tau$), το άθροισμα στο δεξιό μέλος της (2.4.6) γράφεται ως ολοκλήρωμα και η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau \quad (2.4.8)$$

Αν το γραμμικό σύστημα είναι και χρονικά αναλλοίωτο, τότε η απόκριση του συστήματος $h_{\tau}(t)$, όταν αυτό διεγείρεται από τη $\delta(t - \tau)$, είναι ίδια με την $h(t) \equiv h_0(t)$ αλλά χρονικά μετατοπισμένη κατά τ , δηλαδή $h_{\tau}(t) = h(t - \tau)$. Έτσι, η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.4.9)$$

Η (2.4.9) είναι γνωστή και ως *ολοκλήρωμα της συνέλιξης*, και συμβολίζεται ως

$$y(t) = h(t) \star x(t) \quad (2.4.10)$$

Παρατηρούμε ότι σε ένα ΓΧΑ σύστημα αρκεί η γνώση μιας μόνο συνάρτησης, της $h(t)$, για να περιγραφεί πλήρως η σχέση μεταξύ του σήματος εισόδου $x(t)$ και του σήματος εξόδου $y(t)$ του συστήματος με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης. Η πράξη η οποία συνδυάζει δύο σήματα $x(t)$ και $h(t)$ για το σχηματισμό του σήματος $y(t)$ καλείται *συνέλιξη*.

Η συνάρτηση $h(t)$, η οποία είναι η έξοδος του συστήματος, όταν αυτό διεγείρεται από τη συνάρτηση $\delta(t)$

$$h(t) = \mathcal{S} \{ \delta(t) \} \quad (2.4.11)$$

καλείται *κρουστική απόκριση του συστήματος*.

Η (2.4.9) γράφεται και λίγο διαφορετικά. Αλλάζοντας τις μεταβλητές είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (2.4.12)$$

Παράδειγμα 2.4.1

Να δείξετε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές, αν η κρουστική απόκρισή του είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή, αν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty \quad (2.4.13)$$

Λύση Θεωρούμε ότι η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι φραγμένη, δηλαδή,

$$|x(\tau)| \leq M < \infty \quad (2.4.14)$$

όπου M μία θετική σταθερά. Η έξοδος του συστήματος δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.4.15)$$

από την οποία συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| |h(t - \tau)| d\tau \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} M |h(t - \tau)| d\tau \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Μετά την αλλαγή μεταβλητής έχουμε

$$|y(t)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\xi)| d\xi \quad (2.4.17)$$

και λόγω της (2.4.13) έπεται ότι η έξοδος του συστήματος είναι επίσης φραγμένη, οπότε το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνθήκη αυτή είναι και αναγκαία.

Παράδειγμα 2.4.2

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος μέσης τιμής

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \quad (2.4.18)$$

Λύση Η κρουστική απόκριση του συστήματος μέσης τιμής, $h(t)$, είναι ίση με την έξοδο του συστήματος αν αυτό διεγερθεί από τη συνάρτηση $\delta(t)$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t du(\tau) \\ &= \frac{1}{T} [u(t) - u(t-T)] \\ &= \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $\delta(\tau)d\tau = du(\tau)$ και $\Pi(t)$ είναι ο ορθογώνιος παλμός.

2.4.2 Ιδιότητες της Συνέλιξης

Η συνέλιξη έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

Αντιμεταθετική ιδιότητα

$$h_1(t) \star h_2(t) = h_2(t) \star h_1(t) \quad (2.4.20)$$

Η απόδειξη της παραπάνω ιδιότητας απορρέει από τον ορισμό της συνέλιξης. Πράγματι, αλλάζοντας τη μεταβλητή $t - \tau = \phi$ έχουμε

$$\begin{aligned} h_1(t) \star h_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) h_2(t - \tau) d\tau \\ &\stackrel{t-\tau=\phi}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t - \phi) h_2(\phi) d\phi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\phi) h_1(t - \phi) d\phi \\ &= h_2(t) \star h_1(t) \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Η φυσική σημασία της ιδιότητας αυτής φαίνεται στο Σχήμα 2.11, από το οποίο παρατηρούμε ότι, αν δύο συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά σύνδεσής τους.



Σχήμα 2.11 Η φυσική σημασία της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης.

Προσεταιριστική ιδιότητα

$$h_2(t) \star [h_1(t) \star x(t)] = [h_2(t) \star h_1(t)] x(t) \quad (2.4.22)$$

Η απόδειξη της ιδιότητας ακολουθεί την ίδια πορεία με την προηγούμενη. Η φυσική σημασία της προσεταιριστικής ιδιότητας φαίνεται στο Σχήμα 2.12. Παρατηρούμε ότι, όταν δύο συστήματα συνδέονται σε σειρά, μπορούν να αντικατασταθούν με ένα τρίτο σύστημα, το οποίο έχει κρουστική απόκριση ίση με τη συνέλιξη των κρουστικών αποκρίσεων των δύο συστημάτων που έχουν συνδεθεί σε σειρά.

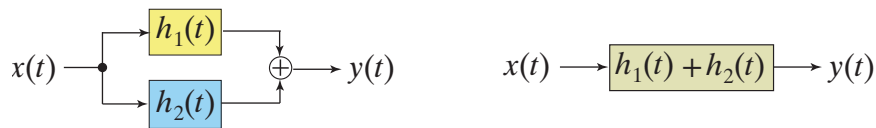


Σχήμα 2.12 Η φυσική σημασία της προσεταιριστικής ιδιότητας της συνέλιξης.

Επιμεριστική ιδιότητα

$$[h_1(t) + h_2(t)] \star x(t) = h_1(t) \star x(t) + h_2(t) \star x(t) \quad (2.4.23)$$

Η απόδειξη απορρέει άμεσα από τους ορισμούς. Η φυσική σημασία της επιμεριστικής ιδιότητας φαίνεται στο Σχήμα 2.13. Λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας, αν δύο συστήματα έχουν συνδεθεί παράλληλα, τότε μπορούν να αντικατασταθούν από ένα τρίτο σύστημα, του οποίου η κρουστική απόκριση είναι ίση με το άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεών τους.



Σχήμα 2.13 Η φυσική σημασία της επιμεριστικής ιδιότητας της συνέλιξης.

Ταυτοτική ιδιότητα

$$h(t) \star \delta(t) = h(t) \quad (2.4.24)$$

Η ταυτοτική ιδιότητα είναι απόρροια του ορισμού της κρουστικής απόκρισης συστήματος.

2.4.3 Γραφικός προσδιορισμός της συνέλιξης

Για να υπολογίσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.4.25)$$

για κάθε χρονική στιγμή t ακολουθούμε τα βήματα:

1. Βήμα: *Ανάκλαση*. Αντιστρέφουμε την κρουστική απόκριση, δηλαδή προσδιορίζουμε την $h(-\tau)$.
2. Βήμα: *Χρονική Μετατόπιση*. Μετατοπίζουμε την $h(-\tau)$ κατά t και έτσι προσδιορίζουμε την $h(t - \tau)$.
3. Βήμα: *Πολλαπλασιασμός*. Προσδιορίζουμε το γινόμενο $x(\tau) \cdot h(t - \tau)$.
4. Βήμα: *Ολοκλήρωση ή Εμβαδομέτρηση*. Ολοκληρώνουμε το γινόμενο αυτό (ή υπολογίζουμε το εμβαδό του σήματος του δημιουργείται από τη γραφική παράσταση του γινομένου και του άξονα του χρόνου τ). Το αποτέλεσμα θα είναι ίσο με την έξοδο του συστήματος $y(t)$ την αντίστοιχη χρονική στιγμή t .
5. Βήμα: *Επανάληψη*. Τα βήματα αυτά επαναλαμβάνονται για τις διάφορες τιμές του χρόνου.

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 2.4.3

Να υπολογιστεί, η έξοδος ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος που έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.4.26)$$

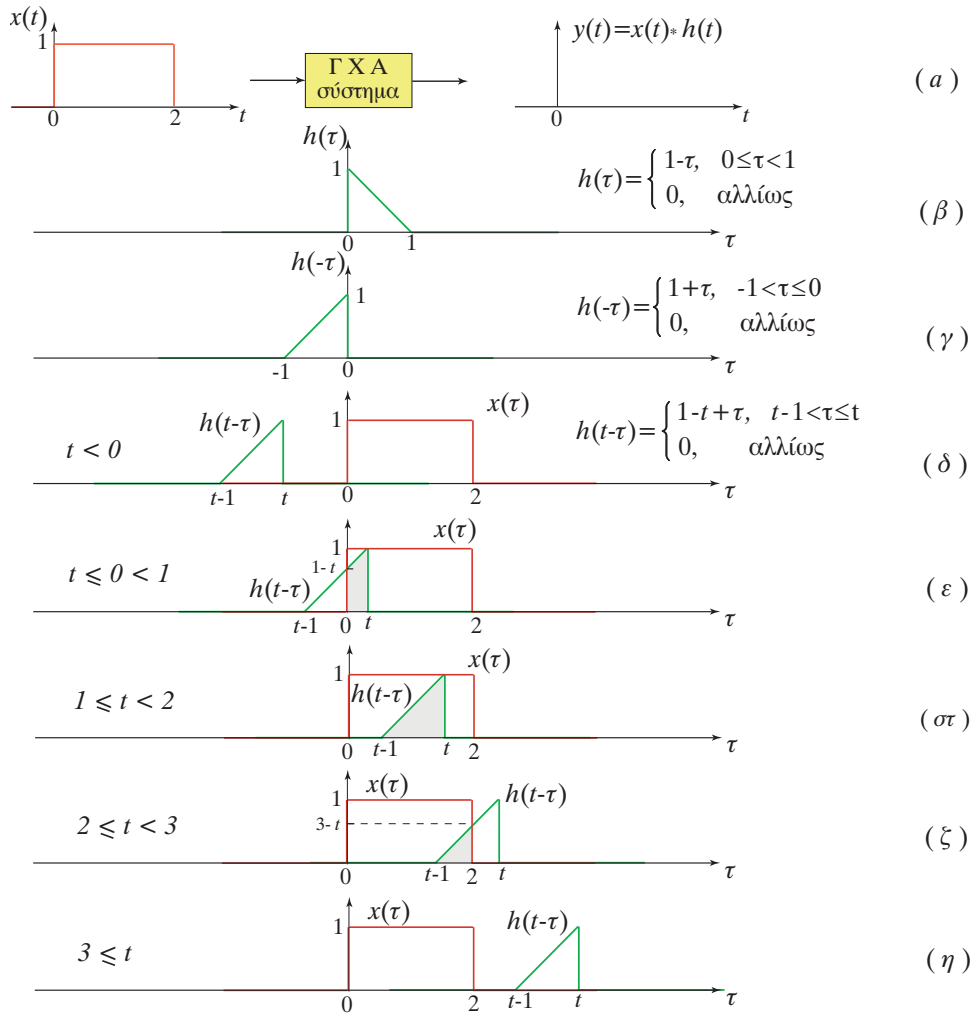
αν η είσοδος του είναι το σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.4.27)$$

Λύση Το ΓΧΑ σύστημα και η είσοδός του περιγράφονται στο Σχήμα 2.14α. Στο Σχήμα 2.14β δίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Στο Σχήμα 2.14γ είναι η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, $h(-\tau)$. Στο Σχήμα 2.14δ η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει μετατοπιστεί κατά $t < 0$, $h(t - \tau)$. Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $h(t - \tau) \cdot x(\tau)$ είναι ίσο με μηδέν για κάθε τιμή του χρόνου t μικρότερη του μηδενός. Έτσι, η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = 0 \quad \text{για} \quad t < 0 \quad (2.4.28)$$



Σχήμα 2.14 Ο γραφικός προσδιορισμός της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης.

Στο Σχήμα 2.14ε η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει μετατοπιστεί κατά $0 \leq t < 1$. Χρησιμοποιώντας τις (2.4.26) και (2.4.27) η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_0^t 1 \cdot (1-t+\tau) d\tau = t - \frac{t^2}{2} \quad \text{για } 0 \leq t < 1 \quad (2.4.29)$$

και είναι ίση με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου στο Σχήμα 2.14ε.

Στο Σχήμα 2.14στ η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει μετατοπιστεί κατά

$1 \leq t < 2$. Χρησιμοποιώντας τις (2.4.26) και (2.4.27) βρίσκουμε ότι η έξοδος του συστήματος είναι ίση με

$$y(t) = \int_{t-1}^t 1 \cdot (1 - t + \tau) d\tau = \frac{1}{2}, \quad \text{για } 1 \leq t < 2 \quad (2.4.30)$$

και είναι ίση με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου στο Σχήμα 2.14στ.

Στο Σχήμα 2.14ζ η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει μετατοπιστεί κατά $2 \leq t < 3$. Η έξοδος του συστήματος δίνεται τώρα από τη σχέση

$$y(t) = \int_{t-1}^2 1 \cdot (1 - t + \tau) d\tau = \frac{1}{2}(3 - t)^2, \quad \text{για } 2 \leq t < 3 \quad (2.4.31)$$

η οποία είναι ίση με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου του Σχήματος 2.14ζ.

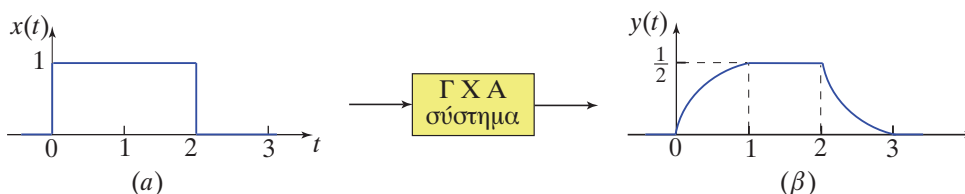
Τέλος, όπως παρατηρούμε στο Σχήμα 2.14η, το γινόμενο $h(t - \tau)x(\tau)$ είναι ίσο με μηδέν για κάθε τιμή του χρόνου t μεγαλύτερη ή ίση από 3. Έτσι, η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = 0, \quad \text{για } 3 \leq t \quad (2.4.32)$$

Η έξοδος, λοιπόν, του συστήματος είναι:

$$y(t) = \begin{cases} t - t^2/2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1/2, & 1 \leq t \leq 2 \\ (3 - t)^2/2, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.4.33)$$

Στο Σχήμα 2.15 έχουμε σχεδιάσει την είσοδο και την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος.



Σχήμα 2.15 (α) Η είσοδος και (β) η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος του Παραδείγματος 2.4.3.

2.4.4 Γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα διακριτού χρόνου. - Το άθροισμα της συνέλιξης

Στο Παράδειγμα 1.4.5 δείξαμε ότι κάθε σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα από ολισθήσεις μοναδιαίου δείγματος

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) \quad (2.4.34)$$

Η έξοδος ενός γραμμικού συστήματος δίνεται από τη

$$y(n) = S \{x(n)\} = S \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)S \{\delta(n-k)\} \quad (2.4.35)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα της γραμμικότητας του συστήματος. Αν για κάθε ακέραιο k , $h_k(n)$ είναι η έξοδος του συστήματος που παράγεται από την είσοδο $\delta(n-k)$, δηλαδή $h_k(n) = S \{\delta(n-k)\}$, τότε η οικογένεια των σημάτων απόκρισης

$$\{h_k(n)\}, \quad -\infty < k < \infty \quad (2.4.36)$$

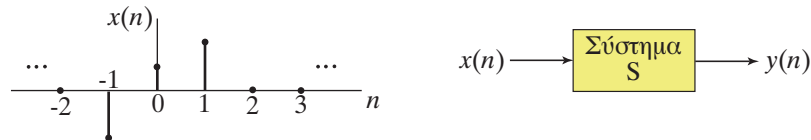
μεταφέρει όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε για να καθορίσουμε την έξοδο που παράγεται από ένα σήμα πεπερασμένης έκτασης με τη βοήθεια της

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) \quad (2.4.37)$$

Διαφοτίζουμε την τελευταία σχέση με το ακόλουθο παράδειγμα.

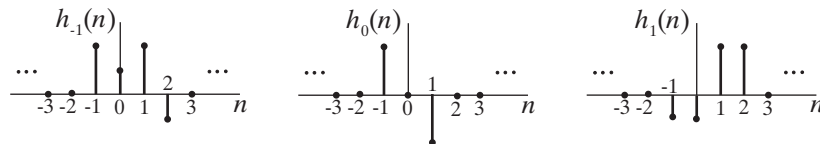
Παράδειγμα 2.4.4

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα S το οποίο τροφοδοτείται με το σήμα $x(n)$, που περιγράφεται στο Σχήμα 2.16.



Σχήμα 2.16 Γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου και η είσοδος του.

Οι αποκρίσεις του γραμμικού συστήματος $h_{-1}(n)$, $h_0(n)$ και $h_1(n)$, για εισόδους $\delta(n+1)$, $\delta(n)$, και $\delta(n-1)$ αντίστοιχα, έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.17. Η απόκριση του γραμμικού συστήματος, όπως αυτή εκφράζεται από τη σχέση $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n)$ προσδιορίζεται γραφικά στο Σχήμα 2.18.



Σχήμα 2.17 Οι αποκρίσεις του γραμμικού συστήματος για εισόδους $\delta(n+1)$, $\delta(n)$ και $\delta(n-1)$.

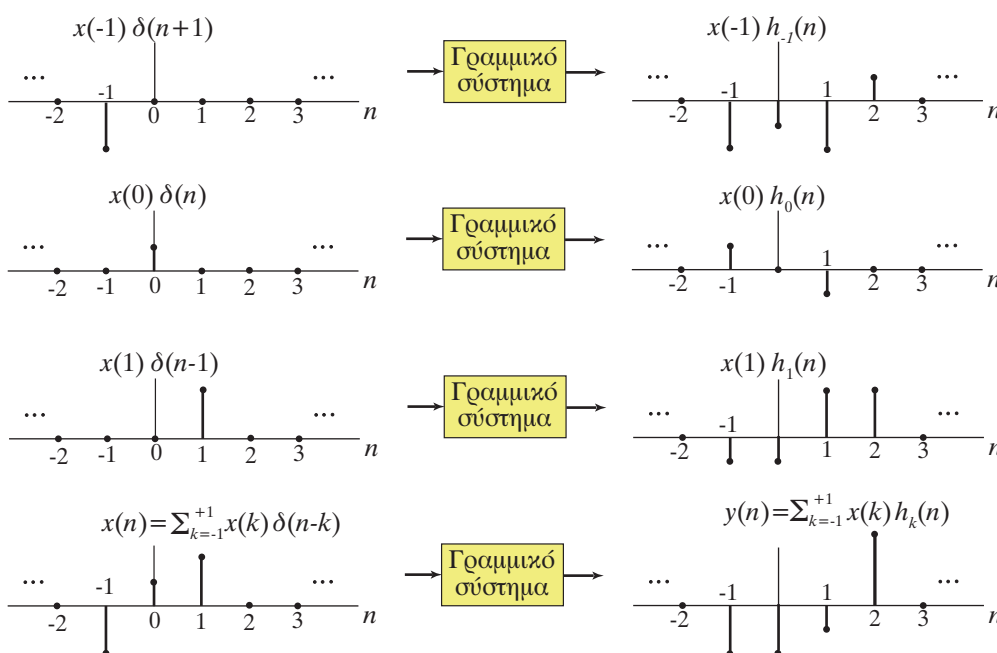
Όταν το σύστημα είναι και χρονικά αναλλοίωτο, τότε

$$h_k(n) = h_0(n-k) \quad (2.4.38)$$

δηλαδή, όπως η $\delta(n - k)$ είναι μια χρονική ολίσθηση της $\delta(n)$ έτσι και η απόκριση $h_k(n)$ είναι μια χρονική ολίσθηση της απόκρισης $h_0(n)$, την οποία για ευκολία την συμβολίζουμε με $h(n)$, ($h(n) \equiv h_0(n) = S\{\delta(n)\}$). Έτσι, η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k) \quad \text{ή} \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n - k) \quad (2.4.39)$$

Η (2.4.39) είναι γνωστή ως *άθροισμα της συνέλιξης*.



Σχήμα 2.18 Η γραφική ερμηνεία της απόκρισης ενός γραμμικού συστήματος, όπως αυτή εκφράζεται από το άθροισμα της συνέλιξης.

Η συμπεριφορά ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος χαρακτηρίζεται από το σήμα $h(n)$, το οποίο καλείται *απόκριση μοναδιαίου δείγματος* ή *κρουστική απόκριση*. Με άλλα λόγια σε ένα ΓΧΑ σύστημα αρκεί η γνώση μίας και μόνο συνάρτησης της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ για να περιγραφεί πλήρως η σχέση εισόδου $x(n)$ και εξόδου $y(n)$ του συστήματος από το άθροισμα της συνέλιξης.

Η πράξη η οποία συνδυάζει δύο σήματα $x(n)$ και $h(n)$ για το σχηματισμό του σήματος $y(n)$, καλείται *συνέλιξη* και συμβολίζεται ως

$$y(n) = h(n) \star x(n) \quad (2.4.40)$$

Η σχέση εισόδου - εξόδου αιτιατών ΓΧΑ συστημάτων διακριτού χρόνου είναι

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) \quad (2.4.41)$$

αφού $h(n) = 0, \quad n < 0$.

Αν η είσοδος είναι αιτιατό σήμα, η έξοδος δίνεται σε κάθε χρονική στιγμή n από το πεπερασμένο άθροισμα

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k), \quad 0 \leq n < \infty \quad (2.4.42)$$

Παράδειγμα 2.4.5

Να υπολογιστεί η έξοδος ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος διακριτού χρόνου που έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.4.43)$$

όταν η είσοδός του είναι το σήμα

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.4.44)$$

Λύση Το ΓΧΑ σύστημα και η είσοδος του περιγράφονται στο Σχήμα 2.19α. Στο Σχήμα 2.19β δίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος. Στο Σχήμα 2.19γ είναι η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης του συστήματος $h(-k)$. Στο Σχήμα 2.19δ η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει μετατοπιστεί κατά $n < 0, h(n-k)$.

1) Από το Σχήμα 2.19δ παρατηρούμε ότι για $n < 0$ το γινόμενο $x(k)h(n-k)$ είναι ίσο με μηδέν για κάθε τιμή του n μικρότερη του μηδενός. Έτσι, η έξοδος του συστήματος είναι:

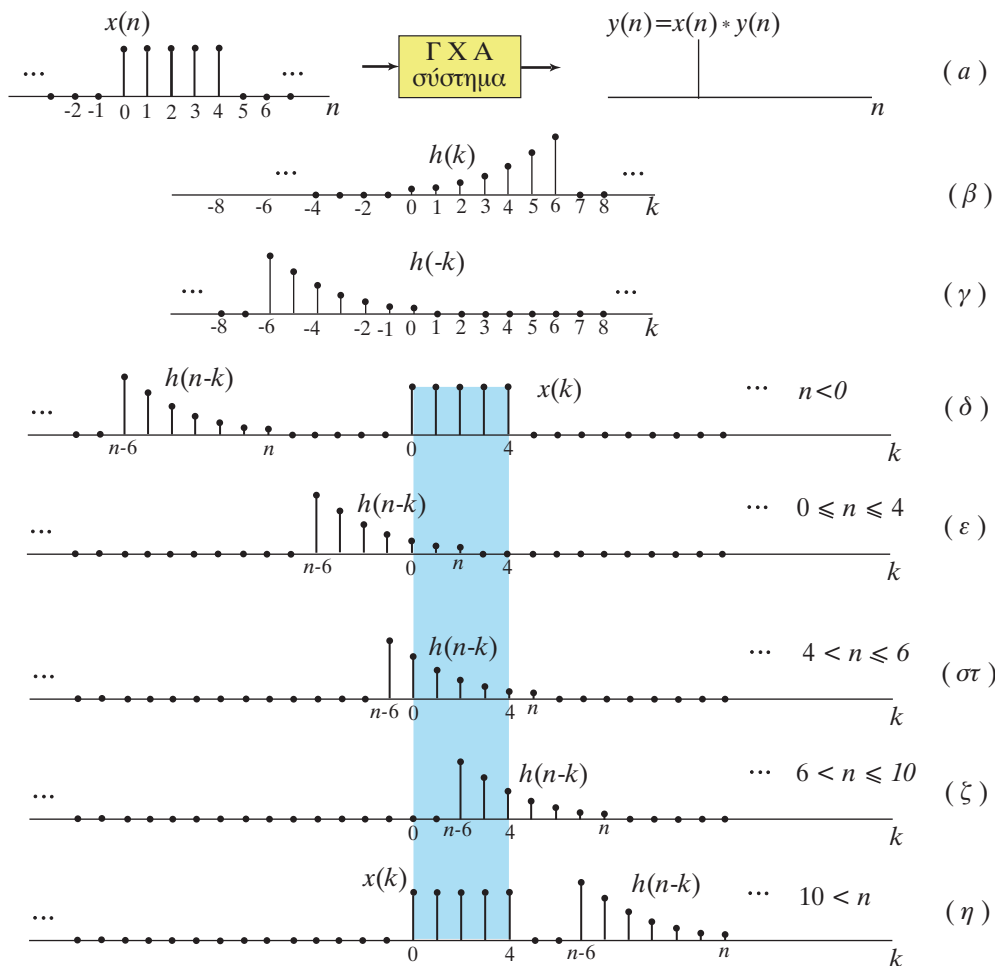
$$y(n) = 0 \quad (2.4.45)$$

2) Από το Σχήμα 2.19ε παρατηρούμε ότι για $0 \leq n \leq 4$ το γινόμενο $x(k)h(n-k)$ είναι:

$$x(k)h(n-k) = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.4.46)$$

έτσι, η έξοδος του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} \stackrel{n-k=r}{=} \sum_{r=0}^n \alpha^r \\ &= \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \end{aligned} \quad (2.4.47)$$



Σχήμα 2.19 Ο γραφικός προσδιορισμός της εξόδου ενός ΓΧΑ διακριτού συστήματος με τη βοήθεια του αθροίσματος της συνέλιξης. Στα σχήματα ε, στ και ζ δεν έχει σχεδιασθεί το σήμα εισόδου. Η σκιασμένη περιοχή προσδιορίζει την περιοχή στην οποία $x(k) \neq 0$.

3) Από το Σχήμα 2.19στ παρατηρούμε ότι για $4 < n \leq 6$ η έξοδος του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=0}^4 \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^4 (\alpha^{-1})^k = \alpha^n \frac{\alpha^{-4} - \alpha}{1 - \alpha} \\
 &= \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}
 \end{aligned} \tag{2.4.48}$$

4) Από το Σχήμα 2.19ζ παρατηρούμε ότι για $6 < n \leq 10$ η έξοδος του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k} \quad k-n+6=r \quad \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r = \alpha^6 \frac{\alpha^{10-n} - \alpha}{1 - \alpha} \\ &= \frac{\alpha^{16-n} - \alpha^7}{1 - \alpha} \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

5) Από το Σχήμα 2.19η παρατηρούμε ότι για $10 < n$ η έξοδος του συστήματος είναι:

$$y(n) = 0 \quad (2.4.50)$$

2.5 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΙΣΟΔΟΥΣ

2.5.1 Συνεχής περίπτωση

Γνωρίζουμε ότι η είσοδος $x(t)$ και η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος συνδέονται με το ολοκλήρωμα της συνέλιξης $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$. Αν η είσοδος του συστήματος είναι το εκθετικό μιγαδικό σήμα

$$x(t) = Ae^{st} \quad (2.5.1)$$

όπου s μιγαδικός αριθμός, τότε η έξοδος είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Ae^{st}e^{-s\tau}d\tau \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \right\} Ae^{st} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Τελικά,

$$y(t) = H(s)Ae^{st} \quad (2.5.3)$$

όπου

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (2.5.4)$$

Το $H(s)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός για την τιμή s του εκθετικού σήματος. Εάν απελευθερώσουμε το s και το αφήσουμε να μεταβάλλεται, τότε το $H(s)$ είναι μία μιγαδική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής s και ορίζει, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 6, το Μετασχηματισμό Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος $h(t)$ και καλείται *συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος*.

Αν $s = j\omega_0$, δηλαδή, η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t} \quad (2.5.5)$$

η έξοδος του συστήματος $y(t)$ είναι

$$y(t) = H(\omega_0)Ae^{j\omega_0 t} \quad (2.5.6)$$

όπου

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.5.7)$$

Το $H(\omega)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός για την τιμή ω του εκθετικού σήματος. Εάν η ω μεταβάλλεται, τότε το $H(\omega)$ είναι μία μιγαδική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής ω . Η συνάρτηση $H(\omega)$ εξαρτάται επίσης και από την κρουστική απόκριση του συστήματος $h(t)$. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3, η $H(\omega)$ ορίζει το *Μετασχηματισμό Fourier* της κρουστικής απόκρισης του συστήματος και ονομάζεται *απόκριση συχνότητας του συστήματος*. Η απόκριση συχνότητας του συστήματος γράφεται ως μιγαδική συνάρτηση με τη μορφή:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j \arg H(\omega)} \quad (2.5.8)$$

όπου $|H(\omega)|$ ονομάζεται *απόκριση πλάτους* και $\arg H(\omega)$ *απόκριση φάσης* του συστήματος. Έτσι, η έξοδος του συστήματος, αν το σήμα εισόδου είναι $x(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}$, είναι:

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(\omega_0)|e^{j \arg H(\omega_0)} \cdot Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} \\ &= |H(\omega_0)|Ae^{j(\omega_0 t + \phi + \arg H(\omega_0))} \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Παρατηρούμε ότι:

1. Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα με κυκλική συχνότητα ω_0 , η έξοδος του είναι επίσης μιγαδικό εκθετικό σήμα με την ίδια κυκλική συχνότητα ω_0 .
2. Το πλάτος της εξόδου είναι ίσο με το γινόμενο του πλάτους της εισόδου επί το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του συστήματος υπολογισμένου στην κυκλική συχνότητα ω_0 , δηλαδή, $A|H(\omega_0)|$.
3. Η φάση της εξόδου του συστήματος είναι μετατοπισμένη ως προς τη φάση της εισόδου και προσδιορίζεται ως άθροισμα της φάσης του σήματος εισόδου και της φάσης της απόκρισης συχνότητας προσδιορισμένης στην κυκλική συχνότητα ω_0 του σήματος εισόδου.

Με άλλα λόγια, ένα γραμμικό σύστημα μεταβάλλει το μέτρο και τη φάση του σήματος εισόδου, αλλά όχι την κυκλική συχνότητά του. *Η διατήρηση της κυκλικής συχνότητας* αποτελεί μία βασική ιδιότητα των γραμμικών συστημάτων. Ανακεφαλαιώνοντας, συμπεραίνουμε ότι, αν στην είσοδο ενός γραμμικού συστήματος εφαρμοστεί σήμα το οποίο αποτελείται από άθροισμα σημάτων απλών συχνοτήτων, τότε και η έξοδος του θα αποτελείται από υπέρθεση των ίδιων σημάτων με διαφορετικό πλάτος και μετατοπισμένων κατά φάση.

Αν η είσοδος του συστήματος είναι

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.5.10)$$

με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = |H(\omega_0)|A \cos(\omega_0 t + \phi + \arg H(\omega_0)) \quad (2.5.11)$$

για την οποία ισχύουν ανάλογες παρατηρήσεις, όπως και στην περίπτωση όπου η είσοδος του συστήματος είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα.

Από τα παραπάνω αναδεικνύεται η φυσική σημασία της απόκρισης συχνότητας και δικαιολογείται το όνομά της ως απόκριση συχνότητας του συστήματος.

Λόγω της βασικής ιδιότητας της διατήρησης της συχνότητας, που έχουν τα ΓΧΑ συστήματα, όταν διεγείρονται από μιγαδικά εκθετικά σήματα, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, είναι επιθυμητό στην προσπάθειά μας να βρούμε την απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος σε τυχαίο σήμα να προσδιορίσουμε τρόπους ανάπτυξης ενός τυχαίου σήματος σε άθροισμα εκθετικών μιγαδικών σημάτων. Έτσι, εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα της γραμμικότητας προκύπτει ότι η έξοδος του συστήματος θα είναι ίση με το άθροισμα των εκθετικών αυτών μιγαδικών σημάτων με τις ίδιες συχνότητες, των οποίων το πλάτος και η φάση έχουν υποστεί την αλλαγή που προκαλεί το σύστημα σε κάθε εκθετικό μιγαδικό σήμα, ανάλογα με τη συχνότητά του, και η οποία προσδιορίζεται από το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας του συστήματος για τη συχνότητα αυτή. Με τον τρόπο αυτό θα έχουμε τη δυνατότητα να επεξεργαστούμε σήματα πολύπλοκης μορφής με τη βοήθεια των απλουστέρων αυτών εκθετικών σημάτων.

2.5.2 Διακριτή περίπτωση

Γνωρίζουμε ότι η είσοδος $x(n)$ και η έξοδος $y(n)$ ενός διακριτού ΓΧΑ συστήματος συνδέονται με το άθροισμα της συνέλιξης $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k)$. Αν η είσοδος του συστήματος είναι το εκθετικό μιγαδικό σήμα απλής συχνότητας

$$x(n) = z^n \quad (2.5.12)$$

όπου $z = re^{j\Omega}$ μιγαδική μεταβλητή, τότε η έξοδος είναι

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot z^{n-k} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot z^{-k} \right] \cdot z^n$$

τελικά

$$y(n) = H(z) \cdot z^n \quad (2.5.13)$$

όπου

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot z^{-k} \quad (2.5.14)$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος λαμβάνεται από το ίδιο εκθετικό σήμα εισόδου διαβαθμισμένο με $H(z)$. Η συνάρτηση $H(z)$, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 7, είναι ο Μετασχηματισμός z της κρουστικής απόκρισης και καλείται *συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος*.

Αν θέσουμε $z = e^{j\Omega}$, δηλαδή, η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα

$$x(n) = e^{j\Omega n} \quad (2.5.15)$$

η έξοδος του συστήματος $y(n)$ δίνεται από τη

$$y(n) = H(\Omega)e^{j\Omega n} \quad (2.5.16)$$

όπου

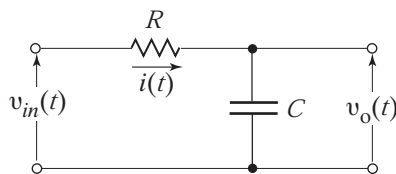
$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-j\Omega k} \quad (2.5.17)$$

Η συνάρτηση $H(\Omega)$ εξαρτάται από την κυκλική ψηφιακή συχνότητα και από τη συνάρτηση που περιγράφει την κρουστική απόκριση του συστήματος. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 5, η $H(\Omega)$ αποτελεί το *Μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου* της κρουστικής απόκρισης του συστήματος και ονομάζεται *απόκριση συχνότητας* του συστήματος.

Η *διατήρηση της συχνότητας* αποτελεί, επίσης, βασική ιδιότητα των γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου.

Παράδειγμα 2.5.1

Με τη βοήθεια της (2.5.6), να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του κυκλώματος του Σχήματος 2.20, του οποίου η είσοδος είναι η τάση $v_{in}(t)$ και έξοδος η τάση $v_o(t)$.



Σχήμα 2.20 Το κύκλωμα του Παραδείγματος 2.5.1.

Λύση Εφαρμόζοντας το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο του κυκλώματος έχουμε

$$Ri(t) + v_o(t) = v_{in}(t) \quad (2.5.18)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2.1.3) η (2.5.18) γράφεται

$$RC \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = v_{in}(t) \quad (2.5.19)$$

Αν η είσοδος του συστήματος είναι

$$v_{in}(t) = e^{j\omega t} \quad (2.5.20)$$

τότε, σύμφωνα με τη (2.5.6), η έξοδος του κυκλώματος είναι

$$v_o(t) = H(\omega)e^{j\omega t} \quad (2.5.21)$$

Και επειδή

$$\frac{dv_o(t)}{dt} = H(\omega)j\omega e^{j\omega t} \quad (2.5.22)$$

η (2.5.19) δίνει

$$RCH(\omega)j\omega e^{j\omega t} + H(\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \quad (2.5.23)$$

από την οποία υπολογίζεται η απόκριση συχνότητας του συστήματος

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad (2.5.24)$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί αναδεικνύεται η φυσική σημασία της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος.

Παράδειγμα 2.5.2

Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος είναι

$$H(\omega) = \frac{2}{2 + j\sqrt{3} \cdot \omega} \quad (2.5.25)$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος, αν η είσοδος είναι το σήμα

$$x(t) = 4e^{j2t} \quad (2.5.26)$$

και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις του πραγματικού μέρους του σήματος εισόδου και του σήματος εξόδου του συστήματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση Γνωρίζουμε ότι, αν η είσοδος ΓΧΑ συστήματος είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$, η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = |H(\omega_0)|Ae^{j(\omega_0 t + \phi + \arg H(\omega_0))} \quad (2.5.27)$$

Η κυκλική συχνότητα του σήματος εισόδου $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$ είναι $\omega_0 = 2$. Η απόκριση συχνότητας του συστήματος για $\omega_0 = 2$ είναι

$$H(2) = \frac{2}{2 + j\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{1}{4}(1 - j\sqrt{3}) \quad (2.5.28)$$

η οποία σε πολική μορφή γράφεται

$$H(2) = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}} \quad (2.5.29)$$

Έτσι, η έξοδος του συστήματος είναι

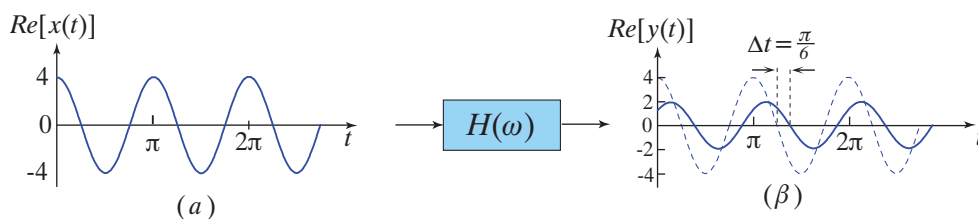
$$y(t) = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot 4e^{j2t} = 2e^{-j(2t-\frac{\pi}{3})} \quad (2.5.30)$$

Για το πραγματικό μέρος της εισόδου και της εξόδου έχουμε αντίστοιχα

$$\Re [x(t)] = 4 \cos(2t) \quad (2.5.31)$$

$$\Re [y(t)] = 2 \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (2.5.32)$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος έχει την ίδια συχνότητα με την είσοδο, πλάτος ίσο με το 1/2 του πλάτους της εισόδου και διαφορά φάσης με την είσοδο ίση με $-\pi/3$, δηλαδή, παρουσιάζει χρονική καθυστέρηση κατά $\Delta t = T(\Delta\phi/2\pi) = \pi/6$. Στο Σχήμα 2.21 έχει σχεδιαστεί το πραγματικό μέρος του σήματος εισόδου και εξόδου του συστήματος, στο οποίο παρατηρούμε τις αλλαγές που επιβάλλει το σύστημα στο πλάτος και τη φάση του σήματος εισόδου.



Σχήμα 2.21 Το πραγματικό μέρος (α) του σήματος εισόδου και (β) του σήματος εξόδου για το σύστημα του Παραδείγματος 2.5.2.

Σύνοψη Κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό δόθηκε η ερμηνεία της έννοιας “σύστημα” και η μαθηματική της έκφραση. Αναφέραμε τους τρόπους σύνδεσης συστημάτων και περιγράψαμε τις βασικές ιδιότητες των συστημάτων.

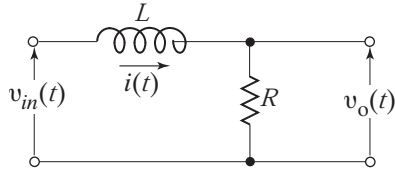
Παρατηρήσαμε ότι για να περιγραφεί πλήρως η σχέση εισόδου-εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος, με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης (ή του αθροίσματος της συνέλιξης), αρκεί η γνώση της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Είδαμε ότι, αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι ένα σήμα απλής συχνότητας, τότε και η αντίστοιχη έξοδος είναι σήμα της ίδιας συχνότητας, το οποίο έχει υποστεί αλλαγή, που επιβάλλει το σύστημα στο πλάτος και τη φάση του και η οποία προσδιορίζεται από τη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας του συστήματος.

Τέλος, ήρθαμε σε μία πρώτη γνωριμία με την έννοια του Μετασχηματισμού Fourier, του Μετασχηματισμού Laplace και του Μετασχηματισμού z , οι οποίοι θα μας απασχολήσουν σε επόμενα κεφάλαια.

2.6 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 2.1 Να βρεθεί η σχέση της τάσης εισόδου $v_{in}(t)$ και της τάσης εξόδου $v_o(t)$ για το κύκλωμα του Σχήματος 2.22.



Σχήμα 2.22 Το κύκλωμα του Προβλήματος 2.1.

- 2.2 Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από την παρακάτω σχέση εισόδου $x(t)$, εξόδου $y(t)$

$$y(t) = |x(t)| \quad (2.6.1)$$

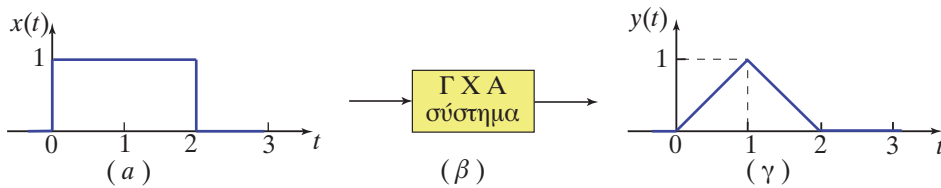
αναφέρεται ως *σύστημα πλήρους ανόρθωσης*. Να εξετάσετε αν το σύστημα είναι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και αιτιατό.

- 2.3 Να δείξετε ότι το σύστημα, στο οποίο η σχέση εισόδου $x(t)$ και εξόδου $y(t)$ είναι

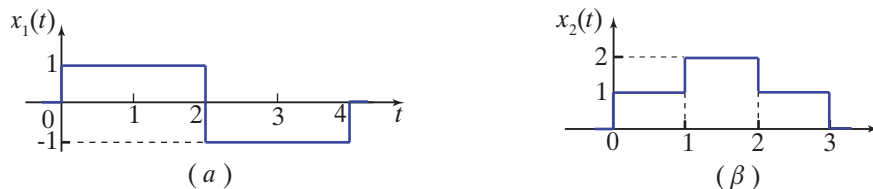
$$y(t) = cx^2(t) \quad (2.6.2)$$

είναι μη γραμμικό σύστημα.

- 2.4 Η έξοδος ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος (Σχήμα 2.23β) είναι ο τριγωνικός παλμός του Σχήματος 2.23γ, όταν η είσοδος είναι ο ορθογώνιος παλμός του Σχήματος 2.23α. Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος όταν η είσοδος είναι το σήμα $x_1(t)$ του Σχήματος 2.24α ή το σήμα $x_2(t)$ του Σχήματος 2.24β.



Σχήμα 2.23 Η είσοδος και η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος στο Πρόβλημα 2.4



Σχήμα 2.24 Οι εισόδου του ΓΧΑ συστήματος στο Πρόβλημα 2.4

- 2.5** Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από την παρακάτω σχέση εισόδου $x(t)$, εξόδου $y(t)$

$$y(t) = S \{x(t)\} = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (2.6.3)$$

αναφέρεται ως *ολοκληρωτής*. Να εξετάσετε αν το σύστημα είναι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο, αιτιατό και να προσδιοριστεί η κρουστική απόκρισή του.

- 2.6** Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από την παρακάτω σχέση εισόδου $x(t)$, εξόδου $y(t)$

$$y(t) = S \{x(t)\} = x(t) \cos(\omega_0 t) \quad (2.6.4)$$

αναφέρεται ως *διαμορφωτής*. Να εξετάσετε αν το σύστημα είναι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και αιτιατό και να προσδιοριστεί η κρουστική του απόκριση.

- 2.7** Η κρουστική απόκριση του κυκλώματος RC σε σειρά στο Σχήμα 2.3 είναι

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \quad (2.6.5)$$

όπου $\tau = RC$ η σταθερά χρόνου. Αν $\tau = 1 \text{ sec}$, να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος, όταν η είσοδος του είναι το σήμα

$$x(t) = u(t) - u(t - 2) \quad (2.6.6)$$

- 2.8** Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$$h(t) = u(t) - u(t - 2) \quad (2.6.7)$$

Με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος, όταν η είσοδος είναι

$$x(t) = u(t - 1) - u(t - 2) \quad (2.6.8)$$

- 2.9** Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$$h(t) = u(t - 1) - u(t - 3) \quad (2.6.9)$$

Με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος, όταν η είσοδος του είναι το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\pi t), & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.6.10)$$

- 2.10** Αν τα στοιχεία του κυκλώματος, που περιγράφεται στο Σχήμα 2.20, είναι $R = 10^3 \Omega$ και $C = 10^{-6} \text{F}$ να υπολογιστεί η έξοδος του, όταν η είσοδος του είναι το σήμα

$$x(t) = \sqrt{2} \sin \left(1000t + \frac{\pi}{3} \right) \quad (2.6.11)$$

- 2.11** Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$$h(n) = (0,9)^n u(n) \quad (2.6.12)$$

Με τη βοήθεια του αθροίσματος της συνέλιξης να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος, όταν η είσοδος είναι το διακριτό σήμα

$$x(n) = u(n) - u(n-4) \quad (2.6.13)$$

- 2.12** Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$$h(n) = [\underset{\uparrow}{3}, 2, 1] \quad (2.6.14)$$

όπου το βέλος προς τα πάνω δηλώνει το δείγμα για $n = 0$. Με τη βοήθεια του αθροίσματος της συνέλιξης να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος, όταν η είσοδος είναι το σήμα

$$x(n) = [\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4] \quad (2.6.15)$$

- 2.13** Να δείξετε ότι το σύστημα το οποίο περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) + 5 = x(t) \quad (2.6.16)$$

δεν είναι γραμμικό.

Βιβλιογραφία

- 2.1 Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, Λ. Κοφίδης, “Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων”, *Τυπωθήτω - Γιώργος Δαρδανός*, Αθήνα 2003.
- 2.2 Α. Μάργαρης, “Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου”, *Εκδόσεις Τζιόλα* 2012.
- 2.3 S. Haykin, B. Veen, “Signal and Systems”, *John & Wiley Sons, Inc.* 2003
- 2.4 A. V. Oppenheim, R. S. Willsky, I. T. Young, “Signal and Systems”, *Prentice - Hall Inc.*, N. Y., 1983.
- 2.5 R. E. Siemer, W. H. Tranter, D. R. Fannin, “Signals & Systems Continuous and Discrete”, *Prentice Hall*, 1998.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ - ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

Στην πράξη, πολλές φορές χρειάζεται να προσδιορίσουμε την έξοδο ενός συστήματος, όταν αυτό διεγείρεται από ένα σήμα. Στο προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος περιέχει τις ίδιες συχνότητες με το σήμα εισόδου, με διαφορετικό, όμως, μέτρο και φάση. Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαγάγουμε και θα μελετήσουμε μαθηματικά εργαλεία, τα οποία μας επιτρέπουν να αναλύουμε ένα σύνθετο σήμα σε σήματα απλών συχνοτήτων. Μία τέτοια προσέγγιση μας διευκολύνει ώστε να υπολογίσουμε την έξοδο ενός συστήματος, το οποίο διεγείρεται από ένα σύνθετο σήμα, με τη βοήθεια των αποκρίσεων του συστήματος στις επιμέρους συνιστώσες συγκεκριμένων συχνοτήτων. Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τις μεθόδους αυτές ώστε να αναλύσουμε ένα αριθμό σημάτων, τα οποία συναντάμε συχνά στην πράξη.

Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε ότι αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα ή το ημιτονοειδές σήμα, τότε η έξοδος του είναι σήμα της ίδιας συχνότητας με διαφορετικό πλάτος και φάση. Έτσι, παρατηρήσαμε ότι είναι πολύ εύκολο να προσδιορίσουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος, όταν το σήμα που εφαρμόζεται στην είσοδό του αναλυθεί σε σήματα συγκεκριμένης συχνότητας.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε και θα μελετήσουμε τρόπους ανάλυσης ενός σήματος σε σήματα συγκεκριμένης συχνότητας. Έτσι, αν το σήμα αυτό διεγείρει ένα σύστημα, εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα της γραμμικότητας, θα προσδιορίζουμε την έξοδο του συστήματος ως άθροισμα σημάτων που έχουν τις ίδιες συχνότητες με αυτές που περιέχει το σήμα εισόδου, των οποίων το πλάτος και η φάση έχει υποστεί αλλαγή που προκαλεί το σύστημα.

3.1 Η ΙΔΕΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

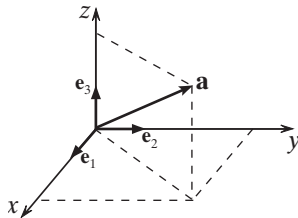
Η γέννηση και οι ρίζες της θεωρίας αυτής οφείλονται στο Γάλλο Μαθηματικό Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), ο οποίος εισήγαγε την ανάλυση μιας συνάρτησης σε συναρτήσεις συγκεκριμένων συχνοτήτων για να μελετήσει φαινόμενα διάδοσης της θερ-

μότητας. Η ανάλυση μιας σύνθετης ποσότητας σε απλούστερες συνιστώσες, με σκοπό η μελέτη ενός προβλήματος να γίνεται ευκολότερη, είναι μία γενικότερη μεθοδολογία. Για παράδειγμα, στη γραμμική άλγεβρα, ένα διάνυσμα αναλύεται σε μια βάση που περιγράφει το χώρο. Με αφορμή την παρατήρηση αυτή ας δούμε γιατί και όλα τα σήματα που ορίζονται σε ένα διάστημα $[a, b]$ μπορούν να περιγραφούν και ως διανύσματα. Πράγματι, ο γραμμικός συνδυασμός δύο ή περισσοτέρων σήματων δίνει ένα νέο σήμα στο ίδιο διάστημα. Επίσης, ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος με μια σταθερή ποσότητα δίνει ένα νέο σήμα στο ίδιο διάστημα. Εξετάζοντας τα σήματα ως διανύσματα σε ένα αντίστοιχο χώρο μας ανοίγεται ο δρόμος να αναλύσουμε ένα σήμα σε άθροισμα απλουστέρων σημάτων, στο διανυσματικό χώρο των σημάτων στο διάστημα $[a, b]$. Είναι σκόπιμο εδώ να θυμηθούμε μερικές βασικές έννοιες από τη γραμμική άλγεβρα και στη συνέχεια να ορίσουμε αντίστοιχες έννοιες στα σήματα.

Για παράδειγμα, ένα διάνυσμα στο χώρο των τριών διαστάσεων παριστάνεται με τη βοήθεια των προβολών του στα μοναδιαία διανύσματα του χώρου, τα οποία αποτελούν τη “βάση” του χώρου. Έτσι, το διάνυσμα \mathbf{a} μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \quad (3.1.1)$$

όπου \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 και \mathbf{e}_3 είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις τρεις βασικές διευθύνσεις του χώρου (Σχήμα 3.1). Το διάνυσμα \mathbf{a} μπορεί ισοδύναμα να παρασταθεί με την τριάδα συντεταγμένων (a_1, a_2, a_3)



Σχήμα 3.1 Ανάλυση διανύσματος.

Στο χώρο των n διαστάσεων, ο οποίος έχει βάση $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, κάθε διάνυσμα παριστάνεται ως

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i \quad (3.1.2)$$

Το διάνυσμα \mathbf{a} παριστάνεται, ισοδύναμα, από τις συντεταγμένες (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Η διάσταση του χώρου n , είναι ο αριθμός των μοναδιαίων διανυσμάτων τα οποία είναι αναγκαία και ικανά για να εκφράσουν κάθε διάνυσμα του χώρου. Τα διανύσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ είναι ανεξάρτητα, αν κανένα από αυτά δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων n διαστάσεων $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i$ και $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{e}_i$, συμβολίζεται με $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ και ορίζεται από τη σχέση

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (3.1.3)$$

όπου \mathbf{a}^T είναι το ανάστροφο διάνυσμα του \mathbf{a} . Το εσωτερικό γινόμενο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

- Είναι θετικά ορισμένο $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$ όταν $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ και $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = 0$
- Αντιμεταθετική $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = (\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle)^*$
- Επιμεριστική $\langle (\mathbf{a} + \mathbf{b}), \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$
- Πολλαπλασιασμός με σταθερά $\langle c \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = c \cdot \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

υπενθυμίζεται ότι με “*” δηλώνεται ο συζυγής μιγαδικός. Δύο διανύσματα είναι ορθογώνια αν, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$.

Το μέτρο (*norm*) ή μήκος ενός διανύσματος \mathbf{a} συμβολίζεται με $\|\mathbf{a}\|$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που ορίζεται από τη σχέση

$$\|\mathbf{a}\| = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.4)$$

δηλαδή, το μέτρο ενός διανύσματος είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του εσωτερικού γινομένου του διανύσματος με τον εαυτό του.

Ένα σύνολο διανυσμάτων $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ καλείται ορθοκανονικό, αν αυτά είναι ανά δύο ορθογώνια και όλα έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα, δηλαδή,

$$\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_m \rangle = \delta(k - m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Για μία ορθοκανονική βάση διανυσμάτων οι συντεταγμένες (a_1, a_2, \dots, a_n) ενός διανύσματος \mathbf{a} είναι οι προβολές του \mathbf{a} σε κάθε ένα από τα διανύσματα βάσης και προσδιορίζονται από τη σχέση

$$a_i = \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_i \rangle \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1.6)$$

Έτσι, το \mathbf{a} γράφεται

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \quad (3.1.7)$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τις αντίστοιχες έννοιες για τα σήματα. Το εσωτερικό γινόμενο δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$, τα οποία ορίζονται στο διάστημα $[a, b]$, συμβολίζεται με $\langle x(t), y(t) \rangle$ και ορίζεται ως

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t)y^*(t)dt \quad (3.1.8)$$

όπου $y^*(t)$ είναι το συζυγές σήμα του $y(t)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο ορισμός αυτός πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες

- Είναι θετικά ορισμένο $\langle x(t), x(t) \rangle \geq 0$ και $\langle x(t), x(t) \rangle = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$
- Αντιμεταθετική $\langle x(t), y(t) \rangle = \langle y(t), x(t) \rangle^*$
- Επιμεριστική $\langle x(t) + y(t), z(t) \rangle = \langle x(t), z(t) \rangle + \langle y(t), z(t) \rangle$
- Πολλαπλασιασμός με σταθερά $\langle c \cdot x(t), y(t) \rangle = c \cdot \langle x(t), y(t) \rangle$

Δύο σήματα είναι *ορθογώνια* αν, $\langle x(t), y(t) \rangle = 0$.

Ένας μιγαδικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο καλείται και (μιγαδικός) *Ευκλείδειος χώρος*. Σε έναν Ευκλείδειο χώρο το εσωτερικό γινόμενο ορίζει ταυτόχρονα και το μέτρο (norm) ενός σήματος ως την τετραγωνική ρίζα του εσωτερικού γινομένου του σήματος με τον εαυτό του, δηλαδή,

$$\|x(t)\|_2 = \langle x(t), x(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \quad (3.1.9)$$

Προφανώς, ο $\|x(t)\|_2$ είναι πάντα ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Θεωρούμε ένα σύνολο ορθοκανονικών σημάτων $\{\psi_n(t)\}$, $n = 1, 2, \dots$ στο διάστημα $[a, b]$, για τα οποία ισχύει $\langle \psi_k(t), \psi_m(t) \rangle = \delta(k-m)$ και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n(t)$ συγκλίνει σε ένα σήμα $x(t)$ στο διάστημα $[a, b]$, δηλαδή,

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n(t) \quad (3.1.10)$$

Τότε οι συντελεστές x_n ικανοποιούν τη σχέση

$$x_n = \langle x(t), \psi_n(t) \rangle = \int_a^b x(t), \psi_n^*(t)dt \quad (3.1.11)$$

Η απόδειξη της (3.1.11) είναι προφανής, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (3.1.10) διαδοχικά με τις $\psi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$ και να ολοκληρώσουμε. Παρατηρούμε ότι στο γραμμικό Ευκλείδειο χώρο, που δημιουργούν τα σήματα $\psi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$ και τα όριά τους, η (3.1.10) είναι το *ανάπτυγμα* του σήματος $x(t)$ ως προς τα σήματα

$\psi_n(t)$ και x_n δεν είναι τίποτα άλλο από τις προβολές του $x(t)$ σε κάθε ένα από τα ορθοκανονικά σήματα $\psi_n(t)$.

Αν στην (3.1.8) θέσουμε ως όρια της ολοκλήρωσης $\pm\infty$, ο Ευκλείδειος χώρος που προκύπτει είναι γνωστός και ως χώρος $L_2(R)$, δηλαδή,

$$L_2(R) = \{x(t), t \in (-\infty, +\infty) : \|x(t)\|_2 < +\infty\}$$

Το μέτρο $\|\bullet\|_2$ είναι γνωστό και ως L_2 -μέτρο. Προφανώς, στο χώρο αυτό ανήκουν όλα τα σήματα πεπερασμένης ενέργειας.

Στις επόμενες παραγράφους θα ασχοληθούμε με συγκεκριμένα ορθοκανονικά σήματα και αναπτύγματα της μορφής (3.1.10). Μία αυστηρά μαθηματική μελέτη του $L_2(R)$ είναι πέρα από τα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στα σχετικά βιβλία της προτεινόμενης βιβλιογραφίας.

3.1.1 Το σύνολο των ορθογώνιων αναλογικών εκθετικών περιοδικών σημάτων

Όπως έχουμε δει στην Παράγραφο 1.4.1, το εκθετικό σήμα $e^{j\omega_0 t}$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi/\omega_0$. Τα εκθετικά σήματα, που έχουν κυκλική συχνότητα πολλαπλάσια της ω_0 ($e^{jk\omega_0 t}$, με $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), είναι επίσης περιοδικά με θεμελιώδεις περιόδους $T_k = 2\pi/k\omega_0$, αντίστοιχα. Παρατηρούμε, ότι η περίοδος $T = 2\pi/\omega_0$ είναι κοινή περίοδος για όλα τα σήματα $e^{jk\omega_0 t}$, με $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, αφού

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = k \cdot \frac{2\pi}{k\omega_0} = k \cdot T_k$$

Τα εκθετικά σήματα, $e^{jk\omega_0 t}$, με $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικά διάστημα $[t_0, t_0 + T]$, διάρκειας $T = 2\pi/\omega_0$, καλούνται *αρμονικά συσχετιζόμενα εκθετικά σήματα*, επειδή οι θεμελιώδεις κυκλικές συχνότητές τους είναι ακέραια πολλαπλάσια της κυκλικής συχνότητας ω_0 και σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο, δηλαδή, είναι ανά δύο ορθογώνια. Πράγματι, το εσωτερικό γινόμενο των εκθετικών σημάτων $e^{jk\omega_0 t}$ και $e^{jm\omega_0 t}$, είναι

$$\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \rangle = \int_0^T e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt$$

Αν $k \neq m$, τότε

$$\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \rangle = \frac{1}{j(k-m)\omega_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} \Big|_0^T = \frac{1}{j(k-m)\omega_0} [e^{j(k-m)\frac{2\pi}{T}T} - e^0] = 0$$

Ενώ, αν $k = m$, είναι

$$\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \rangle = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \int_0^T 1 dt = T \quad (3.1.12)$$

Τελικά,

$$\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \rangle = T\delta(k - m) \quad (3.1.13)$$

Η απόδειξη έγινε για το διάστημα $[0, T]$. Με όμοιο τρόπο γίνεται για οποιοδήποτε διάστημα με μήκος T .

3.1.2 Το σύνολο των ορθογώνιων αναλογικών τριγωνομετρικών περιοδικών σημάτων

Όπως έχουμε δει στην Παράγραφο 1.4.1, τα σήματα, $\cos(k\omega_0 t)$ και $\sin(k\omega_0 t)$ με $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ είναι περιοδικά με θεμελιώδεις περιόδους $T_k = 2\pi/k\omega_0$, αντίστοιχα. Παρατηρούμε, ότι η περίοδος $T = 2\pi/\omega_0$ είναι κοινή περίοδος για όλα τα σήματα. Τα σήματα, $\cos(k\omega_0 t)$ και $\sin(k\omega_0 t)$ $-\infty < k < \infty$, σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + T]$ διάρκειας $T = 2\pi/\omega_0$, καλούνται *αρμονικά συσχετιζόμενα* και σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο. Πράγματι, το εσωτερικό γινόμενο των τριγωνομετρικών σημάτων $\sin(k\omega_0 t)$ και $\sin(m\omega_0 t)$ είναι

$$\begin{aligned} \langle \sin(k\omega_0 t), \sin(m\omega_0 t) \rangle &= \int_0^T \sin(k\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(k - m)\omega_0 t] dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(k + m)\omega_0 t] dt \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, αν $k \neq m$ τα ολοκληρώματα στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι ίσα με μηδέν, δεδομένου ότι η ολοκλήρωση γίνεται σε μία περίοδο. Αντίθετα, για $k = m \neq 0$ το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με T , ενώ το δεύτερο είναι ίσο με μηδέν. Έτσι, το εσωτερικό γινόμενο των $\sin(k\omega_0 t)$ και $\sin(m\omega_0 t)$, είναι

$$\langle \sin(k\omega_0 t), \sin(m\omega_0 t) \rangle = \frac{T}{2} \delta(k - m) \quad (3.1.14)$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι σχέσεις

$$\langle \cos(k\omega_0 t), \cos(m\omega_0 t) \rangle = \frac{T}{2} \delta(k - m) \quad (3.1.15)$$

$$\langle \sin(k\omega_0 t), \cos(m\omega_0 t) \rangle = 0, \text{ για κάθε } k \text{ και } m \quad (3.1.16)$$

Η απόδειξη έγινε για το διάστημα $[0, T]$ και με όμοιο τρόπο γίνεται για οποιοδήποτε διάστημα με μήκος T .

3.2 ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ FOURIER - ΣΕΙΡΑ FOURIER

3.2.1 Εκθετική σειρά Fourier

Στην Ενότητα 3.1.1, είδαμε ότι τα εκθετικά στοιχειώδη σήματα, $e^{jk\omega_0 t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, που ορίζονται σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικά διάστημα διάρκειας $[t_0, t_0 + T]$, όπου $\omega_0 = 2\pi/T$ και t_0 πραγματικός αριθμός, σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο. Έστω τώρα ένα σήμα $x(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_0 + T]$, και ας υποθέσουμε ότι είναι δυνατόν να αναπτυχθεί σε άθροισμα εκθετικών στοιχειωδών σημάτων,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.2.1)$$

Η (3.2.1) αποτελεί την *εκθετική σειρά Fourier* ή το *ανάπτυγμα Fourier* του σήματος $x(t)$. Ο υπολογισμός των συντελεστών a_k γίνεται αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (3.2.1) με $e^{-jn\omega_0 t}$

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} \quad (3.2.2)$$

και ολοκληρώσουμε από t_0 έως $t_0 + T$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{t_0}^{t_0+T} e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} \rangle \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Λόγω της (3.1.13) όλοι οι όροι του αθροίσματος στο δεύτερο μέλος της (3.2.3) είναι ίσοι με το μηδέν, εκτός από τον όρο $k = n$, ο οποίος είναι ίσος με T . Από την (3.2.3), έχουμε λοιπόν ότι

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = T \cdot a_n, \quad \text{ή} \quad a_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.2.4)$$

Έτσι, αν υπάρχει το ανάπτυγμα Fourier του σήματος $x(t)$ χαρακτηρίζεται από το ζεύγος των εξισώσεων

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad t \in [t_0, t_0 + T] \quad \text{Εξίσωση σύνθεσης} \quad (3.2.5)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{Εξίσωση ανάλυσης} \quad (3.2.6)$$

Οι μιγαδικοί συντελεστές a_k καλούνται *συντελεστές Fourier* ή *φασματικές γραμμές* του $x(t)$ και ορίζουν το *φάσμα του σήματος*. Η σταθερά a_0 είναι η *συνεχής* ή η *σταθερά συνιστώσα του φάσματος*. Κάθε a_k αντιστοιχεί στην προβολή του σήματος $x(t)$ πάνω στην k στη ορθογώνια συνιστώσα $e^{jk\omega_0 t}$, δηλώνει το φασματικό περιεχόμενο του $x(t)$ στη συχνότητα $k\omega_0$ και ονομάζεται k στη *αρμονική συνιστώσα*. Πρέπει να τονιστεί ότι το ανάπτυγμα Fourier ισχύει μόνο στο διάστημα $[t_0, t_0 + T]$ και το εύρος T καθορίζει τη βασική συχνότητα.

Εάν παρατηρήσουμε την εκθετική σειρά Fourier (3.2.5), διαπιστώνουμε ότι στο άθροισμα υπάρχουν και αρνητικές τιμές του k , οι οποίες, βέβαια, αντιστοιχούν σε αρνητικές συχνότητες για τις οποίες δεν υπάρχει φυσική έννοια. Οι αρνητικές συχνότητες υπεισέρχονται στο άθροισμα επειδή αναπτύσσουμε το σήμα, που είναι μία πραγματική συνάρτηση, με τη βοήθεια μιγαδικών συναρτήσεων, $e^{jk\omega_0 t}$. Θα επανέλθουμε στο σημείο αυτό αργότερα.

3.2.2 Τριγωνομετρική σειρά Fourier

Στην Ενότητα 3.1.2, είδαμε ότι τα περιοδικά τριγωνομετρικά σήματα, $\cos(k\omega_0 t)$ και $\sin(k\omega_0 t)$, $-\infty < k < \infty$, που ορίζονται σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα διάρκειας $[t_0, t_0 + T]$, όπου $\omega_0 = 2\pi/T$ και t_0 πραγματικός αριθμός, σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο. Έστω τώρα ότι το σήμα $x(t)$, στο διάστημα $[t_0, t_0 + T]$, αναπτύσσεται σε άθροισμα τριγωνομετρικών σημάτων που το καθένα από αυτά έχει θεμελιώδη κυκλική συχνότητα $k\omega_0$, δηλαδή,

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega_0 t) \quad (3.2.7)$$

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές της *τριγωνομετρικής σειράς Fourier* (3.2.7), a_0 , b_1, b_2, \dots , και c_1, c_2, \dots , για οποιοδήποτε σήμα $x(t)$ για το οποίο υπάρχει ένα τέτοιο ανάπτυγμα. Για να προσδιορίσουμε τη σχέση με την οποία υπολογίζεται ο a_0 ολοκληρώνουμε την (3.2.7) από t_0 έως $t_0 + T$ και παρατηρούμε ότι όλα τα ολοκληρώματα στο δεύτερο μέλος, εφόσον η ολοκλήρωση γίνεται σε μία περίοδο, είναι ίσα με το μηδέν, εκτός από το πρώτο το οποίο είναι ίσο με T . Έτσι, ο συντελεστής a_0 δίνεται από την

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (3.2.8)$$

και είναι ίσος με τη *μέση τιμή* του σήματος.

Ο υπολογισμός των συντελεστών, b_k , γίνεται αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (3.2.7) με $\cos(n\omega_0 t)$ και ολοκληρώσουμε από t_0 έως $t_0 + T$, ως εξής

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} a_0 \cos(n\omega_0 t) dt \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{T}{2} b_n \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

όπου αλλάξαμε τη σειρά ολοκλήρωσης και άθροισης. Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της (3.2.9) είναι ίσο με μηδέν. Επιπλέον, λόγω της (3.1.16) όλα τα ολοκληρώματα στο δεύτερο άθροισμα της (3.2.9) είναι ίσα με μηδέν, ενώ λόγω της (3.1.15) από τα ολοκληρώματα στο πρώτο άθροισμα, μόνο το ολοκλήρωμα για $k = n$ είναι ίσο με $T/2$, ενώ όλα τα άλλα είναι ίσα με μηδέν. Έτσι, οι συντελεστές b_n δίνονται από την

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2.10)$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκεται ότι οι συντελεστές c_n προσδιορίζονται από την

$$c_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2.11)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η τριγωνομετρική αναπαράσταση Fourier των περι-οδικών σημάτων χαρακτηρίζεται από τις εξισώσεις σύνθεσης και ανάλυσης

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega_0 t), \quad t \in [t_0, t_0 + T] \quad (3.2.12)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\ c_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Με τη βοήθεια γνωστής τριγωνομετρικής ταυτότητας έχουμε

$$b_k \cos(k\omega_0 t) + c_k \sin(k\omega_0 t) = A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

όπου

$$A_k = \sqrt{b_k^2 + c_k^2} \text{ και } \theta_k = -\tan^{-1} \frac{c_k}{b_k}$$

Έτσι, το τριγωνομετρικό ανάπτυγμα Fourier (3.2.12) μπορεί να γραφεί και ως

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (3.2.14)$$

Από την (3.2.14) παρατηρούμε ότι το σήμα $x(t)$ έχει αναλυθεί σε ένα άθροισμα συνημίτονων, κάθε ένα από τα οποία έχει διαφορετικό πλάτος και φάση. Επίσης, αξ σημειωθεί ότι εδώ δεν υπεισέρχονται αρνητικές συχνότητες. Η συνεισφορά κάθε συχνότητας στο άθροισμα προσδιορίζεται από την τιμή του συντελεστή A_k , του αντίστοιχου συνημίτονου. Αν οι συντελεστές των όρων με χαμηλές συχνότητες είναι σχετικά μεγαλύτεροι από τους συντελεστές των όρων με υψηλές συχνότητες, τότε η ταχύτητα μεταβολής του σήματος ως προς το χρόνο είναι μικρή και το σήμα χαρακτηρίζεται ως σήμα *χαμηλών συχνοτήτων*. Αντίθετα, αν οι συντελεστές των όρων με χαμηλές συχνότητες είναι σχετικά μικρότεροι από τους συντελεστές των όρων με υψηλές συχνότητες, τότε η ταχύτητα μεταβολής του σήματος ως προς το χρόνο είναι μεγάλη και το σήμα χαρακτηρίζεται ως σήμα *υψηλών συχνοτήτων*. Φυσικά, οι έννοιες χαμηλών ή υψηλών συχνοτήτων είναι έννοιες σχετικές και εξαρτώνται από την κάθε εφαρμογή.

3.2.3 Σειρές Fourier περιοδικών σημάτων

Μέχρι τώρα ορίσαμε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός σήματος σε ένα διάστημα $[t_0, t_0 + T]$. Έξω από το διάστημα αυτό η σειρά Fourier δεν συγκλίνει κατ' ανάγκη στο σήμα $x(t)$. Ας δούμε όμως τι γίνεται, εάν το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο T , δηλαδή, $x(t) = x(t+T)$. Το ανάπτυγμα Fourier του $x(t)$ σε ένα χρονικό διάστημα εύρους T , ίσο με μία περίοδο, είναι $x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$ με $\omega_0 = 2\pi/T$. Επειδή $e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\omega_0(t+T)}$, η σειρά Fourier είναι περιοδική με περίοδο ίση με την περίοδο του σήματος, άρα συγκλίνει στο $x(t)$ σε όλο το διάστημα $-\infty < k < \infty$. Το ίδιο ισχύει και για την τριγωνομετρική σειρά Fourier. Σημειώνουμε ότι, όταν το σήμα είναι περιοδικό, η ολοκλήρωση στις εξισώσεις ανάλυσης μπορεί να γίνει σε ένα αυθαίρετο διάστημα εύρους T .

3.2.4 Ύπαρξη σειράς Fourier

Το ερώτημα που τώρα τίθεται είναι εάν και κάτω από ποιες προϋποθέσεις ένα σήμα μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier. Μέχρι τώρα απλώς υποθέσαμε ότι το ανάπτυγμα αυτό υπάρχει. Αποδεικνύεται ότι, αν πληρούνται ορισμένες συνθήκες υπάρχει το ανάπτυγμα ενός σήματος σε σειρά Fourier.

Ικανή Συνθήκη 1. Η συνάρτηση (σήμα) $x(t)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο διάστημα εύρους T , δηλαδή,

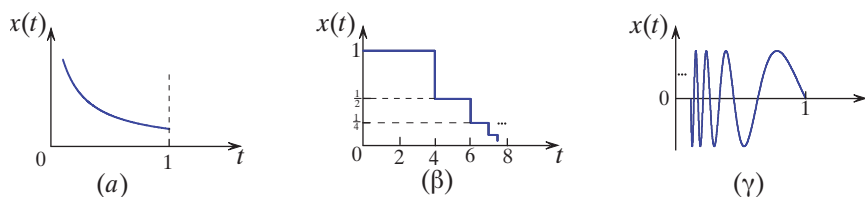
$$\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < +\infty \tag{3.2.15}$$

Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει ότι κάθε συντελεστής a_k είναι πεπερασμένος. Πράγματι, για κάθε συντελεστή a_k είναι

$$|a_k| \leq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)e^{-jk\omega_0 t}| dt \leq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt$$

και λόγω της (3.2.15), έχουμε $|a_k| < \infty$. Ένα σήμα το οποίο παραβαίνει τη συνθήκη αυτή είναι το σήμα του Σχήματος 3.2α

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1$$



Σχήμα 3.2 Σήματα το οποία δεν ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet.

Ικανή Συνθήκη 2. Η συνάρτηση (σήμα), $x(t)$, σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα πρέπει να είναι συνεχής ή περιέχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών, καθεμία από τις οποίες είναι πεπερασμένου ύψους. Ένα σήμα στο διάστημα $[0, 8]$ το οποίο ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη, ενώ παραβαίνει τη δεύτερη συνθήκη είναι το σήμα $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 4 \\ 1/2, & 4 \leq t < 6 \\ 1/4, & 6 \leq t < 7 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Στο Σχήμα 3.2β βλέπουμε το γράφημα του σήματος $x(t)$. Παρατηρούμε ότι το εμβαδό κάτω από τη $x(t)$ σε χρονικό διάστημα $T = 8$ είναι μικρότερο από 8 με αποτέλεσμα η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται.

Ικανή Συνθήκη 3. Η συνάρτηση (σήμα), $x(t)$ να είναι φραγμένης κύμανσης, δηλαδή, να υπάρχει πεπερασμένος αριθμός μεγίστων και ελαχίστων στο διάστημα. Ένα

σήμα το οποίο ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη και παραβαίνει την τρίτη είναι το σήμα του Σχήματος 3.2γ

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1$$

Οι συνθήκες, αυτές είναι γνωστές ως *συνθήκες Dirichlet*. Συναρτήσεις που πληρούν τις συνθήκες 2 και 3 χαρακτηρίζονται ως *τμηματικά ομαλές*. Εάν ένα σήμα πληροί τις συνθήκες Dirichlet, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier του.

Με το παράδειγμα που ακολουθεί θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε τη φυσική σημασία της εκθετικής σειράς Fourier και να προσδιορίσουμε τη σχέση της με τη τριγωνομετρική σειρά Fourier.

Παράδειγμα 3.2.1

Θεωρούμε το περιοδικό σήμα $x(t)$ με θεμελιώδη κυκλική συχνότητα 2π , το οποίο δίνεται από την

$$x(t) = \sum_{k=-5}^{+5} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.2.16)$$

όπου $a_0 = 1$, $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$, $a_2 = a_{-2} = 0$, $a_3 = a_{-3} = \frac{1}{6}$, $a_4 = a_{-4} = 0$ και $a_5 = a_{-5} = \frac{1}{10}$.

Με αντικατάσταση των συντελεστών στην (3.2.16) έχουμε

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} (e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{6} (e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) + \frac{1}{10} (e^{j10\pi t} + e^{-j10\pi t}) \quad (3.2.17)$$

και με τη βοήθεια της ταυτότητας του Euler το σήμα γράφεται

$$x(t) = 1 + \cos(2\pi t) + \frac{1}{3} \cos(6\pi t) + \frac{1}{5} \cos(10\pi t) \quad (3.2.18)$$

Η (3.2.18) αποτελεί το τριγωνομετρικό ανάπτυγμα του $x(t)$. Η κατασκευή του σήματος $x(t)$, από αρμονικά συνημιτονοειδή σήματα, φαίνεται στο Σχήμα 3.3.

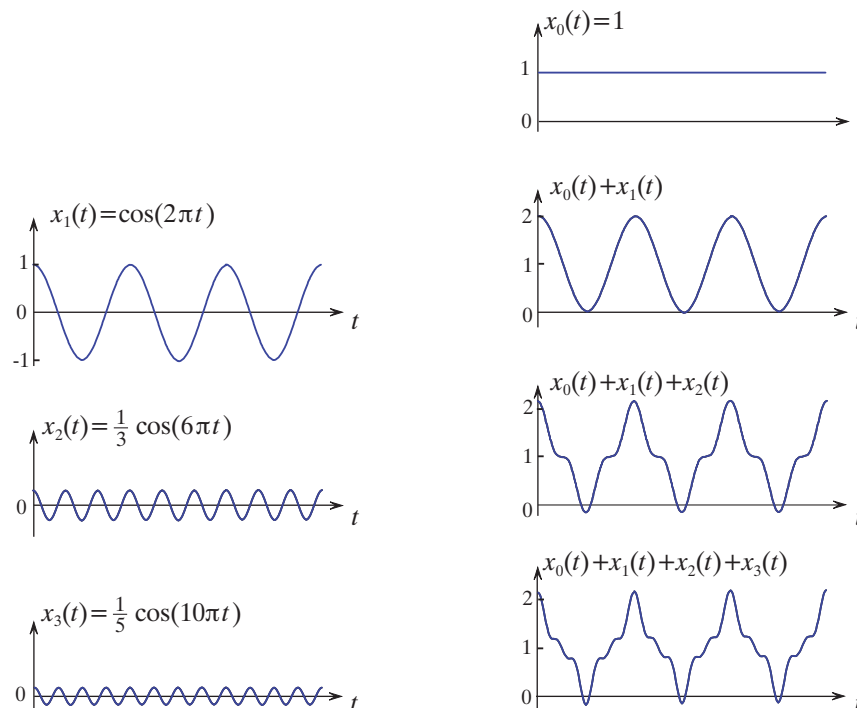
Θα δούμε ότι τα συμπεράσματα του Παραδείγματος 3.2.1 γενικεύονται για κάθε πραγματικό σήμα. Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό, τότε $x^*(t) = x(t)$ επομένως

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

δηλαδή, προκύπτει ότι

$$a_{-k}^* = a_k \quad \text{ή} \quad a_k^* = a_{-k} \quad (3.2.19)$$

Αν οι συντελεστές Fourier a_k είναι πραγματικοί αριθμοί, θα είναι $a_k = a_{-k}$.



Σχήμα 3.3 Κατασκευή του σήματος $x(t)$ από αρμονικά συσχετιζόμενα συνημίτονα.

Αν διασπάσουμε το άθροισμα στο δεύτερο μέλος της (3.2.5), έχουμε

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k e^{jn\omega_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + a_k e^{jk\omega_0 t} \right] \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right]
 \end{aligned}$$

και με τη βοήθεια της (3.2.19) και επειδή $\Re\{z\} = (z + z^*)/2$ έχουμε

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re \left[a_k e^{jk\omega_0 t} \right] \quad (3.2.20)$$

Αν εκφράσουμε το a_k σε πολικές συντεταγμένες $a_k = |a_k|e^{j\theta_k}$, έχουμε

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\Re \left[|a_k| e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)} \right] \quad (3.2.21)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (3.2.22)$$

όπου $A_k = 2|a_k|$. Παρατηρήστε ότι για τη δημιουργία του συνημιτόνου συχνότητας $k\omega_0$ συμμετέχουν η αντίστοιχη θετική και αρνητική συχνότητα του εκθετικού αναπτύγματος. Από τις (3.2.6), (3.2.10) και (3.2.11) με τη βοήθεια της ταυτότητας του Euler έχουμε $2a_k = b_k - jc_k$. Έτσι, αν αντικαταστήσουμε το a_k στην (3.2.20), έχουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Re [(b_k - jc_k)(\cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t))] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \cos(k\omega_0 t) + c_k \sin(k\omega_0 t)] \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Τα τριγωνομετρικά αναπτύγματα Fourier, που περιγράφουν οι (3.2.22) και (3.2.23), για πραγματικά σήματα είναι ισοδύναμα με την εκθετική σειρά Fourier και περιέχουν μόνο θετικές συχνότητες. Η ανάπτυξη, όμως, σε μιγαδικά σήματα είναι πιο εύκολη από μαθηματική άποψη και με αυτήν κυρίως εργαζόμαστε. Στον Πίνακα 3.1 υπάρχουν οι εξισώσεις σύνθεσης της εκθετικής και της τριγωνομετρικής σειράς Fourier ενός περιόδου σήματος και οι σχέσεις μεταξύ των αντίστοιχων συντελεστών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1 ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$a_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$
$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$	$A_k = 2 a_k $
$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \cos(k\omega_0 t) + c_k \sin(k\omega_0 t)]$	$2a_k = b_k - jc_k$

Παράδειγμα 3.2.2

Να υπολογιστεί η μέση ισχύς κάθε όρου της εκθετικής σειράς Fourier (3.2.5).

Λύση Από την (1.2.16) η μέση ισχύς σήματος είναι

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (3.2.24)$$

Αν η ολοκλήρωση γίνει σε χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + T]$, έχουμε

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt \quad (3.2.25)$$

Ο $k^{\text{στος}}$ όρος του μιγαδικού αναπτύγματος Fourier, $e^{jk\omega_0 t}$ προσφέρει στο άθροισμα μέση ισχύ

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} a_k e^{jk\omega_0 t} \cdot a_k^* e^{-jk\omega_0 t} dt = |a_k|^2 \quad (3.2.26)$$

3.2.5 Ταυτότητα του Parseval

Η ολική μέση ισχύς ενός περιοδικού σήματος είναι ίση με το άθροισμα των ισχύων όλων των όρων της εκθετικής σειράς Fourier, δηλαδή

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad (3.2.27)$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται *ταυτότητα του Parseval* και εκφράζει τη δυνατότητα υπολογισμού της ισχύος στο πεδίο χρόνου και στο πεδίο συχνοτήτων.

Απόδειξη

Η (3.2.25) με τη βοήθεια της εξίσωσης ανάλυσης δίνει διαδοχικά

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* a_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό λόγω της (3.2.19), έχουμε

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt = |a_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad (3.2.29)$$

Παράδειγμα 3.2.3

Να υπολογιστεί η μέση ισχύς κάθε όρου της τριγωνομετρικής σειράς Fourier (3.2.14).

Λύση Ο $k^{\text{στος}}$ όρος της (3.2.14) είναι ο $A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$ και προσφέρει ισχύ

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} A_k^2 \cos^2(k\omega_0 t + \theta_k) dt \\ &= \frac{A_k^2}{T} \int_{\langle T \rangle} \frac{1 + \cos 2(k\omega_0 t + \theta_k)}{2} dt \\ &= \frac{A_k^2}{2T} \int_{\langle T \rangle} dt + \frac{A_k^2}{2T} \int_{\langle T \rangle} \cos 2(k\omega_0 t + \theta_k) dt \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

επειδή το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με T και το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ίσο με μηδέν, έχουμε

$$\mathcal{P}_k = \frac{A_k^2}{2} \quad (3.2.31)$$

Η μέση ισχύς του σήματος λόγω της (3.2.31) θα είναι

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt = |a_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \quad (3.2.32)$$

που προκύπτει και από την (3.2.29) για $A_k = 2|a_k|$. Αν εκφράσουμε το a_k στην (3.2.29) σε καρτεσιανές συντεταγμένες $2a_k = b_k - jc_k$, έχουμε

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^2 + c_k^2) \quad (3.2.33)$$

Από τα Παραδείγματα 3.2.2 και 3.2.3 έχουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις

1. Για πραγματικά σήματα, επειδή $a_k^* = a_{-k}$ έχουμε $|a_k| = |a_{-k}|$. Έτσι, η ισχύς της $k^{\text{στης}}$ αρμονικής, $\mathcal{P}_k = |a_k|^2$, στην εκθετική σειρά Fourier (3.2.5) είναι ίση με την ισχύ της $-k^{\text{στης}}$ αρμονικής, $\mathcal{P}_{-k} = |a_{-k}|^2$.
2. Για πραγματικά σήματα ισχύει ότι $A_k = 2|a_k|$, δηλαδή τα πλάτη του τριγωνομετρικού αναπτύγματος είναι ίσα με το διπλάσιο των αντίστοιχων συντελεστών του εκθετικού αναπτύγματος για τις θετικές τιμές του k . Επομένως, η ισχύς της $k^{\text{στης}}$ αρμονικής στην τριγωνομετρική σειρά Fourier (3.2.22), $\mathcal{P}_k = A_k^2/2$, είναι ίση με το άθροισμα της ισχύος της $k^{\text{στης}}$ αρμονικής και της $-k^{\text{στης}}$ αρμονικής στην εκθετική σειρά. Η ύπαρξη αρνητικής συχνότητας για πραγματικά σήματα είναι απόρροια της αναπαράστασης του σήματος με τη βοήθεια μιγαδικών σημάτων και έχει ως αποτέλεσμα να μοιράζει εξίσου την ισχύ μεταξύ θετικής και αρνητικής αρμονικής. Στην πραγματικότητα το αρνητικό μέρος του φάσματος δεν μας παρέχει καμιά πληροφορία, πράγμα που επιβεβαιώνεται από τις εξισώσεις (3.2.22) και (3.2.23). Φυσικά, αυτό δεν ισχύει για μιγαδικά σήματα.

Παράδειγμα 3.2.4

Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier του σήματος $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.

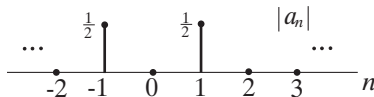
Λύση Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler το σήμα γράφεται

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \quad (3.2.34)$$

Η σύγκριση της τελευταίας εξίσωσης με την εξίσωση σύνθεσης δίνει

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}, \quad a_k = 0, \quad k = 0, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.2.35)$$

στο Σχήμα 3.4 έχουν σχεδιαστεί οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier.



Σχήμα 3.4 Οι συντελεστές Fourier του σήματος $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.

Παράδειγμα 3.2.5

Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier του σήματος $x(t) = \sin(\omega_0 t)$.

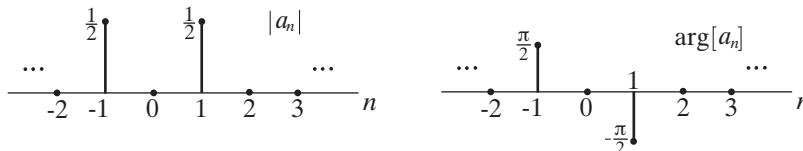
Λύση Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler το σήμα γράφεται

$$x(t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} \tag{3.2.36}$$

Η σύγκριση της τελευταίας εξίσωσης με την εξίσωση σύνθεσης δίνει

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad a_k = 0, \quad k = 0, \pm 2, \pm 3, \dots \tag{3.2.37}$$

στο Σχήμα 3.5 έχει σχεδιαστεί το μέτρο και η φάση των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier.



Σχήμα 3.5 Το μέτρο και η φάση των συντελεστών Fourier του σήματος $x(t) = \sin(\omega_0 t)$.

Παράδειγμα 3.2.6

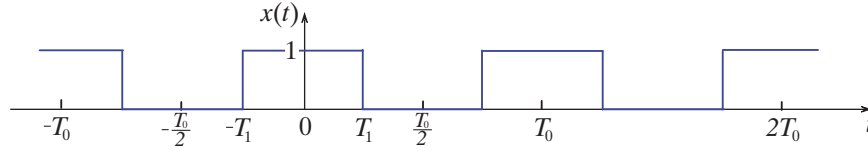
Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς και της τριγωνομετρικής σειράς Fourier για το περιοδικό ορθογώνιο σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T_0/2 \end{cases} \tag{3.2.38}$$

Λύση Στο Σχήμα 3.6 έχει σχεδιαστεί το περιοδικό ορθογώνιο σήμα. Παρατηρούμε ότι το σήμα έχει θεμελιώδη περίοδο T_0 και κυκλική συχνότητα $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Οι συντελεστές Fourier υπολογίζονται με τη βοήθεια της εξίσωσης ανάλυσης, όπου η ολοκλήρωση γίνεται από $-T_0/2$ έως $T_0/2$.

Έτσι, για $k = 0$ έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T_0} \tag{3.2.39}$$



Σχήμα 3.6 Το περιοδικό ορθογώνιο σήμα του Παραδείγματος 3.2.6.

ενώ για $k \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= -\frac{1}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} \\
 &= \frac{1}{jk\omega_0 T_0} (e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}) \\
 &= \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0}
 \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

και επειδή $\omega_0 T_0 = 2\pi$, έχουμε

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \tag{3.2.41}$$

Για την περίπτωση, όπου $T_0 = 4T_1$, το $x(t)$ είναι συμμετρικό ορθογώνιο σήμα, δεδομένου ότι ισχύει ότι $\omega_0 T_1 = \pi/2$ οι συντελεστές Fourier δίνονται από τη σχέση

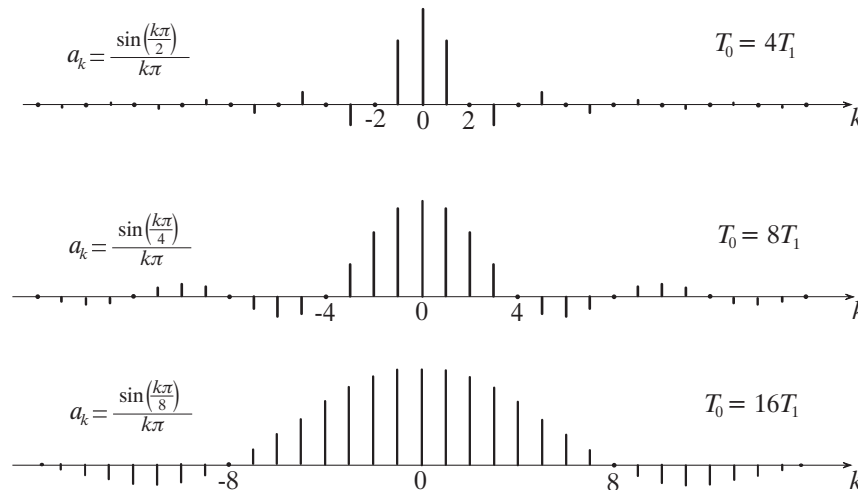
$$a_k = \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}, \quad k \neq 0 \text{ και } a_0 = \frac{1}{2} \tag{3.2.42}$$

Έτσι, $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi}$, $a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3\pi}$, $a_5 = a_{-5} = \frac{1}{5\pi}$, ... και $a_k = 0$, αν k άρτιος.

Στο Σχήμα 3.7 έχουν σχεδιαστεί οι συντελεστές Fourier για το περιοδικό ορθογώνιο σήμα, αν το T_1 είναι σταθερό, και για διαφορετικές τιμές στην περίοδο T_0 .

Με τη βοήθεια των (3.2.13) υπολογίζουμε τους συντελεστές της τριγωνομετρικής σειράς Fourier

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2T_1}{T_0}, \\
 b_k &= \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \text{ για } k = 1, 3, \dots \text{ και } b_k = 0, \text{ για } k = 2, 4, \dots \\
 c_k &= 0, \text{ για } k = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{3.2.43}$$



Σχήμα 3.7 Οι συντελεστές Fourier για το περιοδικό ορθογώνιο σήμα για σταθερό T_1 και διαφορετικές τιμές στην περίοδο T_0 .

3.2.6 Φαινόμενο Gibbs

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει αν προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε το περιοδικό σήμα $x(t)$ από το πεπερασμένο άθροισμα

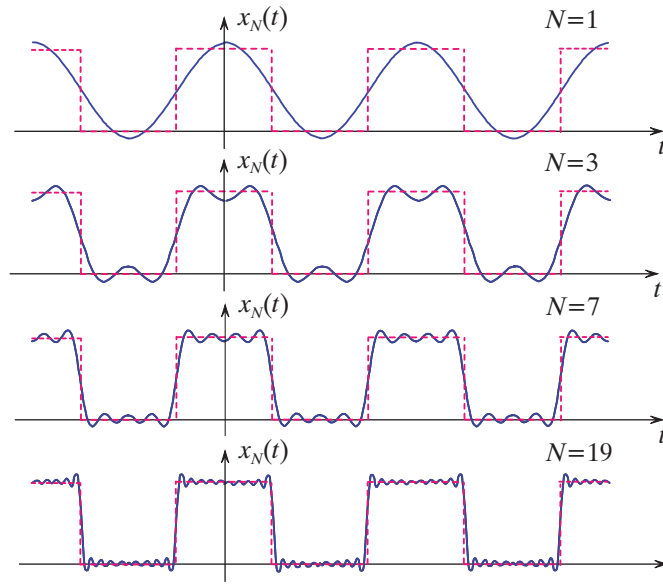
$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{3.2.44}$$

στο οποίο χρησιμοποιούνται η συνεχής και μόνο $2N$ αρμονικές συνιστώσες του φάσματος. Το σφάλμα προσέγγισης είναι $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$. Στο Σχήμα 3.8 έχουμε σχεδιάσει την προσέγγιση του περιοδικού ορθογώνιου σήματος από την (3.2.44) για διάφορες τιμές της παραμέτρου N .

Η προσέγγιση ενός σήματος, $x(t)$, το οποίο παρουσιάζει ασυνέχειες πεπερασμένου ύψους, από ένα άθροισμα με σήματα συγκεκριμένων συχνοτήτων της μορφής $e^{jk\omega_0 t}$, τα οποία είναι συνεχείς συναρτήσεις, δημιουργεί στο σημείο ασυνέχειας του σήματος $x(t)$ ταλαντώσεις. Επιπλέον, στα σημεία ασυνέχειας το γράφημα του σήματος $x_N(t)$ διέρχεται από το μέσο της ασυνέχειας που παρουσιάζει το σήμα $x(t)$ στο σημείο αυτό, δηλαδή μπορεί να αποδειχθεί

$$x_N(t) = \frac{1}{2} [x(t^-) + x(t^+)] \tag{3.2.45}$$

όπου $x(t^-)$ και $x(t^+)$ είναι τα όρια του σήματος $x(t)$ από τα αριστερά και δεξιά, αντίστοιχα, στο σημείο ασυνέχειας.



Σχήμα 3.8 Η προσέγγιση του περιοδικού ορθογώνιου σήματος από το μερικό άθροισμα (3.2.44) για διάφορες τιμές της παραμέτρου N .

Το πλάτος των ταλαντώσεων είναι ανεξάρτητο του πλήθους των συχνοτήτων που συνεισφέρουν στην προσέγγιση του σήματος $x(t)$ από τη (3.2.44). Όσο το N αυξάνεται τόσο περισσότερες συχνότητες συνεισφέρουν στην προσέγγιση του σήματος. Όταν $N \rightarrow \infty$, τότε όλες οι αρμονικές συχνότητες λαμβάνουν μέρος και το σήμα $x(t)$ ανακτάται πλήρως. Αντίθετα, αν το N είναι πεπερασμένο, υπάρχουν συχνότητες που δε λαμβάνονται υπόψη στο άθροισμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να παρατηρούνται ταλαντώσεις στο σημείο ασυνέχειας.

Σε αντίθεση με το πλάτος των ταλαντώσεων που παραμένει αναλλοίωτο όσο το N αυξάνεται, το εύρος της περιοχής, στην οποία εντοπίζονται οι ταλαντώσεις, τείνει στο μηδέν. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως *φαινόμενο Gibbs*.

3.3 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Στην προηγούμενη ενότητα, είδαμε πως ένα περιοδικό σήμα μπορεί να αναπτυχθεί στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ σε μία σειρά Fourier, δηλαδή, να παρασταθεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός απείρων αρμονικών εκθετικών σημάτων. Στην ενότητα αυτή, θα δούμε ότι τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να επεκταθούν και σε μη περιοδικά σήματα, στο διάστημα $(-\infty, \infty)$. Επισημαίνουμε, για άλλη μία φορά, ότι για μη περιοδικά σήματα το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier είναι δυνατό σε πεπερασμένου εύρους διαστήματα.

Στο Παράδειγμα 3.2.6 είδαμε ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier του περιοδικού ορθογώνιου σήματος είναι

$$a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0} \quad (3.3.1)$$

όπου T_0 είναι η περίοδος και $\omega_0 = 2\pi/T_0$ η κυκλική συχνότητα. Υπενθυμίζεται ότι οι συντελεστές Fourier a_k ή φασματικές γραμμές του σήματος προσδιορίζουν τη συνεισφορά κάθε συχνότητας στο ανάπτυγμα Fourier του σήματος όπως επίσης ότι αποτελούν το φάσμα του σήματος, το οποίο για το λόγο αυτό χαρακτηρίζεται ως *γραμμικό φάσμα*.

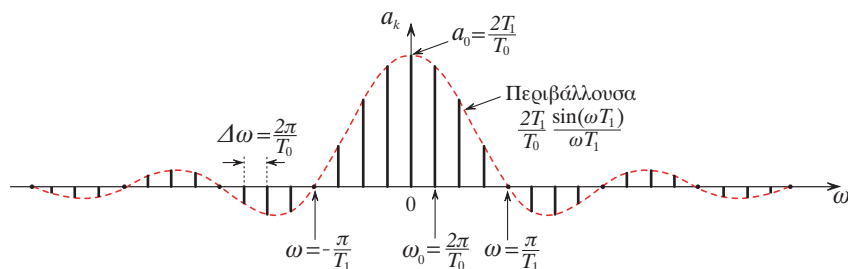
Η εξίσωση (3.3.1) μπορεί να αποκτήσει τη μορφή

$$a_k = \frac{2T_1}{T_0} \cdot \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_1} = \frac{2T_1}{T_0} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \quad (3.3.2)$$

όπου $x = k\omega_0 T_1$.

Η συνάρτηση $\frac{\sin(x)}{x}$ αποτελεί την περιβάλλουσα του φάσματος, δηλαδή, οι φασματικές γραμμές, οι οποίες βρίσκονται στις συχνότητες $k\omega_0$, είναι φραγμένες από τη συνάρτηση αυτή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.9.

Από το Σχήμα 3.9 έχουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις για το φάσμα:



Σχήμα 3.9 Οι συντελεστές Fourier και η περιβάλλουσά τους για το περιοδικό ορθογώνιο κύμα.

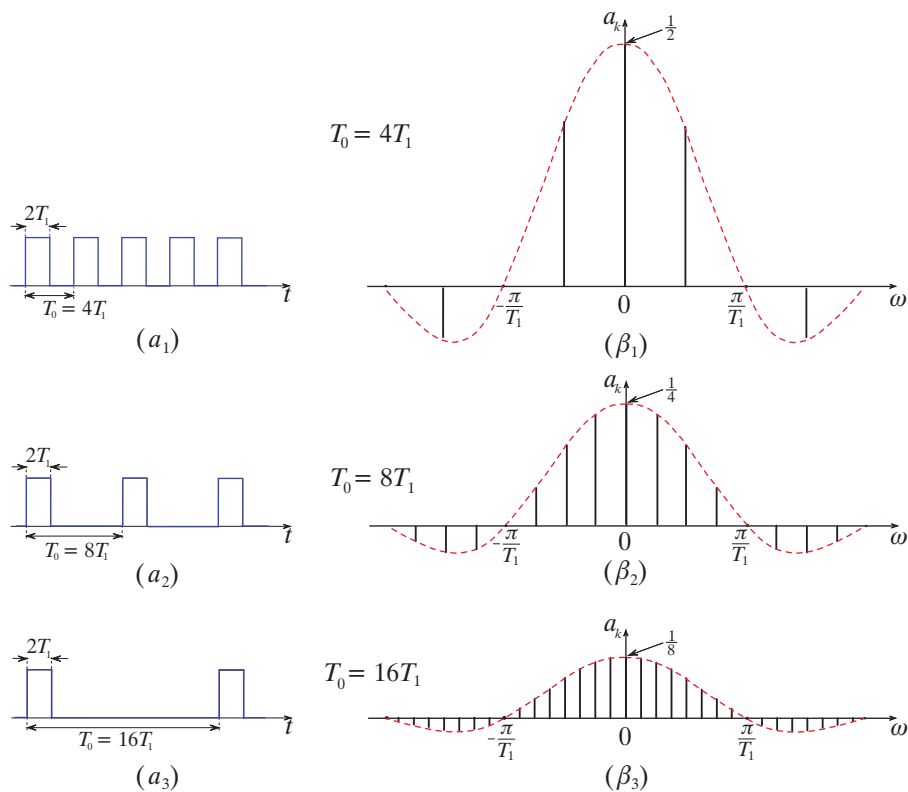
1. Η συνεχής συνιστώσα του φάσματος είναι $a_0 = \frac{2T_1}{T_0}$.
2. Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.
3. Η απόσταση μεταξύ των φασματικών γραμμών είναι $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0}$.
4. Ο πρώτος μηδενισμός της περιβάλλουσας του φάσματος γίνεται όταν

$$\sin(k\omega_0 T_1) = 0 \Rightarrow k\omega_0 T_1 = \pi \Rightarrow k = \frac{T_0}{2T_1}$$

(αν $\frac{T_0}{2T_1}$ δεν είναι ακέραιος αριθμός, τότε δεν υπάρχει φασματική γραμμή στη συχνότητα αυτή).

5. Η συχνότητα του πρώτου μηδενισμού είναι $\omega = \frac{\pi}{T_1}$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η περίοδος T_0 αυξάνεται ενώ διατηρούμε σταθερό το T_1 . Το αποτέλεσμα της αύξησης αυτής στη μορφή του ορθογώνιου κύματος φαίνεται στα Σχήματα 3.10 a_1, a_2, a_3 , στα οποία έχει σχεδιαστεί το περιοδικό κύμα για $T_0 = 4T_1$, $T_0 = 8T_1$ και $T_0 = 16T_1$. Παρατηρούμε ότι κρατώντας την τιμή του T_1 σταθερή, διατηρούμε σταθερή τη χρονική διάρκεια των ορθογώνιων παλμών και αυξάνοντας την τιμή της περιόδου T_0 αυξάνουμε την οριζόντια απόσταση των ορθογώνιων παλμών που αποτελούν το ορθογώνιο κύμα. Στα Σχήματα 3.10 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, έχουμε σχεδιάσει τα αντίστοιχα φάσματα, για τα οποία παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται η περίοδος του ορθογώνιου κύματος



Σχήμα 3.10 Το περιοδικό ορθογώνιο κύμα και οι φασματικές γραμμές τους για σταθερή τιμή T_1 και για διαφορετικές τιμές περιόδου T_0 .

1. Το πλάτος των φασματικών γραμμών ελαττώνεται.

2. Η απόσταση μεταξύ των φασματικών γραμμών ελαττώνεται
3. Το πλήθος των φασματικών γραμμών, που περιέχονται στον κεντρικό λοβό, αυξάνεται.
4. Η συχνότητα του πρώτου μηδενισμού δεν μεταβάλλεται
5. Η περιβάλλουσα του φάσματος, $\frac{\sin(x)}{x}$, διατηρεί σταθερή μορφή.

Όταν $T_0 \rightarrow \infty$, το αρχικό περιοδικό κύμα μετατρέπεται στο μη περιοδικό σήμα του ορθογώνιου παλμού. Επίσης, όταν $T_0 \rightarrow \infty$, έχουμε τη δημιουργία ενός απείρου πλήθους φασματικών γραμμών με πλάτος το οποίο τείνει στο μηδέν, και η μεταξύ τους απόσταση τείνει επίσης στο μηδέν.

Η πορεία την οποία περιγράψαμε δεν είναι κατάλληλη για να πετύχουμε το φάσμα ενός απλού παλμού. Στη συνέχεια θα δούμε πως στο στόχο αυτό μπορούμε να φτάσουμε ως μία οριακή περίπτωση των όσων ήδη γνωρίζουμε.

Για το περιοδικό ορθογώνιο κύμα του Παραδείγματος 3.2.6 το γινόμενο της περιόδου T_0 επί το συντελεστή a_k γράφεται

$$T_0 a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0} = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} \Big|_{\omega=k\omega_0} \quad (3.3.3)$$

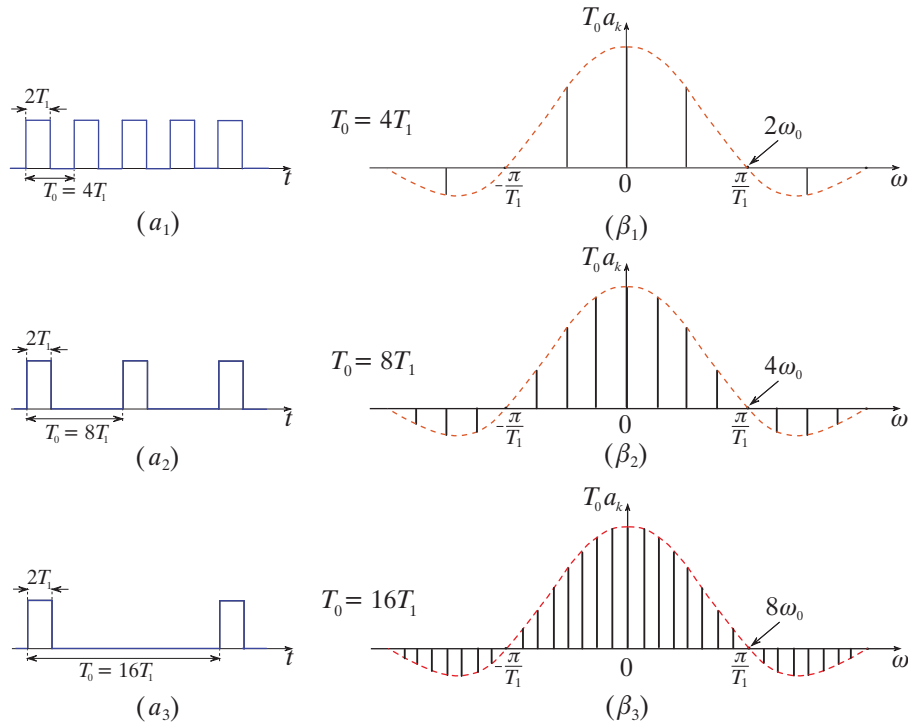
Στο Σχήμα 3.11 αποδίδονται οι γραφικές παραστάσεις του γινομένου $T_0 \cdot a_k$ σε συνάρτηση με την κυκλική συχνότητα ω για σταθερή τιμή του T_1 και για διαφορετικές τιμές του T_0 .

Όταν το T_0 αυξάνεται, το πλήθος των συντελεστών της σειράς Fourier γίνεται όλο και μεγαλύτερο, ενώ τα αντίστοιχα γινόμενα παραμένουν σταθερά. Το διάστημα μεταξύ των δειγμάτων $T_0 \cdot a_k$ γίνεται όλο και μικρότερο, δηλαδή τα δείγματα πλησιάζουν όλο και περισσότερο μεταξύ τους και μπορούμε να πούμε ότι τελικά, όταν $T_0 \rightarrow \infty$, το σύνολο των γινομένων $T_0 \cdot a_k$ πλησιάζει την περιβάλλουσα. Και το αντίστοιχο φάσμα γίνεται συνεχές. Αυτή είναι η βασική ιδέα του μετασχηματισμού Fourier.

Η συνεχής συνάρτηση $\frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$, η οποία είναι η περιβάλλουσα των $T_0 \cdot a_k$ αποτελεί το μετασχηματισμό Fourier του ορθογώνιου παλμού. Οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του ορθογώνιου κύματος είναι ισάπεχοντα δείγματα της περιβάλλουσας, δηλαδή, του μετασχηματισμού Fourier. Η δε απόστασή τους προσδιορίζεται από την περίοδο μέσω της σχέσης

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0} \quad (3.3.4)$$

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε τα παραπάνω συμπεράσματα για κάθε μη περιοδικό σήμα. Έστω ένα μη περιοδικό σήμα $x(t)$ πεπερασμένης διάρκειας, δηλαδή $x(t) = 0$ αν $|t| > T_1$ (Σχήμα 3.12α) για το οποίο υποθέτουμε ότι υπάρχει το ανάπτυγμα Fourier.



Σχήμα 3.11 (α) Το περιοδικό ορθογώνιο κύμα και (β) τα γινόμενα $T_0 a_k$ και η περιβάλλουσά τους, για σταθερή τιμή T_1 και για διαφορετικές τιμές περιόδου T_0 .

Με τη βοήθεια του σήματος $x(t)$ δημιουργούμε το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ με περίοδο T_0 ($T_0 > 2T_1$), του οποίου το $x(t)$ αποτελεί μία περίοδο (Σχήμα 3.12β).

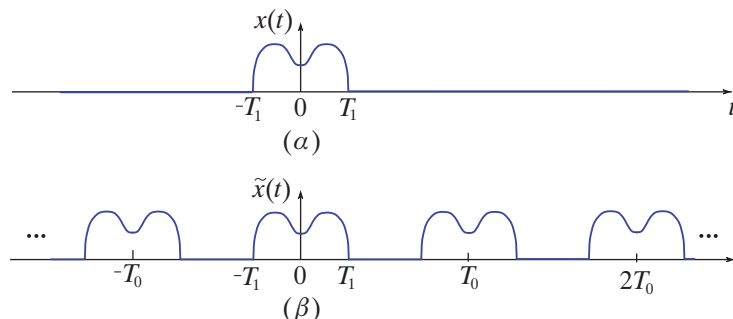
Επειδή το σήμα $\tilde{x}(t)$ είναι περιοδικό, μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier για όλα τα $t \in (-\infty, +\infty)$. Οι εξισώσεις σύνθεσης και ανάλυσης του σήματος $\tilde{x}(t)$ είναι

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.3.5)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.3.6)$$

Επειδή $\tilde{x}(t) = x(t)$ για $|t| \leq \frac{T_0}{2}$, οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από την

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.3.7)$$



Σχήμα 3.12 (α) Μη περιοδικό σήμα $x(t)$ και (β) $\tilde{x}(t)$ η περιοδική επέκταση του $x(t)$.

και, αφού $x(t) = 0$ έξω από το διάστημα ολοκλήρωσης, έχουμε τελικά για τους συντελεστές της σειράς Fourier

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.3.8)$$

Ορίζουμε τη μιγαδική συνάρτηση $X(\omega)$ της πραγματικής μεταβλητής ω

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.3.9)$$

Με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτής οι συντελεστές a_k μπορούν να εκφραστούν ως

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \quad (3.3.10)$$

και από την (3.3.5) το σήμα $\tilde{x}(t)$, δηλαδή, η περιοδική επανάληψη του $x(t)$, δίνεται από την

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (3.3.11)$$

και επειδή $\omega_0 = 2\pi/T_0$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (3.3.12)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το διάστημα T_0 αυξάνει συνεχώς, με $T_0 \rightarrow \infty$. Η απόσταση λοιπόν μεταξύ των διαδοχικών αρμονικών, $\omega_0 = 2\pi/T_0$, συνεχώς ελαττώνεται και τείνει στο μηδέν ($\omega_0 \rightarrow d\omega$) και το $k\omega_0$ γίνεται η συνεχής μεταβλητή ω ($k\omega_0 \rightarrow \omega$). Έτσι, το φάσμα γίνεται συνεχές και το άθροισμα στο δεύτερο μέλος της (3.3.12) γράφεται ως

ολοκλήρωμα. Επίσης, το σήμα $\tilde{x}(t)$ προσεγγίζει το σήμα $x(t)$ και το σήμα $x(t)$ δίνεται από την εξίσωση

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.3.13)$$

Η εξίσωση (3.3.13) αποτελεί την εξίσωση σύνθεσης και ανασυνθέτει το σήμα στο πεδίο του χρόνου. Η συνάρτηση

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.3.14)$$

αποτελεί την εξίσωση ανάλυσης και είναι ο *Μετασχηματισμός Fourier (MF) του σήματος* $x(t)$. Ακριβέστερα, μετασχηματισμός Fourier είναι ο κανόνας εύρεσης της $X(\omega)$ από την $x(t)$, δηλαδή, η (3.3.14). Η συνάρτηση $X(\omega)$ (που είναι μία απεικόνιση $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$) λέγεται μετασχηματισμός Fourier. Συχνά αναφερόμαστε σε αυτόν και ως το *φάσμα του σήματος*. Ο μετασχηματισμός Fourier έχει νόημα για όλο το διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και αναπαριστά μη περιοδικά σήματα με τη βοήθεια εκθετικών σημάτων και με τον τρόπο αυτό αναδεικνύεται το φασματικό τους περιεχόμενο.

Παρατηρήσεις

1. Στο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier, η εξίσωση ανάλυσης αναλύει ένα σήμα $x(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_0 + T]$ ή στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ αν το σήμα είναι περιοδικό σε ένα διακριτό φάσμα περιοδικών εκθετικών σημάτων με αρμονικά συσχετιζόμενες συχνότητες, πολλαπλάσιες της θεμελιώδους κυκλικής συχνότητας ω_0 , στο οποίο η αρμονική k τάξης έχει "πλάτος" a_k . Αν, για παράδειγμα, το σήμα $x(t)$ είναι σήμα τάσης, η μονάδα μέτρησης των συντελεστών a_k είναι "Volts".
2. Στο μετασχηματισμό Fourier, η εξίσωση ανάλυσης αναλύει ένα μη περιοδικό σήμα $x(t)$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ σε ένα συνεχές φάσμα περιοδικών εκθετικών σημάτων. Το φασματικό περιεχόμενο στο απειροστό διάστημα συχνοτήτων $[\omega, \omega + d\omega]$ είναι $X(\omega)$. Η συνεισφορά των συχνοτήτων $[\omega, \omega + d\omega]$ έχει "πλάτος" $X(\omega)$ ($d\omega/2\pi$). Αν, για παράδειγμα, το $x(t)$ είναι σήμα τάσης, τότε ο $X(\omega)$ έχει μονάδα μέτρησης "Volts ανά μονάδα συχνότητας". Ο μετασχηματισμός Fourier δεν είναι, λοιπόν, ένα φάσμα πλάτους, αλλά φασματική πυκνότητα πλάτους.

Αν αντί της ω χρησιμοποιήσουμε τη συχνότητα $f = \omega/2\pi$, οι εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης παίρνουν τη μορφή

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (3.3.15)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad (3.3.16)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$, για κάθε τιμή της συχνότητας ω , είναι μιγαδική συνάρτηση και, επομένως, μπορεί να αναπαρασταθεί σε πολική μορφή

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j \arg X(\omega)} \quad (3.3.17)$$

ή σε καρτεσιανή μορφή

$$X(\omega) = \Re e [X(\omega)] + j \Im m [X(\omega)] = R(\omega) + jI(\omega) \quad (3.3.18)$$

Παράδειγμα 3.3.1

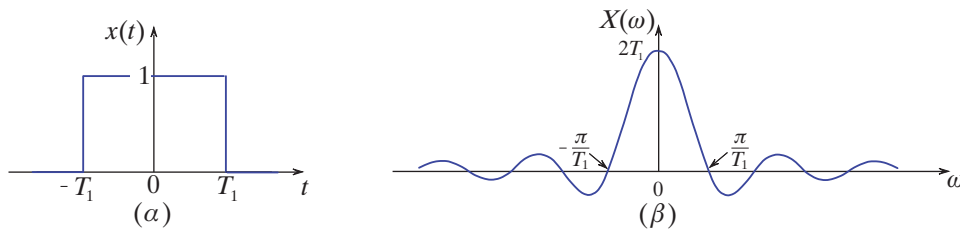
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού διάρκειας T_1

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.3.19)$$

Λύση Επειδή το σήμα είναι μηδέν για $t < -T_1$ και $t > T_1$, ο μετασχηματισμός Fourier είναι

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-T_1}^{+T_1} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} \int_{-T_1}^{+T_1} e^{-j\omega t} d(-j\omega t) = \frac{j}{\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{+T_1} \\ &= \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Στο Σχήμα 3.13 δίνεται η γραφική παράσταση του σήματος $x(t)$ και ο μετασχηματισμός Fourier του.



Σχήμα 3.13 (α) Ο ορθογώνιος παλμός και (β) Ο μετασχηματισμός Fourier του.

Παρατηρήσεις

1. Ο μετασχηματισμός Fourier, $X(\omega)$, του ορθογώνιου παλμού είναι πραγματική συνάρτηση.
2. Η τιμή του μετασχηματισμού Fourier στο μηδέν είναι

$$X(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} \quad (3.3.21)$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hospital για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$, σύμφωνα με τον οποίο

$$\text{αν } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ή } \frac{\infty}{\infty} \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (3.3.22)$$

και έχουμε

$$X(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} 2T_1 \cos(\omega T_1) = 2T_1 \quad (3.3.23)$$

3. Οι τιμές στις οποίες μηδενίζεται το $X(\omega)$ είναι τα φασματικά μηδενικά, δίνονται από την εξίσωση $\sin(\omega T_1) = 0$ και είναι οι συχνότητες $\omega = k\pi/T_1$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$
4. Το φάσμα τείνει στο μηδέν καθώς περνάμε σε πολύ υψηλές συχνότητες, δηλαδή, $|\omega| \rightarrow \infty$.
5. Αν θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα σύνθεσης σε πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων

$$\hat{x}_W(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{+W} 2 \frac{\sin(\omega T_1)}{\omega} e^{j\omega t} d\omega \quad (3.3.24)$$

παρουσιάζεται το φαινόμενο Gibbs. Δηλαδή, το $\hat{x}_W(t)$ παρουσιάζει κυμάνσεις γύρω από το σημείο ασυνέχειας, το πλάτος των οποίων δεν ελαττώνεται καθώς το W αυξάνει αλλά συμπιέζονται γύρω από την ασυνέχεια και η ενέργειά τους τείνει στο μηδέν, όταν $W \rightarrow 0$.

6. Στο όριο $W \rightarrow \infty$, η (3.3.24) παίρνει τη μορφή

$$\hat{x}_W(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\sin(\omega T_1)}{\omega} e^{j\omega t} d\omega \quad (3.3.25)$$

Όπως και στο παράδειγμα του περιοδικού ορθογώνιου σήματος (Σχήμα 3.8), είναι $\hat{x}(t) = x(t)$, εκτός από τα σημεία ασυνέχειας $t = \pm T_1$ όπου $\hat{x}(t) = \frac{1}{2}$, που είναι η μέση τιμή των τιμών του $x(t)$ στις δύο πλευρές της ασυνέχειας.

Παράδειγμα 3.3.2

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = \delta(t)$

Λύση Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δέλτα είναι

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (3.3.26)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$ Παρατηρούμε ότι το φάσμα της $\delta(t)$ καλύπτει όλο το εύρος συχνοτήτων.

3.3.1 Ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier

Στην προηγούμενη ενότητα ορίσαμε το μετασχηματισμό Fourier έχοντας υποθέσει ότι τα ολοκληρώματα (3.3.13) και (3.3.14) υπάρχουν. Τα ολοκληρώματα αυτά δεν υπάρχουν πάντα ή είναι δυνατό να υπάρχει το ένα και να μην υπάρχει το άλλο. Οι συνθήκες Dirichlet είναι ικανές συνθήκες για να υπάρχουν και τα δύο ολοκληρώματα, τα οποία αποτελούν το ζεύγος μετασχηματισμών Fourier.

Ικανή Συνθήκη 1. Η συνάρτηση (σήμα) $x(t)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3.3.27)$$

Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει την ύπαρξη του ολοκληρώματος στη (3.3.14). Πράγματι,

$$|X(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3.3.28)$$

Ικανή Συνθήκη 2. Η συνάρτηση (σήμα) $x(t)$ είναι συνεχής ή περιέχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών, κάθε μία από τις οποίες να είναι πεπερασμένου ύψους.

Ικανή Συνθήκη 3. Η συνάρτηση (σήμα) $x(t)$ είναι φραγμένης κύμανσης.

Παράδειγμα 3.3.3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του αιτιατού εκθετικού σήματος

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a \in R \quad (3.3.29)$$

Λύση Επειδή το σήμα είναι ίσο με μηδέν για $t < 0$, ο μετασχηματισμός Fourier του είναι

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} \left| e^{-(a+j\omega)t} \right|_0^{\infty} = -\frac{1}{a+j\omega} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a+j\omega)t} - e^0 \right] \end{aligned}$$

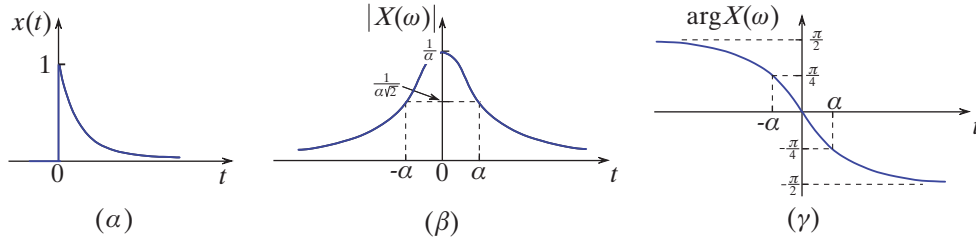
και επειδή

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a+j\omega)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} e^{-j\omega t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] = 0 \text{ όταν } a > 0$$

ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει για $a > 0$ και είναι

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \quad (3.3.30)$$

Στο Σχήμα 3.14 δίνεται η γραφική παράσταση του σήματος $x(t)$ και οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης του μετασχηματισμού Fourier. Παρατηρούμε ότι το μέτρο αποσβένει στις υψηλές συχνότητες, δηλαδή, $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} |X(\omega)| = 0$.



Σχήμα 3.14 Η γραφική παράσταση (α) του σήματος $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha > 0$, (β) του μέτρου και (γ) της φάσης του μετασχηματισμού Fourier του.

Παράδειγμα 3.3.4

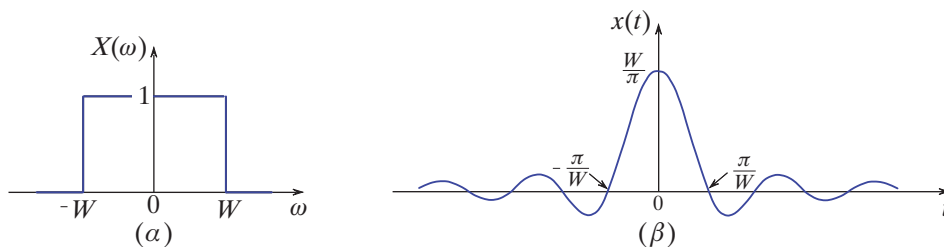
Να υπολογιστεί το σήμα, του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι παράθυρο συχνοτήτων με πλάτος W , δηλαδή,

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.3.31)$$

Λύση Επειδή ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος είναι ίσος με μηδέν για $\omega < -W$ και $\omega > W$, το σήμα θα είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{+W} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j t} \left[e^{j\omega t} \right]_{-W}^{+W} \\ &= -\frac{1}{2\pi j t} [e^{jWt} - e^{-jWt}] = \frac{1}{2\pi j t} 2j \sin(Wt) \\ &= \frac{\sin(Wt)}{\pi t} \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

Στο Σχήμα 3.15 δίνεται το γράφημα του σήματος $x(t)$ στο πεδίο συχνοτήτων και στο πεδίο του χρόνου.

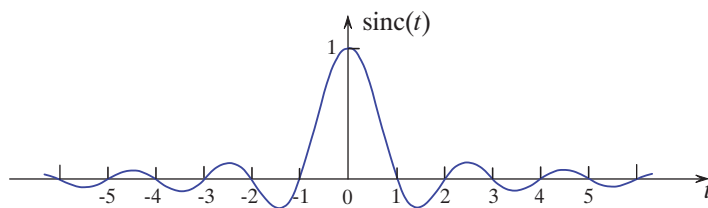


Σχήμα 3.15 Περιγραφή του σήματος $x(t)$ (α) στο πεδίο συχνοτήτων και (β) στο πεδίο του χρόνου.

Οι εξισώσεις $X(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$ και $x(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$, τις οποίες συναντήσαμε στα Παραδείγματα 3.3.1 και 3.3.4, μπορούν να εκφραστούν με ενιαίο τρόπο με τη βοήθεια της συνάρτησης sinc

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \quad (3.3.33)$$

και είναι γνωστή ως *συνάρτηση δειγματοληψίας*, η γραφική παράσταση της οποίας



Σχήμα 3.16 Η συνάρτηση sinc(x).

φαίνεται στο Σχήμα 3.16. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση διέρχεται περιοδικά από το μηδέν και ότι το ύψος των δευτερευόντων λοβών μειώνεται ασυμπτωτικά στο μηδέν. Η συνάρτηση αυτή είναι ιδιαίτερης σημασίας και την συναντάμε συχνά τόσο στην επεξεργασία σημάτων (ανάλυση Fourier, μελέτη ΓΧΑ συστημάτων) όσο και στις επικοινωνίες. Με τη βοήθεια της συνάρτησης δειγματοληψίας, ο μετασχηματισμός Fourier του Παραδείγματος (3.3.1) και το σήμα $x(t)$ του Παραδείγματος (3.3.4) γράφονται ως

$$X(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} = 2T_1 \frac{\sin\left(\pi \frac{\omega T_1}{\pi}\right)}{\pi \frac{\omega T_1}{\pi}} = 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) \quad (3.3.34)$$

$$x(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \frac{\sin\left(\pi \frac{Wt}{\pi}\right)}{\pi \frac{Wt}{\pi}} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) \quad (3.3.35)$$

3.3.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τις βασικές ιδιότητες που έχει ο μετασχηματισμός Fourier. Για ευκολία, ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ μερικές φορές συμβολίζεται ως $\mathcal{F}[x(t)]$ και η σχέση μεταξύ του $x(t)$ και του μετασχηματισμού Fourier του υποδεικνύεται ως

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (3.3.36)$$

(1) Συζυγία

Αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$, τότε

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-\omega) \quad (3.3.37)$$

Απόδειξη

Ο μετασχηματισμός Fourier του συζυγούς σήματος είναι

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt \right]^* = X^*(-\omega)$$

Ισχύει επίσης

$$x^*(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(\omega) \quad (3.3.38)$$

(2) Γραμμικότητα

Αν $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega)$ και $x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega)$, τότε

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} c_1X_1(\omega) + c_2X_2(\omega) \quad (3.3.39)$$

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

(3) Άρτιο-περιττό μέρος σήματος. Πραγματικό-φανταστικό μέρος φάσματος

Όπως είναι γνωστό, (βλέπε 1.2.7) κάθε σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός άρτιου, $x_e(t)$, και ενός περιττού σήματος, $x_o(t)$. Αν $X(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$, τότε έχουμε

$$x_e(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Re[X(\omega)] \quad (3.3.40)$$

$$x_o(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Im[X(\omega)] \quad (3.3.41)$$

Η απόδειξη αποτελεί άμεσο επακόλουθο της γραμμικότητας και της συζυγίας.

(4) Ολίσθηση στο χρόνο

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό t_0 ισχύει

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(\omega) \quad (3.3.42)$$

Απόδειξη

Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t - t_0)$ είναι

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t} dt$$

θέτω $\tau = t - t_0$, οπότε έχω

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

Παρατηρούμε ότι, αν το σήμα μετατοπιστεί στο πεδίο του χρόνου κατά t_0 , το φάσμα του πολλαπλασιάζεται με το φασματικό παράγοντα $e^{-j\omega t_0}$. Έτσι, το φάσμα ενός σήματος ολισθημένου στο χρόνο έχει το ίδιο μέτρο με το αρχικό σήμα, ενώ η φάση του μεταβάλλεται γραμμικά. Πράγματι, αν $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)}$, τότε

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} X(\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{j[\theta(\omega) - \omega t_0]}$$

(5) Ολίσθηση συχνότητας

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό ω_0 ισχύει

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega - \omega_0) \quad (3.3.43)$$

Απόδειξη

Με τη βοήθεια του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier βρίσκουμε ότι το σήμα, που έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega - \omega_0)$, είναι το $e^{j\omega_0 t} x(t)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega &\stackrel{\omega' = \omega - \omega_0}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') e^{j(\omega' + \omega_0)t} d\omega' \\ &= \frac{e^{j\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') e^{j\omega' t} d\omega' \\ &= e^{j\omega_0 t} x(t) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.3.5 (Η βάση της διαμόρφωσης).

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$z(t) = x(t) \cos(\omega_0 t) \quad (3.3.44)$$

Λύση Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler το σήμα $z(t)$ γράφεται

$$z(t) = x(t) \cos(\omega_0 t) = x(t) \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] = \frac{1}{2} x(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\omega_0 t}$$

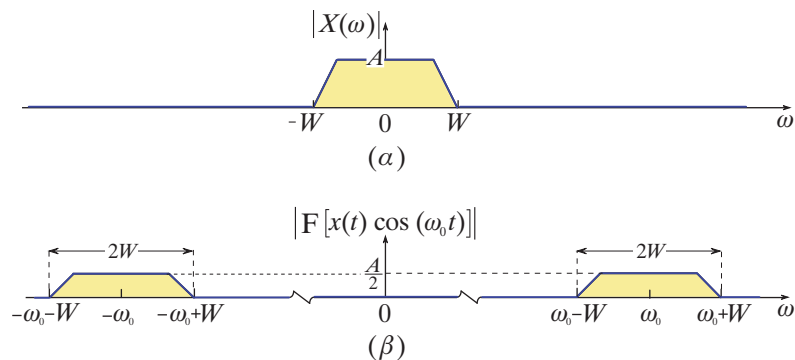
Με τη βοήθεια της ιδιότητας της γραμμικότητας και της ολίσθησης συχνότητας, ο μετασχηματισμός Fourier του $z(t)$ είναι

$$Z(\omega) = \mathcal{F} \left[\frac{1}{2} x(t) e^{j\omega_0 t} \right] + \mathcal{F} \left[\frac{1}{2} x(t) e^{-j\omega_0 t} \right] = \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

Η ιδιότητα αυτή αποτελεί τη βάση της διαμόρφωσης που χρησιμοποιείται ευρέως στις τηλεπικοινωνίες. Κατά τη διαμόρφωση, ένα σήμα $x(t)$ που μεταφέρει συγκεκριμένη πληροφορία πολλαπλασιάζεται με ένα σήμα απλής συχνότητας $\cos(\omega_0 t)$, η οποία

ονομάζεται *φέρουσα*, με σκοπό την εκπομπή του σε ένα μέσο μετάδοσης, π.χ., ζεύγος συρμάτων, ατμόσφαιρα, κλπ.

Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός, του σήματος $x(t)$ με το $\cos(\omega_0 t)$ δεν αλλοιώνει τη μορφή του μετασχηματισμού Fourier $X(\omega)$ (με την προϋπόθεση ότι το ω_0 είναι αρκετά μεγάλο και το $X(\omega)$ είναι μηδέν έπειτα από μία ορισμένη συχνότητα, όπως στο Σχήμα 3.17α), αλλά μεταφέρεται στην περιοχή των συχνοτήτων $\pm\omega_0$, όπως περιγράφεται στο Σχήμα 3.17β).



Σχήμα 3.17 Η διαμόρφωση πλάτους (α) το φάσμα του σήματος μηνύματος για ένα αυθαίρετο σήμα $x(t)$ και (β) το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος.

(6) Αλλαγή κλίμακας στο χρόνο και τη συχνότητα - Ανάκλαση

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{και} \quad \frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(a\omega) \quad (3.3.45)$$

Απόδειξη

Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(at)$ είναι

$$\mathcal{F}[x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

θέτουμε $\tau = at$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

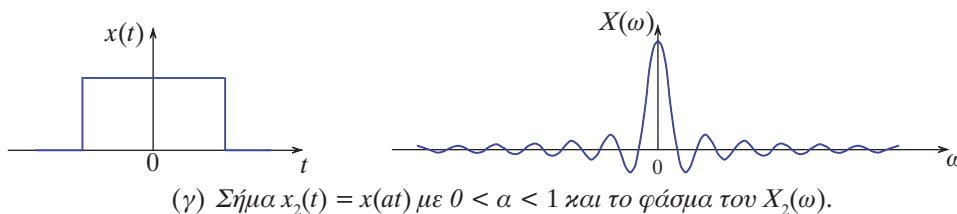
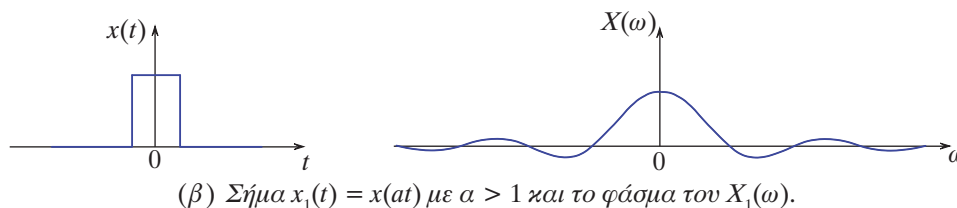
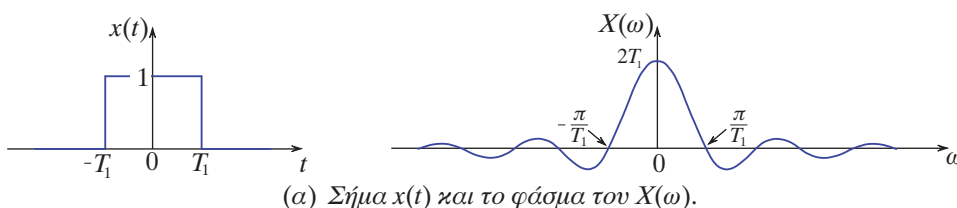
- αν $a > 0$ είναι

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- αν $a < 0$ είναι

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = -\frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Η ιδιότητα της αλλαγής κλίμακας παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.18. Παρατηρούμε ότι, αν $a > 1$, το σήμα συμπιέζεται στο πεδίο του χρόνου, με συνέπεια να μεταβάλλεται πιο γρήγορα στη μονάδα του χρόνου. Αν αναλογιστούμε ότι οι γρήγορες μεταβολές στο χρόνο αντιστοιχούν σε συνεισφορά από υψηλότερες συχνότητες στο πεδίο συχνοτήτων, συμπεραίνουμε ότι το φάσμα του διαστέλλεται στο πεδίο συχνοτήτων (Σχήμα 3.18β). Αντίθετα, αν $0 < a < 1$, το σήμα διαστέλλεται στο πεδίο του χρόνου και, επειδή ένα σήμα χαμηλής συχνότητας μεταβάλλεται με αργούς ρυθμούς, το φάσμα του συμπιέζεται (Σχήμα 3.18γ). Αν



Σχήμα 3.18 Απεικόνιση της αλλαγής κλίμακας.

$a = -1$, προκύπτει η ιδιότητα της *Ανάκλασης*

$$x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-\omega) \tag{3.3.46}$$

(7) Θεώρημα της Συνέλιξης

Μία από τις σημαντικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, όσον αφορά τη χρήση του στα γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα, είναι η επίδρασή του στη λειτουργία της συνέλιξης. Γνωρίζουμε ότι η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος,

με κρουστική απόκριση $h(t)$, όταν η είσοδός του είναι το σήμα $x(t)$, δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (3.3.47)$$

Στην παράγραφο αυτή θα αναδείξουμε τη σχέση που συνδέει τους μετασχηματισμούς των αντιστοιχών σημάτων. Ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

Με αλλαγή μεταβλητής $\xi = t - \tau$ έχουμε

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)e^{-j\omega(\xi+\tau)} d\xi \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)e^{-j\omega\xi} d\xi \right] d\tau \end{aligned}$$

Το περιεχόμενο της αγκύλης $[\cdot]$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $h(t)$ ($h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega)$), έτσι

$$Y(\omega) = H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

αν $X(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$, έχουμε

$$y(t) = h(t) \star x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (3.3.48)$$

Παρατηρούμε ότι η υπολογιστικά πολύπλοκη σχέση της συνέλιξης μετασχηματιζόμενης κατά Fourier καταλήγει σε ένα απλό γινόμενο συναρτήσεων.

Το θεώρημα της συνέλιξης μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το φάσμα του σήματος εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος αν γνωρίζουμε το φάσμα του σήματος εισόδου $X(\omega)$ και το φάσμα της κρουστικής απόκρισης $H(\omega)$ του συστήματος.

Ανάλογη σχέση ισχύει και για τη συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier $X(\omega)$ και $Y(\omega)$ των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ αντίστοιχα, δηλαδή,

$$x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) \star Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi)Y(\omega - \xi) d\xi \quad (3.3.49)$$

Παράδειγμα 3.3.6

Έστω σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$. Θα υπολογίσουμε το σήμα που έχει μετασχηματισμό Fourier $|X(\omega)|^2 = X(\omega) \cdot X^*(\omega)$.

Λύση Με τη βοήθεια της ιδιότητας της συζυγίας, της ανάκλασης και του θεωρήματος της συνέλιξης, βρίσκουμε ότι το σήμα, $R_x(\tau)$, το οποίο έχει μετασχηματισμό Fourier $|X(\omega)|^2$, δίνεται από την

$$R_x(\tau) = x(\tau) \star x^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t) dt$$

Το σήμα $R_x(\tau)$ καλείται *συνάρτηση αυτοσυσχέτισης* του $x(t)$ και παρέχει ένα μέτρο του συσχετισμού των τιμών του σήματος $x(t)$ για δύο χρονικά στιγμιότυπα που διαφέρουν κατά τ . Τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης θα τη συναντήσουμε και στην Ενότητα 3.4.

(8) Θεώρημα του Parseval

Το *θεώρημα του Parseval* εκφράζει τη δυνατότητα εύρεσης της ενέργειας ενός σήματος είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο συχνοτήτων.

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (3.3.50)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval η ολική ενέργεια ενός σήματος μπορεί να υπολογιστεί είτε α) υπολογίζοντας την ενέργεια ανά μονάδα χρονικού διαστήματος ($|x(t)|^2$) και ολοκληρώνοντας για όλο το χρόνο είτε β) υπολογίζοντας την ενέργεια ανά μονάδα κυκλικής συχνότητας ($\frac{|X(\omega)|^2}{2\pi}$) και ολοκληρώνοντας για όλες τις συχνότητες.

Απόδειξη

Για το πρώτο μέλος της ισότητας έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \end{aligned}$$

αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)X(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Αν $x(t)$ είναι η τάση στα άκρα αντίστασης $R = 1\Omega$, τότε η ενέργεια που παρέχεται στην αντίσταση δίνεται από το ολοκλήρωμα $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$. Από το δεξιό μέλος της (3.3.50) έχουμε ότι η ενέργεια \mathcal{E}_x ισούται με το $\frac{1}{2\pi}$ του εμβαδού που περικλείει η καμπύλη $|X(\omega)|^2$. Η ποσότητα λοιπόν $|X(f)|^2$ εκφράζει την κατανομή της ενέργειας ανά μονάδα συχνότητας και ονομάζεται *φασματική πυκνότητα ενέργειας* του σήματος $x(t)$. Με άλλα λόγια η στοιχειώδης ενέργεια $d\mathcal{E}$ που συνεισφέρουν οι συχνότητες που βρίσκονται στην περιοχή $(f, f + df)$ ή $(\omega, \omega + d\omega)$ είναι

$$d\mathcal{E} = |X(f)|^2 df \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{df} = |X(f)|^2$$

(9) Παραγωγή

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$, και υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier της παραγώγου $\frac{dx(t)}{dt}$, τότε

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(\omega) \quad (3.3.51)$$

Απόδειξη

Μπορούμε να αποδείξουμε την ιδιότητα αν πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier της παραγώγου, δηλαδή,

$$\mathcal{F} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt \quad (3.3.52)$$

και ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] &= x(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{de^{-j\omega t}}{dt} dt \\ &= x(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Για την απόδειξη υποθέτουμε ότι, όταν $t \rightarrow \pm\infty$ το σήμα $x(t) \rightarrow 0$, οπότε είναι και $\lim_{|t| \rightarrow \infty} x(t)e^{j\omega t} = 0$. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{F} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = j\omega X(\omega) \quad (3.3.53)$$

Επαναληπτική εφαρμογή της παραπάνω ιδιότητας δίνει τη γενική έκφραση της ιδιότητας παραγωγής στο χρονικό πεδίο

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n X(\omega) \quad (3.3.54)$$

Με παρόμοιο τρόπο σκέψης έχουμε για την παραγωγή στο πεδίο συχνοτήτων

$$(-jt)^n x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n} \quad (3.3.55)$$

Παράδειγμα 3.3.7

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης προσήμου $\text{sgn}(t)$

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \quad (3.3.56)$$

Λύση Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d\text{sgn}(t)}{dt} = 2\delta(t)$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Fourier στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\mathcal{F}\left[\frac{d\text{sgn}(t)}{dt}\right] = \mathcal{F}[2\delta(t)]$$

Είναι όμως $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ (Παράδειγμα 3.3.2) και λόγω της ιδιότητας της παραγωγής έχουμε

$$j\omega \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = 2 \Rightarrow \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}, \quad \omega \neq 0 \quad (3.3.57)$$

(10) Ολοκλήρωση

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$, τότε

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(\omega) \delta(\omega) \quad (3.3.58)$$

Απόδειξη

Αν $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, τότε η $y(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η συνέλιξη της $x(t)$ και της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος $u(t)$, δηλαδή,

$$y(t) = x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης προκύπτει ότι

$$Y(\omega) = X(\omega)U(\omega) = X(\omega) \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(\omega) \delta(\omega)$$

Μία επιπόλαια εφαρμογή της ιδιότητας της παραγωγής θα μπορούσε να μας οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Πράγματι,

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \Rightarrow j\omega Y(\omega) = X(\omega)$$

από την τελευταία σχέση δεν συνεπάγεται ότι $Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{j\omega}$ αλλά $Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{j\omega} + C\delta(\omega)$ όπου C μία σταθερά, διότι ισχύει $j\omega\delta(\omega) = j0\delta(\omega) = 0$.

(11) Συμμετρίες για πραγματικά σήματα

Έστω $x(t)$ πραγματικό σήμα και $X(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier, ο οποίος δεν είναι απαραίτητα και αυτός πραγματικός αριθμός. Θα δείξουμε ότι ισχύουν οι συμμετρίες

$$\begin{aligned} X(-\omega) &= X^*(\omega) \\ \Re[X(-\omega)] &= \Re[X(\omega)] \\ \Im[X(-\omega)] &= -\Im[X(\omega)] \end{aligned} \quad (3.3.59)$$

Απόδειξη

Επειδή το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, θα είναι $x^*(t) = x(t)$. Έτσι, από την ιδιότητα της συμμετρίας έχουμε

$$x(t) = x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = X^*(-\omega)$$

δηλαδή, το φάσμα είναι συζυγής άρτια συνάρτηση της συχνότητας.

Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler έχουμε

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)[\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

και επειδή το σήμα είναι πραγματικό έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Re[X(\omega)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt \text{ και} \\ \Im[X(\omega)] &= - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

Από τις τελευταίες σχέσεις συμπεραίνουμε

$$\begin{aligned} \Re[X(\omega)] &= \Re[X(-\omega)] \text{ και} \\ |X(\omega)| &= |X(-\omega)| \end{aligned} \quad (3.3.61)$$

δηλαδή, το πραγματικό μέρος και το μέτρο της είναι άρτιες συναρτήσεις, και

$$\begin{aligned} \Im[X(\omega)] &= -\Im[X(-\omega)] \text{ και} \\ \arg[X(\omega)] &= -\arg[X(-\omega)] \end{aligned} \quad (3.3.62)$$

δηλαδή, το φανταστικό μέρος και η φάση αποτελούν περιττές συναρτήσεις.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι οι σχέσεις (3.3.59) αποτελούν και αναγκαίες συνθήκες για να είναι το σήμα $x(t)$ πραγματικό. Πράγματι, έστω

$$X(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

όπου $R(\omega)$ και $I(\omega)$ το πραγματικό τμήμα και το φανταστικό τμήμα της $X(\omega)$. Το σήμα $x(t)$ θα είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) + jI(\omega)] [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos(\omega t) - I(\omega) \sin(\omega t)] d\omega \\ &\quad + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \sin(\omega t) + I(\omega) \cos(\omega t)] d\omega \end{aligned}$$

Αν διασπάσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα σε δύο ολοκληρώματα, με όριο ολοκλήρωσης από $-\infty$ έως 0 το πρώτο και από 0 έως ∞ το δεύτερο, έχουμε για το φανταστικό μέρος του $x(t)$

$$\begin{aligned} \Im m[x(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 [R(\omega) \sin(\omega t) + I(\omega) \cos(\omega t)] d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \sin(\omega t) + I(\omega) \cos(\omega t)] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [R(-\omega) \sin(-\omega t) + I(-\omega) \cos(-\omega t)] d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \sin(\omega t) + I(\omega) \cos(\omega t)] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [-R(\omega) \sin(\omega t) - I(\omega) \cos(\omega t)] d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \sin(\omega t) + I(\omega) \cos(\omega t)] d\omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

Έτσι, το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos(\omega t) - I(\omega) \sin(\omega t)] d\omega \quad (3.3.63)$$

Από την τριγωνομετρία, επίσης, γνωρίζουμε

$$R(\omega) \cos(\omega t) - I(\omega) \sin(\omega t) = A(\omega) \cos[\omega t + \phi(\omega)] \quad (3.3.64)$$

όπου $A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$ είναι το πλάτος του $X(\omega)$ και $\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$ είναι η φάση του, έτσι έχουμε για το πραγματικό σήμα $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos[\omega t + \phi(\omega)] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos[\omega t + \phi(\omega)] d\omega \end{aligned} \quad (3.3.65)$$

Από την (3.3.65) παρατηρούμε ότι με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier $X(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε ένα άπειρο (μη αριθμήσιμο) πλήθος σημάτων απλών συχνοτήτων. Καθεμία από τις απλές αυτές συχνότητες υπεισέρχεται με πλάτος $[A(\omega)/\pi]d\omega$ και φάση $\phi(\omega)$, όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα. Αυτός είναι και ο λόγος που η μεταβλητή ω του μετασχηματισμού Fourier αναφέρεται και ως κυκλική συχνότητα. Απόρροια αυτού είναι και η ονομασία του μετασχηματισμού Fourier ως *φάσμα συχνοτήτων*, κατ' αναλογία της ανάλυσης που υφίσταται το λευκό φως στις επιμέρους συχνότητες που το απαρτίζουν.

Σημειώνουμε ότι, αν ένα σήμα είναι φανταστικό, δηλαδή $x(t) = jy(t)$ όπου $y(t)$ είναι ένα σήμα πραγματικό, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned} X(-\omega) &= -X^*(\omega) \\ \Re[X(-\omega)] &= -\Re[X(\omega)] \\ \Im[X(-\omega)] &= \Im[X(\omega)] \end{aligned} \quad (3.3.66)$$

(12) Δυϊσμός

Την ιδιότητα του δυϊσμού του μετασχηματισμού Fourier την έχουμε ήδη συναντήσει στα Παραδείγματα 3.3.1 και 3.3.4, όπου είδαμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier ενός ορθογώνιου παλμού έχει τη μορφή μιας συνάρτησης sinc και ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης sinc έχει τη μορφή ενός ορθογώνιου παλμού. Έστω $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$, τότε το σήμα $y(t) = X(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier

$$Y(\omega) = 2\pi x(-\omega) \quad (3.3.67)$$

Απόδειξη

Από την εξίσωση ανάλυσης έχουμε

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Με αντικατάσταση του t με $-t$ έχουμε

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-t) e^{j\omega t} dt$$

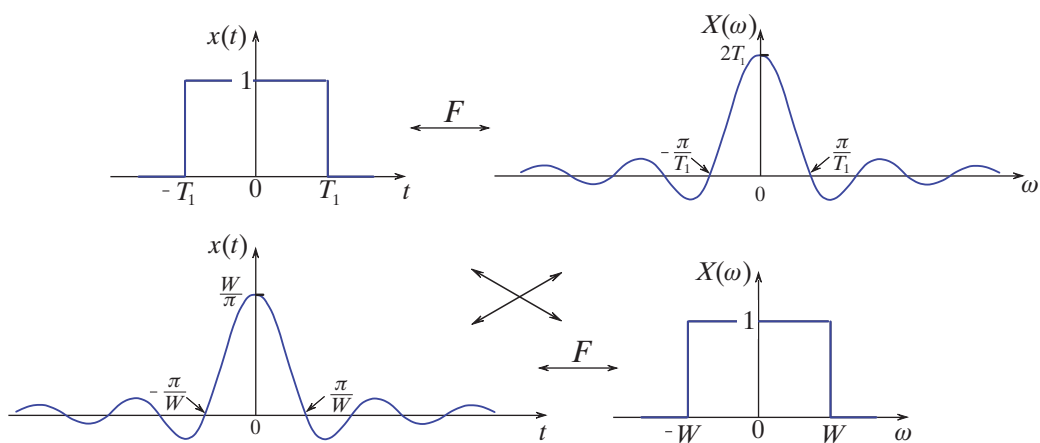
Εάν εναλλάξουμε το t με ω , έχουμε

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Αν συγκρίνουμε την τελευταία εξίσωση με τη εξίσωση σύνθεσης, έχουμε

$$X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\omega)$$

Στο Σχήμα 3.19 περιγράφεται σχηματικά η ιδιότητα του δυϊσμού.



Σχήμα 3.19 Η ιδιότητα δυϊσμού του μετασχηματισμού Fourier.

Εφαρμογές

1) Στην Άσκηση 3.8 έχουμε δείξει

$$x(t) = e^{-a|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Έτσι, το σήμα

$$y(t) = \frac{2}{t^2 + 1} \quad (3.3.68)$$

έχει μετασχηματισμό Fourier

$$Y(\omega) = 2\pi e^{-|\omega|} \quad (3.3.69)$$

Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζονται οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Πεδίο χρόνου	Πεδίο συχνότητας
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Συζυγία στη συχνότητα	$x^*(-t)$	$X^*(\omega)$
Ανάκλαση	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Γραμμικότητα	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(\omega)+bX_2(\omega)$
Άρτιο μέρος σήματος Πραγματικό μέρος φάσματος	$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x^*(-t)]$	$\Re[X(\omega)]=R(\omega)$
Περιττό μέρος σήματος Φανταστικό μέρος φάσματος	$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x^*(-t)]$	$j\Im[X(\omega)]=jI(\omega)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega-\omega_0)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(\omega)\delta(\omega)$
Πραγματικό σήμα	$x(t)=x^*(t)$	$X(\omega)=X^*(\omega)$ $\Re[X(\omega)]=\Re[X(-\omega)]$ $\Im[X(\omega)]=-\Im[X(-\omega)]$ $ X(\omega) = X(-\omega) $ $\arg X(\omega)=-\arg X(-\omega)$
Συνέλιξη	$x(t)*y(t)$	$X(\omega)\cdot Y(\omega)$
Διαμόρφωση	$x(t)\cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}[X(\omega)*Y(\omega)]$
Παραγωγή στο χρονικό πεδίο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Παραγωγή στο πεδίο συχνοτήτων	$tx(t)$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Δυσμός αν $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$	$y(t)=X(t)$	$Y(\omega)=2\pi x(-\omega)$
Θεώρημα Parseval	$\mathcal{E}_x=\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\mathcal{E}_x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$

2) Στο Παράδειγμα 3.3.2 έχουμε δείξει ότι $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$. Λόγω της ιδιότητας του δυσμού και, επειδή η κρουστική συνάρτηση είναι άρτια, συνεπάγεται ότι ένα συνεχές σήμα έχει μία φασματική συνιστώσα για $\omega = 0$, δηλαδή,

$$1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (3.3.70)$$

Παράδειγμα 3.3.8

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου βήματος.

Λύση Η συνάρτηση $u(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

Από τα ζεύγη Fourier $\frac{1}{2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega)$, $\operatorname{sgn}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega}$ και με τη βοήθεια της ιδιότητας της γραμμικότητας συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου βήματος είναι

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega} \quad (3.3.71)$$

Παράδειγμα 3.3.9

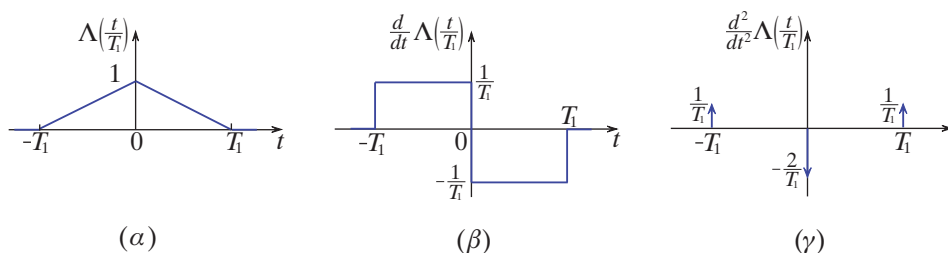
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του τριγωνικού σήματος

$$\Lambda\left(\frac{t}{T_1}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T_1}, & |t| < T_1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.3.72)$$

Λύση Παραγωγίζοντας το τριγωνικό σήμα δύο φορές, έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2} \Lambda\left(\frac{t}{T_1}\right) = \frac{1}{T_1} \delta(t + T_1) - \frac{2}{T_1} \delta(t) + \frac{1}{T_1} \delta(t - T_1) \quad (3.3.73)$$

Στο Σχήμα 3.20 εικονίζονται το τριγωνικό σήμα, η πρώτη και η δεύτερη παράγωγός του. Από την ιδιότητα της παραγωγίσης στο χρονικό πεδίο έχουμε



Σχήμα 3.20 Η γραφικές παραστάσεις (α) του τριγωνικού παλμού, (β) της πρώτης και (γ) της δεύτερης παραγώγου του.

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = (j\omega)^2 X(\omega) \quad (3.3.74)$$

Γνωρίζουμε ότι $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ έτσι, λόγω της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης, έχουμε

$$\mathcal{F}[\delta(t \pm T_1)] = e^{\pm j\omega T_1} \quad (3.3.75)$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της (3.3.73) λόγω των (3.3.74) και (3.3.75) έχουμε

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 \mathcal{F} \left[\Lambda \left(\frac{t}{T_1} \right) \right] &= \frac{1}{T_1} [e^{j\omega T_1} - 2 + e^{-j\omega T_1}] \\ \mathcal{F} \left[\Lambda \left(\frac{t}{T_1} \right) \right] &= \frac{2 \cos(\omega T_1) - 2}{T_1 (j\omega)^2} \\ &= T_1 \frac{\sin^2(\omega T_1/2)}{(\omega T_1/2)^2} \\ &= T_1 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega T_1}{2\pi} \right) \end{aligned} \quad (3.3.76)$$

Παράδειγμα 3.3.10

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.

Λύση Αν εκφράσουμε το συνημίτονο με τη βοήθεια της σχέσης του Euler, ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών όρων έχουμε

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \quad (3.3.77)$$

Γνωρίζουμε ότι $1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$. Έτσι, εφαρμόζοντας την ιδιότητα της ολίσθησης συχνότητας βρίσκουμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος.

$$\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (3.3.78)$$

Παράδειγμα 3.3.11

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$.

Λύση Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler το σήμα γράφεται

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} u(t) \quad (3.3.79)$$

Λόγω της ιδιότητας της ολίσθησης της συχνότητας και επειδή $\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)] &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{j(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega - \omega_0) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{j(\omega + \omega_0)} + \pi\delta(\omega + \omega_0) \right] \\ &= \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned} \quad (3.3.80)$$

Στον Πίνακα 3.3 υπάρχουν βασικά σήματα και οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Fourier τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3 Μετασχηματισμοί Fourier μερικών βασικών συναρτήσεων

A/A	Πεδίο χρόνου	Πεδίο συχνότητας
1	$\delta(t)$	1
2	1	$2\pi\delta(\omega)$ ή $\delta(f)$
3	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ ή $\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
4	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
5	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
6	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
7	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
8	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$
9	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2k\pi}{T})$
10	$\Pi\left(\frac{t}{2T_1}\right) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$
11	$\frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega > W \end{cases}$
12	$\Lambda\left(\frac{t}{T_1}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{T_1}, & t \leq T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$T_1 \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_1}{2\pi}\right)$
13	$\left(\frac{W}{\pi}\right) \left(\frac{\sin(Wt)}{Wt}\right)^2$	$X(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{ \omega }{2W}, & \omega \leq 2W \\ 0, & \omega > 2W \end{cases}$
14	$e^{-at}u(t), \Re[a] > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
15	$te^{-at}u(t), \Re[a] > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
16	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \Re[a] > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$
17	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
18	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
19	$e^{-a t }, \Re[a] > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
20	$\frac{1}{t}$	$-j\pi \text{sgn}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ ή $-j\pi \text{sgn}(f)$
21	$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\pi f}$ ή $\frac{2}{j\omega}$

3.3.3 Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Η χρήση της συνάρτησης $\delta(t)$, μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier και για περιοδικά σήματα.

Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δέλτα είναι

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1 \quad (3.3.81)$$

Επίσης,

$$1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (3.3.82)$$

Από την (3.3.81) και (3.3.82) λόγω της ιδιότητας ολίσθησης έχουμε αντίστοιχα

$$\delta(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} \quad (3.3.83)$$

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (3.3.84)$$

Όπως γνωρίζουμε, ένα περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier

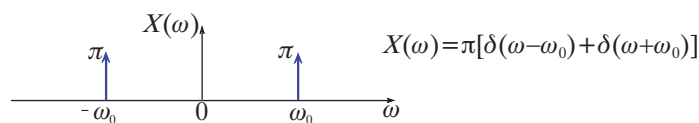
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Με τη βοήθεια της (3.3.84) και λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας μπορούμε να εκφράσουμε το μετασχηματισμό Fourier των περιοδικών σημάτων ως εξής

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (3.3.85)$$

Αν εφαρμόσουμε τα παραπάνω στα Παραδείγματα 3.2.4 και 3.2.6 έχουμε τα αντίστοιχα φάσματα στα Σχήματα 3.21 και 3.22.

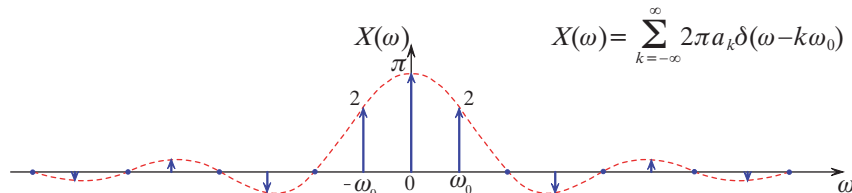
Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier επεκτείνεται και στα περιοδικά σήματα. Έτσι, το φάσμα $X(\omega)$ ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T_0 αποτελείται από συναρτήσεις δέλτα ομοιόμορφα κατανομημένες σε απόσταση $\omega_0 = 2\pi/T_0$, με ύψος 2π φορές τον αντίστοιχο συντελεστή της σειράς Fourier.



Σχήμα 3.21 Ο μετασχηματισμός Fourier για το σήμα $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.

3.4 Ενέργεια και Ισχύς

Οι έννοιες της ενέργειας και της ισχύος ενός σήματος παρουσιάστηκαν στο πρώτο κεφάλαιο. Στην ενότητα αυτή θα επεκτείνουμε τις έννοιες αυτές τόσο στο πεδίο του χρόνου, όσο και στο πεδίο συχνοτήτων.



Σχήμα 3.22 Ο μετασχηματισμός Fourier για το περιοδικό ορθογώνιο κύμα.

3.4.1 Ενεργειακά σήματα

Για ένα ενεργειακό σήμα $x(t)$, όπως έχουμε δει και στο Παράδειγμα 3.3.6, ορίζεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_x(\tau)$ ως

$$R_x(\tau) = x(\tau) \star x^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t) dt \quad (3.4.1)$$

Στη συνέχεια θα δούμε μερικές βασικές ιδιότητες της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

α) Η ενέργεια του σήματος είναι ίση με την τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του $x(t)$, για $\tau = 0$. Πράγματι,

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \mathcal{E}_x \quad (3.4.2)$$

β) Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ισούται με τη φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος. Η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας ενέργειας περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται η ενέργεια του σήματος στο χώρο συχνοτήτων. Πράγματι, λόγω του θεωρήματος της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier έχουμε

$$R_x(\tau) = x(\tau) \star x^*(-\tau) \Rightarrow \mathcal{F}[R_x(\tau)] = |X(\omega)|^2 \quad (3.4.3)$$

και από το θεώρημα του Parseval έχουμε

$$\mathcal{E}_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (3.4.4)$$

Στη συνέχεια, θα προσδιορίσουμε τη σχέση που συνδέει τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος εισόδου και του σήματος εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος.

Αν σήμα $x(t)$ εφαρμοστεί στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ και απόκριση συχνότητας $H(\omega)$, τότε η έξοδος του συστήματος είναι $y(t) =$

$x(t) \star h(t)$ ή στο πεδίο συχνοτήτων $Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$. Η ενέργεια του σήματος $y(t)$ είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y &= \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 d\omega = R_y(0) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

όπου $R_y(\tau) = y(\tau) \star y^*(-\tau)$ είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου του συστήματος. Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier για το $|Y(\omega)|^2$ έχουμε

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[|Y(\omega)|^2] = \mathcal{F}^{-1}[|X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[|X(\omega)|^2] \star \mathcal{F}^{-1}[|H(\omega)|^2] \\ &= R_x(\tau) \star R_h(\tau) \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Παράδειγμα 3.4.1

Να υπολογιστούν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, η φασματική πυκνότητα ενέργειας και η ενέργεια του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$

Λύση Γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Η φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος είναι

$$|X(\omega)|^2 = \frac{1}{a^2 + \omega^2}$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ισούται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της φασματικής πυκνότητας ενέργειας του σήματος

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[|X(\omega)|^2] = \frac{1}{2a} e^{-a|\tau|}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το ζεύγος MF 19 του Πίνακα 3.3. Η ενέργεια ισούται με την τιμή που έχει η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης στο μηδέν, έτσι

$$\mathcal{E}_x = R_x(0) = \frac{1}{2a}$$

Σημειώνεται ότι η ενέργεια του σήματος μπορεί να βρεθεί και από την (1.2.13).

3.4.2 Σήματα ισχύος

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τη μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ισχύος και θα διατυπώσουμε τις βασικές της ιδιότητες.

Η μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για ένα σήμα ισχύος $x(t)$ ορίζεται ως

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x^*(t - \tau) dt \quad (3.4.7)$$

Η ισχύς του σήματος \mathcal{P}_x είναι ίση με τη μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για $\tau = 0$. Πράγματι,

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \mathcal{R}_x(0) \quad (3.4.8)$$

Έστω $S_x(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier της μέσης χρονικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, τότε έχουμε

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \Rightarrow \mathcal{R}_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε την ισχύ του σήματος $x(t)$ με τη βοήθεια της $S_x(\omega)$. Πράγματι,

$$\mathcal{P}_x = \mathcal{R}_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (3.4.9)$$

Η συνάρτηση $S_x(\omega)$ περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται η ισχύς του σήματος στο χώρο των συχνοτήτων και ονομάζεται *φασματική πυκνότητα ισχύος* του σήματος $x(t)$.

Αν το σήμα $x(t)$, εφαρμοστεί στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ και απόκριση συχνότητας $H(\omega)$, τότε η μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) \star h(\tau) \star h(-\tau) \quad (3.4.10)$$

Η απόδειξη της (3.4.10) είναι πέρα από τα πλαίσια του παρόντος εγχειριδίου. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο [6] στην Αναφορά.

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Fourier και των δύο πλευρών της (3.4.10) βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει τη φασματική πυκνότητα ισχύος εισόδου και εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος, ως εξής

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= S_x(\omega) \cdot H(\omega) \cdot H^*(\omega) \\ &= S_x(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Η $|H(\omega)|^2$ ονομάζεται *απόκριση ισχύος* του συστήματος.

Παράδειγμα 3.4.2

Δίνεται το σήμα $x(t) = u(t)$. Ναδειχθεί, ότι το σήμα είναι σήμα ισχύος και να υπολογιστούν α) η ισχύς του, β) η μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του και γ) η φασματική πυκνότητα ισχύος του.

Λύση Η ενέργεια του σήματος είναι

$$\mathcal{E}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |u(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt = \lim_{T \rightarrow \infty} T = \infty$$

Το σήμα δεν είναι ενεργειακό σήμα. Η ισχύς του σήματος είναι

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |u(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (3.4.12)$$

Το σήμα είναι, λοιπόν, σήμα ισχύος. Η μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t-\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{\tau}^T dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T}(T-\tau) = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος είναι ο μετασχηματισμός Fourier της μέσης χρονικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης. Έτσι, με τη βοήθεια του ζεύγους 2 μετασχηματισμού Fourier του Πίνακα 3.3 έχουμε

$$S_x(\omega) = \mathcal{F}[\mathcal{R}_x(\tau)] = \pi\delta(\omega) \quad (3.4.14)$$

Σύνοψη Κεφαλαίου

Στην αρχή του κεφαλαίου ορίσαμε το εσωτερικό γινόμενο δύο σημάτων και το μέτρο ενός σήματος. Είδαμε πότε μία οικογένεια σημάτων αποτελεί ορθοκανονικό σύνολο στο χώρο των σημάτων. Παρατηρήσαμε ότι τα αρμονικά μιγαδικά εκθετικά σήματα και τα τριγωνομετρικά σήματα σε ένα πεπερασμένο διάστημα, συνιστούν ορθογώνιο σύνολο στον αντίστοιχο χώρο σημάτων.

Με βάση τα ανωτέρω περιγράψαμε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier, με τη βοήθεια του οποίου αναλύουμε ένα σήμα σε σειρά από αρμονικά μιγαδικά εκθετικά σήματα ή σε άθροισμα (συν)ημιτόνων, δηλαδή σε σήματα συγκεκριμένης συχνότητας. Περιγράψαμε τη μέθοδο προσδιορισμού των συντελεστών του αναπτύγματος και δώσαμε τη φυσική τους σημασία. Διευρύνσαμε τα παραπάνω αποτελέσματα και έτσι περιγράψαμε το μετασχηματισμό Fourier ενός σήματος. Παρατηρήσαμε ότι, όπως το ανάπτυγμα Fourier των περιοδικών σημάτων, έτσι και ο μετασχηματισμός Fourier των μη περιοδικών σημάτων αναπαριστά μη περιοδικά σήματα με εκθετικά σήματα και με τον τρόπο αυτό αποκαλύπτει το φασματικό τους περιεχόμενο.

Περιγράψαμε τις βασικές ιδιότητες που έχει ο μετασχηματισμός Fourier. Παρουσιάσαμε λειτουργίες, όπως η διαμόρφωση, η οποία αποτελεί βασική λειτουργία στην εκπομπή ενός σήματος από ένα σημείο σε άλλο μέσα από ένα κανάλι (ζεύγος συρμάτων ή της ατμόσφαιρας), το θεώρημα της συνέλιξης, με τη βοήθεια του οποίου η υπολογιστικά πολύπλοκη σχέση της συνέλιξης μετασχηματιζόμενη κατά Fourier καταλήγει σε ένα απλό γινόμενο συναρτήσεων. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Parseval είδαμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια ενός σήματος είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο των συχνοτήτων.

Είδαμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει και για τα περιοδικά σήματα και σημειώσαμε ότι τα περιοδικά σήματα έχουν φάσμα διακριτό, ενώ τα μη περιοδικά έχουν φάσμα συνεχές.

Ορίσαμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός ενεργειακού σήματος και τη μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ισχύος. Παρατηρήσαμε ότι οι μετασχηματισμοί Fourier των δύο αυτών συναρτήσεων είναι η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας ενέργειας και η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας ισχύος.

Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάστηκαν δύο πίνακες. Στον Πίνακα 3.2 υπάρχουν οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, ενώ στον Πίνακα 3.3 οι μετασχηματισμοί Fourier μερικών βασικών συναρτήσεων. Θα πρέπει, τελειώνοντας το διάβασμα του κεφαλαίου, να γνωρίζετε καλά τις ιδιότητες και να μπορείτε, βασιζόμενοι στα παραδείγματα του κεφαλαίου και στις ιδιότητες, να βρίσκετε τους μετασχηματισμούς Fourier των βασικών συναρτήσεων που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα.

3.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 3.1** Να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν το μέτρο και η φάση των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier του σήματος.

$$x(t) = 1 + 2 \sin(\omega_0 t) + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

- 3.2** Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του περιοδικού ορθογώνιου σήματος του Παραδείγματος 3.2.6. Επίσης, να υπολογιστεί η ισχύς των συχνοτήτων που περιέχει ο κεντρικός λοβός (δηλαδή, η συνολική ισχύς του κεντρικού λοβού). Ο κεντρικός λοβός περιέχει όλες τις συχνότητες μεταξύ του πρώτου αριστερά μηδενισμού και του πρώτου δεξιά μηδενισμού.

- 3.3** Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier για το σήμα

$$x(t) = \cos(4t) \cos(6t)$$

3.4 Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier για το σήμα

$$x(t) = \cos^2(2\pi t)$$

3.5 Να υπολογιστούν οι εκθετικές σειρές Fourier για τα σήματα.

1. $x(t) = e^{j200t}$

2. $x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right)$

3. $x(t) = \cos(4t) + \sin(8t)$

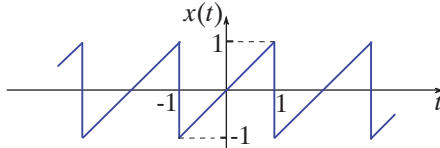
4. $x(t) = \cos(4t) + \sin(6t)$

5. $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο ίση με 2 και $x(t) = e^{-t}$ για $-1 < t < 1$

6. $x(t) = [1 + \cos(2\pi t)][\cos(10\pi t - \frac{\pi}{4})]$

3.6 Να υπολογίσετε το μέτρο και τη φάση του μετασχηματισμού Fourier του αιτιατού εκθετικού σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$. Να παρατηρήσετε ότι $|X(0)| = \frac{1}{a}$ και $|X(a)| = \frac{1}{a\sqrt{2}}$

3.7 Να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier και της τριγωνομετρικής σειράς για το περιοδικό σήμα το οποίο περιγράφεται στο Σχήμα 3.23.



Σχήμα 3.23 Το σήμα του Προβλήματος 3.7.

3.8 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

και να κάνετε τη γραφική παράσταση του σήματος και του μέτρου του μετασχηματισμού Fourier.

3.9 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier για καθένα από τα σήματα

1. $x(t) = [e^{at} \cos(\omega_0 t)]u(t), \quad a > 0$

2. $x(t) = e^{-a|t|} \sin(bt), \quad a \neq b$

3. $x(t) = e^{2+t}u(-t+1)$

4. $x(t) = e^{-3t}[u(t+2) - u(t-3)]$

5. $x(t) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi t), & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

$$6. x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT), \quad |a| < 1$$

$$7. x(t) = [t \cdot e^{-2t} \sin(4t)]u(t)$$

$$8. x(t) = u(t) + 2\delta(3 - 2t)$$

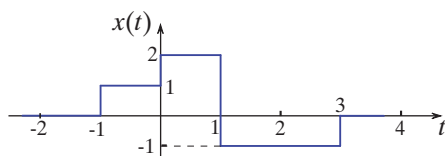
3.10 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \sin(\omega_0 t)$.

3.11 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$.

3.12 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του συμμετρικού ορθογώνιου παλμού $\Pi(t)$, ο οποίος έχει χρονική διάρκεια ίση με μία χρονική μονάδα και πλάτος επίσης ίσο με μία μονάδα μήκους, δηλαδή,

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

3.13 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier για το σήμα το οποίο περιγράφεται στο Σχήμα 3.24.



Σχήμα 3.24 Το σήμα του Προβλήματος 3.13.

3.14 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier για τα περιοδικά σήματα

$$1. x_1(t) = \cos(4t) \cos(6t)$$

$$2. x_2(t) = \sin^2(2\pi t)$$

3.15 Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier για κάθε ένα από τα ακόλουθα φάσματα

$$1. X(\omega) = \frac{2 \sin[3(\omega - 2\pi)]}{\omega - 2\pi}$$

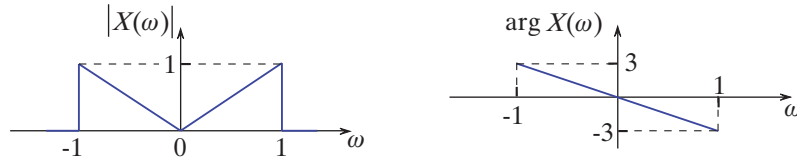
$$2. X(\omega) = \cos\left(4\omega + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$3. X(\omega) = 2[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] + 3[\delta(\omega - 2\pi) - \delta(\omega + 2\pi)]$$

3.16 Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier για το σήμα του οποίου το μέτρο και η φάση περιγράφεται στο Σχήμα 3.25

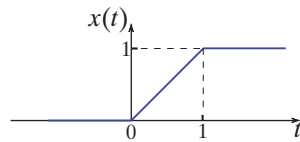
3.17 Να δείξετε ότι το σήμα $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ είναι σήμα ισχύος και να υπολογίσετε την ισχύ του με τη βοήθεια του θεωρήματος Parseval, δηλαδή είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο συχνοτήτων.

3.18 Αν το σήμα, $x(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$ εφαρμοστεί στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος, το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-\beta t}u(t)$, $\beta > 0$ και $\beta \neq a$, να βρεθούν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, η φασματική πυκνότητας ενέργειας και η ενέργεια του σήματος εξόδου.



Σχήμα 3.25 Το μέτρο και η φάση του MF του σήματος στο Πρόβλημα 3.16.

- 3.19** Αν το σήμα $x(t) = u(t)$ εφαρμοστεί στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος, το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(t) = \text{sinc}(6t)$, να βρεθούν η φασματική πυκνότητα ισχύος και η ισχύς του σήματος εξόδου.
- 3.20** Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier για το σήμα το οποίο περιγράφεται στο Σχήμα 3.26.



Σχήμα 3.26 Το σήμα του Προβλήματος 3.20.

- 3.21** Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \Lambda(2t - 3)$ όπου $\Lambda(t)$ είναι ο τριγωνικός παλμός και να γίνει η γραφική του παράσταση σε συνάρτηση με τη συχνότητα.

Βιβλιογραφία

- 3.1 Σ. Θεοδορίδης, Κ. Μπερμπερίδης, Λ. Κοφίδης, “Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων”, *Τυπωθήτω - Γιώργος Δαρδανός*, Αθήνα 2003.
- 3.2 Ν. Καλουπτσίδης, “Σήματα Συστήματα και Αλγόριθμοι”, *Δίαυλος*, Αθήνα, 1994.
- 3.3 Α. Μάργαρης, “Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου”, *Εκδόσεις Τζιόλα* 2012.
- 3.4 S. Haykin, B. Veen, “Signal and Systems”, *John & Wiley Sons, Inc.* 2003
- 3.5 A. V. Oppenheim, R. S. Willsky, I. T. Young, “Signal and Systems”, *Prentice - Hall Inc.*, N. Y., 1983.
- 3.6 R. E. Siemer, W. H. Tranter, D. R. Fannin, “Signals & Systems Continuous and Discrete”, *Prentice Hall*, 1998.
- 3.7 A. Papoulis, “The Fourier integral and its Applications”, *McGraw Hill*, 1962.
- 3.8 J. G. Proakis, M. Salehi, “Communication System Engineering”, *Prentice Hall* 1994.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Σκοπός του κεφαλαίου είναι να παρουσιάσει μερικές εφαρμογές του Μετασχηματισμού Fourier (MF). Ειδικότερα, στο κεφάλαιο αυτό θα περιγραφούν έμμεσοι τρόποι υπολογισμού του αντίστροφου MF, τρόποι οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι, αν η μορφή του MF δεν είναι απλή. Σε αυτή την περίπτωση, ο απευθείας υπολογισμός του αντίστροφου με την εξίσωση σύνθεσης γίνεται μία δύσκολη διαδικασία. Επίσης, θα περιγραφεί μία εύκολη μέθοδος εύρεσης της απόκρισης συχνότητας, της κρουστικής απόκρισης και της εξόδου ενός συστήματος, του οποίου γνωρίζουμε τη διαφορική εξίσωση που συσχετίζει τα σήματα εισόδου-εξόδου του συστήματος.

Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 3 ορίσαμε το MF, ο οποίος παρέχει τη δυνατότητα μετάβασης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο συχνότητας. Ο MF της συνέλιξης δύο σημάτων υπολογίζεται με ένα απλό γινόμενο των αντίστοιχων μετασχηματισμών. Με τον τρόπο αυτό, υπολογίζεται πρώτα ο MF της εξόδου και στη συνέχεια, με έναν αντίστροφο MF, προσδιορίζεται η έξοδος του συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν μερικές ακόμα εφαρμογές του MF στη μελέτη γραμμικών συστημάτων.

4.1 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική του απόκριση, $h(t)$, και ότι η είσοδος, $x(t)$, και η έξοδος, $y(t)$, του ΓΧΑ συστήματος συνδέονται με το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \star h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $H(\omega)$, της κρουστικής απόκρισης $h(t)$, όπως έχουμε δει στην Ενότητα 2.5, αποτελεί την απόκριση συχνότητας του συστήματος και δίνεται ως

το πηλίκο των μετασχηματισμών Fourier εισόδου-εξόδου, ως εξής

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (4.1.2)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $H(\omega)$ μπορεί να βρεθεί είτε υπολογίζοντας το μετασχηματισμό Fourier της $h(t)$, αφού πρώτα υπολογιστεί η $h(t)$, είτε ως πηλίκο των μετασχηματισμών Fourier εισόδου-εξόδου. Ο δεύτερος τρόπος υπολογισμού της $H(\omega)$ είναι σαφώς ευκολότερος του πρώτου και για το λόγο αυτό ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη γραμμικών συστημάτων.

4.1.1 Η απόκριση συχνότητας για συστήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Στο Κεφάλαιο 2 ορίσαμε ως σύστημα την οντότητα εκείνη η οποία μετατρέπει μια φυσική ποσότητα που περιγράφεται από το σήμα εισόδου $x(t)$ σε μια άλλη που περιγράφεται από το σήμα εξόδου $y(t)$. Η διαδικασία αυτή μετασχηματισμού εκφράζεται με τη βοήθεια μίας διαφορικής εξίσωσης που συσχετίζει τα σήματα εισόδου-εξόδου. Όταν το σύστημα είναι γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο, όπως έχουμε στα Παραδείγματα 2.1.1 και 2.1.2, η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή έχει τη γενική μορφή

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (4.1.3)$$

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο προσδιορίζουμε την απόκριση συχνότητας $H(\omega)$ από την (4.1.3) με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier και των ιδιοτήτων του. Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της εξίσωσης (4.1.3) και παίρνουμε

$$\mathcal{F} \left[\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right] = \mathcal{F} \left[\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]$$

Λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας, που χαρακτηρίζει το μετασχηματισμό Fourier, έχουμε

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F} \left[\frac{d^k y(t)}{dt^k} \right] = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]$$

λόγω της ιδιότητας της διαφορίσης, έχουμε την εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

ή ισοδύναμα

$$Y(\omega) \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k = X(\omega) \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k$$

και λόγω της (4.1.2), έχουμε

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \quad (4.1.4)$$

Παρατηρούμε τα εξής

- Η απόκριση συχνότητας $H(\omega)$, ενός ΓΧΑ συστήματος είναι μία ρητή συνάρτηση, δηλαδή μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο πολυωνύμων της μεταβλητής $(j\omega)$.
- Στον υπολογισμό της απόκρισης συχνότητας του συστήματος δεν υπεισέρχονται οι αρχικές συνθήκες στις οποίες βρίσκεται το σύστημα, σε αντίθεση με τη λύση της (4.1.3), η οποία εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier προϋποθέτει έναρξη της διαδικασίας στο $-\infty$, που είναι το κάτω όριο του ολοκληρώματος στον τύπο ορισμού του (3.3.14) και από σύμβαση δεχόμαστε ότι στο $-\infty$ οι αρχικές συνθήκες είναι πάντα μηδέν.

Παράδειγμα 4.1.1 (Σύστημα πρώτης τάξης).

Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος πρώτης τάξης, το οποίο, όπως είναι γνωστό, περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t), \quad a > 0 \quad (4.1.5)$$

Λύση Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της εξίσωσης, λόγω των ιδιοτήτων της γραμμικότητας και διαφύρισης, έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{dy(t)}{dt} \right] + \mathcal{F} [ay(t)] &= \mathcal{F} [bx(t)] \\ (j\omega)Y(\omega) + aY(\omega) &= bX(\omega) \\ H(\omega) &= \frac{b}{j\omega + a} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε το θεώρημα της συνέλιξης $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ Στο Παράδειγμα 3.3.3 έχουμε δείξει

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (4.1.7)$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση του συστήματος πρώτης τάξης είναι

$$h(t) = be^{-at}u(t) \quad (4.1.8)$$

4.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Είναι προφανές ότι, αν γνωρίζουμε την απόκριση συχνότητας ενός συστήματος, τότε με τη βοήθεια της (3.3.13), η οποία περιγράφει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, μπορούμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Αν η μορφή της $H(\omega)$ δεν είναι απλή, τότε ο απευθείας υπολογισμός της $h(t)$ από την (3.3.13) μπορεί να αποδειχθεί μία επίπονη διαδικασία. Για το λόγο αυτό, συνήθως, ακολουθούνται έμμεσοι τρόποι υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier. Αν η $H(\omega)$ έχει απλή μορφή, όπως στο Παράδειγμα 4.1.1, είναι δυνατόν με τη βοήθεια του Πίνακα 3.3 να προσδιορίζουμε εύκολα την κρουστική απόκριση του συστήματος. Γενικότερα, αν η απόκριση συχνότητας μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα επιμέρους στοιχειωδών όρων, τότε με τη βοήθεια του Πίνακα 3.3 και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Fourier μπορούμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Στο Παράρτημα Β περιγράφεται η διαδικασία ανάπτυξης μίας ρητής συνάρτησης, σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Παρακάτω εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία αυτή σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.2.1 (Σύστημα δεύτερης τάξης).

Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα δεύτερης τάξης, το οποίο αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία, και χαρακτηρίζεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) \quad (4.2.1)$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της εξίσωσης (4.2.1) και με τη βοήθεια της ιδιότητας της γραμμικότητας και της διαφορίσης, που έχει ο μετασχηματισμός Fourier, βρίσκουμε ότι η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} \quad (4.2.2)$$

Αναλύουμε τα πολυώνυμα του αριθμητή και του παρανομαστή σε γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή δεύτερου βαθμού ως προς $(j\omega)$ και στη συνέχεια αναπτύσσουμε την απόκριση συχνότητας σε απλά κλάσματα. Έτσι, παίρνουμε

$$H(\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} = \frac{C_1}{j\omega + 1} + \frac{C_2}{j\omega + 3}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις σταθερές C_1 και C_2

$$C_1 = [(j\omega + 1)H(\omega)]|_{j\omega=-1} = \left. \frac{j\omega + 2}{j\omega + 3} \right|_{j\omega=-1} = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = [(j\omega + 3)H(\omega)]|_{j\omega=-3} = \left. \frac{j\omega + 2}{j\omega + 1} \right|_{j\omega=-3} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$$

Επομένως, η απόκριση συχνότητας παίρνει τη μορφή

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega + 3} \quad (4.2.3)$$

Με τη βοήθεια της ιδιότητας της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier και της (4.1.7), η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-3t} u(t) \quad (4.2.4)$$

Παράδειγμα 4.2.2

Αν η είσοδος του συστήματος στο Παράδειγμα 4.2.1 είναι

$$x(t) = e^{-t} u(t) \quad (4.2.5)$$

να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος.

Λύση Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εισόδου $x(t) = e^{-t} u(t)$ είναι $X(\omega) = 1/(j\omega + 1)$. Με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης, ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου είναι

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \left[\frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \right] \left[\frac{1}{j\omega + 1} \right] = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)}$$

Στην περίπτωση αυτή η ανάπτυξη σε απλά κλάσματα του $Y(\omega)$ έχει τη μορφή

$$Y(\omega) = \frac{C_{11}}{j\omega + 1} + \frac{C_{12}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{C_{21}}{j\omega + 3}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις σταθερές C_{11} , C_{12} και C_{21}

$$C_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{d(j\omega)} [(j\omega + 1)^2 Y(\omega)] \Big|_{j\omega=-1} = \frac{d}{d(j\omega)} \left[\frac{j\omega + 2}{j\omega + 3} \right] \Big|_{j\omega=-1} \Rightarrow C_{11} = \frac{1}{4}$$

$$C_{12} = [(j\omega + 1)^2 Y(\omega)] \Big|_{j\omega=-1} = \frac{j\omega + 2}{j\omega + 3} \Big|_{j\omega=-1} \Rightarrow C_{12} = \frac{1}{2}$$

$$C_{21} = [(j\omega + 3) Y(\omega)] \Big|_{j\omega=-3} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2} \Big|_{j\omega=-3} \Rightarrow C_{21} = -\frac{1}{4}$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου παίρνει τη μορφή

$$Y(\omega) = \frac{1}{4} \frac{1}{j\omega + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(j\omega + 1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{j\omega + 3} \quad (4.2.6)$$

Αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα της διαφορίσης στην (4.1.7) στο πεδίο συχνοτήτων, έχουμε

$$\begin{aligned} t \cdot x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{X(\omega)}{d\omega} \\ t \cdot e^{-at} u(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(j\omega + a)^2} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, της ιδιότητας της γραμμικότητας, της (4.1.7) και της (4.2.7) βρίσκουμε ότι η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \right] u(t) \quad (4.2.8)$$

Πρέπει να τονιστεί στα Παραδείγματα 4.2.1 και 4.2.2 ότι, αν ζητείται μόνο η $y(t)$ και όχι η $Y(\omega)$, τότε ο ευκολότερος τρόπος εύρεσής της είναι η απευθείας επίλυση της διαφορικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 4.2.3 (Προσδιορισμός συστήματος από την είσοδό του και έξοδό του).

Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος σε σήμα εισόδου $x(t) = e^{-2t}u(t)$ είναι $y(t) = e^{-t}u(t)$. Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος και η κρουστική απόκριση.

Λύση Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εισόδου $x(t)$ είναι

$$X(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

και ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εξόδου $y(t)$ είναι

$$Y(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος υπολογίζεται με τη βοήθεια της 4.1.2

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2 + j\omega}{1 + j\omega} \quad (4.2.9)$$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος γράφεται ως

$$H(\omega) = 1 + \frac{1}{1 + j\omega}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t) \quad (4.2.10)$$

Σημειώνεται ότι, όταν το σήμα εισόδου είναι σήμα μίας συχνότητας, θα πρέπει και το σήμα εξόδου να είναι σήμα της ίδιας συχνότητας και στην περίπτωση αυτή προσδιορίζεται μόνο η τιμή της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα του σήματος εισόδου.

4.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE

Από το θεώρημα της συνέλιξης γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της εισόδου $X(\omega)$ και της εξόδου $Y(\omega)$ ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος, το οποίο έχει απόκριση συχνότητας $H(\omega)$, συνδέονται με τη σχέση

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (4.3.1)$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου προκύπτει ως γινόμενο του μετασχηματισμού Fourier της εισόδου με την απόκριση συχνότητας. Από την (4.3.1) έχουμε για τα μέτρα και τις φάσεις των αντιστοιχών ποσοτήτων τις εξισώσεις

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| \cdot |X(\omega)| \text{ και } \arg Y(\omega) = \arg H(\omega) + \arg X(\omega) \quad (4.3.2)$$

Η αθροιστική μορφή της δεύτερης εξίσωσης επιτρέπει τον προσδιορισμό της γραφικής παράστασης της φάσης εξόδου με απλή πρόσθεση των γραφημάτων της φάσης εισόδου με τη φάση της απόκρισης συχνότητας. Για να πετύχουμε ανάλογη συμπεριφορά για το μέτρο, λογαριθμίζουμε την πρώτη εξίσωση και έχουμε

$$\log|Y(\omega)| = \log|H(\omega)| + \log|X(\omega)| \quad (4.3.3)$$

Συχνά, για τη γραφική αναπαράσταση του μέτρου, χρησιμοποιούμε λογαριθμική κλίμακα και ως μονάδα μέτρου το decibel (dB). Η κλίμακα των dB βασίζεται στην αντιστοιχία

$$\text{dB} = 20\log_{10}|H(\omega)| \quad (4.3.4)$$

Ενδεικτικά έχουμε τις ακόλουθες τιμές

$$\begin{aligned} 0 \text{ dB} & \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| = 1, \\ 20 \text{ dB} & \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| = 10, \quad -20 \text{ dB} \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| = 0,1 \\ 40 \text{ dB} & \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| = 100, \quad -40 \text{ dB} \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| = 0,01 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε επιπλέον ότι

$$1 \text{ dB} \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| \approx 1,12 \text{ και } 6 \text{ dB} \text{ αντιστοιχεί σε } |H(\omega)| \approx 2$$

Διαγράμματα που απεικονίζουν τη φάση και το μέτρο σε dB, σε συνάρτηση με τη συχνότητα, ονομάζονται *διαγράμματα Bode*. Επειδή ο λογάριθμος εκτείνει την κλίμακα, η χρησιμοποίηση λογαριθμικής κλίμακας εξασφαλίζει καλύτερη ευκρίνεια όταν το εύρος των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει είναι μεγάλο ή περιορίζεται σε μικρές τιμές κοντά στο μηδέν. Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στο Παράδειγμα 4.3.1.

Παράδειγμα 4.3.1

Να υπολογιστεί η απόκριση του συστήματος πρώτης τάξης όταν η είσοδος είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

Λύση Ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου βήματος είναι (βλέπε Πίνακα 3.3)

$$U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (4.3.5)$$

Από το θεώρημα της συνέλιξης προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου είναι

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega) = \frac{b}{j\omega + \alpha} \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right)$$

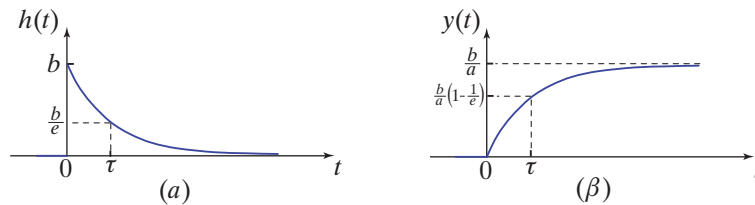
για $\omega \neq 0$ επειδή $\delta(\omega) = 0$, έχουμε

$$Y(\omega) = \frac{b}{(j\omega + a)j\omega} = -\frac{b}{a} \frac{1}{j\omega + a} + \frac{b}{a} \frac{1}{j\omega}$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, της ιδιότητας της γραμμικότητας, της (4.1.7) και του μετασχηματισμού Fourier του μοναδιαίου βήματος υπολογίζουμε την έξοδο του συστήματος

$$y(t) = \left(\frac{b}{a} - \frac{b}{a} e^{-at} \right) u(t) \quad (4.3.6)$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος πρώτης τάξης και η απόκρισή του στο μοναδιαίο βήμα παριστάνονται γραφικά στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1 Απόκρισεις συστήματος πρώτης τάξης (α) κρουστική απόκριση (β) απόκριση στο μοναδιαίο βήμα.

Η ασυμπτωτική κατάσταση της απόκρισης στο μοναδιαίο βήμα είναι b/a . Η παράμετρος $\tau = 1/a$ ονομάζεται *χρονική σταθερά* και σηματοδοτεί το ρυθμό με τον οποίο το σύστημα αποκρίνεται. Τη χρονική στιγμή $t = \tau$, η κρουστική απόκριση μειώνει την τιμή που είχε αρχικά $1/e$ φορές, ενώ η απόκριση στο μοναδιαίο βήμα απέχει $1/e$ φορές από την τελική της τιμή (Σχήμα 4.1). Παρατηρούμε ότι, καθώς $a \rightarrow +\infty$, η χρονική σταθερά μικραίνει και η πτωτική τάση της κρουστικής απόκρισης γίνεται πιο απότομη.

Η απόκριση συχνότητας, η κρουστική απόκριση και η απόκριση στο μοναδιαίο βήμα του συστήματος πρώτης τάξης, όταν $a = b$, είναι

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}, \quad h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \quad \text{και} \quad y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t) \quad (4.3.7)$$

Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ή η απόκριση πλάτους του συστήματος είναι

$$|H(\omega)| = \sqrt{H(\omega)H^*(\omega)} = \sqrt{\frac{1}{j\omega\tau + 1} \frac{1}{-j\omega\tau + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \quad (4.3.8)$$

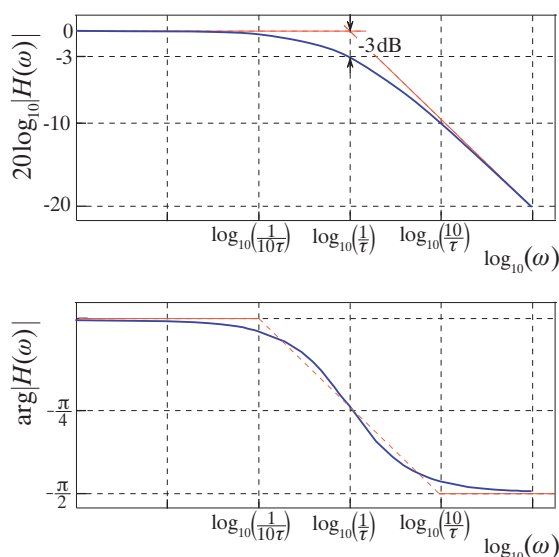
και σε dB

$$20\log_{10}|H(\omega)| = -10\log_{10} (1 + (\tau\omega)^2) \quad (4.3.9)$$

Παρατηρούμε ότι,

- Αν $\omega\tau \ll 1$, ισχύει $\log_{10}(1 + (\tau\omega)^2) \approx \log_{10}1 = 0$. Συνεπώς, στις χαμηλές συχνότητες το μέτρο σε dB της απόκρισης συχνότητας είναι περίπου μηδέν, εφόσον $20\log_{10}|H(\omega)| \approx 0$ για $\omega \ll 1/\tau$.
- Αν $\omega\tau \gg 1$, ισχύει $\log_{10}(1 + (\tau\omega)^2) \approx \log_{10}(\tau\omega)^2 = 2\log_{10}\tau + 2\log_{10}\omega$. Συνεπώς, στις υψηλές συχνότητες το μέτρο σε dB προσεγγίζεται από γραμμική συνάρτηση του $\log_{10}(\omega)$, η οποία έχει κλίση -20,

$$20\log_{10}|H(\omega)| \approx -20\log_{10}\tau - 20\log_{10}\omega \text{ για } \omega \gg \frac{1}{\tau}$$



Σχήμα 4.2 Τα διαγράμματα Bode του συστήματος πρώτης τάξεως.

Στο Σχήμα 4.2 φαίνονται τα διαγράμματα Bode συστήματος πρώτης τάξεως. Για το σημείο τομής των ασύμπτωτων ευθειών που προσεγγίζουν το μέτρο στις χαμηλές και υψηλές συχνότητες ισχύει $\log_{10}(\omega) = -\log_{10}(\tau)$ και αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega = 1/\tau$. Στη συχνότητα αυτή το μέτρο σε dB είναι

$$20\log_{10} \left| H \left(\frac{1}{\tau} \right) \right| = -10\log_{10} \left[\left(\frac{1}{\tau} \right)^2 + 1 \right] = -10\log_{10}(2) \approx -3\text{dB}$$

Για το λόγο αυτό, η κυκλική συχνότητα $\omega = 1/\tau$ ονομάζεται *κυκλική συχνότητα -3 dB*. Γενικά, η κυκλική συχνότητα -3dB είναι η κυκλική συχνότητα για την οποία το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος αποκτά το $1/\sqrt{2}$ της μέγιστης τιμής του

μέτρου της απόκρισης συχνότητας του συστήματος.

$$|H(\omega)|_{\omega_{-3dB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(\omega)|_{max} \quad (4.3.10)$$

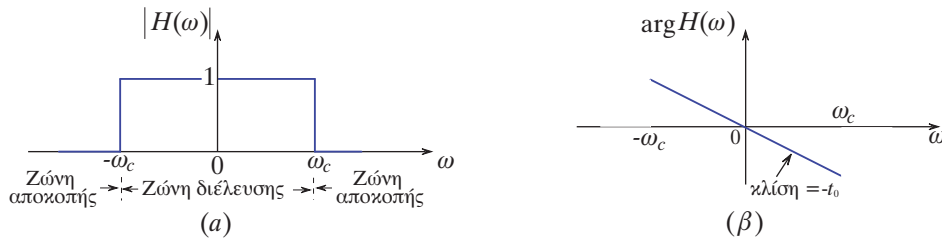
Σε ανάλογα συμπεράσματα καταλήγουμε για τη φάση, όπου στην περίπτωση αυτή υπάρχουν τρεις ασύμπτωτες ευθείες (Σχήμα 4.2).

4.4 ΙΔΑΝΙΚΟ ΦΙΛΤΡΟ ΒΑΣΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ - ΒΑΘΥΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ

Ένα σύστημα το οποίο ενισχύει ή αποδυναμώνει το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ανάλογα με την τιμή ή το διάστημα τιμών της συχνότητας ω , ονομάζεται *φίλτρο*. *Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο* ή *ιδανικό φίλτρο βασικής ζώνης** ονομάζεται το ΓΧΑ σύστημα το οποίο έχει απόκριση συχνότητας

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (4.4.1)$$

όπου t_0 είναι σταθερή ποσότητα. Η σταθερή κυκλική συχνότητα ω_c χαρακτηρίζεται ως *κυκλική συχνότητα αποκοπής* του φίλτρου. Στο Σχήμα 4.3 δίνεται η γραφική παράσταση του μέτρου και της φάσης του ιδανικού φίλτρου βασικής ζώνης. Το μέτρο της απόκρισης



Σχήμα 4.3 (α) Το μέτρο και (β) η φάση της απόκρισης συχνότητας του ιδανικού φίλτρου βασικής ζώνης. Η κλίση της ευθείας προσδιορίζεται από το t_0 .

συχνότητας του βαθυπερατού φίλτρου είναι ίσο με 1 για $-\omega_c < \omega < \omega_c$. Δεδομένου ότι $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$, είναι προφανές ότι οι συχνότητες του σήματος εισόδου που βρίσκονται σε αυτό το διάστημα διέρχονται από το φίλτρο με αμετάβλητο πλάτος. Για το λόγο αυτό, το διάστημα αυτό καλείται και *ζώνη διέλευσης* του φίλτρου. Επίσης, επειδή το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του βαθυπερατού φίλτρου είναι ίσο με 0 για $\omega < -\omega_c$ και $\omega_c < \omega$, είναι προφανές ότι το βαθυπερατό φίλτρο απορροφά τις συχνότητες εκείνες του φάσματος του σήματος εισόδου που είναι μεγαλύτερες από τη συχνότητα αποκοπής. Το διάστημα αυτό αποτελεί τη *ζώνη αποκοπής* του φίλτρου.

* εμφανίζεται και ως κατωπερατό φίλτρο ή και κατωδιαβατό φίλτρο

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι στην είσοδο του βαθυπερατού φίλτρου το σήμα αποτελείται από δύο συνιστώσες, την $x_{επ}(t)$ που είναι η επιθυμητή συνιστώσα του σήματος και την $x_{αν}(t)$ που είναι η ανεπιθύμητη συνιστώσα, π.χ. ένα σήμα παρεμβολής ή θόρυβος. Έστω δε ότι $|X_{επ}(\omega)| = 0$ για $|\omega| > \omega_c$ σε αντίθεση με την ανεπιθύμητη συνιστώσα, της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier δεν ικανοποιεί αντίστοιχη σχέση. Για μια τέτοια περίπτωση, το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο θα αφήνει την επιθυμητή συνιστώσα να διέρχεται ενώ θα απορροφήσει το τμήμα της ανεπιθύμητης συνιστώσας το οποίο περιέχει συχνότητες μεγαλύτερες από τη συχνότητα αποκοπής, με αποτέλεσμα τη βελτίωση της ποιότητας του σήματος $x_{επ}(t)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το μη μηδενικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier, $X(\omega)$, του σήματος εισόδου, $x(t)$, εντοπίζεται στη ζώνη διέλευσης. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του συστήματος είναι

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

ή στο πεδίο του χρόνου

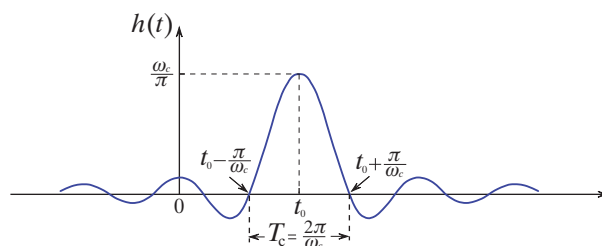
$$y(t) = x(t - t_0) \quad (4.4.2)$$

Με άλλα λόγια, το γεγονός ότι η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας, η επίδραση του φίλτρου σε ένα σήμα εισόδου, με φασματικό περιεχόμενο εντοπισμένο στη ζώνη διέλευσης, είναι μία χρονική καθυστέρηση t_0 .

Από το μετασχηματισμό Fourier του ορθογώνιου παλμού και με τη βοήθεια της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης υπολογίζεται η κρουστική απόκριση του ιδανικού κατωπερατού φίλτρου

$$h(t) = \frac{\sin[\omega_c(t - t_0)]}{\pi(t - t_0)} = \frac{\omega_c}{\omega} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c(t - t_0)}{\pi}\right) \quad (4.4.3)$$

Η γραφική παράσταση της κρουστικής απόκρισης είναι στο Σχήμα 4.4.



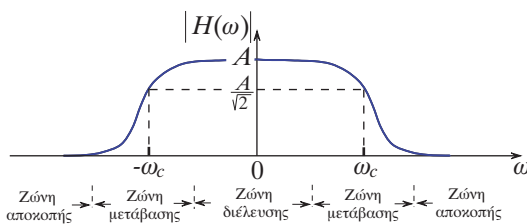
Σχήμα 4.4 Η κρουστική απόκριση του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου.

Παρατηρήσεις

1. Όσο μικρότερη είναι η συχνότητα αποκοπής, τόσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια της κρουστικής απόκρισης.

2. Το ιδανικό κατωπερατό φίλτρο είναι μη αιτιατό, εφόσον η κρουστική απόκρισή του είναι μη μηδενική για αρνητικές τιμές του χρόνου και, επομένως, είναι μη πραγματοποιήσιμο. Αν η τιμή της σταθεράς t_0 είναι αρκετά μεγάλη, οι τιμές της κρουστικής απόκρισης τις αρνητικές χρονικές στιγμές μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Και ως εκ τούτου μπορούμε να προσεγγίσουμε το φίλτρο με ένα αιτιατό σύστημα.
3. Όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα αποκοπής, τόσο ταχύτερα το φίλτρο έχει τη δυνατότητα να παρακολουθεί απότομες μεταβολές του σήματος εισόδου. Αυτό είναι λογικό, αφού γρήγορες χρονικές μεταβολές αντιστοιχούν στις υψηλές συχνότητες, οι οποίες διέρχονται από το φίλτρο αν επιλέξουμε μεγάλη συχνότητα αποκοπής.

Η γραφική παράσταση της απόκρισης πλάτους των πραγματικών φίλτρων βασικής ζώνης τα οποία συναντάμε στην πράξη, φαίνεται στο Σχήμα 4.5. Στα πραγματικά φίλτρα εκτός από τις ζώνες διέλευσης και αποκοπής υπάρχει και η *ζώνη μετάβασης*. Επίσης, στα πραγματικά φίλτρα η συχνότητα αποκοπής είναι ίση με τη συχνότητα -3dB



Σχήμα 4.5 Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας ενός πραγματικού φίλτρου βασικής ζώνης.

Ανάλογα με την περιοχή των συχνοτήτων που διέρχονται από το φίλτρο αυτό χαρακτηρίζεται ως

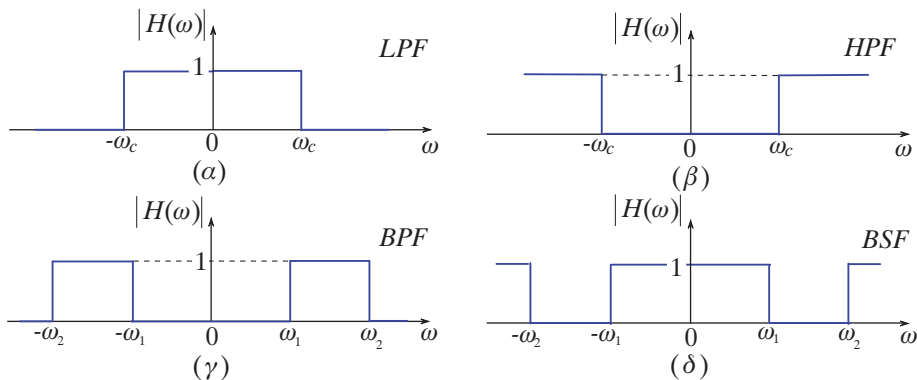
1. βαθυπερατό φίλτρο ή φίλτρο βασικής ζώνης ή φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων (lowpass filter (LPF)) Σχήμα 4.6α.
2. υψυπερατό φίλτρο ή φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων (highpass filter (HPF)) Σχήμα 4.6β.
3. ζωνοπερατό φίλτρο ή ζωνοδιαβατό φίλτρο ή φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων (bandpass filter (BPF)) Σχήμα 4.6γ..
4. ζωνοφρακτικό φίλτρο ή φίλτρο αποκοπής ζώνης συχνοτήτων (bandstop filter (BSF)) Σχήμα 4.6δ.

Οι αποκρίσεις πλάτους των αντιστοίχων ιδανικών φίλτρων φαίνονται στο Σχήμα 4.6 και των πραγματικών φίλτρων στο Σχήμα 4.7.

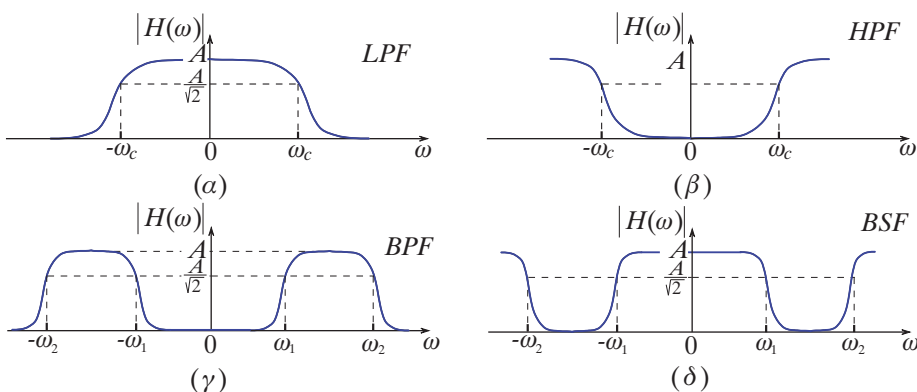
Παράδειγμα 4.4.1

Δίνεται το σύστημα το οποίο περιγράφεται στο Σχήμα 4.8.

1. Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.



Σχήμα 4.6 Οι αποκρίσεις πλάτους ιδανικού (α) βαθυπερατού (β) υψιπερατού (γ) ζωνοπερατού και (δ) ζωνοφρακτικού φίλτρου.



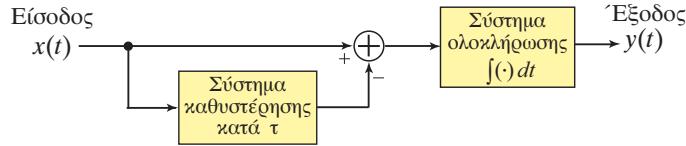
Σχήμα 4.7 Οι αποκρίσεις πλάτους πραγματικού (α) βαθυπερατού (β) υψιπερατού (γ) ζωνοπερατού και (δ) ζωνοφρακτικού φίλτρου.

2. Να γίνει η περιγραφή του συστήματος στο πεδίο συχνότητας.
3. Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.

Λύση

1. Γνωρίζουμε ότι η κρουστική απόκριση ενός συστήματος είναι ίση με την έξοδό του όταν το σήμα εισόδου είναι η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$, έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \int_{-\infty}^t (\delta(\xi) - \delta(\xi - \tau)) d\xi \\
 &= u(t) - u(t - \tau) \\
 &= \Pi\left(\frac{t - \tau/2}{\tau}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.4.4}$$

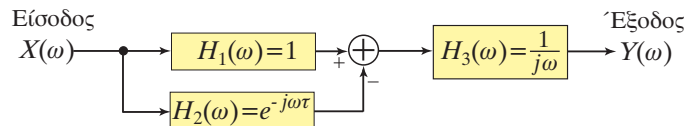


Σχήμα 4.8 Περιγραφή του συστήματος του Παραδείγματος 4.4.1 στο πεδίο του χρόνου.

2. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της χρονικής μετατόπισης και της ολοκλήρωσης του μετασχηματισμού Fourier έχουμε την περιγραφή του συστήματος στο πεδίο συχνότητας του Σχήματος 4.9.
3. Με τη βοήθεια της προσεταιριστικής και της επιμεριστικής ιδιότητας της συνέλιξης έχουμε για την απόκριση συχνότητας του συστήματος

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= [H_1(\omega) - H_2(\omega)]H_3(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\omega} \\
 &= \frac{2}{\omega} \frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{2j} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \\
 &= \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \quad (4.4.5)
 \end{aligned}$$

Η απόκριση συχνότητας μπορεί να βρεθεί, επίσης, υπολογίζοντας το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.



Σχήμα 4.9 Περιγραφή του συστήματος του Παραδείγματος 4.4.1 στο πεδίο συχνότητας.

Σύνοψη Κεφαλαίου

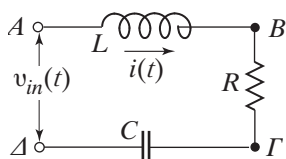
Στο κεφάλαιο αυτό υπολογίσαμε την απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος από τη διαφορική εξίσωση που συσχετίζει τα σήματα εισόδου-εξόδου, εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της γραμμικότητας, της διαφορίσης και το θεώρημα της συνέλιξης. Όταν η απόκριση συχνότητας έχει απλή μορφή, τότε είναι δυνατό με τη βοήθεια των γνωστών ζευγών MF, που αναφέρονται στον Πίνακα 3.3, να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν, επίσης, έμμεσοι τρόποι υπολογισμού του αντίστροφου MF, οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι όταν ο MF δεν έχει απλή μορφή. Ειδικότερα, στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, ο MF είναι μία ρητή συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή αναλύουμε τη συνάρτηση σε άθροισμα απλών κλασμάτων και με τη βοήθεια του Πίνακα 3.3 υπολογίζουμε τον αντίστροφο MF. Η

παραπάνω μεθοδολογία εφαρμόζεται και για τον υπολογισμό της εξόδου, στο πεδίο του χρόνου, ενός ΓΧΑ συστήματος, εάν έχουμε υπολογίσει πρώτα τον ΜΦ της εξόδου με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης.

Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν τα διαγράμματα Bode. Τα διαγράμματα Bode, επειδή ο λογάριθμος εκτείνει την κλίμακα, εξασφαλίζουν περισσότερη ευκρίνεια αν το εύρος των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει είναι μεγάλο ή, επίσης, αν περιορίζεται σε μικρές τιμές κοντά στο μηδέν. Τέλος, παρουσιάστηκαν οι έννοιες των ιδανικών και πραγματικών φίλτρων.

4.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 4.1 Δίνεται το κύκλωμα που αποτελείται από αντίσταση $R = 10K\Omega$, πηνίο $L = 0,1H$ και πυκνωτή $C = 10\mu F$ σε σειρά, το οποίο περιγράφεται στο Σχήμα 4.10. Αν η είσοδος του συστήματος είναι η εφαρμοζομένη τάση $v_{in}(t)$ και έξοδος η ένταση του ρεύματος $i(t)$, να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.



Σχήμα 4.10 Το κύκλωμα του Προβλήματος 4.1.

- 4.2 Να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα του Σχήματος 4.8 όταν η τάση εισόδου είναι

$$v_{in}(t) = 10 \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$$

- 4.3 Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα το οποίο έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης να προσδιοριστεί η έξοδος του συστήματος όταν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα

$$x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(6\pi t)$$

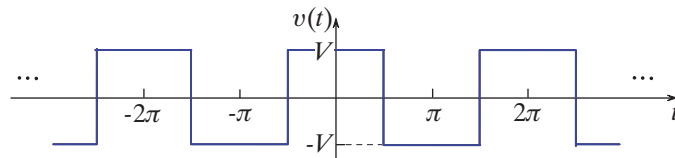
- 4.4 Η διαφορική εξίσωση η οποία συνδέει την είσοδο και την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

1. Να προσδιοριστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος και να γίνουν τα διαγράμματα Bode.
 2. Αν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα $x(t) = e^{-t}u(t)$, να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου.
 3. Αφού αναπτυχθεί σε απλά κλάσματα η $Y(\omega)$ να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ του συστήματος, όταν η είσοδος είναι το σήμα $x(t)$.
- 4.5 Αν η πηγή τάσης της μορφής του Σχήματος 4.11 εφαρμόζεται στην είσοδο ενός ιδανικού κατωπερατού φίλτρου, με απόκριση συχνότητας

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega}, & |\omega| < 4 \\ 0, & |\omega| > 4 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του φίλτρου.



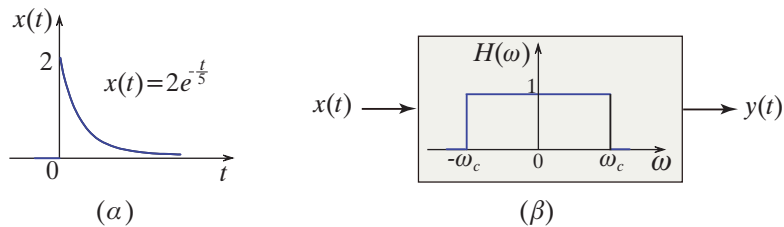
Σχήμα 4.11

- 4.6 Έστω ότι η πηγή τάσης της μορφής του Σχήματος 4.11 εφαρμόζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος πρώτης τάξης, το οποίο χαρακτηρίζεται από την εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

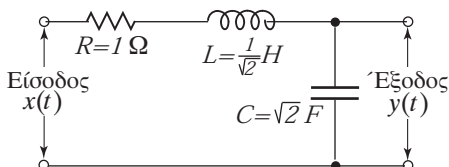
Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος.

- 4.7 Το αιτιατό εκθετικό σήμα του Σχήματος 4.12α εφαρμόζεται στην είσοδο του ιδανικού φίλτρου βασικής ζώνης του Σχήματος 4.12β. Να υπολογιστεί η συχνότητα αποκοπής ω_c , έτσι ώστε το φίλτρο να επιτρέπει τη διέλευση της μισής ενέργειας του σήματος εισόδου. Δίνεται το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{a^2+x^2} dt = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$.



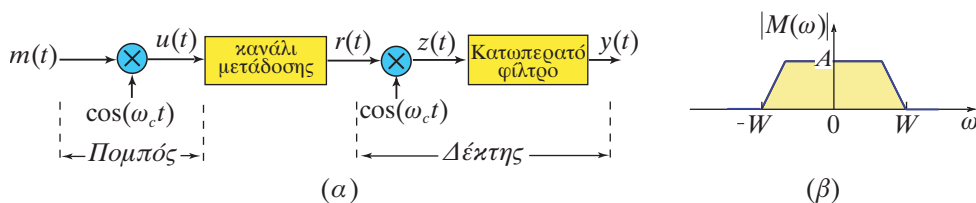
Σχήμα 4.12 (α) Το σήμα εισόδου και (β) το ιδανικό φίλτρο στο Πρόβλημα 4.7.

4.8 Δίνεται το κύκλωμα το οποίο περιγράφεται στο Σχήμα 4.13. Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος και να γίνει η γραφική παράσταση της απόκρισης πλάτους σε συνάρτηση με τη συχνότητα.



Σχήμα 4.13 Το κύκλωμα του Προβλήματος 4.8.

4.9 Κατά τη διαμόρφωση, ένα σήμα $m(t)$ περιορισμένου εύρους ζώνης, δηλαδή, $M(\omega) = 0$ για $|\omega| > W$ (Σχήμα 4.12β), που μεταφέρει συγκεκριμένη πληροφορία, πολλαπλασιάζεται με ένα σήμα απλής συχνότητας $\cos(\omega_0 t)$, η οποία ονομάζεται φέρουσα, με σκοπό την εκπομπή του σε ένα μέσο μετάδοσης, π.χ., ζεύγος συρμάτων, ατμόσφαιρα, κλπ. Στο Σχήμα 4.14α περιγράφεται ένα απλοποιημένο σύστημα επικοινωνίας. Αν θεωρήσουμε ότι κατά τη μετάδοση του σήματος δεν αλλοιώνεται από το μέσο και ότι ο θόρυβος του καναλιού είναι αμελητέος, τότε το λαμβανόμενο σήμα $r(t)$ είναι ίσο με το εκπεμπόμενο. Θεωρούμε ότι η ζώνη διέλευσης του ιδανικού κατοπερατού φίλτρου στο δέκτη είναι ίση με το εύρος ζώνης W του σήματος μηνύματος $m(t)$. Να μελετηθεί το σύστημα στο πεδίο συχνότητας.



Σχήμα 4.14 (α) Το απλοποιημένο σύστημα επικοινωνίας και (β) το περιορισμένου εύρους ζώνης φάσμα του σήματος μηνύματος για ένα αυθαίρετο σήμα $m(t)$.

4.10 Όταν το σήμα εισόδου σε ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα είναι $x(t) = e^{-at}$, το σήμα εξόδου είναι $y(t) = e^{-bt}u(t)$. Να βρεθούν

1. η απόκριση συχνότητας και
2. η κρουστική απόκριση του συστήματος.

4.11 Με τη βοήθεια της (3.3.83) να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού ορθογώνιου σήματος $x(t)$ του Παραδείγματος 3.2.6.

Αν το σήμα $x(t)$ εφαρμοστεί στην είσοδο γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t) = \frac{1}{\pi t} \sin(\pi t)$, να δείξετε, χρησιμοποιώντας το

θεώρημα της συνέλιξης, ότι η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

4.12 Από την ιδιότητα της ολίσθησης της κρουστικής συνάρτησης

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

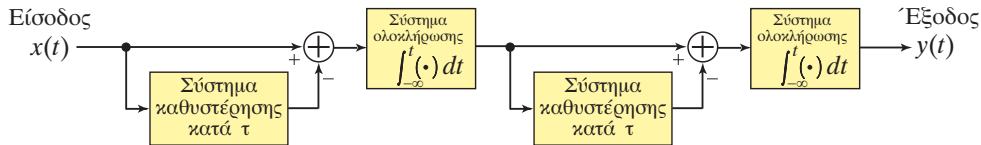
Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη κάθε συνάρτησης με την κρουστική συνάρτηση έχει ως αποτέλεσμα μία ολισθημένη έκδοση της αρχικής συνάρτησης, δηλαδή,

$$g(t) * \delta(t - t_0) = g(t - t_0)$$

Αν το σήμα $x(t) = \text{sinc}^2(t)$ εφαρμοστεί στην είσοδο γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$, να βρεθεί και να σχεδιασθεί ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου του συστήματος όταν

1. $h(t) = 1 + \cos\left(\frac{t}{2}\right)$
2. $h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$

4.13 Να βρεθεί ο μαθηματικός τύπος της κρουστικής απόκρισης του συστήματος του Σχήματος 4.15 και να γίνει η γραφική της παράσταση σε συνάρτηση με το χρόνο. (Υπόδειξη: Να θεωρήσετε το σύστημα ως την εν σειρά σύνδεση δύο συστημάτων).



Σχήμα 4.15 Το σύστημα στο Πρόβλημα 4.13.

Βιβλιογραφία

- 4.1 Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, Λ. Κοφίδης, “Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων”, *Τυπωθήτω - Γιώργος Δαρδανός*, Αθήνα 2003.
- 4.2 S. Haykin, B. Veen, “Signal and Systems”, *John & Wiley Sons, Inc.* 2003
- 4.3 A. V. Oppenheim, R. S. Willsky, I. T. Young, “Signal and Systems”, *Prentice - Hall Inc.*, N. Y., 1983.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΕΙΡΑ - ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μαθηματικά εργαλεία, τα οποία μας επιτρέπουν να αναλύουμε ένα σύνθετο σήμα διακριτού χρόνου σε σήματα διακριτού χρόνου απλών συχνοτήτων. Μια τέτοια προσέγγιση μας διευκολύνει ώστε να υπολογίσουμε την έξοδο ενός συστήματος διακριτού χρόνου, το οποίο διεγείρεται από ένα σύνθετο σήμα, με τη βοήθεια των αποκρίσεων του συστήματος στις επί μέρους συνιστώσες των απλών συχνοτήτων στις οποίες αναλύεται το σύνθετο σήμα. Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τις μεθόδους αυτές, ώστε να αναλύσουμε έναν αριθμό σημάτων τα οποία συναντάμε συχνά στη πράξη. Τέλος, στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν μερικές εφαρμογές του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Εισαγωγή

Γνωρίζουμε ότι το μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου $e^{j(2\pi/N)n}$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο N . Τα εκθετικά σήματα που έχουν κυκλική συχνότητα πολλαπλάσια της $\Omega_0 = 2\pi/N$ ($e^{jk\Omega_0 n}$, με $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) είναι επίσης περιοδικά. Τα εκθετικά σήματα $e^{jk\Omega_0 n}$ καλούνται *αρμονικά συσχετιζόμενα εκθετικά σήματα* διακριτού χρόνου επειδή οι θεμελιώδεις συχνότητές τους είναι ακέραια πολλαπλάσια της κυκλικής συχνότητας Ω_0 . Τα μιγαδικά εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου των οποίων οι κυκλικές συχνότητες διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του 2π είναι ίδια. Πράγματι:

$$e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j\Omega n} \cdot e^{j2\pi n} = e^{j\Omega n}$$

Υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά μιγαδικά εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου τα οποία σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο· δηλαδή, είναι ανά δύο ορθογώνια. Πράγματι το εσωτερικό γινόμενο των εκθετικών σημάτων $e^{jk\Omega_0 n}$ και $e^{jm\Omega_0 n}$ είναι

$$\langle e^{jk\Omega_0 n}, e^{jm\Omega_0 n} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n} = \begin{cases} N, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} = N\delta(k - m)$$

5.1 ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ - ΣΕΙΡΑ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Τα περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου παριστάνονται με πεπερασμένα αθροίσματα

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (5.1.1)$$

Η εξίσωση αυτή δίνει την παράσταση (ή ανάπτυγμα) περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου σε σειρά Fourier διακριτού χρόνου.

5.1.1 Προσδιορισμός της σειράς Fourier διακριτού χρόνου.

Αν $x(n)$ είναι μία ακολουθία η οποία είναι περιοδική με περίοδο N , ο προσδιορισμός των συντελεστών a_k θα μπορούσε να γίνει από τη λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x(0) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \\ x(1) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N}} \\ &\vdots \\ x(N-1) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} (N-1)} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Ένας άλλος τρόπος προσδιορισμού είναι ο πολλαπλασιασμός και των δύο μελών της (5.1.1) με $e^{-jm \frac{2\pi}{N} n}$ και αθροίσουμε ως προς n , δηλαδή,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j(k-m) \frac{2\pi}{N} n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m) \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned}$$

και λόγω της $\langle e^{jk \frac{2\pi}{N} n}, e^{jm \frac{2\pi}{N} n} \rangle = N \delta(k-m)$ είναι

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} &= N a_m \\ a_m &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε τις εξισώσεις:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}, \quad \text{Εξίσωση σύνθεσης} \quad (5.1.3)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad \text{Εξίσωση ανάλυσης} \quad (5.1.4)$$

Το ζεύγος των εξισώσεων αυτών ορίζουν τη σειρά *Fourier διακριτού χρόνου* (*discrete-time Fourier series* (DTFS)) του περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$. Οι συντελεστές a_k καλούνται *συντελεστές Fourier* ή, όπως θα δούμε, *φασματικές γραμμές*.

Παράδειγμα 5.1.1

Να βρεθεί η παράσταση σε σειρά Fourier του σήματος διακριτού χρόνου $x(n) = \sin(\Omega_0 n)$.

Λύση Γνωρίζουμε ότι το σήμα είναι περιοδικό αν $2\pi/\Omega_0$ είναι ακέραιος ή ρητός αριθμός, έτσι μόνο τότε μπορούμε να έχουμε ανάπτυγμα σε σειρά Fourier διακριτού χρόνου. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Το σήμα είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο N και $\Omega_0 = 2\pi/N$. Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler το σήμα γράφεται

$$\begin{aligned} x(n) &= \sin(\Omega_0 n) \\ &= \frac{1}{2j} e^{j \frac{2\pi}{N} n} - \frac{1}{2j} e^{-j \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Συγκρίνοντας την (5.1.5) με την εξίσωση σύνθεσης (5.1.3), παρατηρούμε ότι οι συντελεστές είναι $a_1 = 1/(2j)$ και $a_{-1} = -1/(2j)$ και $a_k = 0$ για την υπόλοιπη περίοδο. Οι συντελεστές αυτοί επαναλαμβάνονται με περίοδο ίση με N έτσι έχουμε:

$$a_{kN+1} = \frac{1}{2j} \text{ και } a_{kN-1} = -\frac{1}{2j}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.1.6)$$

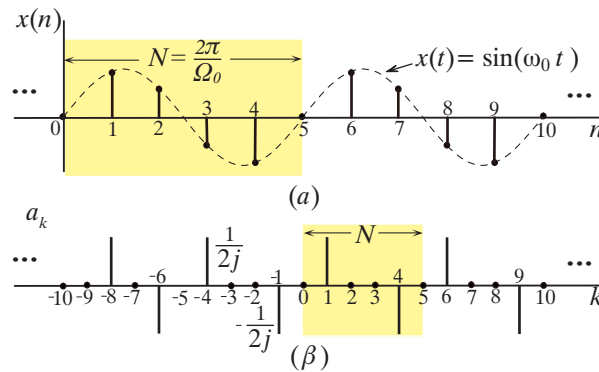
Στο Σχήμα 5.1 έχουν σχεδιαστεί το σήμα $x(n)$ και οι συντελεστές της σειράς Fourier διακριτού χρόνου με $N = 5$ οι οποίοι επαναλαμβάνονται. Προσοχή όμως στην εξίσωση σύνθεσης υπάρχουν μόνο οι συντελεστές μιας περιόδου.

2. Αν $2\pi/\Omega_0 = N/m$, δηλαδή, ρητός αριθμός, τότε $\Omega_0 = (2\pi m)/N$. Υποθέτουμε ότι τα m και N δεν έχουν κοινό παράγοντα· έτσι το $x(n)$ έχει θεμελιώδη περίοδο ίση με N . Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler το σήμα γράφεται

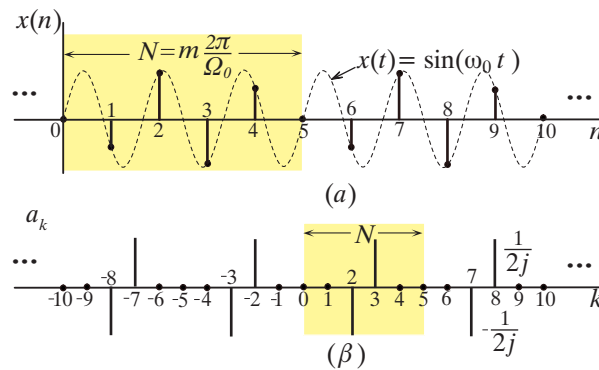
$$\begin{aligned} x(n) &= \sin\left(\frac{2\pi m}{N} n\right) \\ &= \frac{1}{2j} e^{jm \frac{2\pi}{N} n} - \frac{1}{2j} e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

από όπου έχουμε: $a_m = 1/(2j)$ $a_{-m} = -1/(2j)$ και $a_k = 0$ για την υπόλοιπη περίοδο. Στο Σχήμα 5.2 έχουν σχεδιαστεί το σήμα $x(n)$ και οι συντελεστές Fourier όταν $m = 3$ και $N = 5$. Λόγω περιοδικότητας ($N = 5$) είναι $\dots a_7 = a_2 = a_{-3} = a_{-8} = \dots = -1/(2j)$, ενώ η εξίσωση σύνθεσης έχει μόνο δύο όρους.

3. Όταν το σήμα είναι μη περιοδικό, δεν αναπτύσσεται σε σειρά Fourier διακριτού χρόνου.



Σχήμα 5.1 (α) Το σήμα $x(n) = \sin(\frac{2\pi}{N}n)$, όπου $N = 5$ και (β) οι συντελεστές Fourier.



Σχήμα 5.2 (α) Το σήμα $x(n) = \sin(m\frac{2\pi}{N}n)$, όπου $N = 5$, $m = 3$ και (β) οι συντελεστές Fourier.

Παράδειγμα 5.1.2

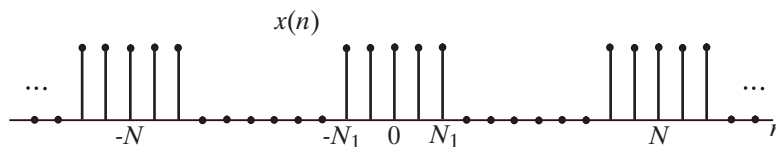
Να βρεθεί η παράσταση σε σειρά Fourier διακριτού χρόνου του περιοδικού ορθογώνιου κύματος

$$x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & N_1 < |n| < N/2 \end{cases} \quad (5.1.8)$$

με περίοδο ίση με N .

Λύση Το περιοδικό ορθογώνιο σήμα διακριτού χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 5.3. Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier χρησιμοποιούμε την εξίσωση ανάλυσης

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (5.1.9)$$



Σχήμα 5.3 Το περιοδικό ορθογώνιο κύμα του Παραδείγματος 5.1.2.

Αν θέσουμε $m = n + N_1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk \frac{2\pi}{N} (m-N_1)} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk \frac{2\pi}{N} N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk \frac{2\pi}{N} m} \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

δηλαδή, έχουμε άθροισμα των $2N_1 + 1$ πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου, για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (5.1.11)$$

Έτσι, για $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{N} e^{jk \frac{2\pi}{N} N_1} \frac{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N} (2N_1+1)}}{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk \frac{2\pi}{N} N_1} \frac{e^{-jk \frac{2\pi}{N} (N_1+\frac{1}{2})} [e^{jk \frac{2\pi}{N} (N_1+\frac{1}{2})} - e^{-jk \frac{2\pi}{N} (N_1+\frac{1}{2})}]}{e^{-jk \frac{2\pi}{N}} [e^{jk \frac{2\pi}{N}} - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}]} \end{aligned}$$

Το γινόμενο των συντελεστών α_k επί το πλήθος των δειγμάτων N είναι

$$N \cdot \alpha_k = \frac{\sin [k \frac{2\pi}{N} (N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin (k \frac{2\pi}{2N})}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \text{ ή } k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \quad (5.1.12)$$

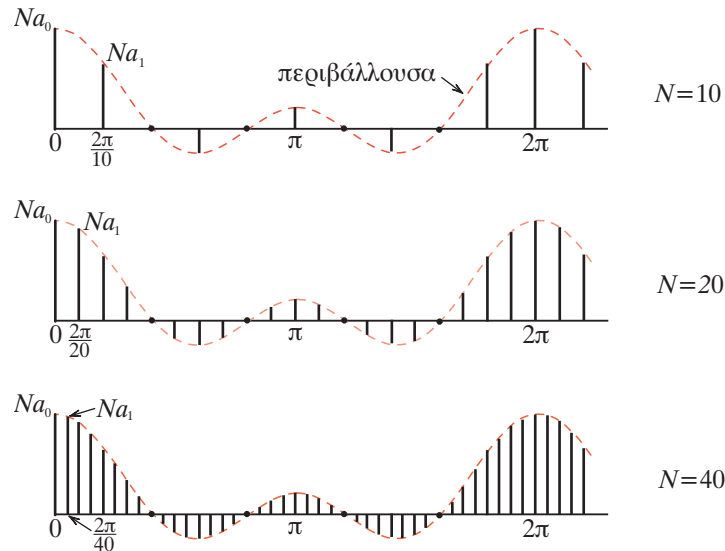
ενώ όταν $k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ έχουμε

$$N \cdot \alpha_k = 2N_1 + 1 \quad (5.1.13)$$

Στο Σχήμα 5.4 έχουμε την ακολουθία του γινομένου των συντελεστών της σειράς Fourier διακριτού χρόνου επί το πλήθος των δειγμάτων του περιοδικού ορθογώνιου κύματος για διάφορες τιμές του N .

Η έκφραση των συντελεστών της σειράς Fourier διακριτού χρόνου, όπως αυτή περιγράφεται από την (5.1.12), μας επιτρέπει να θεωρήσουμε το γινόμενο των συντελεστών επί το πλήθος των δειγμάτων ως δείγματα της συνάρτησης

$$\frac{\sin [(2N_1 + 1)(\Omega/2)]}{\sin(\Omega/2)} \quad (5.1.14)$$



Σχήμα 5.4 Το γινόμενο των συντελεστών της σειράς Fourier διακριτού χρόνου επί το πλήθος των δειγμάτων του περιοδικού ορθογώνιου κύματος για $N_1 = 2$ και $N = 10, 20$ και 40 .

δηλαδή,

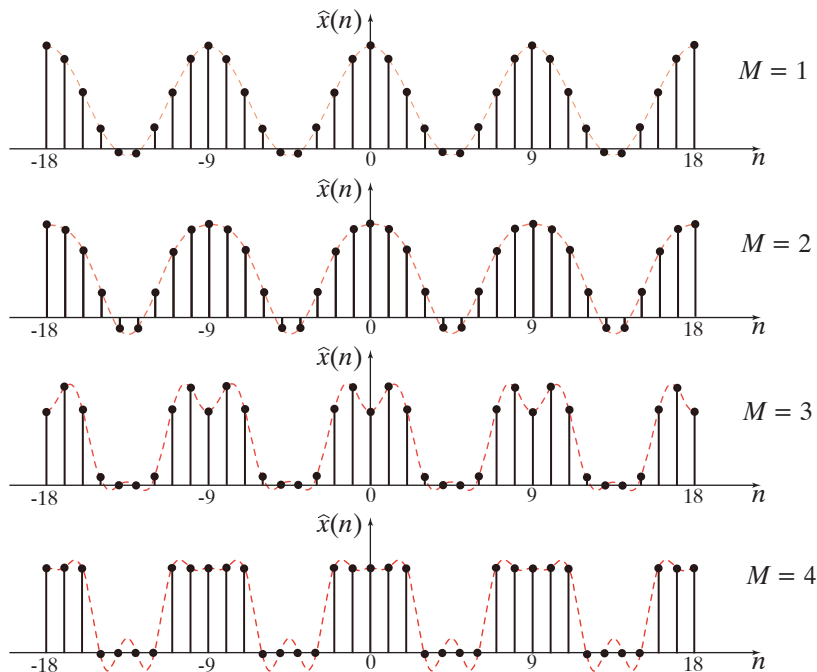
$$N \cdot \alpha_k = \left. \frac{\sin [(2N_1 + 1)(\Omega/2)]}{\sin(\Omega/2)} \right|_{\Omega=k(2\pi/N)}$$

Η συνάρτηση (5.1.14) είναι η περιβάλλουσα των συντελεστών της σειράς Fourier διακριτού χρόνου του περιοδικού ορθογώνιου κύματος.

Στο Σχήμα 5.5 εικονίζεται το περιοδικό ορθογώνιο κύμα διακριτού χρόνου όπως υπολογίζεται από το μερικό άθροισμα

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=-M}^M \alpha_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (5.1.15)$$

Για $M = 4$ παρατηρούμε ότι το μερικό άθροισμα (5.1.15) δίνει το σήμα $x(n)$, δηλαδή, σε αντίθεση με τη συνεχή περίπτωση, δεν εμφανίζεται φαινόμενο Gibbs. Γενικά δεν εμφανίζεται φαινόμενο Gibbs στην σειρά Fourier διακριτού χρόνου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε περιοδική ακολουθία $x(n)$ είναι πλήρως ορισμένη από ένα πεπερασμένο αριθμό N τιμών, δηλαδή, τον αριθμό των τιμών της ακολουθίας σε μία περίοδο. Η (5.1.4) απλά μετασχηματίζει τη σειρά των N τιμών σε μια ισοδύναμη σειρά N συντελεστών Fourier και η (5.1.3) δίνει το τρόπο ανάκτησης των τιμών της ακολουθίας $x(n)$ με τη βοήθεια μίας πεπερασμένης σειράς. Αν N είναι περιττός αριθμός και θέσουμε $M = (N - 1)/2$ στην (5.1.15), το άθροισμα αποτελείται ακριβώς από N όρους. Επομένως από την εξίσωση σύνθεσης έχουμε $\hat{x}(n) = x(n)$. Εάν N είναι άρτιος αριθμός,



Σχήμα 5.5 Το περιοδικό ορθογώνιο κύμα διακριτού χρόνου, όπως υπολογίζεται από το μερικό άθροισμα (5.1.15), όταν $N = 9$ και $2N_1 + 1 = 5$ για $M = 1, 2, 3$ και 4 .

τότε το άθροισμα $\hat{x}(n) = \sum_{k=-M+1}^M \alpha_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ με $M = N/2$ περιέχει N όρους και καταλήγουμε στην εξίσωση σύνθεσης (5.1.3). Έτσι $\hat{x}(n) = x(n)$.

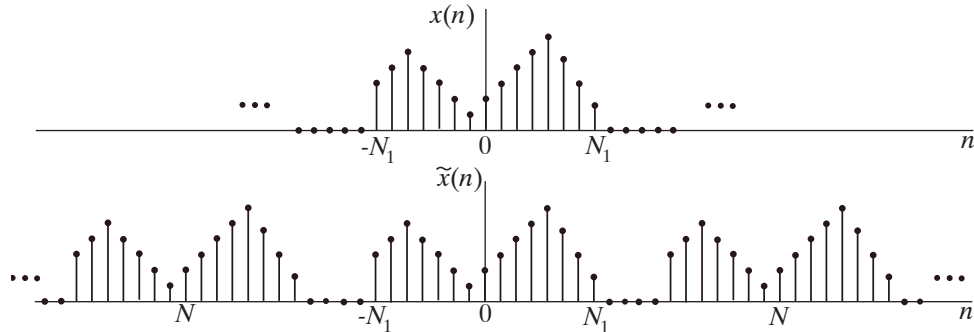
Αντίθετα, ένα περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου κατά τη διάρκεια μιας περιόδου λαμβάνει άπειρες συνεχείς τιμές· επομένως, απαιτείται άπειρος αριθμός συντελεστών Fourier για την αναπαράστασή του. Γενικά όλες οι πεπερασμένες μήκους σειρές $x_N(t) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$ δεν δίνουν ακριβώς τις τιμές του $x(t)$ και παρουσιάζουν φαινόμενα σύγκλισης.

5.2 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Λαμβάνουμε σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ πεπερασμένης διάρκειας· επομένως, υπάρχει ακέραιος N_1 τέτοιος ώστε $x(n) = 0$ για κάθε $|n| > N_1$. Έστω $N > 2N_1$. Σχηματίζουμε την περιοδική επέκταση του $x(n)$, βλέπε Σχήμα 5.6.

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n - rN) \tag{5.2.1}$$

Το σήμα $\tilde{x}(n)$ έχει περίοδο N , συμπίπτει με το $x(n)$ στο διάστημα $-N/2 \leq n \leq N/2$



Σχήμα 5.6 (α) Το σήμα $x(n)$ και (β) το σήμα $\tilde{x}(n)$, η περιοδική επέκταση του $x(n)$.

και έχει ανάπτυγμα σε σειρά Fourier διακριτού χρόνου

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (5.2.2)$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier διακριτού χρόνου δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Ορίζουμε τη μιγαδική συνάρτηση $X(\Omega)$ της πραγματικής μεταβλητής Ω

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \quad (5.2.4)$$

η οποία είναι περιοδική με περίοδο 2π , οπότε παρατηρούμε ότι οι συντελεστές a_k μπορούν να εκφραστούν ως

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) \quad (5.2.5)$$

δηλαδή, οι συντελεστές a_k λαμβάνονται από δειγματοληψία της συνάρτησης $X(\Omega)$ με περίοδο δειγματοληψίας $\Omega_0 = 2\pi/N$.

Έτσι, το σήμα $\tilde{x}(n)$, δηλαδή, η περιοδική επέκταση του $x(n)$, δίνεται από τη σχέση

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad (5.2.6)$$

και, επειδή $\Omega_0 = 2\pi/N$ ή $1/N = \Omega_0/2\pi$, έχουμε

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0 \quad (5.2.7)$$

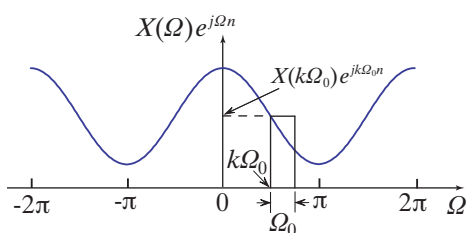
Παρατηρούμε ότι, όταν $N \rightarrow \infty$, τότε $\tilde{x}(n) = x(n)$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} x(n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το Σχήμα 5.7, για να έχουμε την τελευταία ισότητα. Έτσι έχουμε τις εξισώσεις σύνθεσης και ανάλυσης για το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (*discrete time Fourier transform (DTFT)*).

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega, \quad \text{Εξίσωση σύνθεσης} \quad (5.2.9)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \quad \text{Εξίσωση ανάλυσης} \quad (5.2.10)$$



Σχήμα 5.7 Η γραφική ερμηνεία του αθροίσματος $\sum_{k=\langle N \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0$.

Η εξίσωση (5.2.9) εκφράζει την ανάλυση του σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$ σε εκθετικά σήματα $e^{j\Omega n}$, τα οποία εκτείνονται σε ένα συνεχές φάσμα κυκλικών συχνοτήτων περιορισμένο στο διάστημα $[0, 2\pi)$, γεγονός που οφείλεται στην περιοδικότητα της συνάρτησης $X(\Omega)$.

Η συνάρτηση $X(\Omega)$ η οποία ορίζεται από την (5.2.10) είναι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου· συχνά αναφέρεται και ως *φάσμα* του $x(n)$, γιατί περιέχει την

πληροφορία πως το $x(n)$ συντίθεται από εκθετικά σήματα διαφορετικών συχνοτήτων. Το φασματικό περιεχόμενο στο απειροστό διάστημα συχνοτήτων $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ είναι $X(\Omega)$ και η συνεισφορά των συχνοτήτων $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ έχει πλάτος $X(\Omega)(d\Omega/2\pi)$.

Σημειώνεται ότι το άθροισμα $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$ υπάρχει όταν

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad \text{ή} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (5.2.11)$$

δηλαδή, η ακολουθία έχει πεπερασμένη ενέργεια.

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου έχει δύο διαφορές από το μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου, οι οποίες οφείλονται στο γεγονός ότι τα εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου είναι περιοδικά με περίοδο 2π .

1. Ο $X(\Omega)$ είναι περιοδικός ενώ ο $X(\omega)$ όχι. Έτσι το ολοκλήρωμα στην εξίσωση σύνθεσης (5.2.9) έχει πεπερασμένο διάστημα ολοκλήρωσης.
2. Στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου, οι χαμηλές συχνότητες περιγράφονται από διαστήματα μικρού εύρους κεντραρισμένα στην αρχή των συντεταγμένων, ενώ οι υψηλές συχνότητες είναι τοποθετημένες μακριά από την αρχή των αξόνων προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά του άξονα συχνοτήτων. Στην περίπτωση του διακριτού χρόνου η περιοδικότητα του μετασχηματισμού Fourier επιβάλλει μια διαφορετική εικόνα. Οι χαμηλές συχνότητες αντιστοιχούν σε διαστήματα γύρω από τη θέση $\Omega = 0$, ή, λόγω της περιοδικότητας, γύρω από τις θέσεις $\Omega = \pm 2k\pi$. Οι υψηλές συχνότητες τοποθετούνται κοντά σε περιοχές όπου $\Omega = \pm\pi$, ή $\Omega = \pm(2k+1)\pi$, βλέπε Σχήμα 5.8.

Παράδειγμα 5.2.1

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του αιτιατού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου

$$x(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1 \text{ και } a \in \mathbb{C} \quad (5.2.12)$$

Λύση Με τη βοήθεια της (5.2.10) ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι

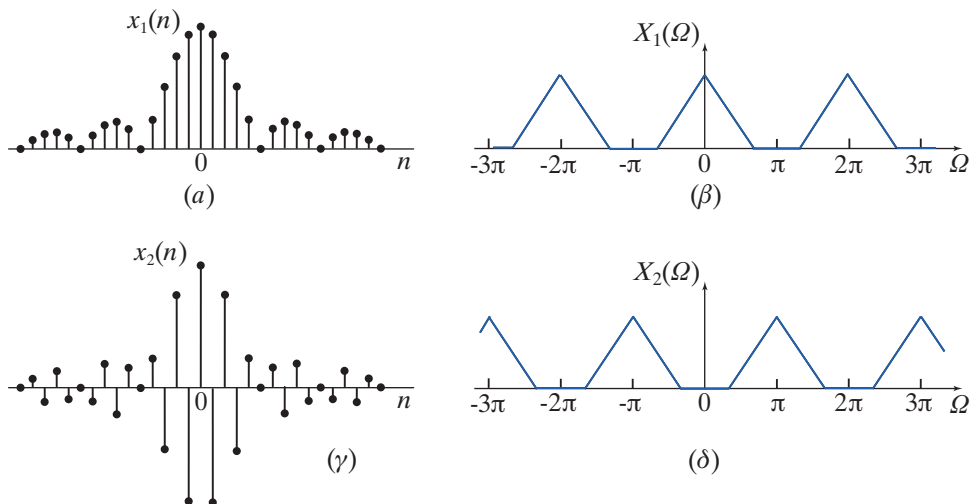
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n \quad (5.2.13)$$

Το άθροισμα αποτελεί γεωμετρική σειρά η οποία συγκλίνει, επειδή

$$|ae^{-j\Omega}| = |a| |e^{-j\Omega}| = |a| < 1$$

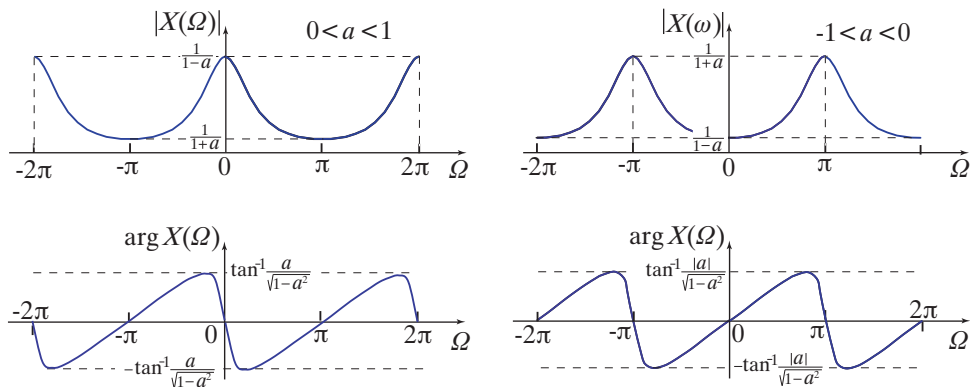
Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του αιτιατού εκθετικού σήματος είναι

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad (5.2.14)$$



Σχήμα 5.8 (α) Σήμα διακριτού χρόνου $x_1(n)$ που έχει (β) MF διακριτού χρόνου $X_1(\Omega)$ με χαμηλές συχνότητες, (γ) Σήμα διακριτού χρόνου $x_2(n)$ που έχει (δ) MF διακριτού χρόνου $X_2(\Omega)$ με υψηλές συχνότητες.

Στο Σχήμα 5.9 έχουν σχεδιαστεί το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου του αιτιατού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου για πραγματικές τιμές του a , με $0 < a < 1$ και $-1 < a < 0$.



Σχήμα 5.9 Το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου του αιτιατού εκθετικού σήματος $x(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1, a \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.2.2

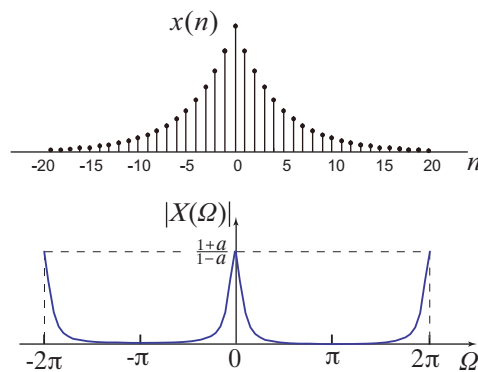
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος

$$x(n) = a^{|n|}, \quad |a| < 1 \text{ και } a \in \mathbb{R} \quad (5.2.15)$$

Λύση Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{j\Omega n} - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{j\Omega})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n - 1 \\ &= \frac{1}{1 - ae^{j\Omega}} + \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} - 1 \\ &= \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(\Omega)} \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Στο Σχήμα 5.10 εικονίζεται το σήμα και ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του. Παρατηρούμε ότι η $X(\Omega)$ είναι πραγματική συνάρτηση του Ω , αφού a είναι πραγματικός αριθμός. Γενικά τα άρτια σήματα έχουν πραγματικούς μετασχηματισμούς Fourier διακριτού χρόνου.



Σχήμα 5.10 Το σήμα $x(n) = a^{|n|}$ και το φάσμα του.

Παράδειγμα 5.2.3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του ορθογώνιου παλμού

$$x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \quad (5.2.17)$$

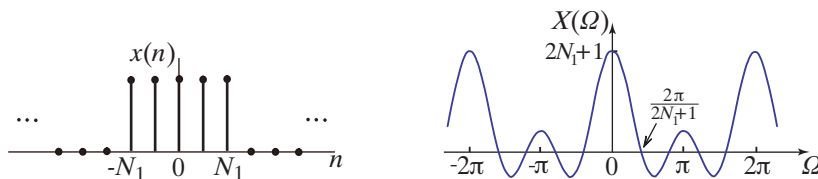
Λύση Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του ορθογώνιου παλμού διακριτού χρόνου είναι

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} \stackrel{m=n+N_1}{=} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\Omega(m-N_1)} = e^{j\Omega N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\Omega m}$$

Αν εφαρμόσουμε την (5.1.11) για $N-1 = 2N_1$ ή $N = 2N_1 + 1$ και για την περίπτωση που $\Omega \neq 0$, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου αποκτά τη μορφή

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= e^{j\Omega N_1} \frac{1 - e^{-j\Omega(2N_1+1)}}{1 - e^{-j\Omega}} \\ &= e^{j\Omega N_1} \frac{e^{-j\Omega(N_1+\frac{1}{2})} e^{j\Omega(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\Omega(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{-j\Omega\frac{1}{2}} e^{j\Omega\frac{1}{2}} - e^{-j\Omega\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sin[\Omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\Omega\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Στο Σχήμα 5.11 έχει σχεδιαστεί ο ορθογώνιος παλμός και το φάσμα του.



Σχήμα 5.11 Ο ορθογώνιος παλμός διακριτού χρόνου και το φάσμα του.

Παρατηρήσεις

1. Για τη τιμή $\Omega = 0$ ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι $X(0) = 2N_1 + 1$.
2. Οι τιμές που μηδενίζουν τον $X(\Omega)$ είναι οι συχνότητες για τις οποίες $\sin[\Omega(N_1 + 1/2)] = 0$, δηλαδή, $\Omega(N_1 + 1/2) = \lambda\pi \Rightarrow \Omega = \lambda \frac{2\pi}{2N_1+1}$, $\lambda \in Z$.
3. Όσο μεγαλύτερο είναι το εύρος $2N_1 + 1$ του παλμού, τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των συχνοτήτων που μηδενίζουν τον $X(\Omega)$, τόσο μικρότερο το εύρος του κεντρικού λοβού και τόσο μεγαλύτερη η τιμή του στο μηδέν.
4. Για $N_1 \rightarrow \infty$ ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου τείνει προς τη συνάρτηση δέλτα.
5. Η ανακατασκευή του σήματος από συχνότητες $|\Omega| \leq W$ δίνει το σήμα:

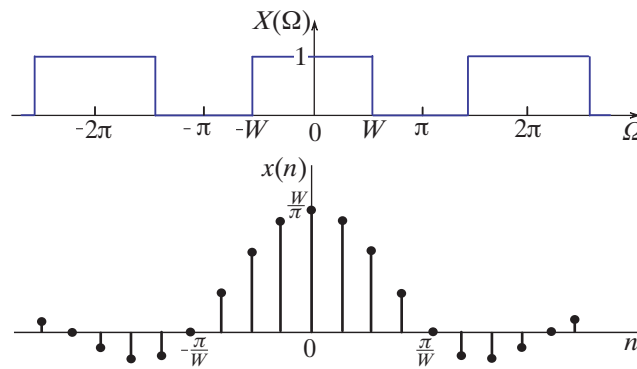
$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

6. για $W = \pi$, δηλαδή, όταν χρησιμοποιούνται όλες οι συχνότητες, είναι $\hat{x}(n) = x(n)$. Παρατηρούμε ότι δεν έχουμε εμφάνιση φαινομένων Gibbs.

Παράδειγμα 5.2.4

Να υπολογιστεί το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$, του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι ορθογώνιο περιοδικό κύμα (Σχήμα 5.12α), δηλαδή,

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq W \\ 0, & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (5.2.19)$$



Σχήμα 5.12 Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος στο Παράδειγμα 5.2.4 και η αποκατάστασή του στο χρόνο.

Λύση Το σήμα $x(n)$ λαμβάνεται από τον $X(\Omega)$ μέσω του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\sin(Wn)}{\pi n} \quad (5.2.20)$$

Παρατηρούμε ανάλογη συμπεριφορά με αυτή του Παραδείγματος 3.3.4.

Παράδειγμα 5.2.5

1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος $x(n) = \delta(n)$ και του ολισθημένου μοναδιαίου δείγματος.
2. Να γίνει η ανακατασκευή του σήματος $x(n)$ από το φάσμα του.

Λύση

1. Επειδή $x(n) = 0$ για κάθε $n \neq 0$, βρίσκουμε $X(\Omega) = x(0)e^{j0\Omega} = 1$, δηλαδή, το φάσμα του μοναδιαίου δείγματος εκτείνεται σε όλες τις συχνότητες. Γενικότερα το φάσμα του ολισθημένου μοναδιαίου δείγματος είναι

$$x(n) = \delta(n - k) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) = e^{-jk\Omega} \quad (5.2.21)$$

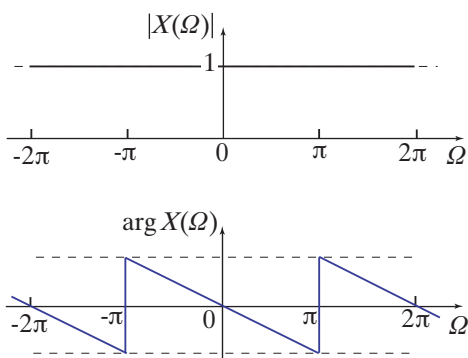
Το μέτρο του φάσματος είναι

$$|X(\Omega)| = 1 \quad (5.2.22)$$

Η φάση του φάσματος είναι γραμμική σε μία περίοδο.

$$\arg X(\Omega) = -k\Omega \quad (5.2.23)$$

Στο Σχήμα 5.13 έχουν σχεδιαστεί το μέτρο και η φάση του MF διακριτού χρόνου του ολισθημένου κατά k δείγματα μοναδιαίου δείγματος .



Σχήμα 5.13 Το μέτρο και η φάση του MF διακριτού χρόνου του μοναδιαίου ολισθημένου δείγματος.

2. Η ανακατασκευή του $x(n)$ από το φάσμα του είναι

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{\sin(Wn)}{\pi n} \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

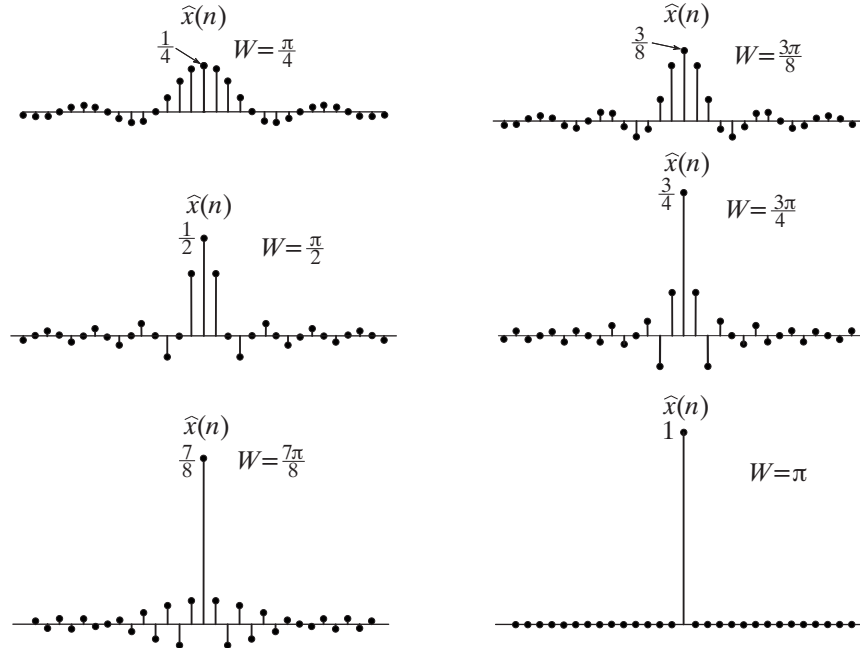
Στο Σχήμα 5.14 υπάρχει το $\hat{x}(n)$ για διαφορετικές τιμές του W . Παρατηρούμε ότι $\hat{x}(n) = \delta(n)$ όταν $W = \pi$.

5.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου παρουσιάζει δύο ιδιότητες διαφορετικές από το μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου, τις οποίες παραθέτουμε στον Πίνακα 5.1.

Η πρώτη διαφορά υπάρχει στην ιδιότητα διαφορίσης στο πεδίο του χρόνου, όπου ένα σήμα διακριτού χρόνου δεν είναι διαφορίσιμο συναρτήσεως του χρόνου, επειδή λαμβάνει διακριτές τιμές.

Η δεύτερη διαφορά βρίσκεται στην ιδιότητα της αλλαγής κλίμακας. Στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου όπου το σήμα $x(at)$ έχει πάντοτε έννοια και αντιπροσωπεύει συμπίεση εάν $a > 1$ και διαστολή εάν $a < 1$. Το αντίστοιχο σήμα $x(dn)$ δεν ορίζεται εάν ο d δεν είναι ακέραιος. Επίσης, όπως θα δούμε, υπάρχει διαφορά και στην ιδιότητα της ολοκλήρωσης.



Σχήμα 5.14 Η προσέγγιση του μοναδιαίου δείγματος από την $\hat{x}(n) = \sin(Wn)/\pi n$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου W .

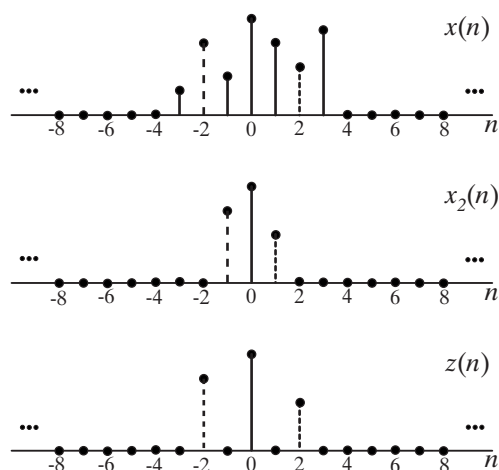
5.3.1 Αποδεκάλιση στο χρόνο

Μία κατηγορία από συστήματα απαιτούν αντιπροσωπευτική αποθήκευση και μετάδοση σημάτων με διαφορετικούς ρυθμούς δειγματοληψίας.

Έστω ότι το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ προκύπτει από ένα αναλογικό σήμα $s(t)$ με ρυθμό δειγματοληψίας $F_s = 1/T_s$, δηλαδή, $x(n) = s(nT_s)$. Αν ο ρυθμός ελαττωθεί σε $\tilde{F}_s = 1/\tilde{T}_s$, τότε το ψηφιακό σήμα είναι

$$s(n\tilde{T}_s) = s\left(n\frac{\tilde{T}_s}{T_s}T_s\right) = s(nMT_s) = x(nM) = x_M(n) \quad (5.3.1)$$

όπου ο ακέραιος M ορίζεται ως ο λόγος των ρυθμών δειγματοληψίας $M = \tilde{T}_s/T_s = F_s/\tilde{F}_s > 1$. Παρατηρούμε ότι το σήμα $x_M(n)$ λαμβάνεται με δειγματοληψία του $x(n)$ για κάθε M δείγματα. Η ελάττωση του ρυθμού δειγματοληψίας αντιστοιχεί σε αποδεκάλιση στην αναπαράσταση διακριτού χρόνου. Στο Σχήμα 5.15 φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο προκύπτει η αποδεκατισμένη μορφή $x_2(n)$ του σήματος $x(n)$. Για να καθορίσουμε τα αποτελέσματα της αποδεκάλισης στο πεδίο συχνοτήτων ορίζουμε το σήμα $z(n)$ το οποίο συμπίπτει με το $x(n)$ για κάθε τιμή του n που είναι πολλαπλάσιο του M



Σχήμα 5.15 Αποδεκάλιση στο χρόνο (α) το σήμα $x(n)$, (β) η αποδεκατισμένη μορφή $x_2(n)$ και (γ) το βοηθητικό σήμα $z(n)$.

και είναι μηδέν οπουδήποτε αλλού, δηλαδή,

$$z(n) = \begin{cases} x(n), & \text{αν } n = 0 \bmod M \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου $X_M(\Omega)$ του σήματος $x_M(n)$ είναι

$$\begin{aligned} X_M(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_M(n) e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(Mn) e^{-j\Omega n} \\ &\stackrel{m=Mn}{=} \sum_{m=0 \bmod M} x(m) e^{-j\Omega \frac{m}{M}} \end{aligned}$$

Είναι όμως

$$\begin{aligned} Z\left(\frac{\Omega}{M}\right) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(m) e^{-j\frac{\Omega}{M}m} \\ &= \sum_{m=0 \bmod M} x(m) e^{-j\frac{\Omega}{M}m} \end{aligned}$$

έτσι

$$X_M(\Omega) = Z\left(\frac{\Omega}{M}\right) \quad (5.3.3)$$

Θα εκφράσουμε το φάσμα του αποδεκατισμένου σήματος σε σχέση με το αρχικό. Είναι γνωστό ότι

$$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}kn} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \bmod M \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (5.3.4)$$

Έτσι το σήμα $z(n)$ μπορεί να γραφεί ως

$$z(n) = x(n) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$$

και ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι:

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}kn} e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\Omega - \frac{2\pi}{M}k)n} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\Omega - \frac{2\pi}{M}k\right) \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Συνδυάζοντας την τελευταία εξίσωση με την $X_M(\Omega) = Z\left(\frac{\Omega}{M}\right)$ έχουμε:

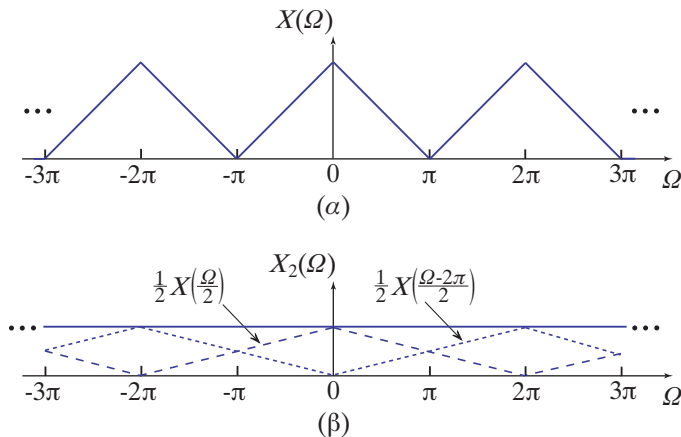
$$X_M(\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\Omega}{M} - \frac{2\pi}{M}k\right) \quad (5.3.6)$$

Το αποδεκατισμένο φάσμα λαμβάνεται με διεύρυνση του φάσματος $X(\Omega)$ κατά M , μετατόπιση κατά $2\pi/M, (2\pi/M)2, \dots, (2\pi/M)(M-1)$ και υπέρθεση. Η διαδικασία απεικονίζεται στο Σχήμα 5.16 για $M=2$.

5.3.2 Παρεμβολή

Η μέθοδος της παρεμβολής πραγματοποιεί αύξηση του ρυθμού δειγματοληψίας. Έστω τα σήματα $x(n)$ και $\tilde{x}(n)$ τα οποία προκύπτουν από το αναλογικό σήμα $s(t)$ με διαφορετικούς ρυθμούς δειγματοληψίας, δηλαδή,

$$\begin{aligned} x(n) &= s(nT_s) \\ \tilde{x}(n) &= s(n\tilde{T}_s) \end{aligned} \quad (5.3.7)$$



Σχήμα 5.16 (α) Το αρχικό φάσμα $X(\Omega)$ και (β) το φάσμα του αποδεκατισμένου σήματος $X_M(\Omega)$ για $M = 2$.

όπου $F_s = 1/T_s$ και $\tilde{F}_s = 1/\tilde{T}_s$ με $F_s < \tilde{F}_s$ ή $T_s > \tilde{T}_s$ και έχουν λόγο $\tilde{F}_s/F_s = L > 1$. Η αύξηση του ρυθμού δειγματοληψίας κατά ένα παράγοντα L απαιτεί υπολογισμό του $x(n)$ στις τιμές n/L η οποία είναι εφικτή μόνο εάν το n είναι πολλαπλάσιο του L . Οι υπόλοιπες τιμές θα πρέπει να παρεμβληθούν. Έτσι ορίζουμε το σήμα

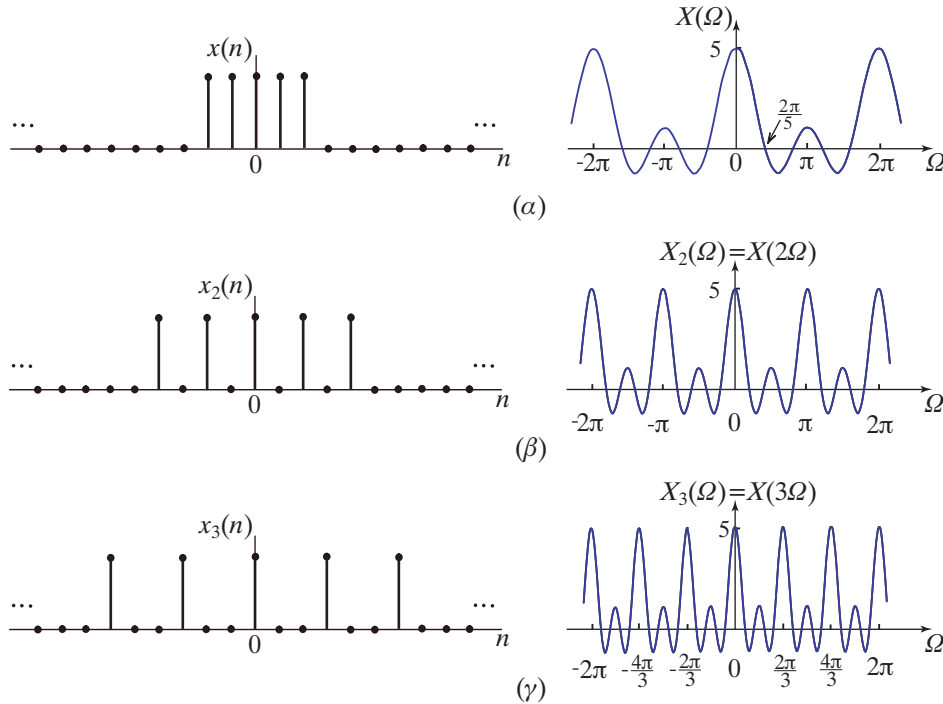
$$x_L(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right), & \text{αν } n = 0 \bmod L \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{5.3.8}$$

Στο Σχήμα 5.17 παράγουμε το σήμα $x_2(n)$ παράγεται από το σήμα $x(n)$ παρεμβάλλοντας ένα μηδενικό ανάμεσα σε διαδοχικές τιμές του $x(n)$. Με ανάλογο τρόπο παράγεται και το σήμα $x_3(n)$.

Το φάσμα του σήματος $x_L(n)$ είναι

$$\begin{aligned} X_L(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_L(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_L(kL)e^{-j\Omega kL} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{kL}{L}\right)e^{-j\Omega kL} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j(L\Omega)k} \\ &= X(L\Omega) \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Παρατηρούμε ότι το φάσμα $X_L(\Omega)$ λαμβάνεται από το αρχικό φάσμα $X(\Omega)$ με αλλαγή κλίμακας συχνοτήτων κατά L .



Σχήμα 5.17 (α) Το σήμα $x(n)$ και το φάσμα του. Το σήμα $x_L(n)$ που παράγεται από το $x(n)$ παραμβάλλοντας $L - 1$ μηδενικά ανάμεσα σε διαδοχικές τιμές του $x(n)$ και το φάσμα του $X_L(\Omega)$ για (β) $L = 2$ και (γ) $L = 3$.

5.3.3 Άθροισμα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$, η ιδιότητα της ολοκλήρωσης του μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου είναι

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

Με τη βοήθεια του σήματος $x(n)$ ορίζουμε το σήμα $y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$ και παρατηρούμε ότι $y(n) - y(n - 1) = x(n)$. Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου και στα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης και, λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας και της χρονικής μετατόπισης, έχουμε:

$$\mathcal{F}[y(n) - y(n - 1)] = \mathcal{F}[x(n)] \quad \text{ή} \quad Y(\Omega) - e^{-j\Omega}Y(\Omega) = X(\Omega)$$

Αν $\Omega \neq 0$ έχουμε

$$Y(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega)$$

Αποδεικνύεται[†] ότι η πλήρης σχέση η οποία εκφράζει την ιδιότητα της άθροισης είναι:

$$\sum_{m=-\infty}^n x(m) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \quad (5.3.10)$$

5.3.4 Ιδιότητα της Διαμόρφωσης

Με τη βοήθεια των σημάτων $x_1(n)$ και $x_2(n)$, που έχουν μετασχηματισμούς Fourier διακριτού χρόνου $X_1(\Omega)$ και $X_2(\Omega)$ αντίστοιχα, σχηματίζουμε το σήμα $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$. Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος $y(n)$ θα είναι:

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \cdot x_2(n) e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) e^{j\theta n} d\theta \right] e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) \cdot e^{j(\Omega - \theta)n} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) X_2(\Omega - \theta) d\theta \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί την *περιοδική συνέλιξη* των $X_1(\Omega)$ και $X_2(\Omega)$. Η διαμόρφωση σήματος διακριτού χρόνου με τη βοήθεια της ιδιότητας αυτής επεξηγείται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 5.3.1

Έστω $x_1(n)$ η περιοδική ακολουθία, με περίοδο 2

$$x_1(n) = e^{j\pi n} = (-1)^n \quad (5.3.12)$$

και το σήμα $x_2(n)$, του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου $X_2(\Omega)$ φαίνεται στο Σχήμα 5.18β. Να προσδιοριστεί γραφικά ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$.

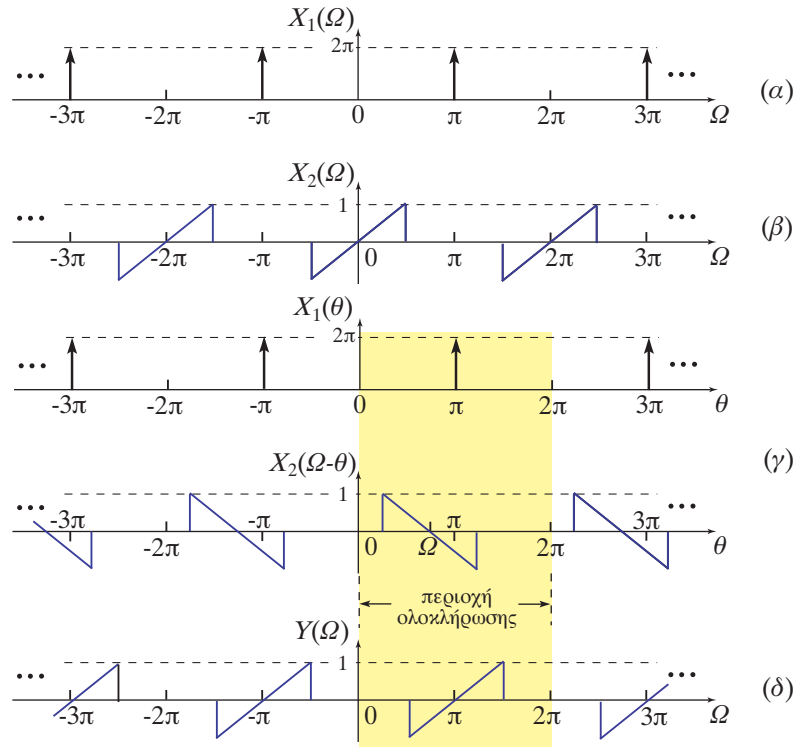
Λύση Ο MF διακριτού χρόνου της περιοδικής ακολουθίας $x_1(n)$ είναι

$$X_1(\Omega) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - (2r + 1)\pi) \quad (5.3.13)$$

Η γραφική παράσταση του $X_1(\Omega)$ είναι στο Σχήμα 5.18α. Στο Σχήμα 5.18γ έχουμε σχεδιάσει τα $X_1(\theta)$ και $X_2(\Omega - \theta)$. Παρατηρούμε ότι

$$X_1(\theta) \cdot X_2(\Omega - \theta) = 2\pi X_2(\Omega - \theta) \delta(\theta - \pi) \text{ για } 0 < \theta < 2\pi$$

[†] Αναφορά 5.4 και 5.5 της προτεινόμενης βιβλιογραφίας



Σχήμα 5.18 Η ιδιότητα της διαμόρφωσης διακριτού χρόνου. (α) Ο DTFT του σήματος $x_1(n) = (-1)^n$, (β) ο DTFT του σήματος $x_2(n)$, (γ) οι ποσότητες οι οποίες χρειάζονται για τον προσδιορισμό του περιοδικού συγκερασμού και (δ) ο DTFT του σήματος $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) = (-1)^n x_2(n)$

έτσι έχουμε

$$Y(\Omega) = \int_0^{2\pi} X_2(\Omega - \theta) \delta(\theta - \pi) d\theta = X_2(\Omega - \pi) \quad (5.3.14)$$

Ο $Y(\Omega)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 5.18δ.

Θα μπορούσαμε να βρούμε την τελευταία σχέση με την βοήθεια της ιδιότητας της ολίσησης φάσης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

$$e^{j\pi n} x(n) = (-1)^n x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega - \pi)$$

Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος με $(-1)^n$ έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή του προσήμου στους περιττούς όρους της ακολουθίας. Στο δε χώρο των συχνοτήτων έχει ως αποτέλεσμα την ολίσηση του περιοδικού φάσματος $X_2(\Omega)$ κατά μισή περίοδο

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.4 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Ιδιότητα	Πεδίο χρόνου	Πεδίο συχνότητας
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(n)$	$X^*(-\Omega)$
Συζυγία στη συχνότητα	$x^*(-n)$	$X^*(\Omega)$
Ανάκλαση	$x(-n)$	$X(-\Omega)$
Γραμμικότητα	$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(\Omega)+bX_2(\Omega)$
Άρτιο μέρος σήματος Πραγματικό μέρος φάσματος	$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$	$\Re[X(\Omega)]=R(\Omega)$
Περιττό μέρος σήματος Φανταστικό μέρος φάσματος	$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$	$j\Im[X(\Omega)]=jI(\Omega)$
Χρονική μετατόπιση	$x(n-n_0)$	$e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 n} x(n)$	$X(\Omega-\Omega_0)$
Πραγματικό σήμα	$x(n)=x^*(n)$	$X(\Omega)=X^*(\Omega)$ $\Re[X(\Omega)]=\Re[X(-\Omega)]$ $\Im[X(\Omega)]=-\Im[X(-\Omega)]$ $ X(\Omega) = X(-\Omega) $ $\arg X(\Omega)=-\arg X(-\Omega)$
Άθροισμα	$\sum_{m=-\infty}^n x(m)$	$\frac{1}{1+e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-2k\pi)$
Διαμόρφωση	$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega-\theta) Y(\theta) d\theta$
Συνέλιξη	$x(n) * y(n)$	$X(\Omega) \cdot Y(\Omega)$
Αποδεκάτιση	$x_M(n)=x(Mn)$	$X_M(\Omega)=\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(\frac{\Omega}{M}-\frac{2k\pi}{M})$
Διαφώριση στο πεδίο συχνοτήτων	$(-j)^k n^k x(n)$	$\frac{d^k X(\Omega)}{d\Omega^k}$
Διαφορά	$x(n)-x(n-1)$	$(1-e^{-j\Omega}) X(\Omega)$
Παρεμβολή	$x_M(n)=x(\frac{n}{M})$	$X(M\Omega)$
Θεώρημα Parseval	$\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2$	$\mathcal{E}_x = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) ^2 d\Omega$

(δηλαδή κατά π). Λόγω της περιοδικότητας την οποία παρουσιάζουν τα φάσματα των διακριτών σημάτων, αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εναλλαγή των υψηλών και χαμηλών συχνοτήτων.

5.3.5 Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου για περιοδικά σήματα

Θα προσδιορίσουμε το σήμα $x(n)$ του οποίου το φάσμα είναι η περιοδική επέκταση της συνάρτησης δέλτα, δηλαδή,

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2k\pi) \quad (5.3.15)$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου έχουμε

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) e^{j\Omega n} d\Omega \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Επειδή κάθε διάστημα με μήκος 2π περιέχει μία μόνο συνάρτηση δέλτα από τον κρουστικό συρμό του αθροίσματος, (δηλαδή, στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ υπάρχει μία συνάρτηση δέλτα στη θέση $\Omega = 0$), έχουμε:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} e^{j0n} = \frac{1}{2\pi}$$

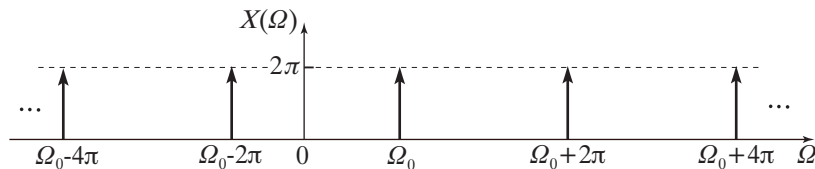
Έτσι έχουμε το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier:

$$x(n) = 1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2k\pi) \quad (5.3.17)$$

Λόγω της ιδιότητας της ολίσθησης στο πεδίο των συχνοτήτων έχουμε:

$$x(n) = e^{j\Omega_0 n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2k\pi) \quad (5.3.18)$$

Στο Σχήμα 5.19 έχει σχεδιαστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος $x(n) = e^{j\Omega_0 n}$.



Σχήμα 5.19 Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος $x(n) = e^{j\Omega_0 n}$.

Παρατηρούμε ότι, επειδή το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ έχει μετασχηματισμό Fourier μία συνάρτηση δέλτα στη συχνότητα $\omega = \omega_0$, το σήμα διακριτού χρόνου $x(n) = e^{j\Omega_0 n}$, λόγω της περιοδικότητας $e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n}$, έχει μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου ένα κρουστικό συρμό στον οποίο τα κρουστικά σήματα είναι τοποθετημένα στις συχνότητες $\Omega_0, \Omega_0 \pm 2\pi, \Omega_0 \pm 4\pi, \dots$

Γνωρίζουμε ότι κάθε περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου με περίοδο N αναπτύσσεται σε σειρά Fourier διακριτού χρόνου

$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{jm\frac{2\pi}{N}n} \quad (5.3.19)$$

ή

$$x(n) = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{N}n} + a_2 e^{j2\frac{2\pi}{N}n} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n} \quad (5.3.20)$$

και ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= a_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - 2k\pi) \\ &+ a_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N} - 2k\pi\right) \\ &\vdots \\ &+ a_{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta\left(\Omega - (N-1)\frac{2\pi}{N} - 2k\pi\right) \end{aligned}$$

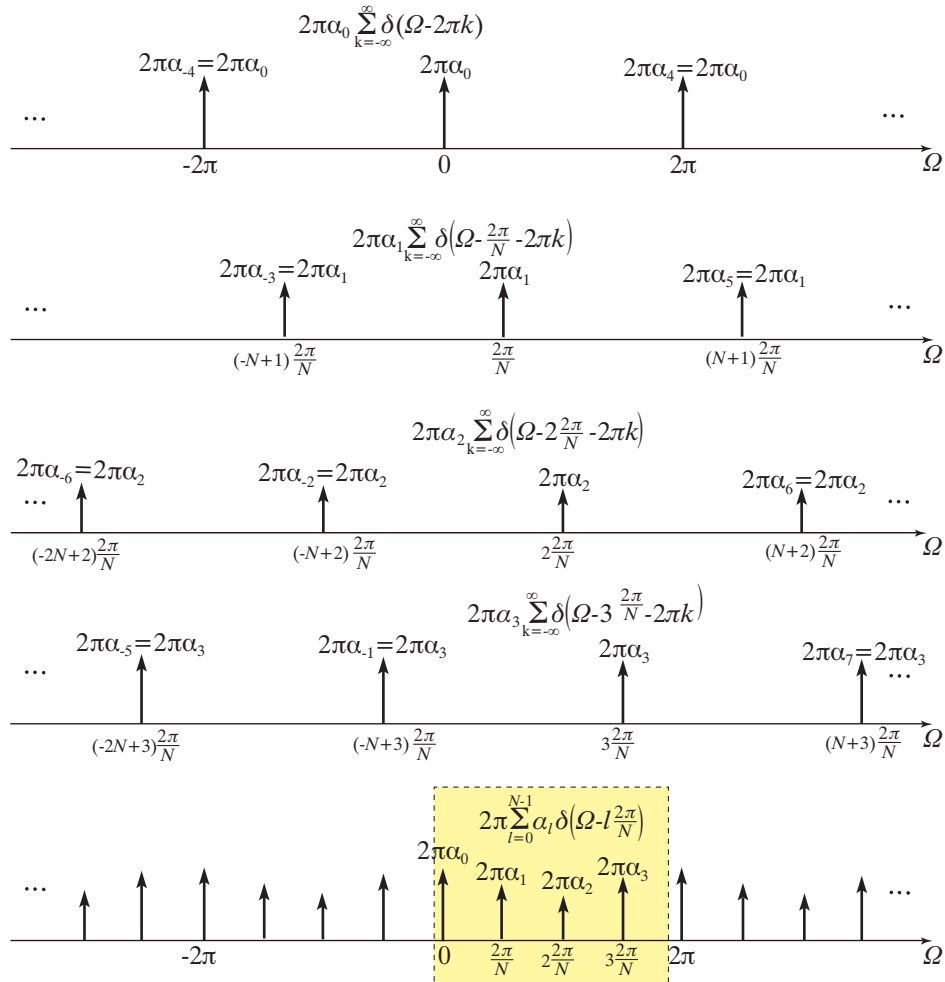
Εφαρμογή των παραπάνω σχέσεων γίνεται στο Σχήμα 5.20 για $N = 4$. Λόγω της περιοδικότητας των συντελεστών a_0, a_1, \dots, a_{N-1} , δηλαδή, $2\pi a_l = 2\pi a_{Nk+l} = 2\pi a_{-Nk+l}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και $l = 0, 1, \dots, N-1$ από την τελευταία σχέση έχουμε

$$\sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{jm\frac{2\pi}{N}n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \delta\left(\Omega - l\frac{2\pi}{N}\right) \quad (5.3.21)$$

Παράδειγμα 5.3.2

Οι συντελεστές Fourier της περιοδικής επέκτασης του μοναδιαίου δείγματος περιόδου N (Σχήμα 5.21α)

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.3.22)$$



Σχήμα 5.20 Ο DTFT ενός περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου $x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{jm \frac{2\pi}{N} n}$ όπου $N = 4$.

είναι

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \\
 &= \frac{1}{N}
 \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

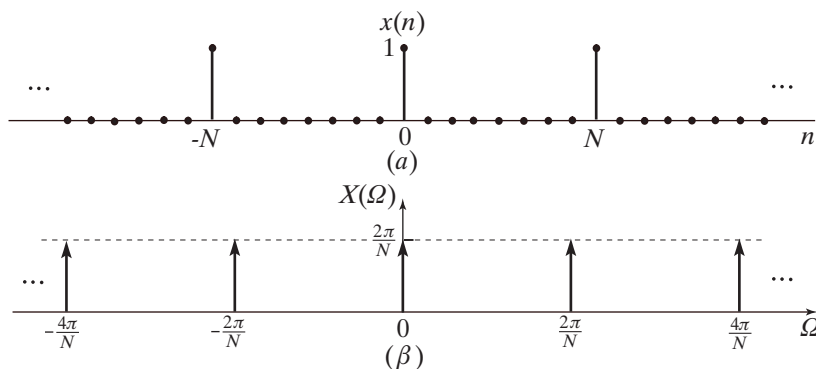
Επομένως, η περιοδική επέκταση του μοναδιαίου δείγματος αναπτύσσεται σε σειρά Fourier διακριτού χρόνου ως

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.3.24)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της περιοδικής επέκτασης του μοναδιαίου δείγματος λόγω της (5.3.21) είναι

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2k\pi}{N}\right) \quad (5.3.25)$$

Στο Σχήμα 5.21β έχει σχεδιαστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος $x(n)$.



Σχήμα 5.21 (α) Η περιοδική επέκταση του μοναδιαίου δείγματος και (β) το φάσμα της.

Παράδειγμα 5.3.3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της μοναδιαίας βηματικής ακολουθίας.

Λύση Γνωρίζουμε ότι $x(n) = \delta(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) = 1$. Με τη βοήθεια της ιδιότητας του αθροίσματος ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της βηματικής ακολουθίας $u(n)$ είναι

$$\sum_{m=-\infty}^n \delta(m) = u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \quad (5.3.26)$$

Στον Πίνακα 5.2 παρουσιάζονται μερικά ζεύγη μετασχηματισμών Fourier διακριτού χρόνου.

5.4 ΣΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Δίνεται το αναλογικό σήμα $x_a(t)$ το οποίο έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$. Αν λάβουμε δείγματα του $x_a(t)$ με περίοδο T_s , δηλαδή, αν μετρήσουμε τις τιμές του σή-

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.5 DTFT βασικών συναρτήσεων διακριτού χρόνου

A/A	Πεδίο χρόνου	Πεδίο συχνότητας
1	$\sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$
2	$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)$
3	$\cos(\Omega_0 n)$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)]$
4	$\sin(\Omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)]$
5	$x(n) = 1$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
6	$x(n+N)=x(n)=\begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & N_1 < n \leq N/2 \end{cases}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$
7	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$
8	$a^n u(n), a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
9	$x(n) = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\Omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{\Omega}{2})}$
10	$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}(\frac{Wn}{\pi}), 0 < W < \pi$	$X(\Omega + 2k\pi) = X(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \Omega \leq W \\ 0, & W < \Omega \leq \pi \end{cases}$
11	$\delta(n)$	1
12	$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\Omega - 2\pi k)$
13	$\delta(n - n_0)$	$e^{-j\Omega n_0}$
14	$(n+1)a^n u(n), a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2}$
15	$\frac{(n+r+1)!}{n!(r-1)!} a^n u(n), a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^{r+1}}$

ματος συνεχούς χρόνου σε διακριτές χρονικές στιγμές που είναι πολλαπλάσια της T_s , παίρνουμε το σήμα διακριτού χρόνου

$$x_s(n) = x_a(nT_s) \quad (5.4.1)$$

Το χρονικό διάστημα T_s είναι γνωστό ως περίοδος δειγματοληψίας και $f_s = \frac{1}{T_s}$ είναι η συχνότητα δειγματοληψίας. Η επιλογή της T_s θα πρέπει να γίνεται έτσι, ώστε να μη χαθεί πληροφορία που περιέχεται στο αναλογικό σήμα, (δηλαδή, να είναι δυνατή η ανακατασκευή του από τα δείγματά του), αλλά ούτε να αυξηθεί χωρίς λόγο η απαιτούμενη μνήμη.

Θα προσδιορίσουμε τη σχέση ανάμεσα στο μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου $X_s(\Omega)$ του σήματος $x_s(n)$, που έχει προέλθει από δειγματοληψία, και του αντιστοίχου

του συνεχούς χρόνου $X_a(\omega)$. Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος $x_s(n)$ είναι

$$X_s(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n) e^{-j\Omega n} \quad (5.4.2)$$

Η εξίσωση σύνθεσης του $x_s(n)$ είναι

$$x_s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_s(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (5.4.3)$$

Η εξίσωση σύνθεσης του $x_a(t)$ είναι

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.4.4)$$

Εφαρμόζουμε την (5.4.4) για $t = nT_s$

$$x_a(nT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega) e^{j\omega nT_s} d\omega \quad (5.4.5)$$

Η σύγκριση των (5.4.5) και (5.4.3) μας καθοδηγεί στο μετασχηματισμό $\omega T_s = \Omega$, που είναι η γνωστή σχέση μεταξύ αναλογικής και ψηφιακής κυκλικής συχνότητας (1.4.11). Έτσι η (5.4.5) δίνει

$$x_a(nT_s) = \frac{1}{2\pi T_s} \int_{-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (5.4.6)$$

Η (5.4.6) διαφέρει από την (5.4.3) ως προς τα όρια του ολοκληρώματος. Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε άθροισμα ολοκληρωμάτων σε διαστήματα μήκους 2π , δηλαδή,

$$x_a(nT_s) = \frac{1}{2\pi T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} X_a\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (5.4.7)$$

Αλλαγή της μεταβλητής $\Omega = \Omega - 2k\pi$ οδηγεί στην

$$x_a(nT_s) = \frac{1}{2\pi T_s} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega + 2k\pi}{T_s}\right) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (5.4.8)$$

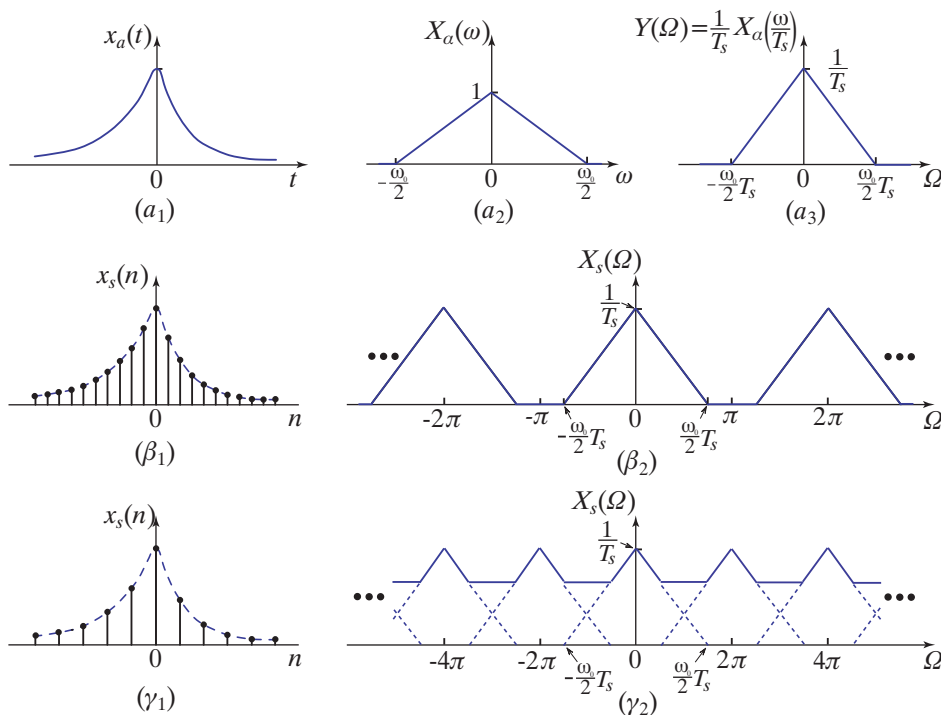
Η σύγκριση της (5.4.3) με την (5.4.8) δίνει την

$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega + 2k\pi}{T_s}\right) \quad (5.4.9)$$

ή, ως προς την αναλογική κυκλική συχνότητα,

$$x_s(n) = x_a(nT_s) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_s(\omega T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\omega + \frac{2k\pi}{T_s}\right) \quad (5.4.10)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος που έχει προέλθει από δειγματοληψία προκύπτει από το φάσμα του αναλογικού σήματος με τις εξής διαδικασίες: (βλέπε Σχήμα 5.22)



Σχήμα 5.22 (α_1) Αναλογικό σήμα, (β_1) και (γ_1) σήματα από δειγματοληψία με διαφορετικό ρυθμό δειγματοληψίας. Τα φάσματα (α_2) του αναλογικού σήματος, (α_3) μετά την αλλαγή κλίμακας, (β_2) ολίσθηση και υπέρθεση χωρίς επικάλυψη και (γ_2) ολίσθηση και υπέρθεση με επικάλυψη φασμάτων.

- Αλλαγή κλίμακας $X_s(\Omega) \rightarrow Y(\Omega) = X_s(\Omega/T_s)$
- Ολισθήσεις $Y(\Omega) \rightarrow Y(\Omega + 2k\pi)$
- Υπέρθεση των ολισθημένων φασμάτων και διαβάθμιση με $1/T_s$

Διαπιστώνουμε ότι, αν το αναλογικό σήμα $x_a(t)$ έχει περιορισμένο εύρος συχνοτήτων, δηλαδή, $X_a(\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_0/2$, και αν γίνει δειγματοληψία με ρυθμό δειγματοληψίας μεγαλύτερο από το εύρος ζώνης του σήματος ω_0 , το φάσμα $X_a(\omega)$ διατηρείται αναλλοίωτο μέσα στο φάσμα $X_s(\Omega)$ των δειγμάτων του. Κάτω από τις προϋποθέσεις αυτές, αναμένουμε ότι το αναλογικό σήμα μπορεί να ανακατασκευαστεί από τα δείγματά του. Πράγματι,

$$X_s(\omega T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\omega + \frac{2k\pi}{T_s}\right) \quad (5.4.11)$$

από την οποία έχουμε για $-\pi/T_s < \omega \leq \pi/T_s$

$$X_s(\omega T_s) = \frac{1}{T_s} X_a(\omega) \quad (5.4.12)$$

Έτσι έχουμε για το αναλογικό σήμα $x_a(t)$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} X_s(\omega T_s) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.4.13)$$

Λόγω της (5.4.2)

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n) e^{-j\omega T_s n} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} e^{j\omega(t-T_s n)} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \frac{\sin \frac{\pi}{T_s}(t-nT_s)}{\frac{\pi}{T_s}(t-nT_s)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right) \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Από τη (5.4.14) παρατηρούμε ότι το ανακατασκευασμένο σήμα συμπίπτει με το $x_a(t)$ στις στιγμές δειγματοληψίας (βλέπε Σχήμα 5.23). Σημειώνεται ότι το άθροισμα συμπίπτει με το αρχικό σήμα για όλες τις ενδιάμεσες χρονικές στιγμές.

5.4.1 Θεώρημα δειγματοληψίας

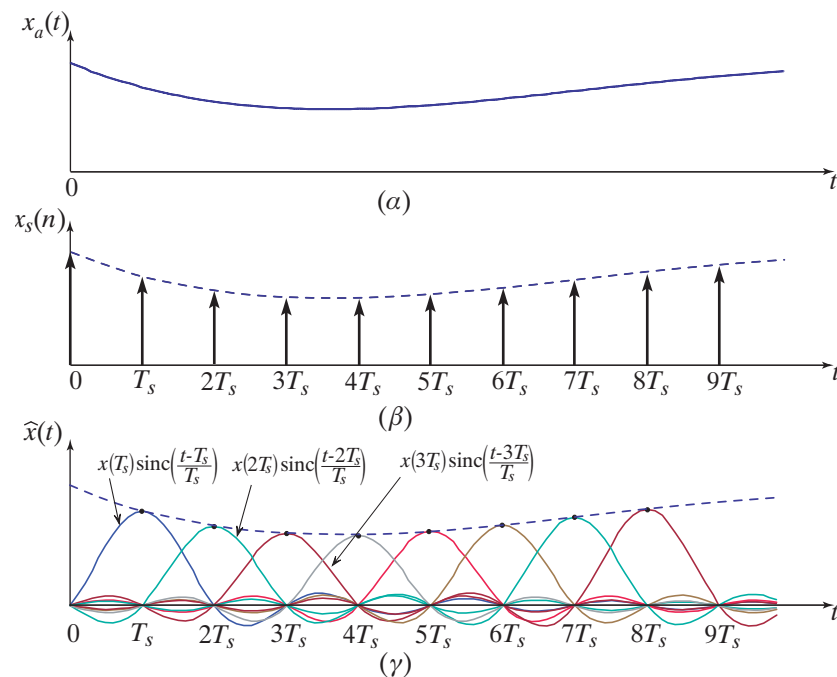
Αν $x_a(t)$ αναλογικό σήμα περιορισμένου εύρους συχνοτήτων, δηλαδή,

$$X_a(\omega) = 0 \text{ για } |\omega| > \frac{\omega_0}{2} \quad (5.4.15)$$

και ο ρυθμός δειγματοληψίας ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist

$$\omega_0 \leq \frac{2\pi}{T_s} \quad (5.4.16)$$

τότε το σήμα $x_a(t)$ ανακατασκευάζεται από τα δείγματά του σύμφωνα με την (5.4.14). Η συχνότητα $2\pi/T_s$ ονομάζεται *συχνότητα Nyquist*.



Σχήμα 5.23 Η ανακατασκευή του αναλογικού σήματος από τα δείγματά του. (α) Το αναλογικό σήμα $x_a(t)$, (β) το σήμα διακριτού χρόνου $x_s(n)$ και (γ) η ανακατασκευή του αναλογικού σήματος από τα δείγματά του σύμφωνα με την εξίσωση (5.4.14) για $\omega_0 = 2\pi/T_s$.

5.4.2 Οι Συντελεστές Fourier ως δείγματα σε μία περίοδο του μετασχηματισμού Fourier

Έστω το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(n)$ με περίοδο N και το σήμα $x(n)$, που αντιστοιχεί σε μία περίοδο του $\tilde{x}(n)$, δηλαδή,

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & M \leq n \leq M + N - 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \text{ όπου } M \text{ πραγματικός ακέραιος} \quad (5.4.17)$$

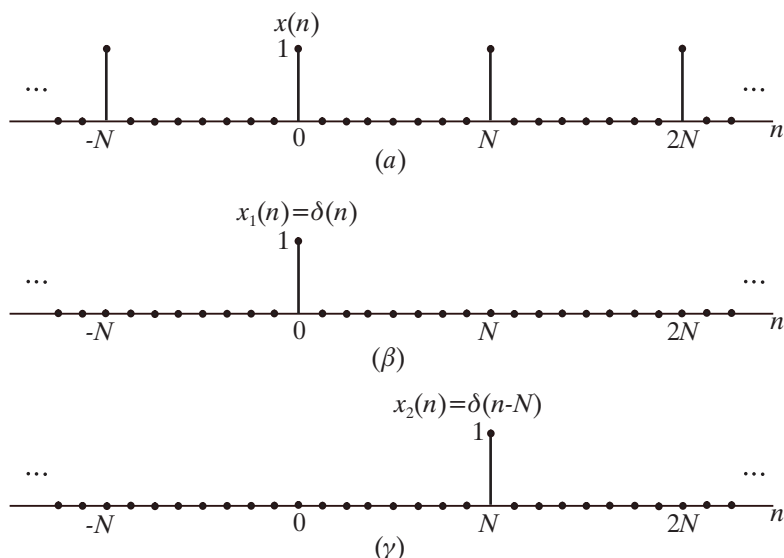
Γνωρίζουμε (5.2.5)

$$Na_k = X \left(k \frac{2\pi}{n} \right) \quad (5.4.18)$$

όπου a_k είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier διακριτού χρόνου του $\tilde{x}(n)$, και $X(\Omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του $x(n)$. Με τη βοήθεια του Παραδείγματος 5.4.1 που ακολουθεί, θα δείξουμε ότι ο $X(\Omega)$ εξαρτάται από την τιμή του M , ενώ οι τιμές του στις συχνότητες δειγματοληψίας $k(2\pi/N)$ δεν εξαρτώνται από την τιμή του M .

Παράδειγμα 5.4.1

Αν ορίσουμε το σήμα $x_1(n)$ (Σχήμα 5.24β), το οποίο αντιστοιχεί σε μια περίοδο της



Σχήμα 5.24 (α) Η περιοδική επέκταση του μοναδιαίου δείγματος και (β), (γ) δύο μη περιοδικές ακολουθίες, η κάθε μια από τις οποίες είναι ίση με το $x(n)$ στη διάρκεια μιας περιόδου.

περιοδικής επέκτασης του μοναδιαίου δείγματος περιόδου N $x(n)$ (Σχήμα 5.24α) ως:

$$x_1(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \text{ δηλαδή, } x_1(n) = \delta(n) \quad (5.4.19)$$

από την εξίσωση ανάλυσης $X_1(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\Omega n}$ υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου του $x_1(n)$ ως

$$X_1(\Omega) = 1 \quad (5.4.20)$$

ενώ, αν ορίσουμε το σήμα $x_2(n)$ (Σχήμα 5.24γ),

$$x_2(n) = \begin{cases} x(n), & M \leq n \leq M+N-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \text{όπου } 0 < M < N \quad (5.4.21)$$

δηλαδή, $x_2(n) = \delta(n - N)$, ο μετασχηματισμός του $x_2(n)$ είναι

$$X_2(\Omega) = e^{-j\Omega N} \quad (5.4.22)$$

Παρατηρούμε ότι $X_1(\Omega) \neq X_2(\Omega)$ αλλά για τις συχνότητες $\Omega = k(2\pi/N)$ είναι

$$X_1\left(k\frac{2\pi}{N}\right) = X_2\left(k\frac{2\pi}{N}\right) = 1 \quad (5.4.23)$$

5.5 ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π . Για να επεξεργαστούμε το μετασχηματισμό Fourier με ψηφιακά μέσα απαιτείται η μετατροπή του σε ακολουθία αριθμών πεπερασμένης ακρίβειας. Θα πρέπει, λοιπόν να γίνει κατάλληλη δειγματοληψία του μετασχηματισμού Fourier έτσι, ώστε να είναι δυνατή η ανακατασκευή του από τα δείγματά του.

Δίνεται η πεπερασμένη μήκους N ακολουθία $x(n)$, δηλαδή, η $x(n) = 0$ για $n \geq N$. Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας $x(n)$, όπως είναι γνωστό, είναι

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\Omega n}, \quad 0 \leq \Omega < 2\pi \quad (5.5.1)$$

Εάν γίνει δειγματοληψία της συνεχούς συνάρτησης $X(\Omega)$ σε M διακριτές κυκλικές συχνότητες που είναι πολλαπλάσιες της Ω_s στο διάστημα $0 \leq \Omega < 2\pi$, παίρνουμε τα δείγματα:

$$X_M(k) = X(\Omega)|_{\Omega=k\Omega_s} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{jk\Omega_s n}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (5.5.2)$$

Ο αριθμός των δειγμάτων που θα ληφθούν θα πρέπει να είναι κατάλληλος έτσι ώστε αφενός να είναι δυνατή η ανάκτηση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου για κάθε τιμή της κυκλικής συχνότητας Ω , αφετέρου να μην αυξηθούν η απαιτούμενη μνήμη και η ταχύτητα επεξεργασίας.

Το θεώρημα δειγματοληψίας στο πεδίο του χρόνου αναφέρει ότι για ένα αναλογικό σήμα $x_a(t)$ με περιορισμένο εύρος ζώνης χαμηλών συχνοτήτων W , δηλαδή, $X(\omega) = 0$ για $|\omega| \geq W$ είναι δυνατή η ανακατασκευή του αρχικού σήματος $x_a(t)$ από την ακολουθία των δειγμάτων του $\{x_a(nT_s)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, όταν η περίοδος δειγματοληψίας T_s πληροί το κριτήριο του Nyquist, δηλαδή, $T_s \leq \frac{1}{2W}$.

Με ανάλογο τρόπο το θεώρημα δειγματοληψίας στο πεδίο συχνοτήτων αναφέρει ότι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου μπορεί να ανακτηθεί από τα δείγματά του $X_M(k)$, $k = 0, 1, \dots, M-1$ εφόσον το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ είναι

πεπερασμένης διάρκειας N και ισχύει $M \geq N$: στην περίπτωση αυτή ισχύει η συνθήκη Nyquist, δηλαδή,

$$\Omega_s \leq \frac{2\pi}{N} \quad (5.5.3)$$

Για την οριακή περίπτωση όπου $\Omega_s = \frac{2\pi}{N}$, δηλαδή, όταν γίνεται δειγματοληψία του $X(\Omega)$ στις συχνότητες $\Omega_k = k \cdot \Omega_s = k \left(\frac{2\pi}{N}\right)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, η (5.5.2) γράφεται

$$\begin{aligned} X_N(k) &= X(\Omega)|_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}} = X\left(k\frac{2\pi}{N}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Τα δείγματα $X_N(k)$ ή απλά $X(k)$ του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου $X(\Omega)$ αποτελούν το *διακριτό μετασχηματισμό Fourier* (Discrete Fourier Transform, DFT) της ακολουθίας $x(n)$.

Αποδεικνύεται[‡] ότι μπορούμε να ανακατασκευάσουμε την ακολουθία $x(n)$ από τα δείγματα $X_N(k)$ του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου με την

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.5.5)$$

Η (5.5.5) αποτελεί τον *αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier* (inverse DFT, IDFT).

Οι εξισώσεις (5.5.4) και (5.5.5) αποτελούν το ζεύγος διακριτού μετασχηματισμού Fourier N -σημείων και θα το συμβολίζουμε ως $x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_N(k)$.

Οι ακολουθίες $x(n)$ και $X_N(k)$ έχουν ίδιο μήκος N και είναι περιοδικές με περίοδο N .

Παράδειγμα 5.5.1

Δίνεται η 4-σημείων ακολουθία $x(n)$

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (5.5.6)$$

1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου $X(\Omega)$ και να γίνει η γραφική παράσταση του μέτρου του σε συνάρτηση με την κυκλική συχνότητα Ω .
2. Να βρεθεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier 4-σημείων της ακολουθίας $x(n)$.

[‡] Αναφορά 5.4 και 5.5 της προτεινόμενης βιβλιογραφίας

Λύση

1. Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας $x(n)$ είναι

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\Omega n} \\ &= 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega} \\ &= \frac{1 - e^{-j4\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} \\ &= \frac{\sin(2\Omega)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j3\Omega/2} \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 5.25 έχει γίνει η γραφική παράσταση του μέτρου του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου $|X(\Omega)|$ σε συνάρτηση με την Ω .

2. Για το διακριτό μετασχηματισμό Fourier 4-σημείων της ακολουθίας $x(n)$ έχουμε

$$X_4(k) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Για $k = 0$ έχουμε

$$X_4(0) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{j0\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^3 x(n) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 4$$

και για $k = 1, 2,$ και 3 έχουμε

$$X_4(1) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{j1\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^3 x(n)(-j)^n = 0$$

$$X_4(2) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{j2\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^3 x(n)(-j)^{2n} = 0$$

$$X_4(3) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{j3\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^3 x(n)(-j)^{3n} = 0$$

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier 4-σημείων της ακολουθίας $x(n)$ είναι, λοιπόν

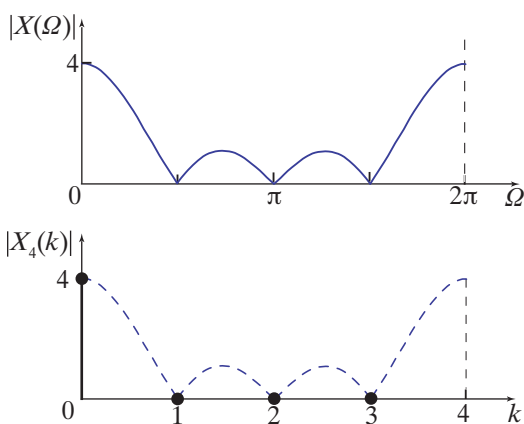
$$X_4(k) = [\underset{\uparrow}{4}, 0, 0, 0] \quad (5.5.7)$$

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier 4-σημείων της ακολουθίας $x(n)$ βρίσκεται και εάν γίνει δειγματοληψία του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου $X(\Omega)$

σε 4 ισαπέχουσες κυκλικές συχνότητες που απέχουν ανά δύο κατά $\Delta\Omega = \frac{\pi}{2}$. Έχουμε, λοιπόν, τα δείγματα

$$\begin{aligned} X_4(k) &= X(\Omega)|_{\Omega=k\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sin(2k\frac{\pi}{2})}{\sin(k\frac{\pi}{4})} e^{-j3k\frac{\pi}{4}} \\ &= [4, 0, 0, 0] \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

Στο Σχήμα 5.25 έχουμε και γραφική παράσταση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier 4-σημείων της ακολουθίας $x(n)$.



Σχήμα 5.25 Η γραφική παράσταση του MF διακριτού χρόνου του σήματος $x(n)$ στο Παράδειγμα 5.5.1 και ο διακριτός MF 4-σημείων του.

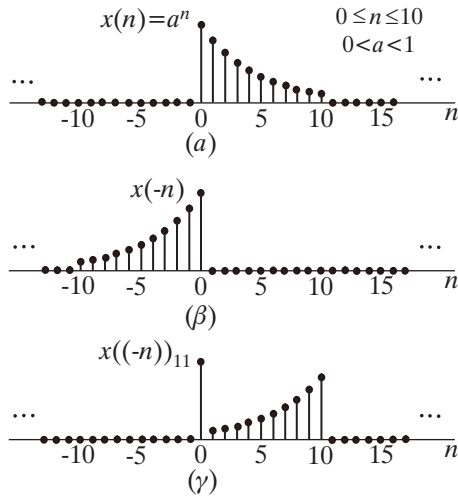
Σημειώνεται ότι το δείγμα για μηδενική κυκλική συχνότητα $X_N(0)$ είναι πάντοτε ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της ακολουθίας $x(n)$.

5.5.1 Κυκλική ανάκλαση ακολουθίας

Η ανάκλαση μιας ακολουθίας N -σημείων, $x(n)$, δίνει την ακολουθία $x(-n)$, η οποία δεν είναι ακολουθία N -σημείων, και έτσι δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier. Η *κυκλική ανάκλαση* μιας ακολουθίας μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια των υπολοίπων (modulo) ως $x((-n))_N$, όπου ο συμβολισμός $((m))_N$ διαβάζεται ως $m \text{ modulo } N$ και σημαίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης του m δια του N και είναι

$$x((-n))_N = \begin{cases} x(0), & n = 0 \\ x(N - n), & 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases} \tag{5.5.9}$$

Στο Σχήμα 5.26 φαίνεται η ακολουθία 11-σημείων $x(n) = \alpha^n$ όπου $0 \leq n \leq 10$ και $0 < \alpha < 1$ η ανάκλασή της η οποία δεν είναι ακολουθία 11-σημείων και η κυκλική ανάκλασή της η οποία είναι ακολουθία 11-σημείων.



Σχήμα 5.26 Κύκλική ανάκλαση ακολουθίας (α) η ακολουθία N -σημείων $x(n)$, (β) η ανάκλαση της ακολουθίας και (γ) η κυκλική ανάκλαση της ακολουθίας.

5.5.2 Κυκλική ολίσθηση ακολουθίας

Η περιοδική επέκταση ανά N δείγματα της πεπερασμένου μήκους ακολουθίας $x(n)$ που έχει N δείγματα στο διάστημα $0, 1, \dots, N-1$ είναι η περιοδική ακολουθία

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - kN) \quad (5.5.10)$$

Η ολίσθηση (μετατόπιση) της περιοδικής ακολουθίας $\tilde{x}(n)$ κατά m δείγματα προς τα δεξιά δίνει την επίσης περιοδική ακολουθία

$$\tilde{x}(n - m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - m + kN) \quad (5.5.11)$$

Η πεπερασμένου μήκους ακολουθία

$$\tilde{x}(n - m) \mathcal{R}_N(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n - m), & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (5.5.12)$$

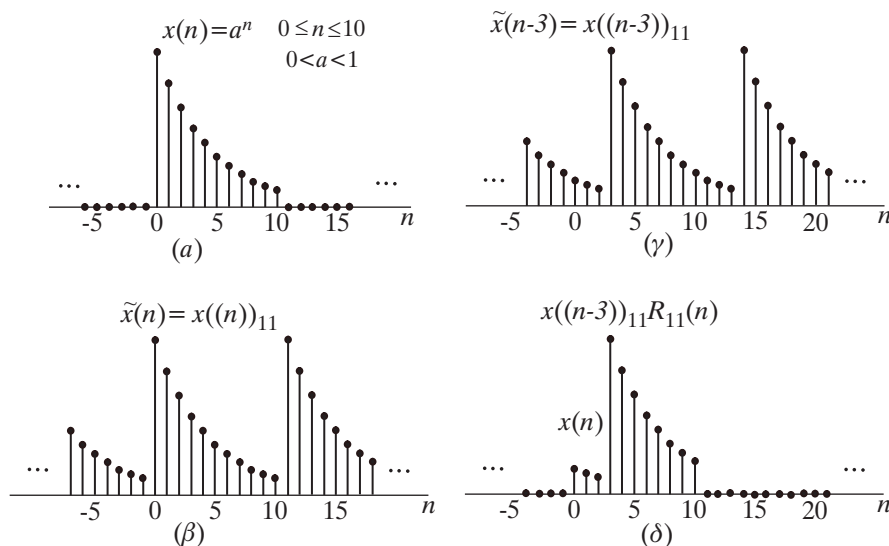
όπου $\mathcal{R}_N(n)$ είναι το ορθογώνιο παράθυρο μήκους N , δηλαδή,

$$\mathcal{R}_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (5.5.13)$$

αποτελεί την *κυκλική ολίσθηση* M -σημείων της ακολουθίας $x(n)$. Παρατηρούμε ότι η κυκλική ολίσθηση m σημείων μιας ακολουθίας N σημείων προέρχεται από την παραθύρωση[§] της γραμμικά ολισθημένης κατά m σημεία περιοδικής επέκτασης της ακολου-

[§]Ο πολλαπλασιασμός μιας συνάρτησης με μία άλλη, με σκοπό το μηδενισμό της πρώτης έξω από ένα διάστημα, είναι γνωστός ως παραθύρωση

θίας. Η περιοδική επέκταση μιας ακολουθίας μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια των



Σχήμα 5.27 Κυκλική ολίσθηση ακολουθίας (α) αρχική ακολουθία $x(n)$, (β) περιοδική επέκταση της $x(n)$ (γ) γραμμική ολίσθηση κατά τρία δείγματα της περιοδικής επέκτασης, και δ) κυκλική ολίσθημένη ακολουθία κατά τρία δείγματα.

υπολοίπων ως

$$\tilde{x}(n - m) = x((n - m))_N \quad (5.5.14)$$

οπότε η κυκλική ολίσθηση εκφράζεται και ως

$$\tilde{x}(n - m) \mathcal{R}_N(n) = x((n - m))_N \mathcal{R}_N(n) \quad (5.5.15)$$

Στο Σχήμα 5.27 φαίνεται η ακολουθία 11-σημείων $x(n) = a^n$ (όπου $0 \leq n \leq 10$ και $0 < a < 1$), η περιοδική επέκταση της ακολουθίας κατά 11 δείγματα, η γραμμική ολίσθηση της περιοδικής επέκτασης κατά τρία δείγματα προς τα δεξιά και η κυκλική ολίσθηση κατά τρία δείγματα προς τα δεξιά της ακολουθίας $x(n)$, η οποία είναι επίσης ακολουθία 11-σημείων.

5.5.3 Κυκλική συνέλιξη ακολουθιών

Η *κυκλική συνέλιξη* δύο ακολουθιών $x_1(n)$ και $x_2(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ δηλώνεται $x_1(n) \otimes x_2(n)$ και ορίζεται από τη σχέση

$$y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \cdot x_2((n - m))_N \quad (5.5.16)$$

Η ακολουθία $y(n)$ έχει μήκος N , όσο, δηλαδή, και το μήκος καθεμιάς από τις αρχικές ακολουθίες, και όχι μήκος $2N - 1$, όπως συμβαίνει στην περίπτωση της γραμμικής συνέλιξης των δύο αυτών ακολουθιών.

Τα βήματα για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης δύο ακολουθιών είναι:

1. κυκλική ανάκλαση (κατοπτρισμός) της μιας ακολουθίας,
2. κυκλική ολίσθηση (μετατόπιση) της κατοπτρικής ακολουθίας,
3. πολλαπλασιασμός της μετατοπισμένης κατοπτρικής ακολουθίας με τη άλλη ακολουθία σημείο προς σημείο, και
4. άθροιση των γινομένων.

Τα βήματα αυτά επαναλαμβάνονται.

Παράδειγμα 5.5.2

Να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη 4-σημείων των ακολουθιών $x_1(n) = [3, 2, 1]$ και $x_2(n) = [1, 2, 3, 4]$

Λύση Η κυκλική συνέλιξη 4-σημείων δίνεται από τη

$$x_1(n) \textcircled{4} x_2(n) = \sum_{m=0}^3 x_1(m)x_2((n-m))_4 \quad (5.5.17)$$

για $n = 0$ έχουμε

$$\sum_{m=0}^3 x_1(m)x_2((0-m))_4 = \sum_{m=0}^3 [\{3, 2, 1, 0\}\{1, 4, 3, 2\}] = \sum_{m=0}^3 \{3, 8, 3, 0\} = 14,$$

για $n = 1$ έχουμε

$$\sum_{m=0}^3 x_1(m)x_2((1-m))_4 = \sum_{m=0}^3 [\{3, 2, 1, 0\}\{2, 1, 4, 3\}] = \sum_{m=0}^3 \{6, 2, 4, 0\} = 12,$$

για $n = 2$ έχουμε

$$\sum_{m=0}^3 x_1(m)x_2((2-m))_4 = \sum_{m=0}^3 [\{3, 2, 1, 0\}\{3, 2, 1, 4\}] = \sum_{m=0}^3 \{9, 4, 1, 0\} = 14,$$

για $n = 3$ έχουμε

$$\sum_{m=0}^3 x_1(m)x_2((3-m))_4 = \sum_{m=0}^3 [\{3, 2, 1, 0\}\{4, 3, 2, 1\}] = \sum_{m=0}^3 \{12, 6, 2, 0\} = 20,$$

επομένως η κυκλική συνέλιξη είναι

$$x_1(n) \textcircled{4} x_2(n) = [14, 12, 14, 20] \quad (5.5.18)$$

Παράδειγμα 5.5.3

Με τη βοήθεια της ιδιότητας της κυκλικής συνέλιξης να υπολογιστεί η κυκλική συνέλιξη 4-σημείων των ακολουθιών $x_1(n)$ και $x_2(n)$ του Παραδείγματος 5.5.2

Λύση Με τη βοήθεια της εξίσωσης ανάλυσης $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ προσδιορίζεται ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier των σημάτων $x_1(n)$ και $x_2(n)$

$$X_1(k) = \left[6, 2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}, 2, 2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right] = [6, 2 - j2, 2, 2 + j2]$$

$$X_2(k) = \left[10, 2\sqrt{2} e^{j\frac{3\pi}{4}}, -2, 2\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \right] = [10, -2 + j2, -2, -2 - j2]$$

Το γινόμενο των διακριτών μετασχηματισμών Fourier είναι

$$X_1(k) \cdot X_2(k) = [60, 8 e^{j\frac{\pi}{2}}, 4e^{j\pi}, 4e^{-j\frac{\pi}{2}}] = [60, j8, -4, -j8] \quad (5.5.19)$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης σύνθεσης $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ προσδιορίζεται το σήμα $x(n)$, δηλαδή, η κυκλική συνέλιξη των σημάτων $x_1(n)$ και $x_2(n)$

$$x_1(n) \textcircled{4} x_2(n) = [14, 12, 14, 20]$$

η οποία είναι ίδια με την κυκλική συνέλιξη που υπολογίστηκε στο Παράδειγμα 5.5.2, στο οποίο μελετήσαμε το πρόβλημα στο πεδίο του χρόνου.

5.5.4 Ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιασθούν οι βασικές ιδιότητες που έχει ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier.

Μερικές ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου. Υπάρχουν όμως και διαφορές, οι οποίες οφείλονται στο πεπερασμένο μήκος τόσο των ίδιων των ακολουθιών, όσο και του διακριτού μετασχηματισμού Fourier τους. Στον Πίνακα 5.3 παρουσιάζονται οι ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier.

5.5.5 Η γραμμική συνέλιξη με τη βοήθεια του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Γνωρίζουμε ότι, όταν ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $h_1(n)$ διεγερθεί από την ακολουθία $x_1(n)$, η έξοδος του $y(n)$ είναι η γραμμική συνέλιξη των $x_1(n)$ και $h_1(n)$, δηλαδή,

$$y(n) = h_1(n) \star x_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) h_1(k-n)$$

Αν η ακολουθία εισόδου είναι ακολουθία N_1 -σημείων, και η κρουστική απόκριση είναι ακολουθία N_2 -σημείων, τότε η έξοδος του συστήματος είναι ακολουθία $(N_1 + N_2 - 1)$ -σημείων.

Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου γνωρίζουμε ότι

$$y(n) = h_1(n) \star x_1(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_1(\Omega) \cdot X_1(\Omega) \quad (5.5.20)$$

Παρατηρούμε ότι, για να ανακατασκευάσουμε την ακολουθία εξόδου από τα δείγματα του $Y(\Omega)$, δηλαδή, από το διακριτό μετασχηματισμό Fourier $Y(k)$, θα πρέπει να γίνει δειγματοληψία της $Y(\Omega)$ σε τουλάχιστον $N_1 + N_2 - 1$ σημεία στη διακριτή κυκλική

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.6 Ιδιότητες του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Πεδίο χρόνου	Πεδίο συχνότητας
	$x_1(n)$	$X_1(k)$
	$x_2(n)$	$X_2(k)$
Γραμμικότητα	$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(k)+bX_2(k)$
Ανάκλαση στο χρόνο	$x((-n))_N$	$X((-k))_N$
Συζυγής ακολουθία	$x^*(n)$	$X^*((-k))$
Συμμετρικές ιδιότητες για πραγματικές ακολουθίες	$x(n)=x^*(n)$	$\Re[X(k)]=\Re[X((-k))_N]$ $\Im[X(k)]=-\Im[X((N-k))_N]$ $ X(k) = X((-k))_N $ $\arg X(k)=-\arg X((-k))_N$
Κύκλική ολίσθηση στο χρόνο	$x((n-n_0))_N$	$e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}X(-k)$
Κύκλική ολίσθηση στη συχνότητα	$e^{jk_0\frac{2\pi}{N}n}x(n)$	$X((k-k_0))_N$
Κύκλική συνέλιξη	$x_1(n)\otimes x_2(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
Πολλαπλασιασμός	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N}X_1(k)\oslash X_2(k)$
Θεώρημα του Parseval	$\mathcal{E}_x=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2$	$\mathcal{E}_x=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) ^2$

συχνότητα. Έπομένως, ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier θα πρέπει να έχει μήκος $N \geq N_1 + N_2 - 1$.

Οι ακολουθίες $x_1(n)$ και $h_1(n)$ έχουν μήκος μικρότερο του N · πρέπει, λοιπόν, να προστεθούν στοιχεία μηδενικής τιμής σε κάθε μία από αυτές έτσι, ώστε το μήκος τους να γίνει ίσο με N σχηματίζοντας τις ακολουθίες $x(n)$ και $h(n)$. Η πρόσθεση μηδενικών σε κάθε μία από τις ακολουθίες αυτές δεν επηρεάζει το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου, αλλά έχει ως αποτέλεσμα να αυξηθούν τα σημεία δειγματοληψίας πέρα από το ελάχιστο μήκος N_1 και N_2 αντίστοιχα, που είναι ο ελάχιστος αριθμός.

Πολλαπλασιάζοντας τους διακριτούς μετασχηματισμούς Fourier N -σημείων των ακολουθιών $x_1(n)$ και $h_1(n)$ βρίσκεται ο επίσης N σημείων διακριτός μετασχηματισμός Fourier $Y(k)$. Στη συνέχεια με αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier N -σημείων βρίσκεται η ακολουθία εξόδου του συστήματος.

Η κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών $x(n)$ και $h(n)$ είναι ισοδύναμη με τη γραμμική συνέλιξη των ακολουθιών $x_1(n)$ και $h_1(n)$. Με άλλα λόγια ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης, αν οι ακολουθίες έχουν κατάλληλα επιμηκυνθεί με την πρόσθεση μηδενικών στοιχείων στη κάθε μία από αυτές.

Παράδειγμα 5.5.4

Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι $h_1(n) = [3, 2, 1]$. Με τη βοήθεια του διακριτού μετασχηματισμού Fourier να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος, όταν η είσοδος είναι το σήμα $x_1(n) = [1, 2, 3, 4]$.

Λύση Η έξοδος του συστήματος $y(n)$ είναι ακολουθία $N_1 + N_2 - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ -σημείων. Στις ακολουθίες $h_1(n)$ και $x_1(n)$ θα πρέπει να προστεθούν τρία και δύο μηδενικά αντίστοιχα ώστε να γίνουν ακολουθίες 6-σημείων. Οι διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier των ακολουθιών $h(n) = [3, 2, 1, 0, 0, 0]$ και $x(n) = [1, 2, 3, 4, 0, 0]$ είναι

$$H(k) = \sum_{n=0}^5 h(n) \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} n} = h(0) + h(1) \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6}} + h(2) \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} \cdot 2}$$

και

$$X(k) = \sum_{n=0}^5 x(n) \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} n} = x(0) + x(1) \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6}} + x(2) \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} \cdot 2} + x(3) \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} \cdot 3}$$

αντίστοιχα. Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας εξόδου βρίσκεται με πολλαπλασιασμό των $H(k)$ και $X(k)$

$$\begin{aligned} Y(k) &= h(0) \cdot x(0) \\ &+ [h(1)x(0) + h(0)x(1)] \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} \cdot 1} \\ &+ [h(2)x(0) + h(1)x(1) + h(0)x(2)] \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} \cdot 2} \\ &+ [h(2)x(1) + h(1)x(2) + h(0)x(3)] \cdot e^{jk \frac{3\pi}{6} \cdot 3} \\ &+ [h(2)x(2) + h(1)x(3)] \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} \cdot 4} \\ &+ [h(2)x(3)] \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} \cdot 5} \end{aligned}$$

$$Y(k) = 3 + 8 \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} \cdot 1} + 14 \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} \cdot 2} + 20 \cdot e^{jk \frac{3\pi}{6} \cdot 3} + 11 \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} \cdot 4} + 4 \cdot e^{jk \frac{2\pi}{6} \cdot 5} \quad (5.5.21)$$

η ακολουθία εξόδου του συστήματος βρίσκεται με αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier 6-σημείων και είναι

$$y(n) = [3, 8, 14, 20, 11, 4] \quad (5.5.22)$$

Στο Πρόβλημα 2.12 η έξοδος του συστήματος βρέθηκε με τη βοήθεια του αθροίσματος της συνέλιξης. Αν προσδιορίσουμε την έξοδο του συστήματος χρησιμοποιώντας κυκλική συνέλιξη 5-σημείων, τότε προσδιορίζεται η ακολουθία $[7, 8, 14, 20, 11]$, ενώ, αν προσδιορίσουμε την έξοδο του συστήματος χρησιμοποιώντας κυκλική συνέλιξη 4-σημείων τότε προσδιορίζεται η ακολουθία $[14, 12, 14, 20]$, η οποία είναι ίση με την κυκλική συνέλιξη που υπολογίστηκε στα Παράδειγμα 5.5.2 και 5.5.3. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $[14, 12, 14, 20]$ έχει προέλθει από την $y(n) = [3, 8, 14, 20, 11, 4]$ με αναδίπλωση των στοιχείων 11 και 4· πράγματι, $[14, 12, 14, 20] = [3 + 11, 8 + 4, 14, 20]$.

5.5.6 Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier σε μορφή πινάκων

Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση ανάλυσης του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

$$X_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.5.23)$$

για $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, έχουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{rcccccc} X_N(0) & =e^0x(0) & +e^0x(1) & +e^0x(2) & \dots & +e^0x(N-1) \\ X_N(1) & =e^0x(0) & +e^{-j\frac{2\pi}{N}}x(1) & +e^{-j\frac{2\pi}{N}2}x(2) & \dots & +e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)}x(N-1) \\ X_N(2) & =e^0x(0) & +e^{-j2\frac{2\pi}{N}}x(1) & +e^{-j2\frac{2\pi}{N}2}x(2) & \dots & +e^{-j2\frac{2\pi}{N}(N-1)}x(N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_N(N) & =e^0x(0) & +e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}}x(1) & +e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}2}x(2) & \dots & +e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}(N-1)}x(N-1) \end{array}$$

Αν \mathbf{x} είναι το διάνυσμα των N στοιχείων της ακολουθίας $x(n)$, δηλαδή,

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)]^T \quad (5.5.24)$$

όπου ο εκθέτης T δηλώνει τον ανάστροφο πίνακα, \mathbf{X} είναι το διάνυσμα των N συντελεστών $X(k)$ · δηλαδή,

$$\mathbf{X} = [X_N(0), X_N(1), X_N(2), \dots, X_N(N-1)]^T \quad (5.5.25)$$

και \mathbf{W} ο $N \times N$ DFT πίνακας

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (5.5.26)$$

όπου $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ είναι η N οστή ρίζα της μονάδας. Με τη βοήθεια των ορισμών αυτών οι εξισώσεις που δίνουν το διακριτό μετασχηματισμό Fourier εκφράζονται σε μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{X} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} \quad (5.5.27)$$

Εάν ο αντίστροφος του \mathbf{W} υπάρχει και είναι ο \mathbf{W}^{-1} , έχουμε από την (5.5.27)

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{X} \quad (5.5.28)$$

Οι σχέσεις (5.5.5) εκφράζεται σε μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \cdot \mathbf{X} \quad (5.5.29)$$

όπου \mathbf{W}^* είναι ο συζυγής μιγαδικός του πίνακα \mathbf{W} . Σύγκριση των δύο τελευταίων εξισώσεων οδηγεί στο συμπέρασμα

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \quad (5.5.30)$$

από την οποία έχουμε

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^* = N \cdot \mathbf{I} \quad (5.5.31)$$

όπου \mathbf{I} είναι ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $N \times N$. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας \mathbf{W} είναι συμμετρικός και ορθογώνιος πίνακας.

5.5.7 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μιας ακολουθίας N -σημείων $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, ορίζεται ως η ακολουθία N όρων

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad \text{και} \quad W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}} \quad (5.5.32)$$

Για να υπολογισθεί κάθε όρος της ακολουθίας του διακριτού μετασχηματισμού Fourier, απαιτούνται N πολλαπλασιασμοί και $N - 1$ προσθέσεις. Για να υπολογιστεί, επομένως, ολόκληρη η ακολουθία $X(k)$, χρειάζονται N^2 πολλαπλασιασμοί και $N(N - 1)$ προσθέσεις. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός του διακριτού μετασχηματισμού Fourier μιας ακολουθίας με μήκος $N = 512$ απαιτεί $N^2 = 262144$ πολλαπλασιασμούς και $N(N - 1) = 261632$ προσθέσεις. Ο αριθμός των πράξεων αυξάνεται λόγω του γεγονότος ότι υπάρχουν και πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών.

Ο πίνακας \mathbf{W} , ο οποίος χρησιμοποιείται κατά τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier, είναι συμμετρικός. Αξιοποιώντας τη συμμετρία και την περιοδικότητα των τιμών του πίνακα καταλήγουμε σε μεθόδους υπολογισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier με αρκετά λιγότερες πράξεις.

Έχουν αναπτυχθεί ένα πλήθος από διαφορετικούς αλγόριθμους που επιτυγχάνουν το σκοπό αυτό. Οι διαφορές τους βρίσκονται στο πλήθος και το είδος των πράξεων καθώς και στο μέγεθος της απαιτούμενης μνήμης. Θα αναφέρουμε τον αλγόριθμο των Cooley-Tukey, ο οποίος προτάθηκε το 1965. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να εφαρμοστεί σε ακολουθίες $N = 2^n$ -σημείων. Με το παράδειγμα που ακολουθεί θα παρουσιαστεί η δυνατότητα περιορισμού των απαιτούμενων πράξεων λόγω των ιδιοτήτων της συμμετρίας και της περιοδικότητας που παρουσιάζει ο πίνακας \mathbf{W} .

Παράδειγμα 5.5.5

Να βρεθεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier 4-σημείων της ακολουθίας

$$[x(0), x(1), x(2), x(3)]$$

Λύση Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση ανάλυσης του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

$$X_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_4^{nk}, \quad 0 \leq k \leq 3, \quad W_4 = e^{j\frac{2\pi}{4}} = -j \quad (5.5.33)$$

για $k = 0, 1, 2, 3$ και εκφράσουμε τις εξισώσεις σε μορφή πινάκων, έχουμε

$$\begin{bmatrix} X_4(0) \\ X_4(1) \\ X_4(2) \\ X_4(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \quad (5.5.34)$$

Επειδή $W_4^0 = W_4^4 = 1$, $W_4^1 = W_4^3 = -j$, $W_4^2 = W_4^6 = -1$ και $W_4^5 = j$, έχουμε

$$\begin{bmatrix} X_4(0) \\ X_4(1) \\ X_4(2) \\ X_4(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \quad (5.5.35)$$

Εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία έχουμε

$$\begin{aligned} X_4(0) &= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) &&= \underbrace{[x(0) + x(2)]}_{g_1} + \underbrace{[x(1) + x(3)]}_{g_2} \\ X_4(1) &= x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3) &&= \underbrace{[x(0) - x(2)]}_{g_1} - j \underbrace{[x(1) - x(3)]}_{g_2} \\ X_4(2) &= x(0) - x(1) + x(2) - x(3) &&= \underbrace{[x(0) + x(2)]}_{h_1} - \underbrace{[x(1) + x(3)]}_{h_2} \\ X_4(3) &= x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) &&= \underbrace{[x(0) - x(2)]}_{h_1} + j \underbrace{[x(1) - x(3)]}_{h_2} \end{aligned}$$

Οι σχέσεις αυτές οδηγούν σε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο που έχει δύο βήματα

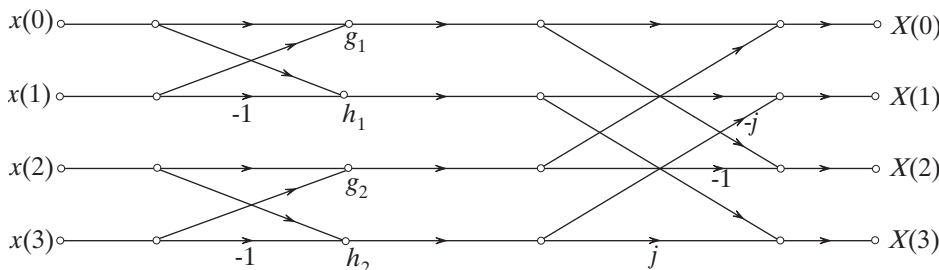
Βήμα I	Βήμα II
$g_1 = x(0) + x(2)$	$X_N(0) = g_1 + g_2$
$g_2 = x(1) + x(3)$	$X_N(1) = h_1 - jh_2$
$h_1 = x(0) - x(2)$	$X_N(2) = g_1 - g_2$
$h_2 = x(1) - x(3)$	$X_N(3) = h_1 + jh_2$

(5.5.36)

Ο αλγόριθμος αυτός χρειάζεται μόνο δύο μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Στο Σχήμα 5.28 δίνεται το διάγραμμα ροής του αλγόριθμου.

Ο αλγόριθμος (5.5.36) μπορεί να υλοποιηθεί με διαφορετικό τρόπο. Αρχικά η ακολουθία 4-σημείων $x(n)$ διαιρείται σε δύο ακολουθίες 2-σημείων, οι οποίες διευθετούνται σε δύο διανύσματα στήλης ως

$$\left[\begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(1) \\ x(3) \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} x(0) & x(2) \\ x(1) & x(3) \end{bmatrix}$$



Σχήμα 5.28 Διάγραμμα ροής στο Παράδειγμα 5.5.5.

Στη συνέχεια βρίσκεται ο μικρότερος 2-σημείων διακριτός μετασχηματισμός Fourier

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2 \cdot \begin{bmatrix} x(0) & x(1) \\ x(2) & x(3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) & x(1) \\ x(2) & x(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x(0) + x(2) & x(1) + x(3) \\ x(0) - x(2) & x(1) - x(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Κατόπιν, κάθε στοιχείο του πίνακα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με $\{W_4^{pq}\}$, όπου p είναι ο δείκτης γραμμής και q είναι ο δείκτης στήλης. Δηλαδή, εκτελείται το εσωτερικό γινόμενο

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -j \end{bmatrix} \cdot \star \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & -jh_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & -jh_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{W}_2 &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & -jh_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & g_1 - g_2 \\ h_1 - jh_2 & h_1 + jh_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_4(0) & X_4(2) \\ X_4(1) & X_4(3) \end{bmatrix} \tag{5.5.37} \end{aligned}$$

Αν και ο διαφορετικός αυτός τρόπος υλοποίησης απαιτεί περισσότερους πολλαπλασιασμούς από τον αποτελεσματικό αλγόριθμο (5.5.36), υποδεικνύει μία συστηματική προσέγγιση προσδιορισμού ενός διακριτού μετασχηματισμού Fourier μεγάλης τάξης με τη βοήθεια διακριτών μετασχηματισμών Fourier μικρότερης τάξης.

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε τα συμπεράσματα του παραδείγματος: δηλαδή, θα δείξουμε ότι, για άρτιο N , ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μήκους N υπολογίζεται με κατάλληλο συνδυασμό δύο ακολουθιών διακριτών μετασχηματισμών Fourier μήκους $N/2$. Αν και ο $N/2$ είναι άρτιος, τότε το ίδιο μπορεί να γίνει για κάθε μία από τις δύο ακολουθίες: δηλαδή, να υπολογισθούν με κατάλληλο συνδυασμό δύο διακριτών μετασχηματισμών Fourier μήκους $N/4$. Αν ο N είναι δύναμη του 2 ($N = 2^p$), η

διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε σε διακριτό μετασχηματισμό Fourier 2-σημείων, πού είναι εύκολο να υπολογιστεί.

Αρχικά, η ακολουθία των N όρων $x(n)$ χωρίζεται σε δύο ακολουθίες μήκους $N/2$ η κάθε μία, τις $g_1(n) = x(2n)$ και $g_2(n) = x(2n + 1)$, για $n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$, οι οποίες αποτελούνται από τους όρους με άρτιους και περιττούς δείκτες αντίστοιχα. Η (5.5.32) γράφεται

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_N^{2nk} \end{aligned} \quad (5.5.38)$$

Επειδή $W_N^{2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nk} = W_{N/2}^{nk}$ η (5.5.38) γράφεται

$$X(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_{N/2}^{nk}}_{G_1(k)} + W_N^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_{N/2}^{nk}}_{G_2(k)}$$

ή

$$X(k) = G_1(k) + W_N^k \cdot G_2(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.5.39)$$

Επιπλέον, επειδή

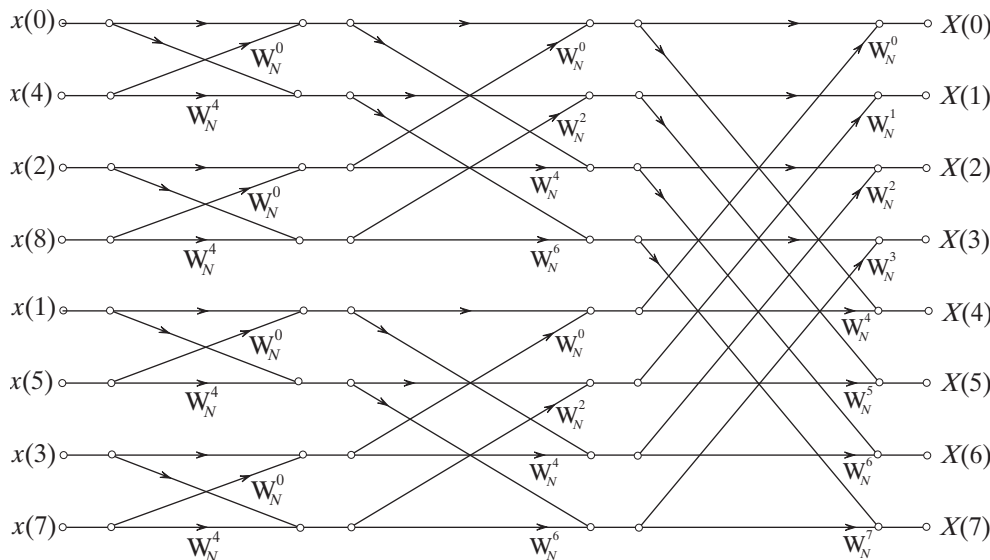
$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{N}{2})} = e^{-j\pi} e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = -W_N^k, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

η (5.5.39) αν $k = k + \frac{N}{2}$ δίνει

$$X(k) = X\left(k + \frac{N}{2}\right) = G_1(k) + W_N^k \cdot G_2(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (5.5.40)$$

Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός του $X(k)$ έχει εκφραστεί με τη βοήθεια δύο διακριτών μετασχηματισμών Fourier με πλήθος σημείων $N/2$ ο καθένας.

Η διαδικασία ανάλυσης που ακολουθήθηκε προηγουμένως μπορεί να συνεχιστεί και για τον υπολογισμό των δύο νέων διακριτών μετασχηματισμών Fourier $G_1(k)$ και $G_2(k)$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε σε διακριτό μετασχηματισμό Fourier 2-σημείων που είναι εύκολο να υπολογιστεί.



Σχήμα 5.29 Διάγραμμα ροής διακριτού μετασχηματισμού Fourier οκτώ σημείων.

Στο Σχήμα 5.29 φαίνεται το διάγραμμα ροής του διακριτού μετασχηματισμού Fourier οκτώ σημείων.

Η διάταξη των δειγμάτων του διακριτού μετασχηματισμού Fourier στην έξοδο είναι κανονική, δηλαδή, $X(0), X(1), \dots, X(7)$. Αντίθετα, η διάταξη των δειγμάτων εισόδου είναι μη κανονική: $x(0), x(4), x(2), x(6), x(1), x(5), x(3), x(7)$. Η διάταξη αυτή προκύπτει από την κανονική διάταξη των δειγμάτων με αντιστροφή της σειράς των δυαδικών ψηφίων στη δυαδική αναπαράσταση των δεικτών bit reversal.

$$\begin{aligned}
 &x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7), \rightarrow \\
 &x(000), x(001), x(010), x(011), x(100), x(101), x(110), x(111), \rightarrow \\
 &x(000), x(100), x(010), x(110), x(001), x(101), x(011), x(111), \rightarrow \\
 &x(0), x(4), x(2), x(6), x(1), x(5), x(3), x(7).
 \end{aligned}$$

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι σε κάθε στάδιο οι έξοδοι μπορούν να αποθηκεύονται στις ίδιες θέσεις μνήμης, στις οποίες ήταν αποθηκευμένες οι αντίστοιχες εισοδοί του σταδίου.

Σημειώνεται ότι ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier δεν αποτελεί νέο μετασχηματισμό Fourier, αλλά αποτελεί μία αποδοτική αλγοριθμική μέθοδο, με την έννοια ότι ελαττώνει την υπολογιστική πολυπλοκότητα, δηλαδή, το συνολικό πλήθος πράξεων (πολλαπλασιασμών και προσθέσεων). Πράγματι, η υπολογιστική πολυπλοκότητα του ταχύος μετασχηματισμού Fourier είναι της τάξεως $N \log_2 N$, και όχι N^2 του διακριτού μετασχηματισμού Fourier.

5.6 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Όπως και στην περίπτωση των συστημάτων συνεχούς χρόνου, με τη βοήθεια της ιδιότητας της συνέλιξης μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο, $y(n)$ ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(n)$, όταν γνωρίζουμε την είσοδο του $x(n)$.

Παράδειγμα 5.6.1

Δίνεται το γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα το οποίο έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = \delta(n - n_0) \quad (5.6.1)$$

Να υπολογιστεί η σχέση μεταξύ της ακολουθίας εισόδου-εξόδου του συστήματος.

Λύση Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n_0) e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0} \quad (5.6.2)$$

Αν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα $x(n)$, το οποίο έχει MF διακριτού χρόνου $X(\Omega)$, ο MF διακριτού χρόνου της εξόδου θα είναι

$$Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \quad (5.6.3)$$

Με τη βοήθεια της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης παρατηρούμε ότι η έξοδος του συστήματος είναι ίση με την είσοδο του συστήματος μετατοπισμένη χρονικά κατά n_0 , δηλαδή,

$$y(n) = x(n - n_0) \quad (5.6.4)$$

Παράδειγμα 5.6.2

Δίνεται το γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(n) = \alpha^n u(n) \quad (5.6.5)$$

Αν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα:

$$x(n) = \beta^n u(n) \quad (5.6.6)$$

να προσδιοριστεί η έξοδος του συστήματος.

Λύση Οι MF διακριτού χρόνου της κρουστικής απόκρισης και του σήματος εισόδου του συστήματος είναι

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \text{ και } X(\Omega) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\Omega}} \quad (5.6.7)$$

Με τη βοήθεια της ιδιότητας της συνέλιξης προσδιορίζεται ο MF διακριτού χρόνου της εξόδου του συστήματος

$$Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\Omega})(1 - \beta e^{-j\Omega})} \quad (5.6.8)$$

Αν $\alpha \neq \beta$, η ανάλυση της $Y(\Omega)$ σε απλά κλάσματα δίνει

$$Y(\Omega) = \frac{C_1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} + \frac{C_2}{1 - \beta e^{-j\Omega}} \quad (5.6.9)$$

Οι τιμές των σταθερών C_1 και C_2 είναι

$$C_1 = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \text{ και } C_2 = -\frac{\beta}{\alpha - \beta} \quad (5.6.10)$$

Με αντίστροφο MF διακριτού χρόνου προσδιορίζεται η έξοδος του συστήματος

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \alpha^n u(n) - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \beta^n u(n) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}] u(n) \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

Αν $\alpha = \beta$, ο MF διακριτού χρόνου της εξόδου είναι

$$Y(\Omega) = \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \right)^2 \quad (5.6.12)$$

Με τη βοήθεια του ζεύγους 14 MF διακριτού χρόνου στον Πίνακα 5.2 προσδιορίζεται το σήμα εξόδου του συστήματος

$$y(n) = (n + 1) \alpha^n u(n + 1) \quad (5.6.13)$$

Η έξοδος του συστήματος μπορεί να γραφεί και ως

$$y(n) = (n + 1) \alpha^n u(n) \quad (5.6.14)$$

καθώς οι δύο εκφράσεις δίνουν την ίδια ακολουθία ..., $y(-1) = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2\alpha$, $y(2) = 3\alpha^2$,

5.6.1 Η απόκριση συχνότητας για συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές

Μία μεγάλη κατηγορία από γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα (ΓΧΑ) συστήματα διακριτού χρόνου είναι αυτά στα οποία η είσοδος και η έξοδος ικανοποιούν μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n - k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n - k) \quad (5.6.15)$$

Εφαρμόζουμε MF διακριτού χρόνου και στα δύο μέλη της εξίσωσης

$$\mathcal{F} \left[\sum_{k=0}^N a_k y(n - k) \right] = \mathcal{F} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n - k) \right] \quad (5.6.16)$$

Λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας που έχει ο MF διακριτού χρόνου έχουμε

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F}[y(n-k)] = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F}[x(n-k)] \quad (5.6.17)$$

και, λόγω της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης που έχει ο MF διακριτού χρόνου, έχουμε την εξίσωση

$$Y(\Omega) \sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega} = X(\Omega) \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega} \quad (5.6.18)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης έχουμε

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}} \quad (5.6.19)$$

Παρατηρούμε ότι η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος είναι ρητή συνάρτηση· δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο πολυωνύμων της μεταβλητής $e^{-j\Omega}$.

Παράδειγμα 5.6.3 (Σύστημα πρώτης τάξης).

Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου, το οποίο αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία, και χαρακτηρίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) \text{ με } |a| < 1 \quad (5.6.20)$$

Να βρεθούν η απόκριση συχνότητας, η κρουστική απόκριση του συστήματος και η απόκριση του συστήματος στο μοναδιαίο βήμα.

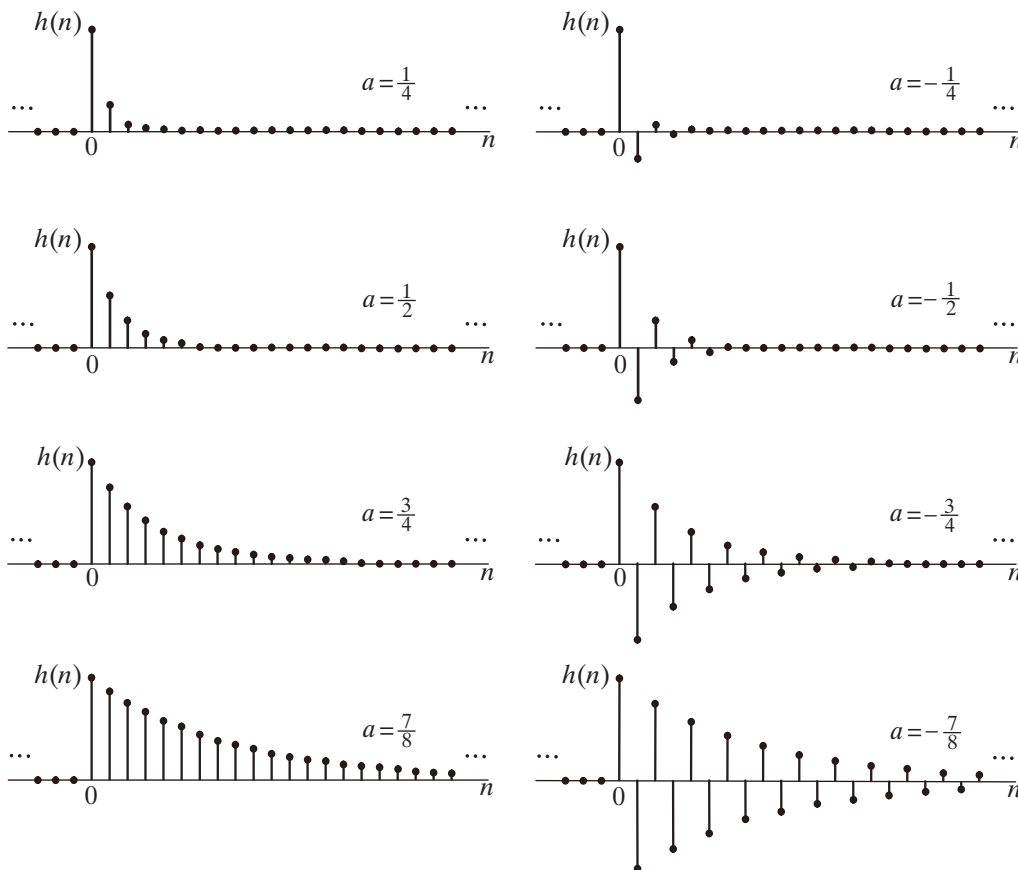
Λύση Εφαρμόζοντας MF διακριτού χρόνου και στα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε, λόγω των ιδιοτήτων της γραμμικότητας και της χρονικής μετατόπισης,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y(n) - ay(n-1)] &= \mathcal{F}[x(n)] \\ \mathcal{F}[y(n)] - a\mathcal{F}[y(n-1)] &= \mathcal{F}[x(n)] \\ Y(\Omega) - ae^{-j\Omega}Y(\Omega) &= X(\Omega) \\ H(\Omega) &= \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \end{aligned} \quad (5.6.21)$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(n) = a^n u(n) \quad (5.6.22)$$

Στο Σχήμα 5.30 έχει σχεδιαστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος πρώτης τάξης για διάφορες τιμές της σταθεράς a . Παρατηρούμε ότι $h(n)$ συγκλίνει στην τελική της τιμή με ρυθμό ο οποίος εξαρτάται από το ρυθμό με τον οποίο η $|a|^n$ συγκλίνει στο μηδέν. Η

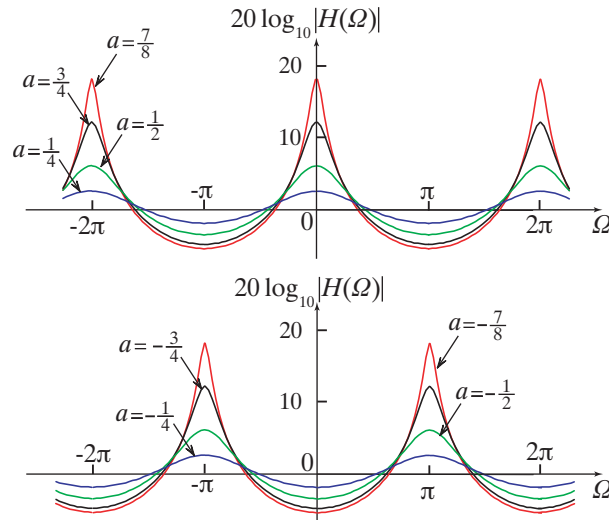


Σχήμα 5.30 Η κρουστική απόκριση του συστήματος πρώτης τάξης, για διάφορες τιμές της σταθεράς a .

σταθερά a έχει παρόμοιο ρόλο με τη σταθερά χρόνου τ του συστήματος πρώτης τάξης συνεχούς χρόνου.

Στο Σχήμα 5.31 έχει σχεδιαστεί η απόκριση πλάτους του συστήματος πρώτης τάξης για διάφορες τιμές της σταθεράς a . Όταν η σταθερά $a > 0$, το σύστημα προκαλεί εξασθένηση στις υψηλές συχνότητες· δηλαδή, το $|H(\Omega)|$ έχει μικρές τιμές, όταν το Ω λαμβάνει τιμές στην περιοχή του $\pm\pi$ σε σύγκριση με τις τιμές που έχει, όταν το Ω λαμβάνει τιμές στην περιοχή του 0. Το αντίθετο συμβαίνει, όταν $a < 0$.

Παρατηρούμε επίσης ότι για μικρές τιμές της σταθεράς $|a|$ η μέγιστη τιμή του μέτρου $|H(\Omega)|$ που είναι $1/(1 + a)$ και η ελάχιστη τιμή του $1/(1 - a)$ έχουν μικρή διαφορά για $a < 0$, με αποτέλεσμα το μέτρο $|H(\Omega)|$ να είναι σχετικά σταθερό, σε αντίθεση με την περίπτωση στην οποία το $|a|$ έχει μεγάλες τιμές.



Σχήμα 5.31 Η απόκριση πλάτους του συστήματος πρώτης τάξης, για διάφορες τιμές της σταθεράς a .

Η απόκριση του συστήματος πρώτης τάξης στο μοναδιαίο βήμα είναι

$$y(n) = h(n) \star u(n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u(n) \quad (5.6.23)$$

Παράδειγμα 5.6.4

Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου, το οποίο αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία, και χαρακτηρίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = 2x(n) \quad (5.6.24)$$

Να βρεθούν η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Αν η είσοδος του συστήματος είναι

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \quad (5.6.25)$$

να βρεθεί το σήμα εξόδου του συστήματος.

Λύση Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(\Omega) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} \quad (5.6.26)$$

Αναλύουμε τον παρανομαστή σε γινόμενο πολυωνύμων πρώτου ή δευτέρου βαθμού ως προς $e^{-j\Omega}$ έτσι έχουμε

$$H(\Omega) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)} \quad (5.6.27)$$

η ανάλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$H(\Omega) = \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)} - \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)} \quad (5.6.28)$$

Με τη βοήθεια αντιστρόφου MF διακριτού χρόνου προσδιορίζεται η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$h(n) = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2 \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \quad (5.6.29)$$

Όταν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$, αν χρησιμοποιηθεί το ζευγάρι MF διακριτού χρόνου

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της εξόδου του συστήματος θα είναι

$$Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)}$$

Η ανάλυση σε απλά κλάσματα του $Y(\Omega)$ έχει τη μορφή

$$Y(\Omega) = -\frac{4}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} - \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^2} + \frac{8}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \quad (5.6.30)$$

Με τη βοήθεια αντιστρόφου MF διακριτού χρόνου αν χρησιμοποιηθούν τα ζευγάρια MF διακριτού χρόνου 8 και 14, προσδιορίζεται η έξοδος του συστήματος

$$y(n) = -4 \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) - 2(n+1) \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad (5.6.31)$$

Παράδειγμα 5.6.5

Δίνεται σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η σχέση μεταξύ των σημάτων εισόδου εξόδου περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1)) \quad (5.6.32)$$

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας του συστήματος και να γίνει η γραφική παράσταση της απόκρισης πλάτους.

Λύση Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(n) = S\{\delta(n)\} = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) \quad (5.6.33)$$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι ο MF διακριτού χρόνου της κρουστικής απόκρισης· έτσι η (5.6.33) δίνει

$$H(\Omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} \quad (5.6.34)$$

αν χρησιμοποιηθεί το ζευγάρι 11 MF διακριτού χρόνου και η ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης. Η κρουστική απόκριση του συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$H(\Omega) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2} = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (5.6.35)$$

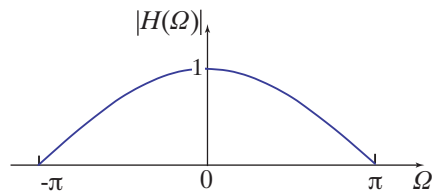
από την οποία παρατηρούμε ότι η απόκριση πλάτους είναι

$$|H(\Omega)| = \left| \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right| \quad (5.6.36)$$

και η απόκριση φάσης είναι

$$\arg\{H(\Omega)\} = -\frac{\Omega}{2} \quad (5.6.37)$$

Στο Σχήμα 5.32 έχει γίνει η γραφική παράσταση της απόκρισης πλάτους σε συνάρτηση με τη Ω . Παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο.



Σχήμα 5.32 Η γραφική παράσταση της απόκρισης πλάτους σε συνάρτηση με τη Ω του συστήματος στο Παράδειγμα 5.6.5.

Παράδειγμα 5.6.6

Η σχέση μεταξύ των σημάτων εισόδου $x(t)$ και εξόδου $y(t)$ σε ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι στο οποίο παρουσιάζεται το φαινόμενο των πολλαπλών διαδρομών περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(t - t_k) \quad (5.6.38)$$

όπου a_k είναι ο παράγοντας εξασθένησης ο σχετικός με την k -στη διαδρομή διάδοσης, και t_k είναι η αντίστοιχη χρονική καθυστέρηση διάδοσης.

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση και η απόκριση πλάτους τηλεπικοινωνιακού καναλιού στο οποίο παρουσιάζονται δύο διαδόσεις, δηλαδή, περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών,

$$y(n) = x(n) + ax(n-1) \quad (5.6.39)$$

Λύση Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(n) = S\{\delta(n)\} = \delta(n) + a\delta(n-1) \quad (5.6.40)$$

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι ο MF διακριτού χρόνου της κρουστικής απόκρισης· έτσι η (5.6.40) δίνει

$$H(\Omega) = 1 + ae^{-j\Omega} \quad (5.6.41)$$

όπου $a = |a|e^{j \arg\{a\}}$. Η απόκριση συχνότητας του συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$H(\Omega) = 1 + |a|e^{-j(\Omega - \arg\{a\})} \quad (5.6.42)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Euler έχουμε

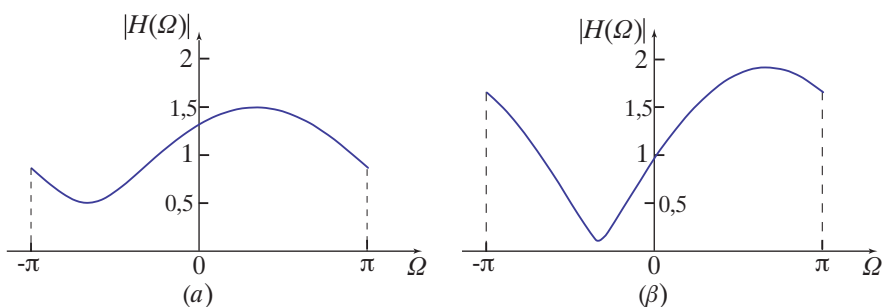
$$H(\Omega) = 1 + |a| \cos(\Omega - \arg\{a\}) - j|a| \sin(\Omega - \arg\{a\}) \quad (5.6.43)$$

Η απόκριση πλάτους είναι

$$\begin{aligned} |H(\Omega)| &= \left((1 + |a| \cos(\Omega - \arg\{a\}))^2 + |a|^2 \sin^2(\Omega - \arg\{a\}) \right)^{1/2} \\ &= (1 + |a|^2 + 2|a| \cos(\Omega - \arg\{a\}))^{1/2} \end{aligned} \quad (5.6.44)$$

λόγω της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Στο Σχήμα 5.33 έχουν γίνει οι γραφικές παραστάσεις της απόκρισης πλάτους για τις περιπτώσεις όπου α) $a = 0,5e^{j\pi/3}$, δηλαδή, όταν στο δέκτη φτάνει εκτός από το σήμα απευθείας διάδοσης και ένα σήμα με εξασθένηση ίση με 0,5 και χρονική καθυστέρηση ίση με $\Delta t = T/6$ και β) $a = 0,9e^{j2\pi/3}$.



Σχήμα 5.33 Η γραφική παράσταση της απόκρισης πλάτους σε συνάρτηση με τη Ω του συστήματος στο Παράδειγμα 5.6.5. α) όταν $a = 0,5e^{j\pi/3}$ και β) $a = 0,9e^{j2\pi/3}$.

Σε πολλές εφαρμογές πραγματικού χρόνου η ακολουθία εισόδου ενός FIR φίλτρου έχει μεγάλο μήκος· παραδείγματος χάριν, η ακολουθία που προέρχεται από σήμα ομιλίας ενός μικροφώνου, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μία ακολουθία απείρου μήκους. Υπολογίζουμε την έξοδο του φίλτρου με τη βοήθεια γραμμικής συνέλιξης χρησιμοποιώντας

ταχύ μετασχηματισμό Fourier, ο οποίος θα έχει, φυσικά, μεγάλο μήκος. Επιπλέον δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός της εξόδου, πριν επεξεργαστούμε όλα τα δείγματα της εισόδου, και αυτό δημιουργεί μεγάλη καθυστέρηση.

Στις περιπτώσεις αυτές με τη βοήθεια ταχύ μετασχηματισμού Fourier που τώρα έχει μικρό μήκος υπολογίζονται οι επιμέρους εξόδοι του συστήματος, όταν είναι γνωστό ένα τμήμα (μπλοκ) της ακολουθίας εισόδου. Στη συνέχεια υπολογίζεται η έξοδος του φίλτρου με τη βοήθεια των επιμέρους εξόδων του φίλτρου. Τα παραπάνω εξηγούνται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 5.6.7

Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου που έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = [\underset{\uparrow}{1}, 0, -1]$$

Αν η είσοδος του συστήματος είναι η ακολουθία $x(n) = n + 1$, $0 \leq n \leq 9$, να βρεθεί η έξοδος του συστήματος με τη βοήθεια κυκλικής συνέλιξης 6-σημείων.

Λύση Η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι ακολουθία $N_2 = 3$ -σημείων. Αν η ακολουθία εισόδου καταμηθεί σε ακολουθίες $N_1 = 6$ -σημείων, τότε είναι γνωστό ότι η γραμμική συνέλιξη κάθε υποακολουθίας με την κρουστική απόκριση θα είναι ακολουθία $N_1 + N_2 - 1 = 8$ -σημείων. Αν χρησιμοποιηθεί κυκλική συνέλιξη $N = 6$ -σημείων, τότε τα πρώτα $N_1 + N_2 + 1 - N = 2$ στοιχεία κάθε ακολουθίας θα είναι εσφαλμένα λόγω του φαινομένου της επικάλυψης.

Η ακολουθία εισόδου $x(n) = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$ είναι ακολουθία 10-σημείων. Στην ακολουθία αυτή προστίθενται στην αρχή δύο μηδενικά, και σχηματίζονται οι υποακολουθίες

$$\begin{aligned} x_1(n) &= [0, 0, 1, 2, 3, 4] \\ x_2(n) &= [3, 4, 5, 6, 7, 8] \\ x_3(n) &= [7, 8, 9, 10, 0, 0] \end{aligned}$$

Κάθε υποακολουθία επικαλύπτεται από την προηγούμενή της στους δύο πρώτους όρους. Στην τελευταία υποακολουθία έχουν προστεθεί μηδενικά, ώστε να γίνει ακολουθία 6-σημείων.

Η κυκλική συνέλιξη 6-σημείων κάθε υποακολουθίας $x_k(n)$, $k = 1, 2, 3$ με την κρουστική απόκριση του συστήματος δίνει τις ακολουθίες

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x_1(n) \oplus h(n) = [-3, -4, 1, 2, 2, 2] \\ y_2(n) &= x_2(n) \oplus h(n) = [-4, -4, 2, 2, 2, 2] \\ y_3(n) &= x_3(n) \oplus h(n) = [7, 8, 2, 2, -9, -10] \end{aligned}$$

Από τις ακολουθίες $y_k(n)$, $k = 1, 2, 3$ διαγράφουμε τους δύο πρώτους όρους, οι οποίοι λόγω της επικάλυψης είναι εσφαλμένοι, και σχηματίζεται η ακολουθία

$$y(n) = [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, -9, -10] \quad (5.6.45)$$

Η ακολουθία αυτή είναι ίση με την γραμμική συνέλιξη

$$x(n) \star h(n) = [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, -9, -10] \quad (5.6.46)$$

Σύνοψη Κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράψαμε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier διακριτού χρόνου περιοδικών ακολουθιών, με τη βοήθεια του οποίου αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου σε σειρά από αρμονικά μιγαδικά εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου, δηλαδή, σε σήματα απλής συχνότητας. Περιγράψαμε τη μέθοδο προσδιορισμού των συντελεστών του ανάπτυγματος και δώσαμε τη φυσική τους σημασία. Διευρύνσαμε τα παραπάνω αποτελέσματα και έτσι περιγράψαμε το MF διακριτού χρόνου ενός σήματος διακριτού χρόνου. Παρατηρήσαμε, ότι, όπως το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier των περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου, έτσι και ο MF διακριτού χρόνου των μη περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου αναπαριστά μη περιοδικά σήματα με εκθετικά σήματα και με τον τρόπο αυτό αποκαλύπτει το φασματικό τους περιεχόμενο.

Περιγράψαμε τις βασικές ιδιότητες στις οποίες διαφέρουν ο MF διακριτού χρόνου από τον MF συνεχούς. Παρουσιάσαμε λειτουργίες, όπως η διαμόρφωση και το θεώρημα της συνέλιξης, με τη βοήθεια του οποίου η υπολογιστικά πολύπλοκη σχέση της συνέλιξης μετασχηματιζόμενη κατά Fourier καταλήγει σ' ένα απλό γινόμενο συναρτήσεων. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Parseval είδαμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια ενός σήματος είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο των συχνοτήτων.

Για να επεξεργαστούμε το MF διακριτού χρόνου με ψηφιακά μέσα προβήκαμε σε κατάλληλη δειγματοληψία του MF και σχηματίσαμε το διακριτό MF. Παρουσιάστηκαν οι ιδιότητες του διακριτού MF. Στη συνέχεια περιγράφηκε ο ταχύς MF, με τον οποίο επιτεύχθηκε σημαντική υπολογιστική ελάττωση.

Στο κεφάλαιο παρουσιάζονται τρεις πίνακες. Στον πρώτο υπάρχουν οι ιδιότητες του MF διακριτού χρόνου, ενώ στον δεύτερο οι MF διακριτού χρόνου μερικών βασικών ακολουθιών και στον τρίτο πίνακα οι ιδιότητες του διακριτού MF. Θα πρέπει, τελειώνοντας το διάβασμα του κεφαλαίου, να γνωρίζετε καλά τις ιδιότητες και να μπορείτε, βασισμένοι στα παραδείγματα του κεφαλαίου και στις ιδιότητες, να βρίσκετε τους MF των βασικών ακολουθιών που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

5.1 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου για τα σήματα

1. $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
2. $x(n) = 3^n u(-n)$
3. $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

4. $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(\Omega_0 n) u(n)$
5. $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n [u(n+2) - u(n-3)]$
6. $x(n) = n \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$
7. $x(n) = n \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cos(\Omega_0 n)$
8. $x(n) = \cos\left(\frac{12}{5}\pi n\right) + \sin(3n)$

5.2 Να υπολογιστούν οι ακολουθίες των οποίων ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι

1. $X(\Omega) = \begin{cases} 1, & W < |\Omega| \leq \pi \\ 0, & 0 \leq |\Omega| \leq W \end{cases}$
2. $X(\Omega) = 1 - 4e^{-j3\Omega} + 2e^{-j2\Omega} + 5e^{-j6\Omega}$
3. $X(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta\left(\Omega - \frac{\pi m}{2}\right)$
4. $X(\Omega) = \sin^2 \Omega$
5. $X(\Omega) = \begin{cases} -\Omega & -\pi \leq |\Omega| < 0 \\ \pi - \Omega, & 0 \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$
6. $X(\Omega) = \frac{6e^{-j\Omega}}{6 + e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega}}$

5.3 Δίνεται ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = \frac{\sin(\pi n/6)}{\pi n}$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος, όταν η είσοδος του είναι το σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) - 2\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

5.4 Δίνεται ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο χαρακτηρίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$$

1. Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.
2. Αν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος.

5.5 Δίνονται δύο ΓΧΑ συστήματα διακριτού χρόνου τα οποία έχουν απόκριση συχνότητας

$$H_1(\Omega) = \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \text{ και } H_2(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}$$

αντίστοιχα. Τα δύο συστήματα συνδέονται σε σειρά. Να υπολογιστεί η εξίσωση διαφορών η οποία χαρακτηρίζει το συνολικό σύστημα.

5.6 Δίνεται ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο χαρακτηρίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - \frac{1}{9}y(n-1) = x(n)$$

1. Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.

2. Αν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα

$$x(n) = (n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος.

5.7 Δίνεται ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Να υπολογιστεί η εξίσωση διαφορών η οποία συνδέει την είσοδο και την έξοδο του συστήματος.

5.8 Δίνεται ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση

$$h(n) = [\underset{\uparrow}{1}, 2, 1]$$

1. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης της απόκρισης συχνότητας του συστήματος σε συνάρτηση με τη κυκλική συχνότητα.

2. Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση, αν το σήμα εισόδου είναι

$$x(n) = 1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{6}\right)$$

5.9 Δίνεται ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση

$$h(n) = [\underset{\uparrow}{1}, 0, -1]$$

Η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = 2(n-1), \quad 0 \leq n \leq 3$$

Χρησιμοποιώντας κυκλική συνέλιξη να προσδιορίσετε την έξοδο του συστήματος.

5.10 Δίνεται το σήμα $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

1. Να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου $X(\Omega)$ είναι

$$X(\Omega) = \frac{\sin(2\Omega)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j\frac{3\Omega}{2}}$$

2. Αν γίνει ομοιόμορφη δειγματοληψία του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου σε συχνότητες που απέχουν μεταξύ τους κατά $\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}$, να σχεδιάσετε το ανακατασκευασμένο σήμα από τα δείγματα του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου $X(k\frac{2\pi}{N})$ για $N = 4$ και $N = 8$.

5.11 Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η απόκριση πλάτους του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \frac{1}{3} [x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$$

5.12 Δίνεται το αναλογικό σήμα

$$x(t) = \cos(200\pi t) + 0,6 \cos(624\pi t)$$

Γίνεται δειγματοληψία του σήματος με συχνότητα 512 Hz. Με τη γνωστή σχέση

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

ανακατασκευάζεται το αναλογικό σήμα $x_a(t)$. Να συγκρίνετε τα αρχικό αναλογικό σήμα $x(t)$ και το ανακατασκευασμένο σήμα $x_a(t)$. Ποιες είναι οι παρατηρήσεις σας και πως αυτές δικαιολογούνται;

Βιβλιογραφία

- 5.1 Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, Λ. Κοφίδης, “Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων”, *Τυπωθήτω - Γιώργος Δαρδανός*, Αθήνα 2003.
- 5.2 Ν. Καλουπτσίδης, “Σήματα Συστήματα και Αλγόριθμοι”, *Διάλογος*, Αθήνα, 1994.
- 5.3 S. Haykin, B. Veen, “Signal and Systems”, *John & Wiley Sons, Inc.* 2003
- 5.4 J. G. Proakis, D. G. Manolakis, “Introduction to Digital Signal Processing”, *MacMillan Publishing Company*, 1994.
- 5.5 A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, “Digital Signal Processing”, *Prentice - Hall Inc.*, N. Y., 1975.
- 5.6 A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, J. R. Buck “Discrete-Time Signal Processing”, *2nd ed. Prentice - Hall Inc.*, N. Y., 1999.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Σκοπός του κεφαλαίου είναι να ορίσει τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace ή, απλώς, μετασχηματισμό Laplace (ML) και το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace (MML), να περιγράψει τις βασικές τους ιδιότητες και να υπολογίσει τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς στοιχειωδών σημάτων, που αντιμετωπίζουμε στη μελέτη γραμμικών συστημάτων. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τη δυνατότητα που έχει ο MML να επιλύει διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες έχουν μη μηδενικές αρχικές συνθήκες και στη συνέχεια θα εκμεταλλευτούμε τη δυνατότητα αυτή για τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων. Τέλος, σκοπός του κεφαλαίου είναι να αναδείξει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της αιτιότητας, της ευστάθειας ενός ΓΧΑ συστήματος, του πεδίου σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του και της θέσης των πόλων αυτής στο μιγαδικό επίπεδο, όπου ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο Κεφάλαιο 2, είδαμε ότι η είσοδος και η έξοδος ενός αναλογικού ΓΧΑ συστήματος συνδέονται με μία διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Έτσι, για να προσδιορίσουμε την έξοδο ενός συστήματος αν γνωρίζουμε την είσοδό του, πρέπει να επιλύουμε την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση. Στο ίδιο Κεφάλαιο παρατηρήσαμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο ενός συστήματος αν γνωρίζουμε την είσοδό του, με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης. Στο Κεφάλαιο 3 ορίσαμε το MF, ο οποίος παρέχει τη δυνατότητα μετάβασης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Η ιδιότητα της συνέλιξης του MF μετατρέπει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης σε ένα απλό γινόμενο των αντιστοίχων μετασχηματισμών, με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζεται ο MF της εξόδου και στη συνέχεια με ένα αντίστροφο MF προσδιορίζεται η έξοδος του συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Ο MF, λοιπόν, έδωσε μία εύκολη λύση στο πρόβλημα εύρεσης της εξόδου ενός συστήματος, στην περίπτωση που γνωρίζουμε την είσοδό του και την κρουστική του απόκριση. Δυστυχώς, όμως, υπάρχουν πολλά σήματα, τα οποία συχνά συναντάμε στην πράξη, για τα οποία δεν υπάρχει ο MF.

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε το Μετασχηματισμό Laplace, ο οποίος μετατρέπει ένα σήμα συνεχούς χρόνου σε μία αναλυτική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής. Όπως θα δούμε, πολλά από τα σήματα με πρακτική σπουδαιότητα, για τα οποία δεν

υπάρχει ο MF, υπάρχει ο ML και έτσι διευρύνεται το σύνολο των σημάτων για τα οποία μπορεί να επιτευχθεί μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο συχνότητας.

Στο Κεφάλαιο 4, με τη βοήθεια του MF υπολογίσαμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος το οποίο βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ότι όταν το σύστημα δε βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας, ο MML μας επιτρέπει να συμπεριλάβουμε τις αρχικές συνθήκες στη διαφορική εξίσωση που συνδέει το σήμα εισόδου και εξόδου του συστήματος και να προσδιορίσουμε την έξοδο του συστήματος.

Τέλος, στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ότι η χρήση του μιγαδικού πεδίου συχνότητας και η θέση των πόλων σε αυτό μας επιτρέπει να εξάγουμε βασικές ιδιότητες των συστημάτων, όπως η αιτιότητα και η ευστάθεια. Για όλους τους παραπάνω λόγους, ο ML αποτελεί ένα ακόμα βασικό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων.

6.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Στην Ενότητα 2.5.1 έχουμε δει ότι αν η είσοδος ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος είναι το σήμα $x(t) = Ae^{st}$, τότε το σήμα εξόδου είναι

$$y(t) = H(s) \cdot Ae^{st} \quad (6.1.1)$$

όπου

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (6.1.2)$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος και είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

Ο μετασχηματισμός Laplace αντιστοιχεί στο σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ τη συνάρτηση

$$L[x(t)] = X(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (6.1.3)$$

Η $X(s)$ είναι μιγαδική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $\sigma + j\omega$ και ονομάζεται *Μετασχηματισμός Laplace (ML)* του σήματος $x(t)$. Μερικές φορές αναφέρεται και ως *αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace* για να τονιστεί η διαφορά του από το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace που θα ορίσουμε στην Ενότητα 6.3. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\sigma + j\omega$, για το οποίο υπάρχει η $X(s)$, δηλαδή το αντίστοιχο ολοκλήρωμα ορισμού της συγκλίνει, ονομάζεται *περιοχή σύγκλισης* (ΠΣ) της $X(s)$. Για ευκολία, ο ML του σήματος $x(t)$ μερικές φορές συμβολίζεται ως $L[x(t)]$ και η σχέση μεταξύ του $x(t)$ και του ML υποδεικνύεται ως

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad (6.1.4)$$

η δε περιοχή σύγκλισης δηλώνεται ως R .

Παρατηρήσεις

1. Αν ο ML υπάρχει και για τιμές με $\sigma = 0$, δηλαδή $s = j\omega$, τότε $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ που δεν είναι τίποτε άλλο από το MF της συνάρτησης $x(t)$, δηλαδή

$$X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}[x(t)] \quad (6.1.5)$$

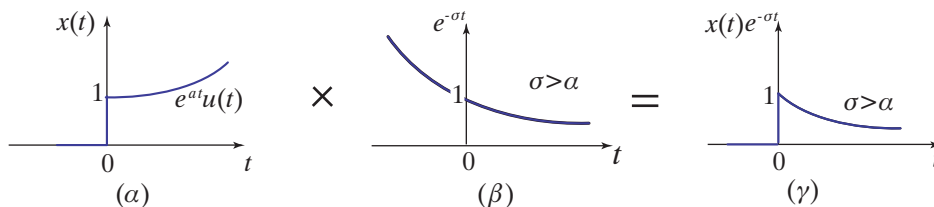
2. Ο ML σχετίζεται με το MF και στην περίπτωση όπου η μεταβλητή s δεν είναι φανταστικός αριθμός ($\sigma \neq 0$). Πράγματι,

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \quad (6.1.6)$$

Ο ML της $x(t)$ μπορεί να ερμηνευθεί και ως ο MF της συνάρτησης $x_{\sigma}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$. Επομένως, για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ πρέπει να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)e^{-\sigma t}$, δηλαδή το σήμα $x(t)e^{-\sigma t}$ να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

Η παρουσία του όρου $e^{-\sigma t}$ παρέχει τη δυνατότητα σύγκλισης του ολοκληρώματος και κατά συνέπεια την ύπαρξη του ML ακόμα και αν δεν υπάρχει ο MF της $x(t)$. Για παράδειγμα, η εκθετικά αύξουσα συνάρτηση (σήμα) $x(t) = e^{at}u(t)$ για a θετική πραγματική σταθερά δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και ως εκ τούτου δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Αν επιλεγεί $\sigma > a$, τότε η συνάρτηση $x(t)e^{-\sigma t} = e^{(a-\sigma)t}u(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace. Στο Σχήμα 6.1 υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις των σημάτων $x(t)$, $e^{-\sigma t}$ και $x(t)e^{-\sigma t}$ σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 6.1 (α) Το σήμα $x(t) = e^{at}u(t)$ για το οποίο δεν υπάρχει ο MF (β) ο παράγοντας εξασθένησης $e^{-\sigma t}$ και (γ) το σήμα $x(t)e^{-\sigma t} = e^{(a-\sigma)t}u(t)$ το οποίο είναι απολύτως ολοκληρώσιμο.

6.1.1 Μετασχηματισμός Laplace στοιχειωδών σημάτων

Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε τους ML ορισμένων στοιχειωδών σημάτων.

Παράδειγμα 6.1.1 (Μιγαδικό αιτιατό εκθετικό σήμα)

Να υπολογιστεί ο ML του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, όπου a μιγαδικός αριθμός.

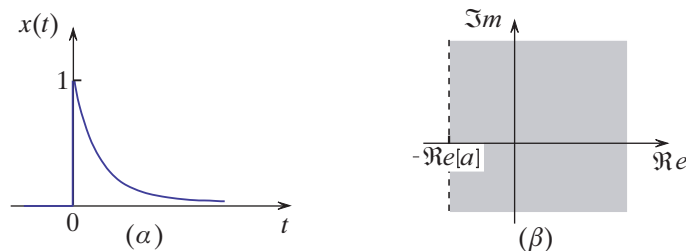
Λύση Από τον ορισμό του ML έχουμε

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(a+s)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-1}{a+s} \left[e^{-(a+s)T} - 1 \right] \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Αλλά $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-(a+s)T} = 0$, εάν $\Re[a+s] > 0$, συνεπώς παίρνουμε

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a} \text{ με περιοχή σύγκλισης } \Re[s] > -\Re[a] \quad (6.1.8)$$

Παρατηρούμε ότι η περιοχή σύγκλισης R του μιγαδικού αιτιατού εκθετικού σήματος είναι το δεξιό ημιεπίπεδο με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση $-\Re[a]$, (βλέπε Σχήμα 6.2).



Σχήμα 6.2 (α) Το σήμα $x(t) = e^{-at}u(t)$ και (β) η περιοχή σύγκλισης του ML.

Παρατηρήσεις

1. Αν $a = 0$, τότε $x(t)$ είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος, $x(t) = u(t)$ και ο ML είναι

$$X(s) = L[u(t)] = \frac{1}{s} \text{ με περιοχή σύγκλισης } \Re[s] > 0 \quad (6.1.9)$$

2. Αν $-\Re[a] < 0$, μπορούμε να υπολογίσουμε το $X(s)$ για $\sigma = 0$, δηλαδή υπάρχει και ο MF και είναι

$$X(0 + j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (6.1.10)$$

3. Αν $-\Re[a] > 0$, ο MF δεν υπάρχει, ενώ προφανώς υπάρχει ο ML.

Παράδειγμα 6.1.2 (Αυστηρά μη αιτιατό εκθετικό σήμα)

Να υπολογιστεί ο ML του σήματος $x(t) = -e^{-at}u(-t)$, όπου a μιγαδικός αριθμός

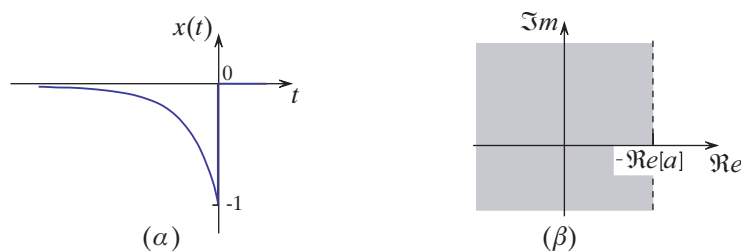
Λύση Ο ML του σήματος είναι

$$\begin{aligned} X(s) &= - \int_{-\infty}^0 e^{-at} e^{-st} dt = - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^0 e^{-(a+s)t} dt \\ &= \frac{1}{s+a} \left[1 - \lim_{T \rightarrow \infty} e^{(a+s)T} \right] \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

Είναι $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{(a+s)T} = 0$ αν $\Re[s+a] < 0$. Συνεπώς

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \text{ με περιοχή σύγκλισης } \Re[s] < -\Re[a] \quad (6.1.12)$$

Παρατηρούμε ότι η περιοχή σύγκλισης R του αυστηρά μη αιτιατού εκθετικού σήματος είναι το αριστερό ημιεπίπεδο με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση $-\Re[a]$ (βλέπε Σχήμα 6.3).



Σχήμα 6.3 (α) Το σήμα $x(t) = -e^{-at}u(-t)$ και (β) η περιοχή σύγκλισης του ML.

Παρατηρούμε ότι τα σήματα $x(t) = e^{-at}u(t)$ (Παράδειγμα 6.1.1) και $x(t) = -e^{-at}u(-t)$, (Παράδειγμα 6.1.2) έχουν την ίδια συνάρτηση ως ML αλλά διαφορετική περιοχή σύγκλισης. Για το λόγο αυτό, πάντα εκτός από την $X(s)$ θα πρέπει να δίνεται και η αντίστοιχη περιοχή σύγκλισης ώστε να προσδιορίζεται μονοσήμαντα το σήμα $x(t)$.

Παράδειγμα 6.1.3

Να υπολογιστεί ο ML του σήματος $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$.

Λύση Ο ML του σήματος είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)] e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt \quad (6.1.13)$$

Κάθε ένα από τα ολοκληρώματα στην (6.1.13) έχουν την ίδια μορφή με το ολοκλήρωμα στην (6.1.7) έτσι, αν χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 6.1.1 έχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2} \quad (6.1.14)$$

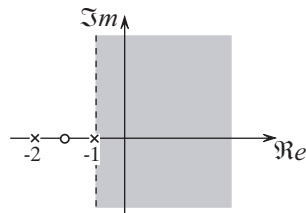
Το σήμα $x(t)$ είναι άθροισμα δύο πραγματικών εκθετικών σημάτων και από την (6.1.14) παρατηρούμε ότι ο $X(s)$ είναι ίσος με το άθροισμα των ΜΛ των επιμέρους σημάτων. Ο πρώτος όρος είναι ο ΜΛ του $e^{-t}u(t)$ με ΠΣ $\Re[s] > -1$ και ο δεύτερος είναι ο ΜΛ του $e^{-2t}u(t)$ με ΠΣ $\Re[s] > -2$. Οι κοινές τιμές του s για τις οποίες και οι δύο ΜΛ συγκλίνουν είναι αυτές για τις οποίες $\Re[s] > -1$. Έχουμε, επομένως,

$$e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{2s + 3}{s^2 + 3s + 2}, \text{ με ΠΣ } \Re[s] > -1 \quad (6.1.15)$$

Σε κάθε ένα από τα τρία παραπάνω παραδείγματα ο ΜΛ είναι ρητή συνάρτηση, δηλαδή είναι λόγος δύο πολυωνύμων της μιγαδικής μεταβλητής s , έτσι

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (6.1.16)$$

Μία συνάρτηση $X(s)$ ονομάζεται *αναλυτική* στην περιοχή R του μιγαδικού επιπέδου- s , εάν (α) είναι μονότιμη συνάρτηση στην R και (β) είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της R . Αν η $X(s)$ δεν είναι αναλυτική σε ένα σημείο s_0 , τότε το σημείο αυτό λέγεται *σημείο ανωμαλίας*. Οι ρίζες του αριθμητή $N(s)$ ονομάζονται *μηδενικά* της $X(s)$ και παριστάνονται με “ο” στο μιγαδικό επίπεδο. Στα σημεία αυτά η $X(s)$ μηδενίζεται. Οι ρίζες του παρονομαστή $D(s)$, όπου η $X(s)$ δεν ορίζεται, ονομάζονται *πόλοι* της $X(s)$ και παριστάνονται με “x” στο μιγαδικό επίπεδο. Στο Σχήμα 6.4 φαίνεται η περιοχή σύγκλισης, οι πόλοι και το μηδενικό του ΜΛ του σήματος $x(t)$ στο Παράδειγμα 6.1.3.



Σχήμα 6.4 Η περιοχή σύγκλισης, οι πόλοι και το μηδενικό του ΜΛ του σήματος $x(t)$ στο Παράδειγμα 6.1.3.

Παράδειγμα 6.1.4

Να υπολογιστεί ο ΜΛ της συνάρτησης $\delta(t)$.

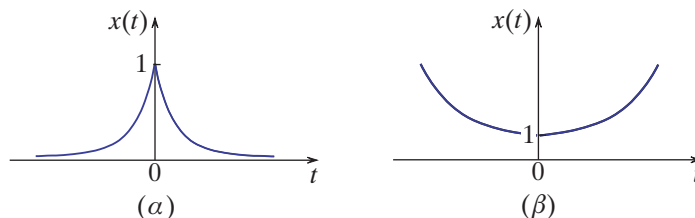
Λύση

$$L[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1 \text{ με περιοχή σύγκλισης } \Re[s] > -\infty \quad (6.1.17)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η (1.4.19).

Παράδειγμα 6.1.5

Δίνεται το σήμα $x(t) = e^{-b|t|}$ (βλέπε Σχήμα 6.5α). Να υπολογιστεί ο ΜΛ.



Σχήμα 6.5 Η γραφική παράσταση του σήματος $x(t) = e^{-b|t|}$ για (α) $b > 0$ και (β) $b < 0$.

Λύση Το σήμα γράφεται

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t) \tag{6.1.18}$$

Γνωρίζουμε ότι

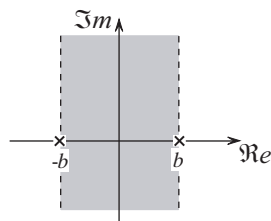
$$e^{-bt}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+b}, \text{ με ΠΣ } \Re[s] > -b \text{ (Παράδειγμα 6.1.1)}$$

$$e^{bt}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{-1}{s-b}, \text{ με ΠΣ } \Re[s] < b \text{ (Παράδειγμα 6.1.2)}$$

Παρατηρούμε ότι, αν $b < 0$, οι δύο επιμέρους όροι δεν έχουν κοινή περιοχή σύγκλισης και το σήμα $x(t)$ δεν έχει ML. Αν $b > 0$, έχουμε

$$e^{-b|t|} \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = -\frac{2b}{s^2 - b^2} \text{ με ΠΣ } -b < \Re[s] < b \tag{6.1.19}$$

Στο Σχήμα 6.6 φαίνονται η περιοχή σύγκλισης και οι πόλοι του ML του σήματος $x(t)$.



Σχήμα 6.6 Η περιοχή σύγκλισης του ML του σήματος $x(t) = e^{-b|t|}$ στο Παράδειγμα 6.1.5 και οι πόλοι του για $b > 0$.

Παράδειγμα 6.1.6 (Πολυωνυμικό εκθετικό σήμα).

Να υπολογιστεί ο ML του εκθετικού πολυωνυμικού σήματος τάξης m , που ορίζεται ως

$$x(t) = \frac{t^m}{m!} e^{-at}u(t) \tag{6.1.20}$$

Λύση Στο Παράδειγμα 6.1.1 έχουμε δείξει

$$\int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} \text{ για } \Re[s] > -\Re[a] \tag{6.1.21}$$

Παραγωγίζοντας ως προς a και τα δύο μέλη της (6.1.21) έχουμε

$$\frac{d}{da} \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{-1}{(s+a)^2} \quad \text{ή} \quad \int_0^{\infty} t e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{(s+a)^2} \quad (6.1.22)$$

Η τελευταία ισότητα δηλώνει ότι το σήμα $x(t) = t e^{-at} u(t)$ έχει ML

$$x(t) = t e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \text{με } \Re[s] > -\Re[a] \quad (6.1.23)$$

Αν $a = 0$, έχουμε

$$L[tu(t)] = L[r(t)] = \frac{1}{s^2} \quad \text{με } \Re[s] > 0 \quad (6.1.24)$$

όπου $r(t)$ είναι η συνάρτηση κλίσης. Νέα παραγωγή της (6.1.22) ως προς a δίνει

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-at} e^{-st} dt = \frac{2}{(s+a)^3}$$

οπότε

$$\frac{t^2}{2} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^3} \quad \text{με } \Re[s] > -\Re[a] \quad (6.1.25)$$

Γενικά μπορεί να δειχθεί επαγωγικά ότι

$$\frac{t^m}{m!} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \quad \text{με } \Re[s] > -\Re[a] \quad (6.1.26)$$

6.1.2 Ιδιότητες της περιοχής σύγκλισης - Ύπαρξη μετασχηματισμού Laplace

Από τα προηγούμενα παραδείγματα παρατηρήσαμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace δεν προσδιορίζει μονοσήμαντα το σήμα εκτός αν έχει ορισθεί η περιοχή σύγκλισης. Επίσης, παρατηρήσαμε ότι η μορφή της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του σήματος. Στην ενότητα αυτή θα βρούμε τον τρόπο με το οποίο συνδέεται η περιοχή σύγκλισης με τα χαρακτηριστικά του σήματος $x(t)$. Θα παρουσιάσουμε τις ιδιότητες χρησιμοποιώντας διαισθητικά επιχειρήματα παρά αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις. Γνωρίζοντας τις ιδιότητες είναι εφικτός ο προσδιορισμός της περιοχής σύγκλισης από το μετασχηματισμό Laplace $X(s)$ και έχοντας περιορισμένη γνώση των χαρακτηριστικών του σήματος $x(t)$.

Ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace που είναι ρητή συνάρτηση της μεταβλητής s δεν περιέχει πόλους.

Όπως παρατηρήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ πρέπει

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (6.1.27)$$

Οι τιμές της πραγματικής μεταβλητής σ που ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα ορίζουν την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού. Η ποσότητα σ είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού s ($s = \sigma + j\omega$), επομένως η περιοχή σύγκλισης εξαρτάται από το πραγματικό μέρος, ενώ το φανταστικό μέρος δεν επηρεάζει τη σύγκλιση. Για το λόγο αυτό η περιοχή σύγκλισης είναι ζώνες παράλληλες στο φανταστικό άξονα του επιπέδου- s .

Για ένα πεπερασμένο σήμα $x(t)$ (υπάρχει θετικός αριθμός M για τον οποίο είναι $|x(t)| \leq M$), το οποίο είναι πεπερασμένης διάρκειας ($x(t) = 0$ για $t < T_1$ και $t > T_2$), τότε

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq \int_{T_1}^{T_2} M e^{-\sigma t} dt = \begin{cases} \frac{-W}{\sigma} [e^{-\sigma T_2} - e^{-\sigma T_1}], & \sigma \neq 0 \\ M(T_2 - T_1), & \sigma = 0 \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα $I(\sigma)$ είναι πεπερασμένο για όλες τις πεπερασμένες τιμές της μεταβλητής σ . Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι:

Η περιοχή σύγκλισης ενός πεπερασμένου σήματος και πεπερασμένης διάρκειας συμπεριλαμβάνει ολόκληρο το επίπεδο- s .

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη γενική περίπτωση κατά την οποία το σήμα $x(t)$ δεν είναι περιορισμένης διάρκειας και είναι μη πεπερασμένο. Το σήμα αυτό ονομάζεται *αμφίπλευρο σήμα*. Στην περίπτωση αυτή διαχωρίζουμε το $I(\sigma)$ σε δύο τμήματα. Στο πρώτο τμήμα $I_-(\sigma)$ τα όρια ολοκλήρωσης είναι $-\infty$ και 0

$$I_-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt$$

Στο δεύτερο τμήμα $I_+(\sigma)$ τα όρια ολοκλήρωσης είναι 0 και ∞

$$I_+(\sigma) = \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt$$

δηλαδή,

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt + \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt = I_-(\sigma) + I_+(\sigma)$$

Για να είναι το $I(\sigma)$ πεπερασμένο πρέπει και τα δύο επιμέρους ολοκληρώματα να είναι πεπερασμένα. Αυτό συνεπάγεται ότι το $|x(t)|$ πρέπει να είναι φραγμένο και για τις θετικές και για τις αρνητικές τιμές του χρόνου.

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να φράξουμε το $|x(t)|$ για τις θετικές και για τις αρνητικές τιμές του χρόνου βρίσκοντας τις ελάχιστες σταθερές $M > 0$ και σ_θ τέτοιες ώστε

$$|x(t)| \leq M e^{\sigma_\theta t}, \quad t > 0,$$

και τη μέγιστη σταθερά σ_α τέτοια ώστε

$$|x(t)| \leq M e^{\sigma_\alpha t}, \quad t < 0,$$

Το σήμα $x(t)$ το οποίο ικανοποιεί τα φράγματα αυτά χαρακτηρίζεται ως σήμα *εκθετικής τάξης*. Τα φράγματα υποδηλώνουν ότι το $|x(t)|$ δεν αυξάνεται ταχύτερα από το εκθετικό σήμα $e^{\sigma_\alpha t}$ για τις θετικές τιμές του χρόνου και $e^{\sigma_\alpha t}$ για τις αρνητικές τιμές του χρόνου. Σημειώνεται ότι υπάρχουν σήματα τα οποία δεν είναι εκθετικής τάξης, για παράδειγμα τα σήματα e^{t^2} και t^{3t} . Τα σήματα αυτά δεν εμφανίζονται σε φυσικές εφαρμογές και έτσι δεν μας δημιουργούν προβλήματα.

Υποθέτοντας ότι το σήμα $x(t)$ είναι εκθετικής τάξης έχουμε για το ολοκλήρωμα $I_-(\sigma)$

$$\begin{aligned} I_-(\sigma) &= \int_{-\infty}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq M \int_{-\infty}^0 e^{(\sigma_\alpha - \sigma)t} dt \\ &= \frac{M}{\sigma_\alpha - \sigma} \left[e^{(\sigma_\alpha - \sigma)t} \Big|_{-\infty}^0 \right] \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

και για το ολοκλήρωμα $I_+(\sigma)$

$$\begin{aligned} I_+(\sigma) &= \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq M \int_0^{\infty} e^{(\sigma_\beta - \sigma)t} dt \\ &= \frac{M}{\sigma_\beta - \sigma} \left[e^{(\sigma_\beta - \sigma)t} \Big|_0^{\infty} \right] \end{aligned} \quad (6.1.29)$$

Παρατηρούμε ότι το $I_-(\sigma)$ είναι πεπερασμένο όταν $\sigma < \sigma_\alpha$ και το $I_+(\sigma)$ είναι πεπερασμένο όταν $\sigma > \sigma_\beta$. Το ολοκλήρωμα $I(\sigma)$ συγκλίνει για τις τιμές του σ για τις οποίες και τα δύο ολοκληρώματα $I_-(\sigma)$ και $I_+(\sigma)$ συγκλίνουν. Άρα, ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει για τις τιμές του σ οι οποίες ικανοποιούν τη $\sigma_\beta < \sigma < \sigma_\alpha$.

Η περιοχή σύγκλισης ενός αμφίπλευρου σήματος είναι μία ζώνη στο μιγαδικό επίπεδο με όρια τις ευθείες $\sigma = \sigma_\alpha$ και $\sigma = \sigma_\beta$.

Το σήμα $x(t) = e^{b|t|}$, του οποίου ο μετασχηματισμός Laplace βρέθηκε στο Παράδειγμα 6.1.5, είναι ένα αμφίπλευρο σήμα.

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση όπου $\sigma_\beta > \sigma_\alpha$, δεν υπάρχουν τιμές του σ για τις οποίες ο μετασχηματισμός Laplace συγκλίνει.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία το σήμα $x(t) = 0$ για $t > T_2$. Ένα σήμα που ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή ονομάζεται *αριστερόπλευρο σήμα*.

Στην περίπτωση το $I(\sigma)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \int_{-\infty}^0 |x(t)|e^{\sigma t} dt + \int_0^{T_2} |x(t)|e^{\sigma t} dt \\ &\leq \frac{M}{\sigma_\alpha - \sigma} \left[e^{(\sigma_\alpha - \sigma)t} \right]_{-\infty}^0 + \begin{cases} \frac{-W}{\sigma} \left[e^{-\sigma t} \Big|_0^{T_2} \right], & \sigma \neq 0 \\ M(T_2 - 0), & \sigma = 0 \end{cases} \quad (6.1.30) \end{aligned}$$

Από την παραπάνω παρατηρούμε ότι η περιοχή σύγκλισης ενός αριστερόπλευρου σήματος αποτελείται από τις τιμές της μεταβλητής s για τις οποίες το πραγματικό μέρος ικανοποιεί τη $\sigma < \sigma_\alpha$, δηλαδή

Η περιοχή σύγκλισης ενός αριστερόπλευρου σήματος είναι το αριστερό ημιεπίπεδο με όριο την ευθεία $\sigma = \sigma_\alpha$.

Το σήμα $x(t) = -e^{-at}u(-t)$, το οποίο μελετήσαμε στο Παράδειγμα 6.1.2, είναι ένα αριστερόπλευρο σήμα.

Τέλος, θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία το σήμα $x(t) = 0$ για $t < T_2$. Ένα σήμα που ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή ονομάζεται *δεξιόπλευρο σήμα*. Με όμοιο τρόπο παρατηρούμε ότι η περιοχή σύγκλισης ενός δεξιόπλευρου σήματος αποτελείται από τις τιμές της μεταβλητής s για τις οποίες το πραγματικό μέρος ικανοποιεί τη $\sigma > \sigma_\beta$.

Η περιοχή σύγκλισης ενός δεξιόπλευρου σήματος είναι το δεξιό ημιεπίπεδο με όριο την ευθεία $\sigma = \sigma_\beta$.

Το σήμα $x(t) = e^{-at}u(t)$, το οποίο μελετήσαμε στο Παράδειγμα 6.1.1, είναι ένα δεξιόπλευρο σήμα.

6.1.3 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε μερικές ιδιότητες του ML. Οι ιδιότητες αυτές θα μας βοηθήσουν στον υπολογισμό του ML σημάτων, χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα ορισμού. Αρκετές από τις ιδιότητες θυμίζουν τις ιδιότητες του MF. Για τις αποδείξεις των ιδιοτήτων, όπου αυτές δεν είναι προφανείς, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο [1].

(1) Γραμμικότητα

Αν $x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s)$ με ΠΣ R_1 και $x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s)$ με ΠΣ R_2 , τότε για οποιεσδήποτε σταθερές a και b είναι

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{L} aX_1(s) + bX_2(s) \text{ με ΠΣ } R = R_1 \cap R_2$$

δηλαδή η περιοχή σύγκλισης του γραμμικού συνδυασμού είναι η τομή των επιμέρους περιοχών σύγκλισης των $X_1(s)$ και $X_2(s)$. Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δυνατόν η

περιοχή σύγκλισης να είναι μεγαλύτερη, όταν κάποια μηδενικά της μίας συνάρτησης ακυρώνουν κάποιους πόλους της άλλης.

(2) Μετατόπιση στο χρόνο

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R τότε για οποιαδήποτε χρονική τιμή t_0 ισχύει

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(s) \text{ με την ίδια ΠΣ } R$$

(3) Μετατόπιση στη μιγαδική συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R , τότε

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{L} X(s - s_0) \text{ με ΠΣ } R + \Re[s_0]$$

όπου η σταθερά s_0 , στη γενική περίπτωση, είναι μιγαδική ποσότητα. Η ΠΣ του $X(s - s_0)$ είναι η ΠΣ του $X(s)$ μετατοπισμένη κατά $\Re[s_0]$.

(4) Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ $\sigma_1 < \Re[s] < \sigma_2$, τότε για οποιαδήποτε σταθερά a

$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \text{ με ΠΣ } \frac{\sigma_1}{a} < \Re[s] < \frac{\sigma_2}{a}$$

(5) Παραγωγή στη συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R , τότε

$$(-t)^n x(t) \xleftrightarrow{L} \frac{d^n X(s)}{ds^n} \text{ με ΠΣ } R$$

(6) Ολοκλήρωση στη συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R , τότε

$$\frac{x(t)}{t} \xleftrightarrow{L} \int_s^\infty X(\xi) d\xi \text{ με ΠΣ } R$$

(7) Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R , τότε

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s) \text{ με την ίδια ΠΣ } R$$

Η ΠΣ του $sX(s)$ μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την R , αν η $X(s)$ έχει ως απλό πόλο τον $s = 0$ ο οποίος ακυρώνεται με τον πολλαπλασιασμό με s . Επαγωγικά μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω ιδιότητα

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{L} s^n X(s) \text{ με την ίδια ΠΣ } R$$

(8) Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος

Αν $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R , τότε

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s) \text{ με ΠΣ την } R \cap \{\Re[s] > 0\}$$

Η ΠΣ του $(1/s)X(s)$ μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την $R \cap \{\Re[s] > 0\}$, αν ο πόλος στο μηδέν ακυρώνεται με αντίστοιχο μηδενικό της $X(s)$.

(9) Θεώρημα της συνέλιξης στο χρόνο

Αν $x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)$ με ΠΣ R_1 και $x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s)$ με ΠΣ R_2 , τότε

$$y(t) = x_1(t) \star x_2(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

με περιοχή σύγκλισης την $R_1 \cap R_2$, δηλαδή η περιοχή σύγκλισης του γινομένου $X_1(s) \cdot X_2(s)$ είναι η τομή των επιμέρους περιοχών σύγκλισης των $X_1(s)$ και $X_2(s)$. Είναι δυνατόν να ορίζεται και μεγαλύτερη περιοχή σύγκλισης, αν κάποια μηδενικά της μιας συνάρτησης ακυρώνουν κάποιους πόλους της άλλης. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι όπως και στην περίπτωση του MF, η *συνέλιξη μετασχηματίζεται σε γινόμενο*.

Πέρα από τα στοιχειώδη σήματα, τα οποία μελετήθηκαν στα Παραδείγματα 6.1.1 - 6.1.6, υπάρχουν και αρκετά άλλα που επίσης εμφανίζονται ως συστατικά μέρη άλλων σημάτων, που συναντάμε στη μελέτη γραμμικών συστημάτων. Οι ML των σημάτων αυτών υπολογίζονται με τη βοήθεια του ορισμού και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace. Στον Πίνακα 6.1 υπάρχουν οι ιδιότητες του ML, ενώ στον Πίνακα 6.2 υπάρχουν οι ML και οι αντίστοιχες περιοχές σύγκλισης για τις πλέον συνηθισμένες και χρήσιμες περιπτώσεις.

6.2 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Αν σ είναι ένας πραγματικός αριθμός, έχουμε παρατηρήσει ότι ο ML $X(s)$ του σήματος $x(t)$ συμπίπτει με το MF του σήματος $x_\sigma(t) = x(t)e^{-\sigma t}$ σε όλα τα σημεία του μιγαδικού

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.7 Οι ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	ML	Πεδίο σύγκλισης
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$	$R = \{s: \sigma_1 < \Re[s] < \sigma_2\}$ R_1 R_2
Γραμμικότητα	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	$R_1 \cap R_2$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	R
Μετατόπιση στη μιγαδική συχνότητα	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$R + \Re[s_0]$
Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{R}{a}$
Παραγωγή στη συχνότητα	$(-t)^n x(t)$	$\frac{d^n}{ds^n} X(s)$	R
Ολοκλήρωση στη συχνότητα	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^\infty X(\xi) d\xi$	R
ML παραγώγου	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	R
ML ολοκληρώματος	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	R
Η ιδιότητα της συνέλιξης	$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$	$Y(s) = X_1(s) \cdot X_2(s)$	$R_1 \cap R_2$
Περιοδικά σήματα	$x(t) = x(t+T)$	$X(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T x(t) e^{-st} dt$	$\Re[s] > 0$

επιπέδου- s που ανήκουν στην ευθεία $\Re[s] = \sigma$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \text{ ή} \\
 X(\sigma + j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_\sigma(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6.2.1)
 \end{aligned}$$

Έτσι, αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αντιστροφής του MF, παίρνουμε

$$x(t) e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1} [X(\sigma + j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6.2.2)$$

ή πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $e^{\sigma t}$ έχουμε

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega \quad (6.2.3)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.8 Μετασχηματισμοί Laplace μερικών βασικών σημάτων

	Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	Περιοχή σύγκλισης
1	$\delta(t)$	1	Για κάθε s
2	$u(t)$	$1/s$	$\Re[s] > 0$
3	$-u(-t)$	$1/s$	$\Re[s] < 0$
4	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re[s] > -\Re[a]$
5	$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re[s] < -\Re[a]$
6	$\frac{t^m}{m!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{m+1}}$	$\Re[s] > -\Re[a]$
7	$-\frac{t^m}{m!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^{m+1}}$	$\Re[s] < -\Re[a]$
8	$\delta(t-T), T \geq 0$	e^{-sT}	Για κάθε s
9	$[\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re[s] > 0$
10	$[\sin(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re[s] > 0$
11	$[e^{-at} \cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\Re[s] > -\Re[a]$
11	$[e^{-at} \sin(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\Re[s] > -\Re[a]$
13	$u_n(t) = \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	s^n	Για κάθε s

με αλλαγή μεταβλητής από $\sigma + j\omega$ σε s οδηγούμαστε στην εξίσωση αντιστροφής του ML (είναι $ds = j d\omega$ αφού η σ είναι σταθερά) ή

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (6.2.4)$$

Το ολοκλήρωμα έχει την έννοια ότι η ολοκλήρωση εκτελείται πάνω στην ευθεία $\Re[s] = \sigma$, η οποία πρέπει να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του $X(s)$.

6.2.1 Υπολογισμός του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace

Ο απευθείας υπολογισμός του αντίστροφου ML μέσω της επίλυσης του ολοκληρώματος της (6.2.4) απαιτεί εφαρμογή τεχνικών ολοκλήρωσης μιγαδικών συναρτήσεων. Η μέθοδος αυτή μπορεί να αποδειχθεί επίπονη διαδικασία και για το λόγο αυτό συνήθως ακολουθούνται έμμεσοι τρόποι υπολογισμού του αντίστροφου ML.

Αν η μορφή της συνάρτησης $X(s)$ είναι απλή και μπορεί εύκολα να εκφραστεί ως άθροισμα επιμέρους στοιχειωδών όρων, τότε με τη χρήση των γνωστών ML (Πίνακας

6.2) και των ιδιοτήτων του ML μπορούμε απευθείας να υπολογίσουμε τον $L^{-1}[X(s)] = x(t)$. Όπως έχουμε παρατηρήσει και στα αντίστοιχα παραδείγματα, στα περισσότερα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στη θεωρία των συστημάτων, ο ML έχει τη μορφή ρητής συνάρτησης. Στις περιπτώσεις αυτές ο ML μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα απλών κλασμάτων, για καθένα από τα οποία υπολογίζουμε τον αντίστροφο ML, με τη βοήθεια του Πίνακα 6.2. Στο Παράρτημα Β περιγράφονται οι τρόποι ανάλυσης ρητών συναρτήσεων σε απλά κλάσματα. Στα παραδείγματα που ακολουθούν εφαρμόζουμε τη μέθοδο αυτή.

Παράδειγμα 6.2.1 (Οι ρίζες του παρονομαστή είναι απλές και πραγματικές)

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης $X(s)$, όπου

$$X(s) = \frac{3s + 7}{s^2 + 4s + 3}, \text{ με ΠΣ } \Re[s] > -1 \quad (6.2.5)$$

Λύση Οι ρίζες του παρονομαστή είναι $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = -3$. Η $X(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα απλών κλασμάτων

$$X(s) = \frac{3s + 7}{s^2 + 4s + 3} = \frac{C_1}{s + 1} + \frac{C_2}{s + 3} \quad (6.2.6)$$

και υπολογίζουμε τις σταθερές C_1 και C_2 ως εξής:

$$C_1 = (s + 1)X(s)|_{s=-1} = \frac{3s + 7}{s + 3} \Big|_{s=-1} = 2$$

και

$$C_2 = (s + 3)X(s)|_{s=-3} = \frac{3s + 7}{s + 1} \Big|_{s=-3} = 1$$

Άρα

$$X(s) = \frac{2}{s + 1} + \frac{1}{s + 3} \quad (6.2.7)$$

Ο $L^{-1}[X(s)]$ είναι ίσος με το άθροισμα των αντίστροφων ML των απλών κλασμάτων οι οποίοι βρίσκονται εύκολα με τη βοήθεια του ζεύγους (4) του Πίνακα 6.2. Τελικά ο ζητούμενος αντίστροφος ML είναι

$$x(t) = [2e^{-t} + e^{-3t}] u(t) \quad (6.2.8)$$

Παράδειγμα 6.2.2 (Υπαρξη πολλαπλής πραγματικής ρίζας στον παρονομαστή)

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης $X(s)$, όπου

$$X(s) = \frac{s^2 - 3s + 1}{(s - 1)^2(s - 2)}, \text{ με ΠΣ } \Re[s] > 2 \quad (6.2.9)$$

Λύση Ο παρονομαστής έχει μία διπλή πραγματική ρίζα την $\rho_1 = 1$ και μία απλή την $\rho_2 = 2$. Η $X(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα απλών κλασμάτων

$$X(s) = \frac{C_{11}}{s-1} + \frac{C_{12}}{(s-1)^2} + \frac{C_{21}}{s-2} \quad (6.2.10)$$

και υπολογίζουμε τις σταθερές C_{11} , C_{12} και C_{21}

$$C_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \left. \frac{d}{ds} [(s-1)^2 X(s)] \right|_{s=1} = \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{s^2 - 3s + 1}{s-2} \right] \right|_{s=1} = 2$$

και

$$C_{12} = (s-1)^2 X(s) \Big|_{s=1} = \left. \frac{s^2 - 3s + 1}{s-2} \right|_{s=1} = 1$$

$$C_{21} = (s-2)X(s) \Big|_{s=2} = \left. \frac{s^2 - 3s + 1}{(s-1)^2} \right|_{s=2} = -1$$

Άρα

$$X(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-2} \quad (6.2.11)$$

Με τη βοήθεια των ζευγών ML (4) και (6) του Πίνακα 6.2, ο $L^{-1}[X(s)]$ προκύπτει

$$x(t) = [te^t + 2e^t - e^{2t}] u(t) \quad (6.2.12)$$

Παράδειγμα 6.2.3 (Υπαρξη μιγαδικών ριζών στον παρονομαστή)

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης $X(s)$, όπου

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13}, \text{ με } \text{ΠΣ } \Re[s] > -2 \quad (6.2.13)$$

Λύση Οι ρίζες του παρονομαστή είναι $\rho_1 = -2+3j$ και $\rho_2 = -2-3j$. Η $X(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα απλών κλασμάτων

$$X(s) = \frac{C_1}{s+2-3j} + \frac{C_2}{s+2+3j} \quad (6.2.14)$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές C_1 και C_2

$$C_1 = (s+2-3j)X(s) \Big|_{s=-2+3j} = \left. \frac{s+2}{s+2+3j} \right|_{s=-2+3j} = \frac{1}{2}$$

και

$$C_2 = (s+2+3j)X(s) \Big|_{s=-2-3j} = \left. \frac{s+2}{s+2-3j} \right|_{s=-2-3j} = \frac{1}{2}$$

Άρα

$$X(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+2+3j} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2-3j} \quad (6.2.15)$$

Ο αντίστροφος ML λόγω της (4) του Πίνακα 6.2 είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \left[e^{-(2+3j)t} + e^{-(2-3j)t} \right] u(t) \\ &= \frac{1}{2} e^{-2t} \left[e^{-3jt} + e^{3jt} \right] u(t) \\ &= e^{-2t} \cos(3t) u(t) \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

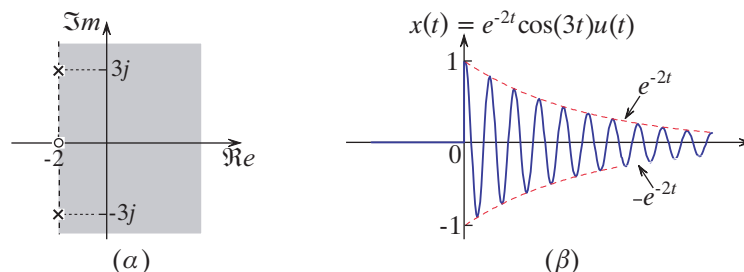
Στην περίπτωση που έχουμε μιγαδικές ρίζες, μπορούμε να ακολουθήσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο, ο οποίος βασίζεται στα ζεύγη ML (9), (10), (11) και (12) του Πίνακα 6.2. Η $X(s)$ γράφεται

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} \quad (6.2.17)$$

Με τη βοήθεια του ζεύγους ML (11) στο Πίνακα 6.2 παρατηρούμε ότι

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = e^{-2t} \cos(3t) u(t) \quad (6.2.18)$$

Στο Σχήμα 6.7 φαίνονται οι συζυγείς μιγαδικοί πόλοι, οι οποίοι βρίσκονται στο αρνητικό ημιεπίπεδο, το μηδενικό και η περιοχή σύγκλισης του $X(s)$, η οποία περιέχει το φανταστικό άξονα. Παρατηρούμε ότι το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό αφού το πεδίο σύγκλισης είναι το δεξιό ημιεπίπεδο και είναι ένα φθίνον συνημιτονοειδές σήμα.



Σχήμα 6.7 (α) Η περιοχή σύγκλισης, οι πόλοι και το μηδενικό του ML (β) του σήματος $x(t)$ στο Παράδειγμα 6.2.3.

6.3 Ο ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Στην Παράγραφο 6.1 ορίσαμε τον ML. Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε το *Μονόπλευρο Μετασχηματισμό Laplace* (MML) του σήματος $x(t)$. Θα εστιάσουμε στα βασικά σημεία του MML και κυρίως σε αυτά που τον διαφοροποιούν από το ML.

Η διαφορά μεταξύ των δύο μετασχηματισμών εντοπίζεται στα όρια ολοκλήρωσης του ορισμού. Αν το κάτω όριο στο ολοκλήρωμα στη σχέση (6.1.3) είναι το μηδέν, τότε ορίζεται ο *μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace*

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{X}(s) = X^+(s) \equiv \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (6.3.1)$$

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $s = \sigma + j\omega$ πάνω στο οποίο υπάρχει και ορίζεται η $\mathcal{X}(s)$, όπου δηλαδή το αντίστοιχο ολοκλήρωμα ορισμού συγκλίνει, ονομάζεται *περιοχή σύγκλισης* (ΠΣ) της $\mathcal{X}(s)$.

Προφανώς, αν δύο σήματα είναι διαφορετικά για $t < 0$ και ίσα για $t \geq 0$, τότε έχουν τον ίδιο MML και διαφορετικό ML. Για αιτιατά σήματα, $x(t) = 0$ για $t < 0$, ο ML και ο MML συμπίπτουν. Με άλλα λόγια ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace του σήματος $x(t)u(t)$. Εφόσον το σήμα $x(t)u(t)$ είναι αιτιατό σήμα, η περιοχή σύγκλισης του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace είναι πάντα το μέγιστο δεξιό ημιεπίπεδο που δεν περιέχει πόλους του συστήματος. Η διαφορά μεταξύ των δύο ορισμών είναι ουσιαστική, και όπως θα δούμε, παρέχει στο MML τη δυνατότητα επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες έχουν *μη μηδενικές αρχικές συνθήκες*. Όταν το σήμα περιέχει συναρτήσεις $\delta(t)$, ο ορισμός του ορίου στο μηδέν απαιτεί προσοχή, διότι το αποτέλεσμα θα εξαρτάται εάν προσεγγίζουμε το μηδέν από αριστερά ή από δεξιά. Στην περίπτωση μας θεωρούμε το όριο από αριστερά ($t \rightarrow 0^-$) και επομένως η συνάρτηση $\delta(t)$ εμπεριέχεται στο ολοκλήρωμα. Εάν δεν υπάρχουν συναρτήσεις $\delta(t)$, το παραπάνω σχόλιο είναι άνευ σημασίας.

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace έχει παρόμοιες ιδιότητες με το μετασχηματισμό Laplace τις οποίες παραθέτουμε στον Πίνακα 6.3. Μία διαφορά υπάρχει στην ιδιότητα παραγωγίσης στο χρόνο.

(1) Παραγωγή στο πεδίο του χρόνου

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{X}(s)$ με ΠΣ R και η συνάρτηση (σήμα) $x(t)$ είναι παραγωγίσιμη για $t \geq 0$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου της είναι

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s\mathcal{X}(s) - x(0^-) \text{ με την ίδια ΠΣ } R$$

Απόδειξη

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= [x(t)e^{-st}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} sx(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)e^{-st}] - \lim_{t \rightarrow 0} [x(t)e^{-st}] + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Δεδομένου ότι η $x(t)$ είναι εκθετικής τάξης θα υπάρχει $M > 0$ και t_0 για τα οποία

$$|x(t)e^{-st}| = |x(t)| e^{-\sigma t} < M e^{at} e^{-\sigma t} = M e^{(\sigma-a)t}$$

για κάθε $t \geq t_0$. Έτσι, $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)e^{-st}] = 0$ όταν $\Re[s] > a$. Επίσης, είναι $\lim_{t \rightarrow 0} [x(t)e^{-st}] = x(0^-)$ και $\int_0^\infty x(t)e^{-st} dt = \mathcal{X}(s)$. Επομένως, έχουμε

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s\mathcal{X}(s) - x(0^-), \quad \Re[s] > a$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή το κάτω όριο του ολοκληρώματος ορισμού του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace είναι το μηδέν, στο μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace της παραγώγου του $x(t)$ υπάρχει η αρχική συνθήκη $x(0^-)$.

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου τάξης n είναι

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^n \mathcal{X}(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0^-} - \dots - \left. \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

Μία δεύτερη διαφορά υπάρχει στην ιδιότητα της ολοκλήρωσης στο χρόνο.

(2) Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{X}(s)$ με ΠΣ R , τότε

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \mathcal{X}(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau = \frac{\mathcal{X}(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s}$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι $\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$. Η $y(t)$ είναι παραγωγίσιμη, αν η $x(t)$ είναι συνεχής. Επίσης είναι εκθετικής τάξης. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγωγισής στο πεδίο του χρόνου έχουμε

$$\mathcal{L} \left[\frac{dy(t)}{dt} \right] = \mathcal{L}[x(t)] \Rightarrow s\mathcal{Y}(s) - y(0^-) = \mathcal{X}(s)$$

Επομένως, έχουμε

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\mathcal{X}(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s}$$

Παρατηρούμε ότι στο μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace του ολοκληρώματος του $x(t)$ υπάρχει η αρχική συνθήκη $y(0^-)$.

Τέλος, ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace παρέχει τη δυνατότητα να προσδιορισθεί η αρχική τιμή $x(0^+)$ και το $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ με το θεώρημα της αρχικής και τελικής τιμής και όχι μέσω του ίδιου του σήματος $x(t)$.

(3) Θεώρημα αρχικής τιμής

Έστω το σήμα $x(t)$, το οποίο δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο $t = 0$, με MML $\mathcal{X}(s)$ και περιοχή σύγκλισης $\Re[s] > \sigma_0$. Τότε ισχύει

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{X}(s) \text{ (Αρχική τιμή)}$$

όπου $x(0^+)$ είναι η τιμή του σήματος $x(t)$ όταν η μεταβλητή t πλησιάζει το μηδέν από θετικές τιμές.

(4) Θεώρημα τελικής τιμής

Έστω το σήμα $x(t)$, με MML $\mathcal{X}(s)$ και περιοχή σύγκλισης $\Re[s] > \sigma_0$. Αν η $s\mathcal{X}(s)$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο φανταστικό άξονα και στο δεξιό μιγαδικό ημιπίεδο, τότε ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{X}(s) \text{ (Τελική τιμή)}$$

Το θεώρημα της τελικής τιμής χρησιμοποιείται στη μελέτη γραμμικών συστημάτων για τον προσδιορισμό των τιμών ισορροπίας και της μόνιμης κατάστασης τους.

Οι ιδιότητες αυτές αποτελούν τη *δύναμη του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace* γιατί έχουμε τη δυνατότητα να επιλύουμε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και να αναλύουμε ΓΧΑ συστήματα τα οποία δεν βρίσκονται σε ηρεμία.

6.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE

Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε τις εφαρμογές των μετασχηματισμών Laplace. Ειδικότερα θα αξιοποιήσουμε τη δυνατότητα που παρέχει ο MML για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων οι οποίες έχουν μη μηδενικές αρχικές συνθήκες και θα την εφαρμόσουμε στη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων. Τελειώνοντας, θα εξετάσουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της θέσης των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο με τις ιδιότητες της αιτιότητας και της ευστάθειας ενός ΓΧΑ συστήματος.

6.4.1 Επίλυση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με τη βοήθεια MML

Λόγω της ιδιότητας του MML που αναφέρεται στην παράγωγο και το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης, έχουμε τη δυνατότητα να επιλύουμε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Η γενική μορφή μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = g(t) \quad (6.4.1)$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(t)|_{t=0} = b_0, \quad \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0} = b_1, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0} = b_{n-1} \quad (6.4.2)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.9 Οι ιδιότητες του Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μονόπλευρος ML
	$x(t)$	$\mathcal{X}(s)$
	$x_1(t)$	$\mathcal{X}_1(s)$
	$x_2(t)$	$\mathcal{X}_2(s)$
Γραμμικότητα	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$a\mathcal{X}_1(s) + b\mathcal{X}_2(s)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{s_0 t} x(t)$	$\mathcal{X}(s - s_0)$
Κλιμάκωση στο χρόνο	$x(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} \mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
Συνέλιξη $x_1(t) = x_2(t) = 0$ για $t < 0$	$x_1(t) \star x_2(t)$	$\mathcal{X}_1(s) \cdot \mathcal{X}_2(s)$
Παραγωγή στο χρόνο*	$\frac{d}{dt} x(t)$	$s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$
Παραγωγή στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} \mathcal{X}(s)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο*	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{\mathcal{X}(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s}$
Αρχικής τιμής	$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{X}(s)$	
Τελικής τιμής	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{X}(s)$	

* Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν, οι ιδιότητες της παραγωγής και τις ολοκλήρωσης του MML είναι οι ίδιες με τις αντίστοιχες του ML.

Τα βήματα που ακολουθούμε για την επίλυση της είναι:

1. Παίρνουμε το MML και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Λόγω της γραμμικότητας, ο MML του αριστερού μέρους ισούται με το άθροισμα των MML των επιμέρους όρων.
2. Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς τον MML $\mathcal{X}(s)$ της συνάρτησης $x(t)$.
3. Βρίσκουμε τον $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{X}(s)]$, δηλαδή τη λύση $x(t)$.

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 6.4.1

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) + 2 \int_{-\infty}^t x(\xi) d\xi = u(t) \quad (6.4.3)$$

με αρχικές συνθήκες $x(0)^- = 2$ και $\int_{-\infty}^{0^-} x(\xi) d\xi = 0$.

Λύση Εφαρμόζοντας MML και στα δύο μέρη της (6.4.3) και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που αναφέρονται στην παράγωγο, το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης και τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$s\mathcal{X}(s) - x(0^-) + 3\mathcal{X}(s) + \frac{2\mathcal{X}(s)}{s} + \frac{2}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\xi) d\xi = \frac{1}{s}$$

ή

$$s\mathcal{X}(s) - 2 + 3\mathcal{X}(s) + \frac{2\mathcal{X}(s)}{s} = \frac{1}{s}$$

και τελικά

$$\mathcal{X}(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2} = -\frac{1}{s + 1} + \frac{3}{s + 2} \quad (6.4.4)$$

Εφόσον $x(t) = 0$, για $t < 0$, οι $\mathcal{X}(s)$ και $X(s)$ ταυτίζονται. Άρα, ο αντίστροφος MML της $\mathcal{X}(s)$ δίνει τη λύση της διαφορικής εξίσωσης που είναι

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{X}(s)] = [-e^{-t} + 3e^{-2t}] u(t) \quad (6.4.5)$$

6.4.2 Η χρήση του μετασχηματισμού Laplace στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων

Στην παράγραφο αυτή θα εστιάσουμε σε εφαρμογές του ML στη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων βασισμένοι στη γνώση των αντίστοιχων σημάτων εισόδου και εξόδου. Στο Κεφάλαιο 2, είδαμε ότι η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος συνδέεται με την είσοδό του $x(t)$ με το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

$$y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau) d\tau \quad (6.4.6)$$

Λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης του ML έχουμε

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \text{ με ΠΣ τουλάχιστον την } R_H \cap R_X \quad (6.4.7)$$

όπου $H(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος (Ενότητα 2.5).

Παρατηρούμε ότι η $H(s)$ δίνεται ως πηλίκο των ML της εξόδου του συστήματος προς τον ML της εισόδου του συστήματος, δηλαδή $H(s) = Y(s)/X(s)$.

Στο Κεφάλαιο 2, επίσης, έχουμε δει ότι αν εκμεταλλευθούμε τις φυσικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των στοιχείων ενός συστήματος ΓΧΑ, καταλήγουμε σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, η οποία έχει τη γενική μορφή

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (6.4.8)$$

όπου a_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N$ και b_k , $k = 0, 1, 2, \dots, M$ πραγματικές σταθερές, οι οποίες περιγράφουν το σύστημα. Εφαρμόζοντας το ML και στα δύο μέλη της (6.4.8), καταλήγουμε στη σχέση

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (6.4.9)$$

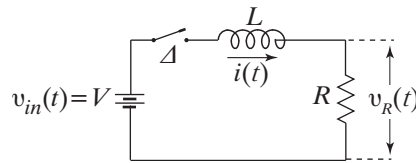
Από την (6.4.9) υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με τη βοήθεια των συντελεστών a_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N$ και b_k , $k = 0, 1, 2, \dots, M$.

Παρατήρηση: Τόσο η (6.4.7) όσο και η (6.4.9), προϋποθέτουν ότι γνωρίζουμε τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις για $t > -\infty$, με άλλα λόγια για μηδενικές αρχικές συνθήκες. Εάν οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις είναι αιτιατές και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν, θα φτάσουμε στις (6.4.7) και (6.4.9) και με τον MML, που σε αυτήν την περίπτωση ταυτίζεται με τον ML. Δηλαδή, η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ έχει νόημα μόνο κάτω από μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Τονίζεται ότι, επειδή η συνάρτηση $H(s)$ χαρακτηρίζει το σύστημα, θα πρέπει λοιπόν να μην εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες στις οποίες βρίσκεται το σύστημα.

Παράδειγμα 6.4.2

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του κυκλώματος του Σχήματος 6.8.



Σχήμα 6.8 Το κύκλωμα του Παραδείγματος 6.4.2.

Λύση Εφαρμόζουμε το δεύτερο κανόνα Kirchhoff στο κύκλωμα και παίρνουμε

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v_{in}(t) \quad (6.4.10)$$

και επειδή $v_R = iR$, $\frac{dv_R}{dt} = R \frac{di}{dt}$ έχουμε

$$\frac{dv_R(t)}{dt} + \frac{R}{L} v_R(t) = \frac{R}{L} v_{in}(t) \quad (6.4.11)$$

Έτσι, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (6.4.11) παίρνουμε

$$sV_R(s) + \frac{R}{L} V_R(s) = \frac{R}{L} V_{in}(s)$$

από την οποία προσδιορίζεται η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος

$$H(s) = \frac{R/L}{s + R/L} \quad (6.4.12)$$

Το σύστημα έχει ένα πόλο στο σημείο $-R/L$, με αποτέλεσμα το ΠΣ είναι $\Re[s] > -R/L$, αφού το σύστημα ως φυσικό σύστημα πρέπει να είναι αιτιατό. Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t) \quad (6.4.13)$$

Αν δεν έχουμε αρχικές συνθήκες, τότε η έξοδος συστήματος προσδιορίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης στο χρόνο γνωρίζοντας τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και το ML του σήματος εισόδου.

Παράδειγμα 6.4.3

Δίνεται το κύκλωμα του Σχήματος 6.8. Αν το κύκλωμα αρχικά ηρεμεί και στην είσοδό του, κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, εφαρμόσουμε πηγή σταθερής τάσης V , να προσδιοριστεί η τάση στα άκρα της αντίστασης, $v_R(t)$, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση Επειδή η είσοδος είναι πηγή σταθερής τάσης, η οποία εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, έχουμε

$$v_{in}(t) = Vu(t) \xleftrightarrow{L} V_{in}(s) = \frac{V}{s}, \quad \Re[s] > 0 \quad (6.4.14)$$

Το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία και ο ML της εξόδου $V_R(s)$ υπολογίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης που δίνει

$$\begin{aligned} V_R(s) = H(s)V_{in}(s) &= \frac{V(R/L)}{s[s + (R/L)]} \\ &= V \frac{R}{L} \left(\frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s + (R/L)} \right) \\ &= V \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + (R/L)} \right), \quad \Re[s] > 0 \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

όπου η $V_R(s)$ έχει αναλυθεί σε απλά κλάσματα και οι σταθερές $C_1 = L/R$ και $C_2 = -L/R$ έχουν προκύψει με το γνωστό τρόπο. Η έξοδος $v_R(t)$ υπολογίζεται με τον αντίστροφο ML της $V_R(s)$, δηλαδή

$$v_R(t) = Vu(t) - Ve^{-\frac{R}{L}t}u(t) = V \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) u(t) \quad (6.4.16)$$

Αν έχουμε αρχικές συνθήκες, τότε στη διαφορική εξίσωση (6.4.8), λόγω των ιδιοτήτων της παραγώγισης στο χρόνο και της ολοκλήρωσης στο χρόνο που έχει ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace, συμπεριλαμβάνουμε τις αρχικές συνθήκες και στην $Y(s) = H(s)X(s)$ εμφανίζεται και ένας επιπλέον όρος ο οποίος προέρχεται από τις αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα 6.4.4

Δίνεται το κύκλωμα του Σχήματος 6.8. Αν η τάση στα άκρα της αντίστασης αρχικά είναι $v_R(0^-)$ και κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, εφαρμόσουμε πηγή σταθερής τάσης V , να προσδιοριστεί η τάση στα άκρα της αντίστασης, $v_R(t)$, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση Επειδή το σύστημα έχει αρχικές συνθήκες, εφαρμόζοντας το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης (6.4.11), που χαρακτηρίζει το κύκλωμα, ενσωματώνουμε τις αρχικές συνθήκες και έχουμε

$$\begin{aligned} s\mathcal{V}_R(s) - v_R(0^-) + \frac{R}{L}\mathcal{V}_R(s) &= \frac{R}{L}\mathcal{V}_{in}(s) \\ \left(s + \frac{R}{L}\right)\mathcal{V}_R(s) &= \frac{R}{L}\mathcal{V}_{in}(s) + v_R(0^-) \\ \mathcal{V}_R(s) &= \frac{R/L}{s + R/L}\mathcal{V}_{in}(s) + \frac{1}{s + R/L}v_R(0^-) \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

Επειδή το σήμα εισόδου είναι αιτιατό, ο MML του είναι ίσος με το ML

$$v_{in}(t) = Vu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{V}_{in}(s) = \frac{V}{s} \quad (6.4.18)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_R(s) &= \frac{R/L}{s + R/L} \frac{V}{s} + \frac{1}{s + R/L} v_R(0^-) \\ \mathcal{V}_R(s) &= V \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right) + v_R(0^-) \frac{1}{s + R/L} \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

Συγκρίνοντας την (6.4.15) με την (6.4.19) παρατηρούμε ότι ο $\mathcal{V}_R(s)$ περιέχει έναν επιπλέον όρο ο οποίος εξαρτάται από την αρχική συνθήκη στην οποία βρίσκεται το σύστημα. Η έξοδος $v_R(t)$ υπολογίζεται με τον αντίστροφο ML της $\mathcal{V}_R(s)$, δηλαδή,

$$v_R(t) = V \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) u(t) + v_R(0^-) e^{-\frac{R}{L}t} u(t) \quad (6.4.20)$$

Παράδειγμα 6.4.5

Δίνεται το κύκλωμα του Σχήματος 6.8. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου όταν το σήμα εισόδου είναι $x(t) = te^{2t}u(t)$. Δίνεται ότι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι $\tau = L/R = 0,2\text{sec}$ και το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία.

Λύση Με τη βοήθεια των (6.4.12) και (6.1.23) βρίσκονται οι ML της κρουστικής απόκρισης του συστήματος και του σήματος εισόδου $x(t)$

$$H(s) = \frac{5}{s+5}, \text{ με } \Re[s] > -5$$

και

$$X(s) = \frac{1}{(s-2)^2}, \text{ με } \Re[s] > 2$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι η σταθερά χρόνου του συστήματος είναι 0,2sec. Με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης βρίσκεται ο ML της εξόδου του συστήματος

$$Y(s) = \frac{5}{(s-2)^2(s+5)}, \text{ με } \Re[s] > 2 \quad (6.4.21)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα εισόδου δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, επομένως δεν υπάρχει ο MF του και ως εκ τούτου δεν είναι δυνατή η χρήση των μεθόδων που χρησιμοποιούν μετασχηματισμούς Fourier για τη λύση του προβλήματος.

Παράδειγμα 6.4.6

Να προσδιορισθεί η αρχική και η τελική τιμή του σήματος $x(t)$ του οποίου ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\mathcal{X}(s) = \frac{7s+10}{s(s+2)}$$

Λύση Εφαρμόζοντας το θεώρημα της αρχικής τιμής βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} x(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{7s+10}{s(s+2)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{7s+10}{(s+2)} \\ &= 7 \end{aligned} \quad (6.4.22)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της τελικής τιμής βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} x(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{7s+10}{s(s+2)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{7s+10}{(s+2)} \\ &= 5 \end{aligned} \quad (6.4.23)$$

Σημειώνεται ότι η αρχική και η τελική τιμή μπορεί να βρεθεί αφού προσδιορισθεί η αναλυτική μορφή του σήματος και στη συνέχεια προσδιορισθεί η αρχική και η τελική τιμή του σήματος. Πράγματι, παρατηρούμε ότι ο $\mathcal{X}(s)$ είναι ο MML του σήματος $x(t) = 5u(t) + 2e^{-2t}u(t)$ από την οποία επαληθεύουμε ότι $x(0^+) = 7$ και $x(\infty) = 5$.

6.4.3 Παρατηρήσεις για την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace

Όπως γνωρίζουμε, ο ML είναι συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής s . Υπενθυμίζουμε ότι οι ρίζες του αριθμητή $N(s)$ στην (6.1.16) ονομάζονται μηδενικά της $H(s)$. Προφανώς στα σημεία αυτά η $H(s)$ μηδενίζεται. Επίσης, οι ρίζες του παρονομαστή $D(s)$, όπου η $H(s)$ δεν ορίζεται, ονομάζονται πόλοι της $H(s)$.

Για να είναι ένα σύστημα αιτιατό πρέπει η περιοχή σύγκλισης να είναι το δεξιό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση $-\Re[a_k]_{max}$, όπου a_k με $k = 1, 2, \dots$ είναι οι πόλοι της $H(s)$

και max συμβολίζει τον πόλο με το μέγιστο πραγματικό μέρος (βλέπε Παράδειγμα 6.1.3). Με άλλα λόγια, το πεδίο σύγκλισης ενός αιτιατού συστήματος είναι το μέγιστο δυνατό δεξιό ημιεπίπεδο, το οποίο δεν περιέχει πόλους της $H(s)$.

Αν ο βαθμός του πολωνύμου του $N(s)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του πολωνύμου $D(s)$, τότε, πριν αναλύσουμε σε απλά κλάσματα, πρέπει να εκτελέσουμε τη διαίρεση $N(s)/D(s)$. Στην περίπτωση αυτή η $H(s)$ περιλαμβάνει όρους της μορφής cs^k , $k > 0$. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα στη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, του οποίου υπάρχει ο όρος cs . Τότε, αν η είσοδος του συστήματος είναι η $u(t)$, η οποία έχει ML ίσο με $1/s$, η έξοδος του συστήματος θα είναι η $y(t) = L^{-1}[cs(1/s)] = cd(t)$. Παρατηρούμε ότι, η έξοδος του συστήματος δεν είναι φραγμένη, σε αντίθεση με την είσοδό του η οποία είναι φραγμένη. Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε σε ένα πρώτο συμπέρασμα:

“όταν ο βαθμός του πολωνύμου του $N(s)$ είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του πολωνύμου $D(s)$ το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές”.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι πέρα από τη σχέση των βαθμών των πολωνύμων $N(s)$ και $D(s)$, η θέση των πόλων της $H(s)$ καθορίζει την ευστάθεια του συστήματος. Στο Παράδειγμα 2.4.1 έχουμε δει ότι για να είναι ένα σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει η κρουστική απόκρισή του να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη. Στην περίπτωση όμως αυτή υπάρχει ο MF της, δηλαδή η απόκριση συχνότητας του συστήματος $H(\omega)$. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι για να υπάρχει ο MF πρέπει το πεδίο σύγκλισης του ML να περιέχει το φανταστικό άξονα. Έτσι:

“για να είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές, πρέπει ο φανταστικός άξονας να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του ML”.

Συνδυάζοντας τώρα τα παραπάνω καταλήγουμε ότι για να είναι ένα σύστημα ταυτόχρονα αιτιατό και ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει

1. η περιοχή σύγκλισης να είναι το δεξιό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση $-\Re[a_k]_{max}$ και
2. ο φανταστικός άξονας να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του ML.

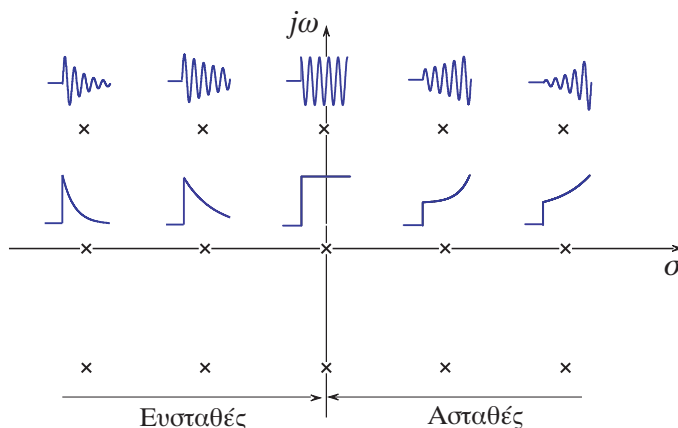
Γενικότερα, η θέση των πόλων του ML $X(s)$ ενός σήματος στο μιγαδικό επίπεδο- s προσδιορίζει τη συμπεριφορά του σήματος. Ειδικότερα, ισχύουν τα εξής

1. Απλοί πόλοι στο αρνητικό ημιεπίπεδο ($\Re[s] < 0$ και $\Im m[s] = 0$) του επιπέδου- s αντιστοιχούν σε σήματα τα οποία στο πεδίο του χρόνου είναι πολλαπλασιασμένα με $e^{-|a|t}$ που φθίνει εκθετικά προς το μηδέν, καθώς $t \rightarrow \infty$. Σε αντίθεση, απλοί

πόλοι στο δεξιό ημιεπίπεδο του s αντιστοιχούν σε σήματα πολλαπλασιασμένα με $e^{|a|t}$, που αυξάνεται εκθετικά προς το άπειρο καθώς $t \rightarrow \infty$.

2. Απλοί πόλοι στο φανταστικό άξονα αντιστοιχούν σε σήματα των οποίων το πλάτος παραμένει σταθερό με το χρόνο, ενώ πολλαπλοί πόλοι στο φανταστικό άξονα αντιστοιχούν σε σήματα πολλαπλασιασμένα με t^n .
3. Μιγαδικοί συζυγείς πόλοι αντιστοιχούν σε σήματα που υφίστανται ταλάντωση, ήτοι περιέχουν ημιτονικούς όρους (Παράδειγμα 6.2.3). Αν το πραγματικό μέρος των συζυγών πόλων είναι μηδέν, τότε έχουμε αμείωτες ταλαντώσεις, ενώ αν το πραγματικό μέρος είναι μη μηδενικό, έχουμε ταλαντώσεις εκθετικά αύξουσες, αν οι συζυγείς πόλοι βρίσκονται στο θετικό ημιεπίπεδο, ή εκθετικά φθίνουσες, αν οι συζυγείς πόλοι βρίσκονται στο αρνητικό ημιεπίπεδο.

Παρόμοια ισχύουν και για την κρουστική απόκριση ενός συστήματος ανάλογα με τη θέση των πόλων της $H(s)$ στο μιγαδικό επίπεδο. Στο Σχήμα 6.9 παριστάνονται οι ιδιότητες ενός αιτιατού συστήματος και η συμπεριφορά της κρουστικής απόκρισής του, όπως αυτή προσδιορίζεται από τη θέση των πόλων του στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 6.9 Οι ιδιότητες ενός συστήματος και η συμπεριφορά της κρουστικής του απόκρισης ανάλογα με τη θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς του στο μιγαδικό επίπεδο.

Παράδειγμα 6.4.7

Να δείχθει ότι το κύκλωμα του Σχήματος 6.8 είναι ευσταθές σύστημα.

Λύση Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος έχει ένα πόλο στη θέση $-(R/L) < 0$, δηλαδή στο αρνητικό ημιεπίπεδο. Επειδή το σύστημα ως πραγματικό σύστημα είναι αιτιατό, το πεδίο σύγκλισης πρέπει να είναι $\Re\{s\} > -\frac{R}{L}$. Παρατηρούμε ότι στο πεδίο σύγκλισης περιέχεται ο φανταστικός άξονας, με αποτέλεσμα το σύστημα να είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 6.4.8

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} \quad (6.4.24)$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση Η $H(s)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα της μορφής

$$H(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{s+2} + \frac{2}{3} \frac{1}{s-1} \quad (6.4.25)$$

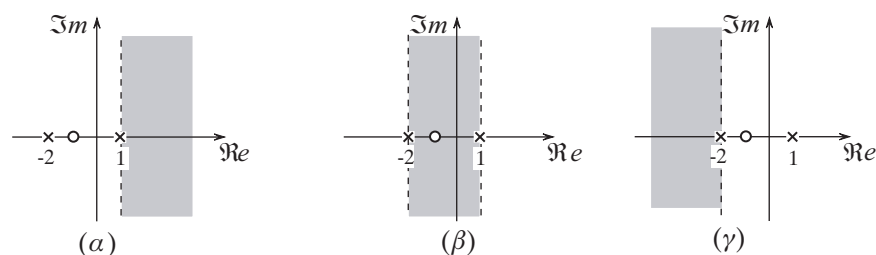
Για το ΓΧΑ σύστημα του παραδείγματος δεν προσδιορίζεται η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς. Οι πιθανές περιοχές σύγκλισης είναι οι τρεις, οι οποίες εικονίζονται στο Σχήμα 6.10. Αν το σύστημα είναι αιτιατό, η περιοχή σύγκλισης είναι $\Re[s] > 1$ (Σχήμα 6.10α) και η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \left[\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{2}{3} e^t \right] u(t) \quad (6.4.26)$$

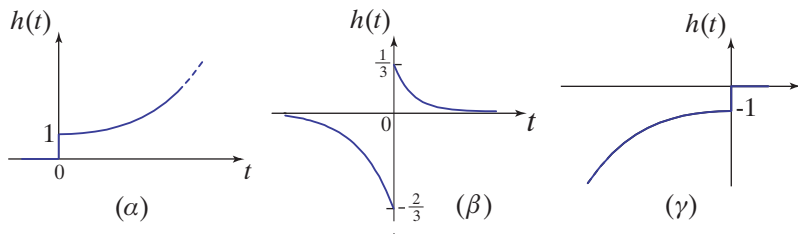
Στο Σχήμα 6.11α φαίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος όταν η περιοχή σύγκλισης είναι $\Re[s] > 1$. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα είναι αιτιατό αφού το πεδίο σύγκλισης είναι το μέγιστο δεξιό ημιεπίπεδο το οποίο δεν περιέχει πόλους. Το σύστημα δεν είναι όμως ευσταθές, αφού δεν περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης ο φανταστικός άξονας. Το ότι το σύστημα δεν είναι ευσταθές φαίνεται και από το ότι $h(t) \rightarrow \infty$ όταν $t \rightarrow \infty$.

Αν το σύστημα είναι ευσταθές, η περιοχή σύγκλισης είναι $-2 < \Re[s] < 1$ (Σχήμα 6.10β) και η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \frac{1}{3} e^{-2t} u(t) - \frac{2}{3} e^t u(-t) \quad (6.4.27)$$



Σχήμα 6.10 Οι πιθανές περιοχές σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς για το σύστημα του Παραδείγματος 6.4.8 (α) αιτιατό (β) ευσταθές και (γ) μη αιτιατό μη ευσταθές σύστημα.



Σχήμα 6.11 Οι πιθανές κρουστικές αποκρίσεις για το σύστημα του Παραδείγματος 6.4.8 (α) αιτιατό, (β) ευσταθές και (γ) μη αιτιατό μη ευσταθές σύστημα.

Στο Σχήμα 6.11β φαίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος όταν η περιοχή σύγκλισης είναι $-2 < \Re[s] < 1$. Παρατηρείστε ότι το σύστημα τώρα είναι ευσταθές, δεν είναι όμως αιτιατό.

Τέλος, αν η περιοχή σύγκλισης του συστήματος είναι $\Re[s] < -2$ (Σχήμα 6.10γ), το σύστημα δεν είναι ούτε αιτιατό, ούτε ευσταθές και η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = \left[-\frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^t \right] u(-t) \quad (6.4.28)$$

Στο Σχήμα 6.11γ φαίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος όταν η περιοχή σύγκλισης είναι $\Re[s] < -2$.

Παράδειγμα 6.4.9

Δίνεται το γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα του οποίου η σχέση σήματος εισόδου εξόδου περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}x(t) - 2x(t) \quad (6.4.29)$$

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του αντιστρόφου συστήματος. Για το σύστημα αυτό υπάρχει αντίστροφο σύστημα το οποίο να είναι ευσταθές και αιτιατό;

Λύση Λαμβάνοντας μετασχηματισμό Laplace στα μέλη της (6.4.29) έχουμε

$$Y(s)(s + 3) = X(s)(s^2 + s - 2)$$

από την οποία βρίσκεται η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + s - 2}{s + 3} \quad (6.4.30)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του αντίστροφου συστήματος είναι

$$\begin{aligned} H^{\text{avt}}(s) &= \frac{1}{H(s)} \\ &= \frac{s + 3}{s^2 + s - 2} \\ &= \frac{s + 3}{(s - 1)(s + 2)} \end{aligned} \quad (6.4.31)$$

Το αντίστροφο σύστημα έχει δύο πόλους στο σημεία $s = 1$ και $s = -2$. Οι δύο πόλοι βρίσκονται εκατέρωθεν του φανταστικού άξονα, επομένως δεν είναι δυνατόν το μέγιστο δεξιό ημιεπίπεδο που δεν περιέχει πόλους (αιτιατό σύστημα) να περιέχει το φανταστικό άξονα (ευσταθές σύστημα). Άρα, για το σύστημα (6.4.30) δεν υπάρχει αντίστροφο σύστημα το οποίο να είναι συγχρόνως αιτιατό και ευσταθές.

Σύνοψη Κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό ορίσαμε το μετασχηματισμό Laplace και το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace, παρουσιάστηκαν οι ιδιότητές τους και υπολογίσαμε τους ML ορισμένων βασικών σημάτων, τα οποία συναντάμε στη μελέτη γραμμικών συστημάτων. Στη συνέχεια προσδιορίσαμε τον αντίστροφο ML. Είδαμε ότι, αν η μορφή του ML είναι απλή, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ML με τη βοήθεια του Πίνακα 6.2. Αν ο ML δεν έχει απλή μορφή αλλά είναι ρητή συνάρτηση, τότε αναλύουμε τη συνάρτηση σε απλά κλάσματα και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του ML και του Πίνακα 6.2 υπολογίζουμε εύκολα το σήμα χωρίς να καταφύγουμε στην εξίσωση αντιστροφής.

Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό αναπτύξαμε διάφορες εφαρμογές του ML. Ειδικότερα εξετάσαμε τη δυνατότητα που έχει ο MML να επιλύει γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, οι οποίες δεν έχουν μηδενικές αρχικές συνθήκες. Η δυνατότητα αυτή οφείλεται στις ιδιότητες του MML που αναφέρονται στην παράγωγο και το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης. Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν οι εφαρμογές των μετασχηματισμών Laplace σε ότι αφορά τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων. Προσδιορίσαμε τη συνάρτηση μεταφοράς συστήματος από τη διαφορική εξίσωση που συνδέει την έξοδο και την είσοδο του συστήματος, υποθέτοντας ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές. Επίσης, με τη βοήθεια της διαφορικής εξίσωσης, προσδιορίσαμε το MML της εξόδου συστήματος, το οποίο μπορεί να μη βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας, και αντιστρέφοντας το MML προσδιορίσαμε την έξοδο του συστήματος. Τέλος, παρουσιάστηκαν τα συμπεράσματα που εξάγουμε από την περιοχή σύγκλισης και τη θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο· αυτά αφορούν στην ευστάθεια και στην αιτιότητα του συστήματος καθώς και στη συμπεριφορά της κρουστικής απόκρισής του.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

6.1 Να υπολογιστεί το αιτιατό σήμα που έχει μετασχηματισμό Laplace

$$\alpha) X(s) = \frac{3s+7}{s^2+4s+3} \quad \beta) X(s) = \frac{3s-5}{s^2-2s-3}$$

$$\gamma) X(s) = \frac{s}{s^2+4} \quad \delta) X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13}$$

$$\epsilon) X(s) = \frac{2s^2+12}{s^3+4s} \quad \sigma) X(s) = \frac{s^2+5s+15}{s^3+3s^2}$$

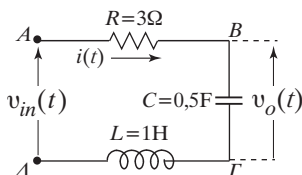
6.2 Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x_1(t) = u(t) - u(t-1)$ και $x_2(t) = u(t) - u(t-2)$ με τη βοήθεια της ιδιότητας της συνέλιξης του μετασχηματισμού Laplace.

6.3 Να βρεθούν τα αιτιατά σήματα των οποίων οι μετασχηματισμοί Laplace είναι

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad \text{και} \quad X_2(s) = \frac{s + 1}{(s + 3)(s^2 + 4s + 5)} \quad (6.4.32)$$

6.4 Για το κύκλωμα RLC που περιγράφεται στο Σχήμα 6.12.

1. Να προσδιοριστεί η γραμμική διαφορική εξίσωση η οποία συνδέει την είσοδο του κυκλώματος $v_{in}(t)$ και την έξοδο του $v_o(t)$.
2. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Είναι το σύστημα ευσταθές;
3. Αν η είσοδος του κυκλώματος είναι $v_{in}(t) = e^{-3t}u(t)$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, να υπολογίσετε την έξοδο $v_o(t)$ για $t > 0$, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι $v_o(0^-) = 1$ και $\left. \frac{dv_o(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = 2$.



Σχήμα 6.12 Το κύκλωμα του Προβλήματος 6.4.

6.5 Η συνάρτηση μεταφοράς, ενός ΓΧΑ αιτιατού συστήματος, είναι

$$H(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2} \quad (6.4.33)$$

Να υπολογιστεί η απόκριση $y(t)$ του συστήματος όταν το σήμα εισόδου $x(t)$ δίνεται από την

$$x(t) = e^{-|t|}, \quad -\infty < t < \infty \quad (6.4.34)$$

Να προσδιορίσετε το πεδίο σύγκλισης κάθε φορά που παρουσιάζεται μετασχηματισμός Laplace.

6.6 Η απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος στο σήμα

$$x(t) = u(t)$$

είναι το σήμα

$$y(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί η είσοδος του συστήματος όταν το σήμα εξόδου είναι

$$y_1(t) = (2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$$

6.7 Στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση

$$h(t) = e^{-2t}u(t)$$

Εφαρμόζεται το σήμα

$$x(t) = e^{-3t}u(t)$$

Να βρεθεί το σήμα εξόδου $y(t)$, του συστήματος

1. όταν το σύστημα αρχικά ηρεμεί και
2. όταν $y(0^-) = 1$.

6.8 Δίνεται το ευσταθές γραμμικά αναλλοίωτο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

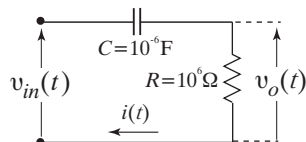
$$H(s) = \frac{2}{2-s}$$

1. Να βρεθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$, του συστήματος.
2. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί η έξοδος του όταν το σήμα εισόδου είναι

$$x(t) = 2e^{-2t}u(t)$$

6.9 Δίνεται το RC σε σειρά κύκλωμα του Σχήματος 6.13. Να υπολογιστούν

1. η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του κυκλώματος,
2. η κρουστική απόκριση $h(t)$ του κυκλώματος και
3. η συχνότητα - 3 dB.



Σχήμα 6.13 Το κύκλωμα του Προβλήματος 6.9.

Βιβλιογραφία

- 6.1 Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, Λ. Κοφίδης, “Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων”, *Τυπωθήτω - Γιώργος Δαρδανός*, Αθήνα 2003.
- 6.2 Α. Μάργαρης, “Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου”, *Εκδόσεις Τζιόλα* 2012.
- 6.3 S. Haykin, B. Veen, “Signal and Systems”, *John & Wiley Sons, Inc.* 2003
- 6.4 A. V. Oppenheim, R. S. Willsky, I. T. Young, “Signal and Systems”, *Prentice - Hall Inc.*, N. Y., 1983.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z

Ο μετασχηματισμός z είναι ο αντίστοιχος Laplace για σήματα διακριτού χρόνου και αποτελεί γενίκευση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Σκοπός του Κεφαλαίου είναι να ορίσει τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό z , ή απλά μετασχηματισμό z (Mz) και το μονόπλευρο μετασχηματισμό z (MMz), να περιγράψει τις βασικές τους ιδιότητες και να υπολογίσει τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς στοιχειωδών σημάτων που αντιμετωπίζουμε στη μελέτη γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου. Επίσης, στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί η δυνατότητα που έχει ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z να επιλύει εξισώσεις διαφορών, οι οποίες έχουν μη μηδενικές αρχικές συνθήκες και στη συνέχεια θα εκμεταλλευτούμε τη δυνατότητα αυτή για τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων. Τέλος, σκοπός του Κεφαλαίου είναι να αναδείξει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της αιτιότητας, της ευστάθειας ενός ΓΧΑ συστήματος, της περιοχής σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του και της θέσης των πόλων αυτής στο μιγαδικό επίπεδο.

Εισαγωγή

Η είσοδος και η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου συνδέονται με μία εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές. Έτσι για να προσδιορίσουμε την έξοδο ενός συστήματος αν γνωρίζουμε την είσοδό του θα πρέπει να επιλύουμε την αντίστοιχη εξίσωση διαφορών. Στο Κεφάλαιο 2 παρατηρήσαμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο ενός συστήματος αν γνωρίζουμε την είσοδό του, με τη βοήθεια του άθροισματος της συνέλιξης. Στο Κεφάλαιο 5 ορίσαμε το MF διακριτού χρόνου, ο οποίος παρέχει τη δυνατότητα μετάβασης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Η ιδιότητα της συνέλιξης του MF μετατρέπει το άθροισμα της συνέλιξης σε ένα απλό γινόμενο των αντιστοιχών μετασχηματισμών, με την βοήθεια του οποίου υπολογίζεται ο MF της εξόδου και στη συνέχεια με αντίστροφο MF προσδιορίζεται η έξοδος του συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Ο MF λοιπόν, έδωσε μία εύκολη λύση στο πρόβλημα εύρεσης της εξόδου ενός συστήματος, αν γνωρίζουμε την είσοδό του και την κρουστική του απόκριση. Δυστυχώς, όμως, υπάρχουν πολλά σήματα διακριτού χρόνου, τα οποία συχνά συναντάμε στη πράξη, για τα οποία δεν υπάρχει ο MF.

Στο Κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε τον Μετασχηματισμό z, ο οποίος μετατρέπει ένα σήμα διακριτού χρόνου σε μία αναλυτική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής. Όπως θα δούμε, σε πολλά από τα σήματα διακριτού χρόνου με πρακτική σπουδαιότητα, για τα οποία δεν υπάρχει ο MF διακριτού χρόνου, υπάρχει ο Mz και έτσι διευρύνεται το σύνολο των σημάτων διακριτού χρόνου για τα οποία μπορεί να επιτευχθεί μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας.

Στο Κεφάλαιο 5, με τη βοήθεια του MF υπολογίσαμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου το οποίο *βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας*. Στο Κεφάλαιο αυτό θα δούμε ότι αν το σύστημα δε βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας, ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z μας επιτρέπει να συμπεριλάβουμε τις αρχικές συνθήκες στη εξίσωση διαφορών και να προσδιορίσουμε την έξοδο του συστήματος.

Τέλος, στο Κεφάλαιο αυτό θα δούμε ότι η χρήση του μιγαδικού πεδίου και η θέση των πόλων σε αυτό μας επιτρέπει να εξάγουμε βασικές ιδιότητες των συστημάτων διακριτού χρόνου, όπως η αιτιότητα και η ευστάθεια. Για όλους τους παραπάνω λόγους, ο μετασχηματισμός z αποτελεί ένα ακόμα βασικό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων διακριτού χρόνου.

7.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Στην Ενότητα 2.5.2 έχουμε δει ότι αν η είσοδος ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος διακριτού χρόνου, που έχει κρουστική απόκριση $h(n)$, είναι z^n τότε το σήμα εξόδου είναι

$$y(n) = H(z) \cdot z^n \quad (7.1.1)$$

όπου

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (7.1.2)$$

είναι ο μετασχηματισμός z της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ και είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

Ο μετασχηματισμός z αντιστοιχεί στην ακολουθία $x(n)$ τη συνάρτηση

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (7.1.3)$$

Η $X(z)$ είναι μιγαδική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $z = re^{j\Omega}$ και ονομάζεται *αμφίπλευρος μετασχηματισμός z* του $x(n)$ ή απλά μετασχηματισμός z. Ο *μονόπλευρος μετασχηματισμός z* ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{X}(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (7.1.4)$$

Η περιοχή τιμών του z , για τις οποίες ο μετασχηματισμός z έχει πεπερασμένη τιμή καλείται *περιοχή σύγκλισης* (ΠΣ) (region of convergence ROC). Για ευκολία ο μετασχηματισμός z του $x(n)$ μερικές φορές συμβολίζεται ως $Z[x(n)]$ και η σχέση μεταξύ του $x(n)$ και του μετασχηματισμού του υποδεικνύεται ως

$$x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad (7.1.5)$$

Παρατηρήσεις

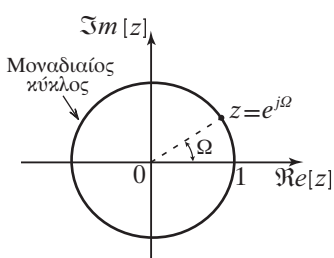
1. Αν ο Μz υπάρχει και για τιμές με $r = 1$, δηλαδή, $z = e^{j\Omega}$, τότε $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$ που είναι ο MF διακριτού χρόνου της ακολουθίας $x(n)$, δηλαδή,

$$X(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \mathcal{F}[x(n)] \quad (7.1.6)$$

Στο επίπεδο- s ο μετασχηματισμός Laplace μετατρέπεται σε μετασχηματισμό Fourier στο φανταστικό άξονα (δηλαδή, $s = j\omega$). Στο μιγαδικό επίπεδο- z ο μετασχηματισμός z μετατρέπεται σε μετασχηματισμό Fourier αν το μέτρο της ποσότητας μετασχηματισμού z είναι μονάδα ($z = e^{j\Omega}$), δηλαδή, αν βρίσκεται στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου- z Σχήμα 7.1. Με άλλα λόγια ο μοναδιαίος κύκλος του μιγαδικού επιπέδου- z έχει τον ίδιο ρόλο με το φανταστικό άξονα στο επίπεδο- s του μετασχηματισμού Laplace.

Μετά την παρατήρηση αυτή είναι σκόπιμο να κάνουμε μία απλή αλλαγή του συμβολισμού του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου την οποία συναντάμε πολλές φορές στα ενχειρίδια

$$X(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \mathcal{F}[x(n)] = X(e^{j\Omega}) \text{ αντί του } X(\Omega) \quad (7.1.7)$$



Σχήμα 7.1 Το μιγαδικό επίπεδο- z . Ο μετασχηματισμός z μετατρέπεται σε μετασχηματισμό Fourier για τις τιμές του z που βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο.

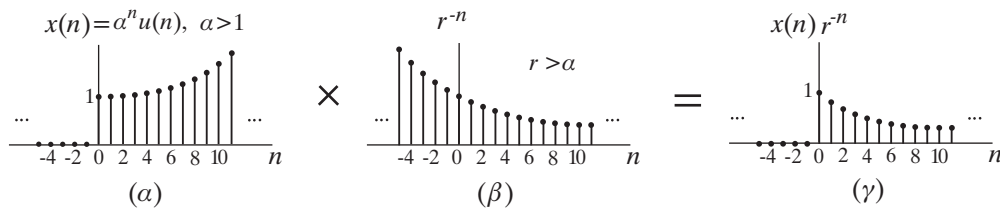
2. Ο Μz σχετίζεται με το DTFT και στην περίπτωση όπου η μεταβλητή $r \neq 1$. Πράγματι

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}] e^{-j\Omega n} = \mathcal{F}[x(n) \cdot r^{-n}] \quad (7.1.8)$$

Παρατηρούμε ότι $X(re^{j\Omega})$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας $x(n)$ πολλαπλασιασμένης με την πραγματική εκθετική ακολουθία r^{-n} . Επομένως για να συγκλίνει ο μετασχηματισμός z πρέπει ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας $x(n) \cdot r^{-n}$ να συγκλίνει, δηλαδή, η ακολουθία $x(n)z^{-n}$ να είναι αριθμήσιμη κατά απόλυτη τιμή

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty \quad (7.1.9)$$

Η παρουσία του όρου r^{-n} παρέχει τη δυνατότητα σύγκλισης του αθροίσματος και κατά συνέπεια την ύπαρξη του μετασχηματισμού z ακόμη και αν δεν υπάρχει ο DTFT της $x(n)$. Ο DTFT της $x(n) = a^n u(n)$ δεν υπάρχει όταν $|a| > 1$, δεδομένου ότι $x(n)$ είναι μία εκθετική αύξουσα ακολουθία όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.2α. Αν επιλεγεί $r > a$ τότε η ακολουθία r^{-n} όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.2β ελαττώνεται ταχύτερα από ότι η $x(n)$ αυξάνεται. Έτσι η ακολουθία $x(n)r^{-n}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.2γ είναι αριθμήσιμη κατά απόλυτη τιμή και υπάρχει ο μετασχηματισμός z.



Σχήμα 7.2 (α) Η ακολουθία $x(n) = a^n u(n)$ για τη οποία δεν υπάρχει ο DTFT (β) ο παράγοντας εξασθένισης r^{-n} και (γ) η ακολουθία $x(n)r^{-n}$ η οποία είναι αριθμήσιμη κατά απόλυτη τιμή.

7.1.1 Μετασχηματισμός z στοιχειωδών ακολουθιών

Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε το Mz ορισμένων βασικών ακολουθιών.

Παράδειγμα 7.1.1 (Σήμα πεπερασμένης έκτασης)

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός z του ορθογώνιου παραθύρου διάρκειας $N + 1$

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (7.1.10)$$

Λύση Ο μετασχηματισμός z είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^N 1z^{-n} = z^{-N} \sum_{n=0}^N z^n$$

και με τη βοήθεια του τύπου με τον οποίο υπολογίζουμε το άθροισμα των όρων γεωμετρικής σειράς έχουμε

$$X(z) = \begin{cases} z^{-N} \frac{z^{N+1}-1}{z-1} = \frac{z^{N+1}-1}{z^N(z-1)}, & z \neq 1, z \neq 0 \\ N+1, & z = 1 \end{cases} \quad (7.1.11)$$

Η περιοχή σύγκλισης καλύπτει όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το μηδέν.

Παράδειγμα 7.1.2 (Το εκθετικό αιτιατό σήμα)

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός z για το σήμα

$$x(n) = a^n u(n) \quad (7.1.12)$$

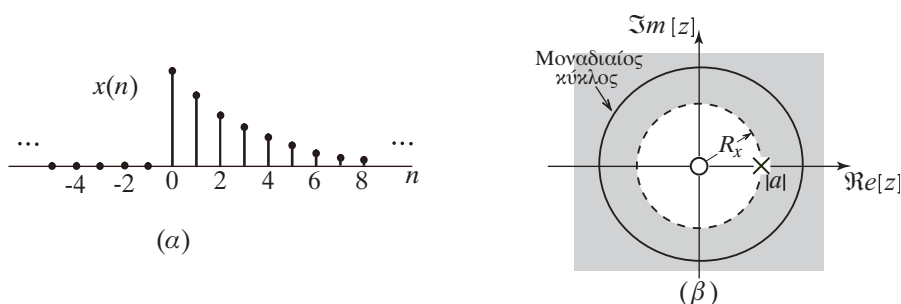
Λύση Ο μετασχηματισμός z είναι

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Για να συγκλίνει ο $X(z)$ πρέπει το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής σειράς, με λόγο az^{-1} , να συγκλίνει, δηλαδή, $\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$. Έτσι η περιοχή σύγκλισης είναι η περιοχή τιμών του z για την οποία $|az^{-1}| < 1$ ή $|z| > |a|$, οπότε

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{όταν } |z| > |a| \quad (7.1.13)$$

Ο μετασχηματισμός z ορίζεται στο εξωτερικό κύκλου ακτίνας $R_x = |a|$ βλέπε Σχήμα 7.3.



Σχήμα 7.3 (α) Το σήμα $x(n) = a^n u(n)$ όταν a είναι πραγματικός αριθμός < 1 και (β) η περιοχή σύγκλισης, ο πόλος και το μηδενικό του μετασχηματισμού z στο Παράδειγμα 7.1.2.

Για $a = 1$ τότε το σήμα $x(n)$ είναι η ακολουθία μοναδιαίου βήματος, η οποία έχει μετασχηματισμό z

$$u(n) \xleftrightarrow{Z} U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{με } |z| > 1 \quad (7.1.14)$$

δηλαδή, με περιοχή σύγκλισης το εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Παρατηρήσεις

1. Ο μετασχηματισμός z της ακολουθίας $x(n)$ συγκλίνει για κάθε πεπερασμένη τιμή του a , ενώ ο μετασχηματισμός Fourier του $x(n)$ συγκλίνει αν $|a| < 1$.
2. Αν $|a| > 1$ η περιοχή σύγκλισης δεν περιέχει το μοναδιαίο κύκλο και για τις τιμές αυτές δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας $a^n u(n)$.
3. Ο μετασχηματισμός z έχει κλασματική μορφή, δηλαδή, έχει μηδενικά και πόλους. Στο Παράδειγμα 7.1.2 ο μετασχηματισμός z έχει ένα μηδενικό “ο” για $z = 0$ και ένα πόλο “×” για $z = a$ (βλέπε Σχήμα 7.2).

Παράδειγμα 7.1.3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός z για το σήμα

$$x(n) = na^{n-1}u(n) \quad (7.1.15)$$

Λύση Παραγωγίζοντας την εξίσωση $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a}$ ως προς a έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}z^{-n} = \frac{z}{(z-a)^2} \text{ με } |z| > |a|$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει

$$x(n) = na^{n-1}u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{z}{(z-a)^2} \text{ με } |z| > |a| \quad (7.1.16)$$

Νέα παραγωγή ως προς a δίνει

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a^{n-2}z^{-n} = 2 \frac{z}{(z-a)^3} \text{ με } |z| > |a|$$

για από την οποία έχουμε

$$x(n) = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{z}{(z-a)^3} \text{ με } |z| > |a| \quad (7.1.17)$$

Αν επαναλάβουμε την παραγωγή θα οδηγηθούμε σε αντίστοιχα αποτελέσματα.

Παράδειγμα 7.1.4

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός z του μοναδιαίου δείγματος.

Λύση Ο μετασχηματισμός z του μοναδιαίου δείγματος $x(n) = \delta(n)$ είναι

$$Z[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1, \text{ με } z \neq 0 \quad (7.1.18)$$

και του ολισθημένου κατά k βήματα μοναδιαίου δείγματος $\delta(n - k)$, είναι

$$Z[\delta(n - k)] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ z^{-k}, & k \geq 0 \end{cases} \quad (7.1.19)$$

Η περιοχή σύγκλισης καλύπτει όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από την αρχή,

Παράδειγμα 7.1.5

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός z του σήματος

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \quad (7.1.20)$$

Λύση Ο μετασχηματισμός z είναι

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \\ &= \frac{2 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \end{aligned}$$

Τελικά

$$X(z) = \frac{z(2z - \frac{5}{6})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})} \quad (7.1.21)$$

Για να έχουμε σύγκλιση του $X(z)$ πρέπει $|z| > 1/2$ και $|z| > 1/3$. Επομένως πρέπει $|z| > 1/2$. Μπορούμε να οδηγηθούμε στα ίδια αποτελέσματα αν βασιστούμε στα δύο προηγούμενα παραδείγματα και χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού z την οποία θα δούμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα 7.1.6 (Αυστηρά μη αιτιατό εκθετικό σήμα)

$$x(n) = -a^n u(-n - 1) \quad (7.1.22)$$

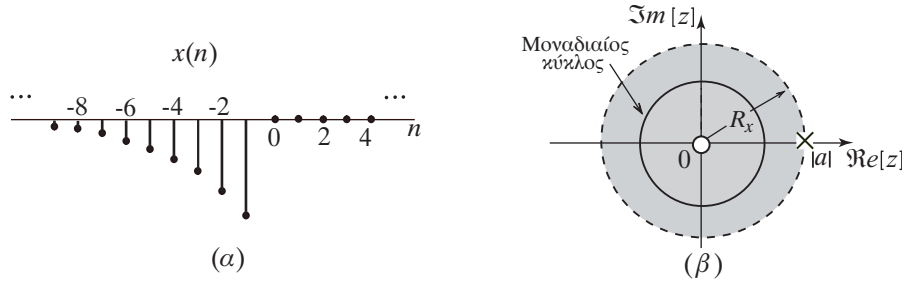
Λύση Ο μετασχηματισμός z είναι

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

αν $|a^{-1}z| < 1$ ή ισοδύναμα $|z| < |a|$ το άθροισμα συγκλίνει και έχουμε

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1 - a^{-1}z - 1}{1 - a^{-1}z} = \frac{z}{z - a} \quad (7.1.23)$$

με περιοχή σύγκλισης το εσωτερικό κύκλου ακτίνας $R_x = |a|$ Σχήμα 7.4.



Σχήμα 7.4 (α) Το σήμα $x(n) = -a^n u(-n-1)$ όταν a πραγματός αριθμός > 1 και (β) η περιοχή σύγκλισης, ο πόλος και το μηδενικό του μετασχηματισμού z στο Παράδειγμα 7.1.6.

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός z του αυστηρά μη αιτιατού σήματος $x(n) = -a^n u(-n-1)$ έχει την ίδια αλγεβρική παράσταση με το εκθετικό αιτιατό σήμα $x(n) = a^n u(n)$, αλλά άλλη περιοχή σύγκλισης. Αυτό σημαίνει ότι η περιοχή σύγκλισης, όπως και στο μετασχηματισμό Laplace, αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα του μετασχηματισμού z και πρέπει πάντοτε να καθορίζεται. Αν μας δοθεί μόνο ο μετασχηματισμός z χωρίς την αντίστοιχη περιοχή σύγκλιση του θα υπάρχει αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της ακολουθίας που οδήγησε σ' αυτόν, αφού θα υπάρχουν περισσότερες από μία απαντήσεις.

Παράδειγμα 7.1.7

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός z του σήματος

$$x(n) = a^{|n|}, \quad -\infty < n < \infty \text{ και } |a| < 1 \quad (7.1.24)$$

Λύση Το σήμα $x(n)$ γράφεται

$$x(n) = a^n u(n) + a^{-n} u(-n-1)$$

Από το Παράδειγμα 7.1.2 έχουμε

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \text{ με } |z| > |a|$$

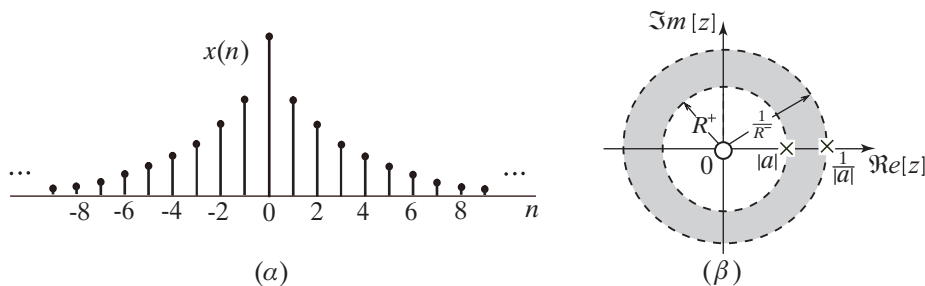
ενώ από το Παράδειγμα 7.1.6 έχουμε

$$a^{-n} u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} \frac{-1}{1 - a^{-1}z^{-1}} = \frac{az}{1 - az} \text{ με } |z| < \frac{1}{|a|}$$

Επειδή $|a| < 1$, είναι και $|a| < |a|^{-1}$. Έτσι ο μετασχηματισμός z του $x(n)$ είναι

$$X(z) = \frac{z}{z - a} + \frac{az}{1 - az}, \text{ με } |a| < |z| < \frac{1}{|a|} \quad (7.1.25)$$

Στο Σχήμα 7.6 φαίνονται η περιοχή σύγκλισης, το μηδενικό και οι πόλοι του Mz της ακολουθίας $x(n) = a^{|n|}$.



Σχήμα 7.5 (α) Η ακολουθία $x(n) = a^{|n|}$ όταν a πραγματός αριθμός < 1 και (β) η περιοχή σύγκλισης, οι πόλοι και το μηδενικό του μετασχηματισμού z στο Παράδειγμα 7.1.7.

Παράδειγμα 7.1.8

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός z του σήματος

$$x(n) = a^n, \quad -\infty < n < \infty \quad (7.1.26)$$

Λύση Το σήμα $x(n)$ γράφεται

$$x(n) = a^n u(n) + a^n u(-n - 1)$$

Από το Παράδειγμα 7.1.2 έχουμε

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad \text{με } |z| > |a|$$

ενώ από το Παράδειγμα 7.1.6 έχουμε

$$a^n u(-n - 1) \xleftrightarrow{Z} -\frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad \text{με } |z| < |a|$$

Παρατηρούμε ότι ενώ οι μετασχηματισμοί z της $a^n u(n)$ και της $a^n u(-n - 1)$ υπάρχουν, επειδή πρέπει ταυτόχρονα να ισχύει $|z| > |a|$ και $|z| < |a|$, το εκθετικό σήμα $x(n) = a^n$ δεν έχει αμφίπλευρο μετασχηματισμό z .

7.1.2 Ιδιότητες της περιοχής σύγκλισης-ύπαρξη μετασχηματισμού z

Από τα προηγούμενα παραδείγματα παρατηρήσαμε ότι ο μετασχηματισμός z δεν προσδιορίζει μονοσήμαντα την ακολουθία (σήμα) εκτός αν έχει ορισθεί η περιοχή σύγκλισης. Επίσης παρατηρήσαμε ότι η μορφή της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού z εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της ακολουθίας. Στην ενότητα αυτή θα βρούμε το τρόπο με το οποίο συνδέεται η περιοχή σύγκλισης με τα χαρακτηριστικά της ακολουθίας $x(n)$. Θα παρουσιάσουμε τις ιδιότητες χρησιμοποιώντας διαισθητικά επιχειρήματα παρά αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις. Γνωρίζοντας τις ιδιότητες είναι εφικτός ο

προσδιορισμός της περιοχής σύγκλισης από το μετασχηματισμό z , $X(z)$, και έχοντας περιορισμένη γνώση των χαρακτηριστικών της ακολουθίας $x(n)$.

Μία πρώτη ιδιότητα είναι ότι η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού z , που είναι ρητή συνάρτηση της μεταβλητής z , δεν περιέχει πόλους.

Όπως παρατηρήσαμε στην προηγούμενη ενότητα για να υπάρξει ο μετασχηματισμός z του σήματος $x(n)$ πρέπει

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty \quad (7.1.27)$$

η ποσότητα r είναι το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = r \cdot e^{j\Omega}$ και οι τιμές της πραγματικής μεταβλητής r που ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα ορίζουν τη περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού. Είναι φανερό ότι η σύγκλιση εξαρτάται μόνο από το μέτρο $r = |z|$ και όχι από το Ω , το οποίο σημαίνει ότι η περιοχή σύγκλισης θα καθορίζεται από ομόκεντρους κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου- z .

Για μία πεπερασμένου μήκους ακολουθία, δηλαδή, $x(n) = 0$ αν $n < N_1$ και $n > N_2$ η οποία είναι φραγμένη, δηλαδή, υπάρχει θετικός αριθμός M για τον οποίο $|x(n)| \leq M$ ο μετασχηματισμός z είναι

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)z^{-n} \quad (7.1.28)$$

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση αυτή συγκλίνει για κάθε τιμή του z , δηλαδή,

η περιοχή σύγκλισης μιας πεπερασμένου μήκους και φραγμένης ακολουθίας είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο- z με δύο πιθανές εξαιρέσεις

1. αν $N_1 < 0$ τότε οι τιμές του z με άπειρο μέτρο αποκλείονται από την περιοχή σύγκλισης.
2. αν $N_1 < 0$ και $N_2 > 0$ τότε η αρχή των αξόνων αποκλείεται από την περιοχή σύγκλισης.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη γενική περίπτωση κατά την οποία η ακολουθία $x(n)$ δεν είναι περιορισμένης διάρκειας και είναι φραγμένη. Η ακολουθία αυτή ονομάζεται *αμφίπλευρη ακολουθία*. Στην περίπτωση αυτή διαχωρίζουμε το άθροισμα $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty$ σε δύο τμήματα. Στο πρώτο τμήμα $I_-(r)$ τα όρια του αθροίσματος είναι $-\infty$ και -1

$$I_-(r) = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)|r^{-n}$$

Στο δεύτερο τμήμα $I_+(r)$ τα όρια του αθροίσματος είναι 0 και ∞

$$I_+(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| r^{-n}$$

δηλαδή,

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)| r^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| r^{-n} = I_-(r) + I_+(r)$$

Για να είναι το $|X(z)|$ φραγμένο πρέπει και τα δύο επιμέρους αθροίσματα να είναι πεπερασμένα.

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να φράξουμε τη $|x(n)|$ βρίσκοντας τις ελάχιστες θετικές σταθερές M_α , M_ϑ , r_α και r_ϑ τέτοιες ώστε

$$|x(n)| \leq M_\alpha (r_\alpha)^n, \quad n < 0, \quad (7.1.29)$$

και

$$|x(n)| \leq M_\vartheta (r_\vartheta)^n, \quad n \geq 0 \quad (7.1.30)$$

Η ακολουθία $x(n)$ η οποία ικανοποιεί τα φράγματα δεν αυξάνεται ταχύτερα από την ακολουθία $(r_\vartheta)^n$ για τις θετικές τιμές του n και της $(r_\alpha)^n$ για τις αρνητικές τιμές της n . Σημειώνεται ότι αν και υπάρχουν ακολουθίες οι οποίες δεν ικανοποιούν τα παραπάνω φράγματα, για παράδειγμα η ακολουθία α^{n^2} , οι ακολουθίες αυτές δεν εμφανίζονται σε φυσικές εφαρμογές και έτσι δεν μας δημιουργούν προβλήματα.

Αν το φράγμα που προσδιορίζεται από την (7.1.29) ικανοποιείται, τότε

$$I_-(r) = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)| r^{-n} \leq M_\alpha \sum_{n=-\infty}^{-1} (r_\alpha)^n r^{-n} \\ \stackrel{m \equiv -n}{=} M_\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_\alpha} \right)^m \quad (7.1.31)$$

Για να υπάρχει το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου πρέπει ο λόγος $\lambda = \frac{r}{r_\alpha}$ να είναι μικρότερος της μονάδας. Επομένως το άθροισμα $\sum_1^{\infty} \left(\frac{r}{r_\alpha} \right)^m$ υπάρχει για τις τιμές του z οι οποίες ικανοποιούν την $|z| = r < r_\alpha$. Αν το φράγμα που προσδιορίζεται από την (7.1.30) ικανοποιείται, τότε

$$I_+(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| r^{-n} \leq M_\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} (r_\vartheta)^n r^{-n} \\ = M_\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_\vartheta}{r} \right)^n \quad (7.1.32)$$

Το άθροισμα $\sum_0^\infty \left(\frac{r_\vartheta}{r}\right)^m$ υπάρχει για τις τιμές του z οι οποίες ικανοποιούν την $|z| = r > r_\vartheta$.

Παρατηρούμε ότι το πρώτο άθροισμα υπάρχει για τις τιμές το z για τις οποίες $|z| < r_\alpha$ ενώ το δεύτερο για τις τιμές το z για τις οποίες $|z| > r_\vartheta$. Στη περίπτωση αυτή η περιοχή σύγκλισης είναι η τομή των δύο παραπάνω περιοχών του επιπέδου- z .

Η περιοχή σύγκλισης μιας αμφίπλευρης ακολουθίας αποτελείται από τις τιμές του μιγαδικού επιπέδου z για τις οποίες ισχύει $r_\vartheta < |z| < r_\alpha$, δηλαδή, η περιοχή σύγκλισης έχει μορφή δακτυλίου.

Παράδειγμα αμφίπλευρης ακολουθίας είναι η ακολουθία $x(n) = a^{|n|}$ στο Παράδειγμα 7.1.7.

Αν $r_\vartheta \geq r_\alpha$ τότε οι δύο περιοχές σύγκλισης δεν αλληλοεπικαλύπτονται και η περιοχή σύγκλισης του $X(z)$ είναι το κενό σύνολο (βλέπε Παράδειγμα 7.1.8).

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη περίπτωση κατά την οποία η ακολουθία $x(n)$, ικανοποιεί τη συνθήκη $x(n) = 0$ για $n < N_1$. Η ακολουθία αυτή ονομάζεται *δεξιόπλευρη ακολουθία*. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$|X(z)| \leq \sum_{n=N_1}^{\infty} |x(n)|r^{-n} \leq \sum_{n=N_1}^{\infty} M_\vartheta r_\vartheta^n r^{-n} = M_\vartheta \sum_{n=N_1}^{\infty} \left(\frac{r_\vartheta}{r}\right)^n \quad (7.1.33)$$

όπου υποθέσαμε ότι το φράγμα που προσδιορίζεται από την (7.1.30) ικανοποιείται. Για να υπάρχει το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου πρέπει ο λόγος $\lambda = \frac{r_\vartheta}{r}$ να είναι μικρότερος της μονάδας. Επομένως ο $X(z)$ υπάρχει για τις τιμές του z οι οποίες ικανοποιούν την $|z| = r > r_\vartheta$.

Η περιοχή σύγκλισης μιας δεξιόπλευρης ακολουθίας αποτελείται από τις τιμές του μιγαδικού επιπέδου z για τις οποίες ισχύει $r_\vartheta < |z|$, δηλαδή, η περιοχή σύγκλισης μιας δεξιόπλευρης ακολουθίας του Mz εκτείνεται έξω από κύκλο ακτίνας r_ϑ στο επίπεδο- z . Δεδομένου ότι η περιοχή σύγκλισης δεν περιέχει πόλους r_ϑ είναι η μικρότερη ακτίνα κύκλου στον οποίο περιέχονται όλοι οι πόλοι του $X(z)$.

Η ακολουθία $x(n) = a^n u(n)$ την οποία μελετήσαμε στο Παράδειγμα 7.1.2 είναι μία δεξιόπλευρη ακολουθία.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη περίπτωση κατά την οποία η ακολουθία $x(n)$, ικανοποιεί τη συνθήκη $x(n) = 0$ για $n > N_2$. Η ακολουθία αυτή ονομάζεται *αριστερόπλευρη ακολουθία*. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{N_2} |x(n)|r^{-n} \leq \sum_{n=-\infty}^{N_2} M_\alpha r_\alpha^n r^{-n} = M_\alpha \sum_{n=-N_2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_\alpha}\right)^n \quad (7.1.34)$$

από την οποία παρατηρούμε ότι ο $X(z)$ υπάρχει για τις τιμές του z οι οποίες ικανοποιούν την $|z| = r < r_\alpha$.

Η περιοχή σύγκλισης μιας αριστερόπλευρης ακολουθίας αποτελείται από τις τιμές του μιγαδικού επιπέδου- z για τις οποίες ισχύει $|z| < r_\alpha$, δηλαδή, η περιοχή σύγκλισης μιας αριστερόπλευρης ακολουθίας του Mz είναι το εσωτερικό κύκλου ακτίνας r_α στο επίπεδο- z . Δεδομένου ότι η περιοχή σύγκλισης δεν περιέχει πόλους, r_α είναι η μεγαλύτερη ακτίνα κύκλου στον οποίο δεν περιέχονται οι πόλοι του $X(z)$.

Παράδειγμα αριστερόπλευρης ακολουθίας είναι η ακολουθία $x(n) = -a^n u(-n-1)$ στο Παράδειγμα 7.1.6.

Ανάλογα με το είδος του σήματος καταλήξαμε σε τρεις διαφορετικούς τύπους περιοχών σύγκλισης. Σημειώνεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή, αν η περιοχή σύγκλισης είναι το εξωτερικό κύκλου $|z| > R$ το σήμα είναι αιτιατό, αν είναι το εσωτερικό κύκλου $|z| < R$ είναι μη αιτιατό και αν έχει μορφή δακτυλίου $R^+ < |z| < R^-$ το σήμα είναι μία αμφίπλευρη ακολουθία.

7.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ Z

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού z . Οι ιδιότητες αυτές θα μας βοηθήσουν στον υπολογισμό του μετασχηματισμού z μιας δεδομένης ακολουθίας χωρίς κατ' ανάγκη να προσδιορίζεται το σχετικό άθροισμα.

(1) Γραμμικότητα

Αν $x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z)$ με περιοχή σύγκλισης P_1 και $x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z)$ με περιοχή σύγκλισης P_2 τότε για οποιοσδήποτε σταθερές a και b ισχύει

$$a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n) \xleftrightarrow{Z} a \cdot X_1(z) + b \cdot X_2(z) \quad (7.2.1)$$

Η περιοχή σύγκλισης του $Z[a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n)]$ είναι τουλάχιστον η $P_1 \cap P_2$. Η λέξη “τουλάχιστον” χρησιμοποιήθηκε για την περίπτωση κατά την οποία ο γραμμικός συνδυασμός είναι τέτοιος ώστε κάποια μηδενικά να εξουδετερώνουν ορισμένους πόλους. Σε μια τέτοια περίπτωση η περιοχή σύγκλισης είναι μεγαλύτερη από την τομή των δύο επιμέρους περιοχών σύγκλισης.

Η απόδειξη της γραμμικότητας αποτελεί άμεσο επακόλουθο της γραμμικότητας του αθροίσματος στον ορισμό του μετασχηματισμού z .

(2) Ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης

Έστω σήμα $x(n)$ με αμφίπλευρο μετασχηματισμό z $X(z)$ και περιοχή σύγκλισης $P = \{z \in C : R^+ < |z| < R^-\}$, τότε για κάθε ακέραιο n_0 , θετικό ή αρνητικό, ισχύει

$$x(n + n_0) \xleftrightarrow{Z} z^{n_0} X(z), \quad R^+ < |z| < R^- \quad (7.2.2)$$

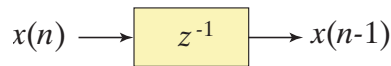
Απόδειξη

Η απόδειξη απορρέει άμεσα από τους ορισμούς. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}
 Z[x(n + n_0)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n + n_0) z^{-n} \\
 &\stackrel{i=n+n_0}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) z^{-i+n_0} \\
 &= z^{n_0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) z^{-i} \\
 &= z^{n_0} X(z)
 \end{aligned}$$

Για $n_0 = -1$ έχουμε $Z[x(n - 1)] = z^{-1} \cdot X(z)$.

Το σύστημα διακριτού χρόνου του Σχήματος 7.6 το οποίο προκαλεί καθυστέρηση ενός δείγματος συμβολίζεται με z^{-1} . Γενικά ένα σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο προκαλεί καθυστέρηση κατά m δείγματα συμβολίζεται με z^{-m} .



Σχήμα 7.6 Σχηματική περιγραφή συστήματος καθυστέρησης ενός δείγματος.

(3) Ιδιότητα της συνέλιξης ή συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου

Αν $x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z)$ με περιοχή σύγκλισης P_1 και $x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z)$ με περιοχή σύγκλισης P_2 τότε

$$x(n) = x_1(n) \star x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) \quad (7.2.3)$$

Η περιοχή σύγκλισης του $X_1(z) \cdot X_2(z)$ είναι τουλάχιστον η $P_1 \cap P_2$. Σε μερικές περιπτώσεις μπορεί το γινόμενο να υπάρχει και σε μεγαλύτερη περιοχή, για τους ίδιους λόγους όπως και στη γραμμικότητα.

Απόδειξη

Επειδή

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n - k)$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right] z^{-n} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n} \right] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-(n-k)} \right] \\
 &\stackrel{m=n-k}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m)z^{-m} \right] \\
 &= X_1(z) \cdot X_2(z) \tag{7.2.4}
 \end{aligned}$$

(4) Ιδιότητα της διαμόρφωσης ή ολίσθησης συχνότητας-κλιμάκωσης στο πεδίο

του z

Έστω σήμα $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)$ με περιοχή σύγκλισης $P = \{z \in C : R^+ < |z| < R^-\}$, και c μιγαδικός αριθμός. Τότε ο μετασχηματισμός z του σήματος $y(n) = c^n x(n)$ είναι

$$y(n) = c^n x(n) \xleftrightarrow{Z} Y(z) = X\left(\frac{z}{c}\right) \text{ με } |c|R^+ < |z| < |c|R^- \tag{7.2.5}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c^n x(n)z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{c}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{c}\right)
 \end{aligned}$$

(5) Ιδιότητα της παραγωγισής στο πεδίο του z

Έστω σήμα $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)$ με περιοχή σύγκλισης $P = \{z \in C : R^+ < |z| < R^-\}$, τότε

$$nx(n) \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz} \text{ με την ίδια περιοχή σύγκλισης} \tag{7.2.6}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\
 \frac{dX(z)}{dz} &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-(n+1)} \\
 &= -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} \\
 &= -z^{-1} Z[nx(n)]
 \end{aligned}$$

(6) Ιδιότητα της συζυγίας (Συζυγής ακολουθία)

Έστω μιγαδικό σήμα $x(n)$ με μετασχηματισμό z $X(z)$ με περιοχή σύγκλισης $P = \{z \in C : R^+ < |z| < R^-\}$, τότε

$$\begin{aligned}
 x^*(n) &\xleftrightarrow{Z} X^*(z^*), \quad R^+ < |z| < R^- \\
 \Re [x(n)] &\xleftrightarrow{Z} \frac{1}{2} [X(z) + X^*(z^*)] \\
 \Im [x(n)] &\xleftrightarrow{Z} \frac{1}{2j} [X(z) - X^*(z^*)]
 \end{aligned} \tag{7.2.7}$$

Απόδειξη

Αν $y(n) = x^*(n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)z^{-n} \\
 Y^*(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n} = X(z^*) \\
 Y(z) &= Z[x^*(n)] = X^*(z^*)
 \end{aligned} \tag{7.2.8}$$

(7) Κατοπτρισμός στο χρόνο

Έστω σήμα $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)$ με περιοχή σύγκλισης $P = \{z \in C : R^+ < |z| < R^-\}$, τότε

$$x(-n) \xleftrightarrow{Z} X(z^{-1}), \text{ με } \Pi\Sigma \frac{1}{R^-} < |z| < \frac{1}{R^+} \tag{7.2.9}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
 Z[x(-n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} \\
 &\stackrel{k=-n}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(z^{-1})^{-k} \\
 &= X(z^{-1})
 \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

(8) Συσχέτιση

Αν θεωρήσουμε δύο σήματα ως διανύσματα, ένας αριθμός που μετράει την ομοιότητά τους είναι το εσωτερικό τους γινόμενο. Αυτό γίνεται μέγιστο για διανύσματα (σήματα) που συμπίπτουν, ενώ μηδενίζεται για διανύσματα που είναι κάθετα.

Ωστόσο, σε ότι αφορά στα σήματα, πολλές φορές αυτά είναι απλώς μετατοπισμένα το ένα σε σχέση με το άλλο χωρίς να είναι ουσιαστικά διαφορετικά. Έτσι ένας μόνο αριθμός (εσωτερικό γινόμενο) δεν είναι αρκετός για να αντιμετωπίσει όλες τις πιθανές σχετικές μετατοπίσεις μεταξύ των σημάτων. Χρειάζεται λοιπόν να οριστεί ένα νέο σήμα (συνάρτηση) του οποίου η ανεξάρτητη μεταβλητή θα εκφράζει την μετατόπιση μεταξύ των δύο σημάτων. Ορίζεται λοιπόν η *συνάρτηση - ακολουθία συσχέτισης* ή *ετερο-συσχέτιση* των σημάτων διακριτού χρόνου - ακολουθιών $x(n)$ και $y(n)$ ως

$$r_{xy}(l) = x(n) \star y(-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-l), \quad -\infty < l < \infty \tag{7.2.11}$$

Την ανεξάρτητη μεταβλητή l θα ονομάζουμε *καθυστερήση (lag)*.

Αν $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)$ με περιοχή σύγκλισης P_1 και $y(n) \xleftrightarrow{Z} Y(z)$ με περιοχή σύγκλισης P_2 , τότε ο μετασχηματισμός z της συσχέτισης των δύο σημάτων είναι

$$r_{xy}(l) \xleftrightarrow{Z} X(z) \cdot Y(z^{-1}) \tag{7.2.12}$$

Απόδειξη

Η απόδειξη της ιδιότητας γίνεται αν χρησιμοποιηθούν οι ιδιότητες συνέλιξης και του κατοπτρισμού. Η περιοχή σύγκλισης του $Z[r_{xy}(l)]$ είναι τουλάχιστον η $P_1 \cap P_2$.

Η συσχέτιση εξαρτάται από την ενέργεια των δύο σημάτων. Ο *συντελεστής συσχέτισης* $\rho_{xy}(l)$ δύο σημάτων διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$\rho_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{\mathcal{E}_x} \sqrt{\mathcal{E}_y}}, \quad -\infty < l < \infty \tag{7.2.13}$$

είναι συνάρτηση της καθυστέρησης των δύο ακολουθιών και είναι ανεξάρτητος από την ενέργειά τους.

Ένα άλλο πολύ χρήσιμο μέγεθος είναι η *συνάρτηση αυτοσυσχέτισης* (autocorrelation). Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ορίζεται από τη σχέση

$$r_{xx}(l) = x(n) \star x(-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-l), \quad -\infty < l < \infty \quad (7.2.14)$$

Η ακολουθία αυτοσυσχέτισης έχει δύο βασικές ιδιότητες

α) Η ενέργεια του σήματος είναι ίση με τη τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισής του για $l = 0$. Πράγματι

$$r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 dn = \mathcal{E}_x \quad (7.2.15)$$

β) Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ισούται με τη φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος. Η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας ενέργειας περιγράφει τον τρόπο με το οποίο κατανέμεται η ενέργεια του σήματος στο χώρο συχνοτήτων. Πράγματι, λόγω του θεωρήματος της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier έχουμε

$$r_{xx}(l) = x(n) \star x^*(-n) \Rightarrow \mathcal{F}[r_{xx}(l)] = |X(\Omega)|^2 \quad (7.2.16)$$

και από το θεώρημα του Parseval έχουμε

$$\mathcal{E}_x = r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 dn = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (7.2.17)$$

Πέρα από τα στοιχειώδη σήματα, τα οποία μελετήθηκαν στα παραδείγματα, υπάρχουν και αρκετά άλλα που επίσης συναντώνται στη μελέτη γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου. Οι μετασχηματισμοί z των σημάτων αυτών υπολογίζονται με τη βοήθεια του ορισμού και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού z . Στον Πίνακα 7.1 υπάρχουν οι ιδιότητες του μετασχηματισμού z , ενώ στον Πίνακα 7.2 υπάρχουν οι μετασχηματισμοί z και οι αντίστοιχες περιοχές σύγκλισης για τις πλέον συνηθισμένες και χρήσιμες περιπτώσεις.

7.3 Ο ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z

Στην παράγραφο αυτή θα εστιάσουμε στα βασικά σημεία του μονόπλευρου μετασχηματισμού z και κυρίως σε αυτά που τον διαφοροποιούν από το μετασχηματισμό z . Η διαφορά μεταξύ των δύο μετασχηματισμών εντοπίζεται στα όρια του αθροίσματος ορισμού $\mathcal{X}(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.10 Οι ιδιότητες του Μετασχηματισμού z

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός z	Περιοχή σύγκλισης
	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	$P = \{z \in \mathbb{C} : R^+ < z < R^-\}$ $P_1 = \{z \in \mathbb{C} : R_1^+ < z < R_1^-\}$ $P_2 = \{z \in \mathbb{C} : R_2^+ < z < R_2^-\}$
Γραμμικότητα	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$
Χρονική ολίσθηση	$x(n+n_0)$	$z^{n_0} X(z)$	P
Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap P_2$
Κλιμάκωση στο πεδίο z ή ολίσθηση συχνότητας	$c^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{c}\right)$	$ c R^+ < z < c R^-$
Παραγωγή στο πεδίο z	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R^+ < z < R^-$
Συζυγίας	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	P
Αθροίσματος	$\sum_{k=-\infty}^n x(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$	Τουλάχιστον $P_1 \cap z > 1$
Κατοπτρισμός στον άξονα του χρόνου	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R^-} < z < \frac{1}{R^+}$

Προφανώς αν δύο σήματα διακριτού χρόνου είναι διαφορετικά για $n < 0$ και ίσα για $n \geq 0$ τότε έχουν τον ίδιο MMz και διαφορετικό Mz. Για αιτιατά σήματα, $x(n) = 0$ για $n < 0$, ο Mz και ο MMz συμπίπτουν. Με άλλα λόγια ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z του σήματος $x(n)$ ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό z του σήματος $x(n)u(n)$. Εφόσον το σήμα $x(n)u(n)$ είναι αιτιατό σήμα, η περιοχή σύγκλισης του μονόπλευρου μετασχηματισμού z είναι πάντα το εξωτερικό μέρος κύκλου με τη μικρότερη ακτίνα R_x που περιλαμβάνει τους πόλους του σήματος.

Σχεδόν όλες οι ιδιότητες του μετασχηματισμού z ισχύουν και για το μονόπλευρο. Επειδή το κάτω όριο του αθροίσματος ορισμού του μονόπλευρου μετασχηματισμού z είναι το μηδέν ο μονόπλευρος μετασχηματισμός έχει την ιδιότητα της δεξιάς και της αριστερής ολίσθησης οι οποίες αποτελούν τη δύναμη του μονόπλευρου μετασχηματισμού z. Οι ιδιότητες αυτές και η ιδιότητα της συνέλιξης παρέχει στο μονόπλευρο μετασχηματισμό z τη δυνατότητα επίλυσης εξισώσεων διαφορών, οι οποίες έχουν μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.

(1) Ιδιότητα της δεξιάς ολίσθησης - Καθυστέρηση

Αν $x(n) \xleftrightarrow{z} \mathcal{X}(z)$ με ακτίνα σύγκλισης R_x τότε

$$x(n - n_0) \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} \mathcal{X}(z) + z^{-n_0} \sum_{i=1}^{n_0} x(-i)z^i \text{ για κάθε } n_0 \geq 1 \tag{7.3.1}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.11 Μετασχηματισμοί z μερικών βασικών σημάτων διακριτού χρόνου

	Σήμα	Μετασχηματισμός z	Περιοχή σύγκλισης
1	$\delta(n)$	1	Για κάθε $z \neq 0$
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
3	$\delta(n-m), m > 0$	z^{-m}	$ z \neq 0$
4	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$ z > a $
5	$a^{n-1}u(n-1)$	$\frac{1}{z-a}$	$ z > a $
6	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
7	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$ z < a $
8	$-a^{n-1}u(-n)$	$\frac{1}{z-a}$	$ z < a $
9	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
10	$[\cos(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{1-(\cos \Omega_0)z^{-1}}{1-(2 \cos \Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z > 1$
11	$[\sin(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{(\sin \Omega_0)z^{-1}}{1-(2 \cos \Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z > 1$
12	$[r^n \cos(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{1-(r \cos \Omega_0)z^{-1}}{1-(2r \cos \Omega_0)z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13	$[r^n \sin(\Omega_0 n)]u(n)$	$\frac{(r \sin \Omega_0)z^{-1}}{1-(2r \cos \Omega_0)z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$ z > r$

Απόδειξη

Η απόδειξη απορρέει άμεσα από τους ορισμούς. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[x(n-n_0)] &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n} \stackrel{n-n_0=i}{=} \sum_{i=-n_0}^{\infty} x(i)z^{-i-n_0} \\
 &= z^{-n_0} \left[\sum_{i=-n_0}^{-1} x(i)z^{-i} + \sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{-i} \right] \\
 &= z^{-n_0} \mathcal{X}(z) + z^{-n_0} \sum_{i=1}^{n_0} x(-i)z^i
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κατά τη δεξιά ολίσθηση νέα δείγματα εισέρχονται στο διάστημα $[0, \infty)$ θα πρέπει να λάβουν και αυτά μέρος στους υπολογισμούς. Τα νέα δείγματα είναι τα $x(-1), x(-2), \dots, x(-n_0)$.

Για $n_0 = 1$ έχουμε $\mathcal{Z}[x(n-1)] = z^{-1}\mathcal{X}(z) + x(-1)$.

(2) Ιδιότητα της αριστερής ολίσθησης - Προήγηση

Αν $x(n) \xleftrightarrow{Z} \mathcal{X}(z)$ με ακτίνα σύγκλισης R_x τότε

$$z^{-n_0} \mathcal{Z}[x(n + n_0)] = \mathcal{X}(z) - \sum_{i=0}^{n_0-1} x(i)z^{-i} \text{ για κάθε } n_0 \geq 1 \quad (7.3.2)$$

Απόδειξη

Η απόδειξη απορρέει άμεσα από τους ορισμούς. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n + n_0)] &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n + n_0)z^{-n} \stackrel{n+n_0=i}{=} \sum_{i=n_0}^{\infty} x(i)z^{-i+n_0} \\ &= z^{n_0} \left[\sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{-i} - \sum_{i=0}^{n_0-1} x(i)z^{-i} \right] \\ &= z^{n_0} \left[\mathcal{X}(z) - \sum_{i=0}^{n_0-1} x(i)z^{-i} \right] \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κατά την αριστερή ολίσθηση κάποια από τα υπάρχοντα δείγματα βρίσκονται εκτός διαστήματος $[0, \infty)$ και συνεπώς πρέπει να αφαιρεθούν από το συνολικό άθροισμα. Τα δείγματα αυτά είναι τα $x(0), x(1), \dots, x(n_0 - 1)$.

Για $n_0 = 1$ έχουμε $z^{-1} \mathcal{Z}[x(n + 1)] = \mathcal{X}(z) - x(0)$.

(3) Θεώρημα της Αρχικής Τιμής

Αν $x(n) \xleftrightarrow{Z} \mathcal{X}(z)$ με ακτίνα σύγκλισης R_x τότε

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{X}(z) \quad (7.3.3)$$

(4) Θεώρημα της Τελικής Τιμής

Αν $x(n) \xleftrightarrow{Z} \mathcal{X}(z)$ με ακτίνα σύγκλισης R_x τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)\mathcal{X}(z) \quad (7.3.4)$$

Παρατήρηση: Τα θεωρήματα της αρχικής και τελικής τιμής, όπως και τα αντίστοιχα θεωρήματα του μετασχηματισμού Laplace, μας παρέχουν τη δυνατότητα υπολογισμού της ασυμπτωτικής τιμής της ακολουθίας $x(n)$ όταν είναι γνωστός ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z και έτσι αποφεύγεται ο υπολογισμός του $x(n)$ από τον $\mathcal{X}(z)$. Τα θεωρήματα ισχύουν όταν στη περιοχή σύγκλισης του $\mathcal{X}(z)$ ή $(z - 1)\mathcal{X}(z)$ περιλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος έτσι ώστε το σήμα, όπως θα δούμε, να είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 7.3.1

Να υπολογιστεί ο μονόπλευρος και ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός z του σήματος

$$x(n) = a^n u(n) \quad (7.3.5)$$

Λύση Επειδή $x(n) = 0$, $n < 0$, ο μονόπλευρος και ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός z είναι ίσοι

$$X(z) = \mathcal{X}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \text{ αν } |z| > |a| \quad (7.3.6)$$

Παράδειγμα 7.3.2

Να υπολογιστεί ο μονόπλευρος και ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός z του σήματος

$$y(n) = a^{n+1} u(n+1) \quad (7.3.7)$$

Λύση Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} \\ &= \frac{a}{1 - az^{-1}}, \text{ με } |z| > |a| \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής. Γνωρίζουμε $x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \mathcal{X}(z) = 1/(1 - az^{-1})$ με $|z| > |a|$. Με τη βοήθεια της ιδιότητας της αριστερής ολίσθησης έχουμε

$$\begin{aligned} z^{-1} \mathcal{Z}[x(n+1)] &= \mathcal{X}(z) - x(0) \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} - 1 \\ &= \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}} \Rightarrow \\ \mathcal{Z}[y(n)] &= \frac{a}{1 - az^{-1}} \end{aligned}$$

Για τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό z γνωρίζουμε ότι $x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = 1/(1 - az^{-1})$ με $|z| > |a|$. Με τη βοήθεια της ιδιότητας της ολίσθησης έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n+1)] &= zX(z) = \frac{z}{1 - az^{-1}} \Rightarrow \\ \mathcal{Z}[y(n)] &= \frac{z}{1 - az^{-1}}, |z| > |a| \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

(5) Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z περιοδικών σημάτων

Έστω το περιοδικό σήμα $x(n)$ με περίοδο N , δηλαδή, $x(n + N) = x(n)$. Τότε ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z $\mathcal{X}(z)$, του $x(n)$ υπάρχει και δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{X}(z) = \frac{1}{1 - z^{-N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \text{ με } |z| > 1 \quad (7.3.10)$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)z^{-n} + \dots + \sum_{n=kN}^{(k+1)N-1} x(n)z^{-n} + \dots \end{aligned}$$

Η αντικατάσταση $l = n - kN$ στο άθροισμα $\sum_{n=kN}^{(k+1)N-1} x(n)z^{-n}$ δίνει

$$\begin{aligned} \sum_{n=kN}^{(k+1)N-1} x(n)z^{-n} &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l + kN)z^{-(l+kn)} \\ &= z^{-kN} \sum_{l=0}^{N-1} x(l)z^{-l} \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(z) &= [1 + z^{-N} + z^{-2N} + \dots] \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \end{aligned}$$

Στον Πίνακα 7.3 υπάρχουν οι ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού z.

Παράδειγμα 7.3.3

Να υπολογιστεί ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z του περιοδικού ορθογώνιου κύματος με περίοδο N

$$x(t) = \begin{cases} 1, & kN \leq n < kN + N_1 \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & kN + N_1 \leq n < (k+1)N \quad N_1 < N \end{cases} \quad (7.3.11)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.12 Οι ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού z

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός z	Περιοχή σύγκλισης
	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$\mathcal{X}(z)$ $\mathcal{X}_1(z)$ $\mathcal{X}_2(z)$	$P = \{z \in \mathbb{C} : R < z \}$ $P_1 = \{z \in \mathbb{C} : R < z \}$ $P_2 = \{z \in \mathbb{C} : R < z \}$
Γραμμικότητα	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$a\mathcal{X}_1(z) + b\mathcal{X}_2(z)$	$P_1 \cap P_2$
Δεξιά ολίσθηση Καθυστέρηση	$x(n - n_0), \quad n_0 \geq 1$	$z^{-n_0} [\mathcal{X}(z) + \sum_{i=1}^{n_0} x(-i)z^i]$	$R < z $
Αριστερή ολίσθηση Προήγηση	$x(n + n_0), \quad n_0 \geq 1$	$z^{n_0} [\mathcal{X}(z) - \sum_{i=0}^{n_0-1} x(i)z^{-i}]$	$R < z $
Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου	$x_1(n) * x_2(n)$	$\mathcal{X}_1(z) \cdot \mathcal{X}_2(z)$	$P_1 \cap P_2$
Κλιμάκωση στο πεδίο z ή ολίσθηση συχνότητας	$c^n x(n)$	$\mathcal{X}\left(\frac{z}{c}\right)$	$ c R < z $
Συζυγίας	$x^*(n)$	$\mathcal{X}^*(z^*)$	$R < z $
Περιοδικό σήμα	$x(n + N) = x(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$	$ z > 1$
Θεώρημα αρχικής τιμής	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{X}(z)$		
Θεώρημα τελικής τιμής	$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)\mathcal{X}(z)$		

Λύση Ο μετασχηματισμός z δίνεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(z) &= \frac{1}{1 - z^{-N}} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-N}} \frac{z^{-N_1} - 1}{z^{-1} - 1} \end{aligned} \quad (7.3.12)$$

7.4 Ο ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z

Γνωρίζουμε

$$X(re^{j\Omega}) = \mathcal{F}[x(n) \cdot r^{-n}] \quad (7.4.1)$$

και αν $|z| = r$ και βρίσκεται στην περιοχή σύγκλισης έχουμε

$$x(n) \cdot r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}[X(re^{j\Omega})] \Rightarrow x(n) = r^n \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(re^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Με εισαγωγή της r^n στο εσωτερικό του ολοκληρώματος έχουμε

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(re^{j\Omega}) (re^{j\Omega})^n d\Omega \quad (7.4.2)$$

Με αλλαγή μεταβλητής $z = re^{j\Omega}$ και επειδή r είναι σταθερή ποσότητα, προκύπτει ότι $dz = jre^{j\Omega} d\Omega = jz d\Omega$ ή $d\Omega = (1/j)z^{-1} dz$. Το ολοκλήρωμα ορίζεται πάνω σε διάστημα 2π του Ω . Για τη νέα μεταβλητή z το διάστημα αυτό αντιστοιχεί σε καμπύλη γύρω από το κύκλο $|z| = r$. Έτσι έχουμε

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz \quad (7.4.3)$$

όπου C είναι μια αριστερόστροφη κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσης γύρω από την αρχή των αξόνων, η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού z , η δε ολοκλήρωση γίνεται αντίστροφα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

7.4.1 Υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού z για ρητές συναρτήσεις

Ο απευθείας υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού z μέσω του ολοκληρώματος της (7.4.3) είναι επίπονη διαδικασία και γι' αυτό συνήθως ακολουθούνται έμμεσοι τρόποι εύρεσης του αντίστροφου μετασχηματισμού z . Αν η μορφή της συνάρτησης $X(z)$ είναι απλή και μπορεί εύκολα να εκφραστεί ως άθροισμα επιμέρους στοιχειωδών όρων, τότε με τη χρήση γνωστών μετασχηματισμών z και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού z μπορούμε απ' ευθείας να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό z . Αν η συνάρτηση $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση τότε την αναπτύσσουμε σε απλά κλάσματα και υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό z , με τη χρήση γνωστών μετασχηματισμών z σε αυτά.

7.4.2 Υπολογισμός με ανάπτυξη σε απλά κλάσματα

Την ανάπτυξη μιας συνάρτησης σε απλά κλάσματα την έχουμε διαπραγματευθεί στο Παράρτημα Β. Εξειδικεύοντας την τεχνική στην περίπτωση του μετασχηματισμού z , διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

1. Αν ο βαθμός m , του πολωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού n , του πολωνύμου του παρονομαστή η ρητή συνάρτηση αναπτύσσεται σε απλά κλάσματα σύμφωνα με την εξίσωση

$$X(z) = \frac{C_{11}}{(z - z_1)} + \frac{C_{12}}{(z - z_1)^2} + \dots + \frac{C_{1r}}{(z - z_1)^r} + \frac{C_{21}}{(z - z_2)} + \frac{C_{31}}{(z - z_3)} + \dots + \frac{C_{(n-r)1}}{(z - z_{n-r})} \quad (7.4.4)$$

όπου z_1, z_2, \dots, z_l είναι οι $l = n - r$ πόλοι της $X(z)$ με πολλαπλότητες $r, 1, \dots, 1$ αντίστοιχα. Οι συντελεστές $C_{1,k}$ προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$C_{1k} = \frac{1}{(r-k)!} \left. \frac{d^{r-k}(z-z_1)^r X(z)}{dz^{r-k}} \right|_{z=z_1}, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (7.4.5)$$

Για τους απλούς πόλους οι συντελεστές C_{i1} προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$C_{i1} = (z - z_i)X(z)|_{z=z_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n - r \quad (7.4.6)$$

Έχοντας αναλύσει τη συνάρτηση $X(z)$ σε απλά κλάσματα, μπορούμε στη συνέχεια σχετικά εύκολα να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό z. Πράγματι υπολογίζουμε πρώτα τους επιμέρους μετασχηματισμούς z των απλών κλασμάτων και ύστερα αθροίζουμε τις προκύπτουσες εκφράσεις.

Ορισμένα από τα πιο συνηθισμένα ζεύγη μετασχηματισμών z παρατίθενται στον Πίνακα 7.2 Τα ζεύγη αυτά μας βοηθούν στον υπολογισμό του αντιστρόφου μετασχηματισμού z, εκφράζοντας την συνάρτηση $X(z)$ ως γραμμικό συνδυασμό απλουστέρων συναρτήσεων.

2. Αν ο βαθμός m , του πολωνύμου του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού n , του πολωνύμου του παρονομαστή τότε διαιρούμε πρώτα τα πολωνύμα και καταλήγουμε σε μια έκφραση που έχει τη μορφή

$$X(z) = B_{m-n}z^{m-n} + B_{m-n-1}z^{m-n-1} + \dots + B_0z^0 + X_1(z) \quad (7.4.7)$$

όπου η συνάρτηση $X_1(z)$ έχει βαθμό αριθμητή μικρότερο του βαθμού του παρονομαστή, και την οποία αναπτύσσουμε σε απλά κλάσματα σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Ένα συνηθισμένο τέχνασμα για να αποφύγουμε τη διαίρεση πολωνύμων, αν $m = n$, είναι να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση $X_1(z) = X(z)/z$ αυξάνοντας έτσι το βαθμό του πολωνύμου του παρονομαστή κατά ένα, και να αναπτύξουμε στη συνέχεια σε απλά κλάσματα τη συνάρτηση $X_1(z)$ όπως φαίνεται στο Παράδειγμα 7.4.3.

Παράδειγμα 7.4.1

Να υπολογιστεί το σήμα $x(n)$ το οποίο έχει μετασχηματισμό z τη συνάρτηση

$$X(z) = \frac{3 - 5/6z^{-1}}{(1 - 1/4z^{-1})(1 - 1/3z^{-1})} \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (7.4.8)$$

Λύση Αναλύουμε σε απλά κλάσματα

$$X(z) = \frac{C_1}{1 - 1/4z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - 1/3z^{-1}}$$

και υπολογίζουμε τις σταθερές C_1 και C_2 .

$$C_1 = (1 - 1/4z^{-1})X(z)|_{z^{-1}=4} = 1 \text{ και } C_2 = (1 - 1/3z^{-1})X(z)|_{z^{-1}=3} = 2$$

Έτσι ο μετασχηματισμός z αποκτά τη μορφή

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1/4z^{-1}} + \frac{2}{1 - 1/3z^{-1}} = X_1(z) + X_2(z)$$

Με τη βοήθεια του Παραδείγματος 7.1.2 έχουμε

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) = \frac{1}{1 - 1/4z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$x_2(n) = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) = \frac{2}{1 - 1/3z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Τελικά

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{3 - 5/6z^{-1}}{(1 - 1/4z^{-1})(1 - 1/3z^{-1})} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Παράδειγμα 7.4.2

Να υπολογιστεί το σήμα $x(n)$ το οποίο έχει μετασχηματισμό z τη συνάρτηση

$$X(z) = \frac{3 - 5/6z^{-1}}{(1 - 1/4z^{-1})(1 - 1/3z^{-1})} \quad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3} \quad (7.4.9)$$

Λύση Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1/4z^{-1}} + \frac{2}{1 - 1/3z^{-1}} = X_1(z) + X_2(z)$$

λόγω της περιοχής σύγκλισης και με τη βοήθεια των Παραδειγμάτων 7.1.2 και 7.1.5 έχουμε

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) = \frac{1}{1 - 1/4z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$x_2(n) = -2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) = \frac{2}{1 - 1/3z^{-1}} \quad |z| < \frac{1}{3}$$

Τελικά

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

Παράδειγμα 7.4.3

Να υπολογιστεί το σήμα $x(n)$ το οποίο έχει μετασχηματισμό z τη συνάρτηση

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + z - 2} \quad (7.4.10)$$

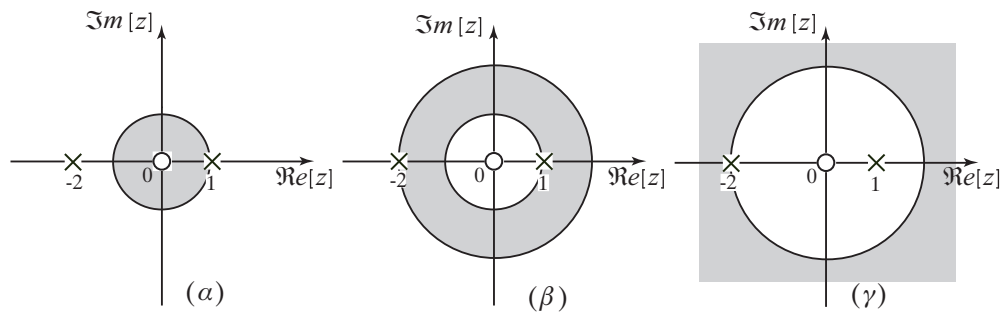
Λύση Αναλύουμε σε απλά κλάσματα τη συνάρτηση $X(z)/z$, και έχουμε

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{z+2} + \frac{1}{3} \frac{1}{z-1}$$

Έτσι προκύπτει

$$X(z) = -\frac{1}{3} \frac{z}{z+2} + \frac{1}{3} \frac{z}{z-1}$$

Για το ΓΧΑ σύστημα του παραδείγματος δεν προσδιορίζεται η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς. Οι πιθανές περιοχές σύγκλισης είναι οι τρεις, οι οποίες εικονίζονται στο Σχήμα 7.7.



Σχήμα 7.7 Οι πιθανές περιοχές σύγκλισης του μετασχηματισμού z της ακολουθίας $x(n)$ στο Παράδειγμα 7.4.3.

1. Στη περιοχή $\{z \in C : 0 < |z| < 1\}$ υποχρεωτικά έχουμε

$$Z^{-1} \left[\frac{z}{z+2} \right] = -(-2)^n u(-n-1) \text{ και } Z^{-1} \left[\frac{z}{z-1} \right] = -u(-n-1)$$

συνεπώς, το σήμα είναι

$$x(n) = \frac{1}{3}(-2)^n u(-n-1) - \frac{1}{3}u(-n-1)$$

2. Στη περιοχή $\{z \in C : 1 < |z| < 2\}$ υποχρεωτικά έχουμε

$$Z^{-1} \left[\frac{z}{z+2} \right] = -(-2)^n u(-n-1) \text{ και } Z^{-1} \left[\frac{z}{z-1} \right] = u(n)$$

συνεπώς, το σήμα είναι

$$x(n) = \frac{1}{3}(-2)^n u(-n-1) + \frac{1}{3}u(n)$$

3. Στη περιοχή $\{z \in C : 2 < |z| < \infty\}$ υποχρεωτικά έχουμε

$$Z^{-1} \left[\frac{z}{z+2} \right] = (-2)^n u(n) \text{ και } Z^{-1} \left[\frac{z}{z-1} \right] = u(n)$$

συνεπώς, το σήμα είναι

$$x(n) = -\frac{1}{3}(-2)^n u(n) + \frac{1}{3}u(n)$$

7.4.3 Υπολογισμός με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία αυτή αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $X(z)$ σε δυναμοσειρά και στη συνέχεια η ακολουθία $x(n)$ υπολογίζεται με αντιστοίχιση στους συντελεστές της δυναμοσειράς. Η ανάπτυξη μιας ρητής συνάρτησης σε δυναμοσειρά επιτυγχάνεται συνήθως με συνεχή διαίρεση. Η μεθοδος αυτή δεν καταλήγει σε μία αναλυτική έκφραση για την $x(n)$. Είναι μια αριθμητική μέθοδος με την οποία μπορούμε να υπολογίζουμε ένα στοιχείο της $x(n)$ κάθε φορά.

Παράδειγμα 7.4.4

Να υπολογιστεί η ακολουθία $x(n)$ η οποία έχει μετασχηματισμό z τη συνάρτηση

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \tag{7.4.11}$$

Λύση Η έκφραση αυτή μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά με συνεχείς διαιρέσεις

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{-1 + az^{-1}} & \frac{1 - az^{-1}}{1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots} \\ + az^{-1} & \\ \hline -az^{-1} + a^2 z^{-2} & \\ + a^2 z^{-2} & \\ \hline -a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} & \\ + a^3 z^{-3} & \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα $1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots$ συγκλίνει αν $|az^{-1}| < 1$, δηλαδή, αν $|a| < |z|$. Έτσι έχουμε το ανάπτυγμα για το μετασχηματισμό z

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots \tag{7.4.12}$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω έκφραση με την σχέση ορισμού του μετασχηματισμού z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

έχουμε

$$\dots x(-2) = 0, x(-1) = 0, x(0) = 1, x(1) = a, x(2) = a^2, x(3) = a^3, \dots$$

δηλαδή $x(n) = a^n u(n)$ αποτέλεσμα το οποίο αναμέναμε λόγω του Παραδείγματος 7.1.2. Αν $|az^{-1}| > 1$, δηλαδή, αν $|a| > |z|$ τότε η ανάπτυξη σε σειρά του μετασχηματισμού z γίνεται με την παρακάτω διαίρεση.

$$\begin{array}{r|l} 1 & -az^{-1} + 1 \\ \hline -1 + a^{-1}z & -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - \dots \\ + a^{-1}z & \\ \hline -a^{-1}z + a^{-2}z^2 & \\ + a^{-2}z^2 & \\ \hline -a^{-2}z^2 + a^{-3}z^3 & \\ + a^{-3}z^3 & \end{array}$$

Με παρόμοιο τρόπο σκέψης όπως και στην προηγούμενη περίπτωση καταλήγουμε

$$\dots x(-3) = -a^{-3}, x(-2) = -a^{-2}, x(-1) = -a^{-1}, x(0) = 0, x(1) = 0, x(2) = 0, \dots$$

δηλαδή $x(n) = -a^n u(-n-1)$ αποτέλεσμα το οποίο αναμέναμε λόγω του Παραδείγματος 7.1.6.

Παράδειγμα 7.4.5

Να υπολογιστεί η ακολουθία $x(n)$ η οποία έχει μετασχηματισμό z τη συνάρτηση

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a| \quad (7.4.13)$$

Λύση Γνωρίζουμε

$$\log(1 + w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^n}{n}, \quad |w| < 1, \text{ (Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor)}$$

Με εφαρμογή της παραπάνω σχέσης έχουμε

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω έκφραση με την σχέση ορισμού του μετασχηματισμού z έχουμε

$$x(n) = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}, & n \geq 1 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Τελικά προκύπτει

$$x(n) = -\frac{(-a)^n}{n} u(n-1) \quad (7.4.14)$$

7.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ Z

Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε τις εφαρμογές των μετασχηματισμών z. Ειδικότερα θα συστηματικοποιήσουμε τη δυνατότητα που παρέχει ο μονόπλευρος μετασχηματισμός

z για την επίλυση εξισώσεων διαφορών οι οποίες έχουν μη μηδενικές αρχικές συνθήκες και θα εφαρμόσουμε τη διαδικασία αυτή στη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων διακριτού χρόνου. Τελειώνοντας, θα εξετάσουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της θέσης των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο με τις ιδιότητες της αιτιότητας και της ευστάθειας ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου.

Μία από τις πιο σημαντικές ιδιότητες του μετασχηματισμού z είναι αυτή της συνέλιξης. Στο παράδειγμα που ακολουθεί προσδιορίζεται, χωρίς να καταφύγουμε στο άθροισμα της συνέλιξης, η ακολουθία εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου, αν η κρουστική απόκριση και η είσοδος του είναι ακολουθίες πεπερασμένης έκτασης.

Παράδειγμα 7.5.1

Να προσδιοριστεί η ακολουθία εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου, το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(n) = [\underset{\uparrow}{1}, 2, 3]$ όταν διεγείρεται από την ακολουθία $x(n) = [\underset{\uparrow}{3}, 4, 5, 2]$.

Λύση Οι μετασχηματισμοί z της κρουστικής απόκρισης και της εισόδου είναι

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \text{ και } X(z) = 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2} + 2z^{-3}$$

Η έξοδος του συστήματος προσδιορίζεται από το άθροισμα της συνέλιξης $y(n) = h(n) \star x(n)$ και λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης έχουμε $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$, έτσι έχουμε

$$Y(z) = 3 + 10z^{-1} + 22z^{-2} + 24z^{-3} + 19z^{-4} + 6z^{-5}$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό z βρίσκουμε την ακολουθία εξόδου.

$$y(n) = [\underset{\uparrow}{3}, 10, 22, 24, 19, 6]$$

7.5.1 Συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές

Για τα συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές, ο μετασχηματισμός z αποτελεί ισχυρό εργαλείο για τον προσδιορισμό της συνάρτησης μεταφοράς συστήματος ή της απόκρισης συχνότητας ή της κρουστικής απόκρισης συστήματος.

Γενικά, όπως γνωρίζουμε, οι πράξεις οι οποίες πρέπει να γίνουν, στο πεδίο του χρόνου, από ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου στα δεδομένα εισόδου, ώστε να προκύψει η ακολουθία εξόδου, περιγράφονται από μια γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές. Με άλλα λόγια, γνωρίζουμε ότι η είσοδος και η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου ικανοποιούν μια γραμμική εξίσωση διαφορών με

σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \text{ με } a_0 = 1 \quad (7.5.1)$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό z και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Θεωρώντας τις αρχικές συνθήκες μηδενικές, λόγω των ιδιοτήτων της γραμμικότητας και της χρονικής μετατόπισης που έχει ο μετασχηματισμός z, έχουμε την εξίσωση,

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad (7.5.2)$$

Γνωρίζουμε

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \quad (7.5.3)$$

όπου $H(z)$ είναι ο μετασχηματισμός z της κρουστικής απόκρισης και είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Έτσι η συνάρτηση μεταφοράς συστήματος το οποίο χαρακτηρίζεται από την εξίσωση διαφορών είναι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (7.5.4)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑ συστήματος είναι ρητή συνάρτηση. Η ευστάθεια και η αιτιατότητα του συστήματος όπως θα δούμε προσδιορίζουν την ακριβή περιοχή σύγκλισης.

Παράδειγμα 7.5.2 (Σύστημα διακριτού χρόνου πρώτης τάξης)

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του αιτιατού ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου πρώτης τάξης, το οποίο όπως είναι γνωστό περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - ay(n-1) = bx(n), \quad a \text{ και } b \text{ θετικοί πραγματικοί αριθμοί} \quad (7.5.5)$$

Λύση Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό z και στα δύο μέλη της εξίσωσης και λόγω των ιδιοτήτων της γραμμικότητας και της μετατόπισης του μετασχηματισμού z, έχουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} Y(z) - az^{-1}Y(z) &= bX(z) \\ Y(z)(1 - az^{-1}) &= X(z) \end{aligned}$$

από την οποία βρίσκουμε τη συνάρτηση μεταφοράς

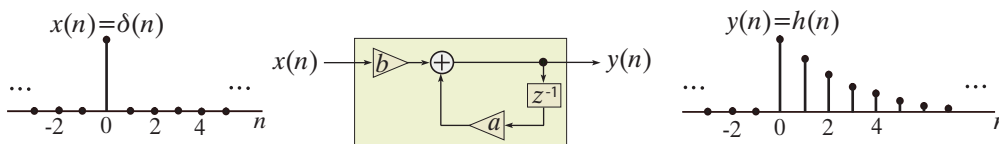
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{1 - az^{-1}} \quad (7.5.6)$$

Υπολογίσαμε την αλγεβρική έκφραση της $H(z)$ και έχουμε δύο πιθανές περιοχές σύγκλισης, η μια είναι η $|z| > a$ και η άλλη η $|z| < a$. Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > a$.

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(n) = Z^{-1} [H(z)] = b \cdot a^n u(n) \tag{7.5.7}$$

Στο Σχήμα 7.8 περιγράφεται το σύστημα πρώτης τάξης διακριτού χρόνου όπως αυτό έχει υλοποιηθεί με τη βοήθεια μιας μονάδας καθυστέρησης ενός δείγματος, ενός αθροιστού και δύο πολλαπλασιαστών και η κρουστική του απόκριση, δηλαδή, η ακολουθία εξόδου του όταν η είσοδος του είναι η κρουστική ακολουθία.



Σχήμα 7.8 Η κρουστική απόκριση του συστήματος πρώτης τάξης διακριτού χρόνου.

Παράδειγμα 7.5.3

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του αιτιατού ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - a_1 y(n - 1) + a_2 y(n - 2) = x(n) \tag{7.5.8}$$

Λύση Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό z και στα δύο μέλη της εξίσωσης και λόγω των ιδιοτήτων της γραμμικότητας και της μετατόπισης του μετασχηματισμού z, έχουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) &= X(z) \\ Y(z) (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) &= X(z) \end{aligned}$$

από την οποία βρίσκουμε τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{7.5.9}$$

Υπολογίσαμε την αλγεβρική έκφραση της $H(z)$. Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > R$.

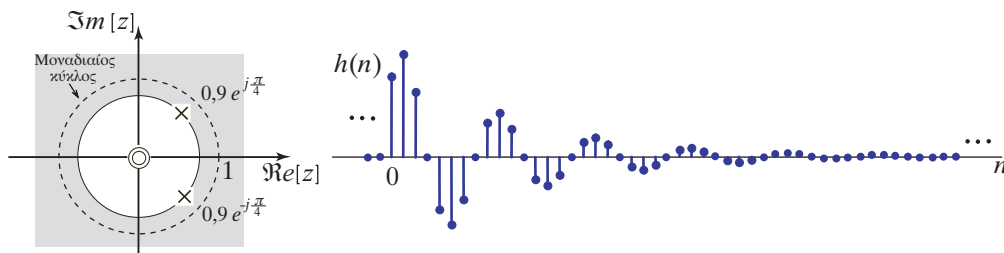
Αν $a_1 = -1,2728$ και $a_2 = 0,81$ το σύστημα έχει δύο συζυγείς πόλους τους $0,9e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$. Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0,5(1-j)}{1 - 0,6364(1+j)z^{-1}} + \frac{0,5(1+j)}{1 - 0,6364(1-j)z^{-1}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - 0,9e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - 0,9e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} \end{aligned} \tag{7.5.10}$$

και η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} (0,9e^{j\frac{\pi}{4}})^n u(n) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} (0,9e^{-j\frac{\pi}{4}})^n u(n) \\ &= \sqrt{2}(0,9)^n \cos\left[(n-1)\frac{\pi}{4}\right] u(n) \end{aligned} \quad (7.5.11)$$

Στο Σχήμα 7.9 περιγράφεται η περιοχή σύγκλισης οι συζυγείς μιγαδικοί πόλοι του συστήματος διακριτού χρόνου και η κρουστική του απόκριση η οποία είναι μία φθίνουσα ημιτονοειδής ακολουθία. Το σύστημα είναι ευσταθές.



Σχήμα 7.9 Η περιοχή σύγκλισης, οι συζυγείς μιγαδικοί πόλοι, το μηδενικό με πολλαπλότητα 2 και η κρουστική απόκριση του συστήματος διακριτού χρόνου στο Παράδειγμα 7.5.3.

Αν $a_1 = -1,5556$ και $a_2 = 1,21$ το σύστημα έχει δύο συζυγείς πόλους τους $1, 1e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$. Η $H(z)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0,5(1-j)}{1-0,7778(1+j)z^{-1}} + \frac{0,5(1+j)}{1-0,7778(1-j)z^{-1}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-1,1e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-1,1e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} \end{aligned} \quad (7.5.12)$$

και η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

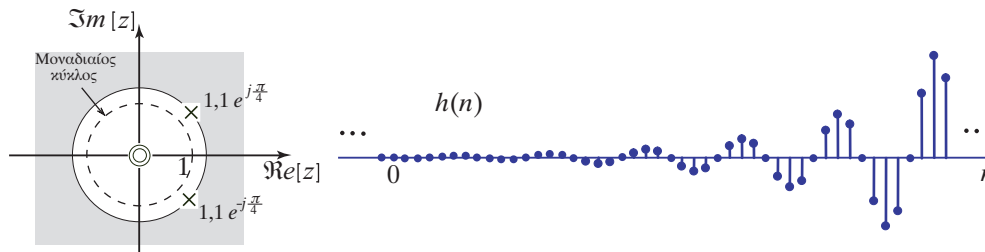
$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} (1,1e^{j\frac{\pi}{4}})^n u(n) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} (1,1e^{-j\frac{\pi}{4}})^n u(n) \\ &= \sqrt{2}(1,1)^n \cos\left[(n-1)\frac{\pi}{4}\right] u(n) \end{aligned} \quad (7.5.13)$$

Στο Σχήμα 7.10 περιγράφεται η περιοχή σύγκλισης οι συζυγείς μιγαδικοί πόλοι, το μηδενικό με πολλαπλότητα 2 του συστήματος διακριτού χρόνου και η κρουστική του απόκριση η οποία είναι μία αύξουσα ημιτονοειδής ακολουθία. Το σύστημα είναι μη ευσταθές.

Παράδειγμα 7.5.4

Έστω το αιτιατό σύστημα του οποίου η είσοδος και η έξοδος ικανοποιούν τη γραμμική εξίσωση διαφορών

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) \quad (7.5.14)$$



Σχήμα 7.10 Η περιοχή σύγκλισης, οι συζυγείς μιγαδικοί πόλοι και η κρουστική απόκριση του συστήματος διακριτού χρόνου στο Παράδειγμα 7.5.3.

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό z και στα δύο μέλη της εξίσωσης και λόγω των ιδιοτήτων της γραμμικότητας και της μετατόπισης του μετασχηματισμού z, έχουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned}
 Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) &= X(z) + \frac{1}{3}z^{-1} \Rightarrow \\
 Y(z) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) &= X(z) \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

από την οποία βρίσκουμε την συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 1/3z^{-1}}{1 - 1/2z^{-1}} \tag{7.5.15}$$

Υπολογίσαμε την αλγεβρική έκφραση της $H(z)$ και έχουμε δύο πιθανές περιοχές σύγκλισης, η μια είναι η $|z| > 1/2$ και η άλλη η $|z| < 1/2$. Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > 1/2$.

Επειδή ο βαθμός του πολωνύμου του αριθμητή είναι ίσος με το βαθμό του πολωνύμου του παρονομαστή πρέπει να γίνει διαίρεση πριν την ανάλυση σε απλά κλάσματα. Έτσι έχουμε

$$H(z) = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} \frac{1}{1 - 1/2z^{-1}} \tag{7.5.16}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(n) = Z^{-1} [H(z)] = -\frac{2}{3}\delta(n) + \frac{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \tag{7.5.17}$$

Οι ιδιότητες της δεξιάς και της αριστερής ολίσθησης σε συνδυασμό με την ιδιότητα της συνέλιξης δίνουν αξία στο μονόπλευρο μετασχηματισμό z, γιατί μας επιτρέπουν να λύνουμε διαφορικές εξισώσεις με αρχικές συνθήκες, και να υπολογίζουμε την έξοδο ΓΧΑ συστημάτων, τα οποία δεν βρίσκονται αρχικά σε ηρεμία, αν γνωρίζουμε την συνάρτηση

μεταφοράς του συστήματος $H(z)$ και το μετασχηματισμό z του σήματος εισόδου $X(z)$. Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 7.5.5

Δίνεται το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η είσοδος και η έξοδος συνδέονται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - 0,5y(n-1) = x(n) \quad (7.5.18)$$

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό z και στα δύο μέρη της εξίσωσης διαφορών και έχουμε

$$Y(z) - 0,5z^{-1}Y(z) = X(z) \quad (7.5.19)$$

Από την οποία βρίσκουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} \quad (7.5.20)$$

με περιοχή σύγκλισης $|z| > 0,5$ αφού το σύστημα είναι αιτιατό. Η κρουστική απόκριση του συστήματος υπολογίζεται με αντίστροφο μετασχηματισμό z

$$h(n) = (0,5)^n u(n) \quad (7.5.21)$$

Αν δεν έχουμε αρχικές συνθήκες τότε η έξοδος του συστήματος προσδιορίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης γνωρίζοντας τη συνάρτηση μεταφοράς και το μετασχηματισμό z του σήματος εισόδου.

Παράδειγμα 7.5.6

Δίνεται το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η είσοδος και η έξοδος συνδέονται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - 0,5y(n-1) = x(n) \quad (7.5.22)$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος αν το σήμα εισόδου είναι $x(n) = u(n)$ και το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία.

Λύση Στο προηγούμενο παράδειγμα έχει υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $H(z) = \frac{1}{1-0,5z^{-1}}$ με πεδίο σύγκλισης $|z| > 0,5$. Ο μετασχηματισμός z της ακολουθίας εισόδου είναι $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ με πεδίο σύγκλισης $|z| > 1$. Ο μετασχηματισμός z της ακολουθίας εξόδου είναι

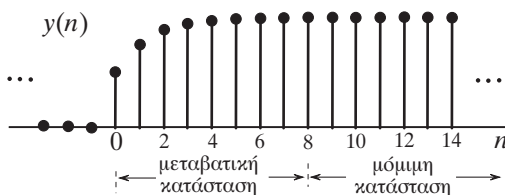
$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (7.5.23)$$

με περιοχή σύγκλισης την τομή των δύο επιμέρους περιοχών σύγκλισης, δηλαδή, $|z| > 1$. Αναλύουμε τον $Y(z)$ σε απλά κλάσματα και έχουμε

$$Y(z) = \frac{-1}{1 - 0,5z^{-1}} + \frac{2}{1 - z^{-1}} \quad (7.5.24)$$

και με αντίστροφο μετασχηματισμό z βρίσκεται η ακολουθία εξόδου του συστήματος.

$$y(n) = -(0,5)^n u(n) + 2u(n) \quad (7.5.25)$$



Σχήμα 7.11 Η ακολουθία εξόδου του Προβλήματος 7.5.6.

Στο Σχήμα 7.11 φαίνεται η έξοδος του συστήματος. Παρατηρούμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} (0,5)^n n(n) = 0$, επομένως η έξοδος του συστήματος για $n \gg 0$ είναι $h(n) = 2u(n)$. Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται ως *μόνιμη κατάσταση* (steady-state response). Το διάστημα τιμών στο οποίο ο όρος $(0,5)^n u(n)$ δεν είναι περίπου ίσος με μηδέν χαρακτηρίζεται ως *μεταβατική κατάσταση* (transient response). Η μεταβατική κατάσταση εκτείνεται στο διάστημα $0 \leq n \leq 7$ και η μόνιμη κατάσταση για τις τιμές του n που είναι μεγαλύτερες ή ίσες από 8.

Αν έχουμε αρχικές συνθήκες τότε στην εξίσωση διαφορών λόγω της ιδιότητας της αριστερής ολίσθησης του μετασχηματισμού z συμπεριλαμβάνουμε τις αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα 7.5.7

Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η είσοδος και η έξοδος συνδέονται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - 0,5y(n-1) = x(n) \quad (7.5.26)$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος αν το σήμα εισόδου είναι $x(n) = u(n)$ με αρχική συνθήκη $y(-1) = 1$

Λύση Εφαρμόζουμε μονόπλευρο μετασχηματισμό z και στα δύο μέρη της (7.5.26) και έχουμε

$$\mathcal{Y}(z) - 0,5[z^{-1}\mathcal{Y}(z) + y(-1)] = \mathcal{X}(z) \quad (7.5.27)$$

$$\mathcal{Y}(z) - 0,5z^{-1}\mathcal{Y}(z) - 0,5 = \mathcal{X}(z) \quad (7.5.28)$$

Λύνοντας την (7.5.27) ως προς $\mathcal{Y}(z)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) &= \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} \mathcal{X}(z) + \frac{0,5}{1 - 0,5z^{-1}} \\ &= H(z)\mathcal{X}(z) + \frac{0,5}{1 - 0,5z^{-1}} \\ &= Y_o(z) + Y_i(z) \end{aligned} \quad (7.5.29)$$

όπου

$$\begin{aligned} Y_o(z) = H(z)\mathcal{X}(z) &= \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= -\frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} + \frac{2}{1 - z^{-1}} \end{aligned} \quad (7.5.30)$$

είναι ο μετασχηματισμός z της εξόδου του συστήματος για μηδενικές αρχικές συνθήκες. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός z δίνει

$$y_o(n) = -(0,5)^n u(n) + 2u(n) \quad (7.5.31)$$

και είναι γνωστή ως *απόκριση μηδενικής κατάστασης* (zero stage response)

και

$$Y_i(z) = 0,5 \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} \quad (7.5.32)$$

είναι ο μετασχηματισμός z της εξόδου του συστήματος ο οποίος προέρχεται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Η συνεισφορά του όρου στην έξοδο του συστήματος βρίσκεται με αντίστροφο μετασχηματισμό z και είναι

$$y_i(n) = 0,5(0,5)^n u(n) \quad (7.5.33)$$

και είναι γνωστή ως *απόκριση μηδενικής εισόδου* (zero input response).

Η έξοδος του συστήματος θα είναι

$$\begin{aligned} y(n) = y_o(n) + y_i(n) &= -(0,5)^n u(n) + 2u(n) + 0,5(0,5)^n u(n) \\ &= [-0,5(0,5)^n + 2] u(n) \end{aligned} \quad (7.5.34)$$

7.5.2 Μελέτη ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια μετασχηματισμού z

. Από την (7.5.4) παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς συστήματος είναι ρητή συνάρτηση. Υπενθυμίζεται ότι οι ρίζες του αριθμητή ονομάζονται μηδενικά της $H(z)$ και οι ρίζες του παρονομαστή πόλοι της $H(z)$.

Από την περιοχή σύγκλισης και τη θέση των πόλων και των μηδενικών μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την ευστάθεια και την αιτιατότητα του συστήματος, πράγματι

- Ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου είναι αιτιατό αν $h(n) = 0$ για $n < 0$. Στην περίπτωση αυτή η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού z της κρουστικής απόκρισης, είναι το εξωτερικό ενός κύκλου με ακτίνα R^+ ίση με το μέτρο του πόλου που έχει μέγιστο μέτρο. Με άλλα λόγια για να είναι ένα σύστημα διακριτού χρόνου αιτιατό πρέπει η περιοχή σύγκλισης να είναι το εξωτερικό κύκλου με την μικρότερη ακτίνα που περιέχει τους πόλους.

- Ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου είναι ευσταθές αν για φραγμένη είσοδο, $|x(n)| < M_1$, και η έξοδος είναι φραγμένη. Πράγματι

$$|y(n)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)x(n-k)| \leq M_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Παρατηρούμε ότι αν το σύστημα είναι ευσταθές η κρουστική απόκριση είναι απολύτως φραγμένη και έτσι υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier της. Άρα για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει η περιοχή σύγκλισης του $H(z)$ να περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, ούτως ώστε να συγκλίνει ο μετασχηματισμός Fourier του $h(n)$.

- Για να είναι ευσταθές και αιτιατό πρέπει να ισχύουν και οι δύο παραπάνω συνθήκες ή όλοι οι πόλοι πρέπει να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Γενικότερα η θέση των πόλων της $H(z)$ στο επίπεδο z προσδιορίζει τη συμπεριφορά της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Αναπτύσσοντας τη συνάρτηση μεταφοράς σε απλά κλάσματα και υποθέτοντας ότι έχουμε απλούς πόλους $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ έχουμε

$$H(z) = C_1 \frac{z}{z - \lambda_1} + C_2 \frac{z}{z - \lambda_2} + \dots + C_N \frac{z}{z - \lambda_N} \tag{7.5.35}$$

Από την οποία βρίσκουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$h(n) = Z^{-1}[H(z)] = (C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_N \lambda_N^n) u(n) \tag{7.5.36}$$

- Αν έχουμε πραγματικό πόλο λ , τότε η κρουστική απόκριση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

α) $0 \leq \lambda < 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda^n) = 0$
η συνεισφορά του όρου στη $h(n)$ είναι μία φθίνουσα εκθετική ακολουθία	
β) $\lambda = 1$	$\lambda^n = 1$ για όλες τις τιμές του n
η συνεισφορά του όρου στη $h(n)$ είναι η βηματική ακολουθία	
γ) $1 < \lambda$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda^n) = \infty$
η συνεισφορά του όρου στη $h(n)$ είναι μία αύξουσα εκθετική ακολουθία	
δ) $-1 < \lambda < 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda^n) = 0$ και το λ^n εναλλάσσει πρόσημο
η συνεισφορά του όρου στη $h(n)$ είναι μία φθίνουσα εκθετική ακολουθία με όρους που εναλλάσσουν πρόσημο	
ε) $\lambda = -1$	$\lambda^n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 1k + 1 \end{cases}$
η συνεισφορά του όρου στη $h(n)$ είναι η βηματική ακολουθία με όρους που εναλλάσσουν πρόσημο	
στ) $\lambda < -1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = \infty$ και το λ^n εναλλάσσει πρόσημο
η συνεισφορά του όρου στη $h(n)$ είναι μία αύξουσα εκθετική ακολουθία με όρους που εναλλάσσουν πρόσημο	

- Αν το πολυώνυμο του παρονομαστή έχει δύο μιγαδικές συζυγείς ρίζες λ και λ^* η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

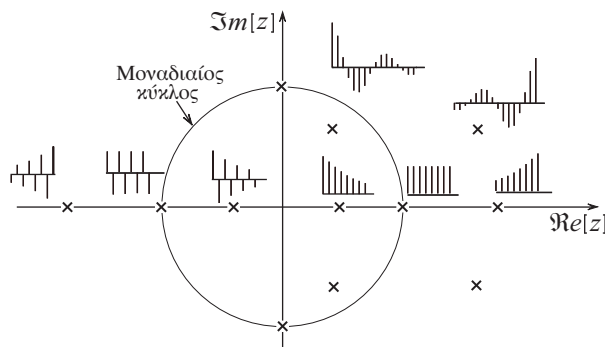
$$h(n) = [C\lambda + C^*(\lambda^*)^n] u(n)$$

υποθέτοντας $C = |C|e^{j\theta}$ και $\lambda = |\lambda|e^{j\phi}$ έχουμε

$$\begin{aligned} h(n) &= |C||\lambda|^n e^{j(n\phi+\theta)} + |C||\lambda|^n e^{-j(n\phi+\theta)} u(n) \\ &= 2|C||\lambda|^n \cos(n\phi + \theta) u(n) \end{aligned}$$

Ο όρος $\cos(n\phi + \theta)$ είναι φραγμένος από το ± 1 . Η σύγκλιση ή μη της κρουστικής απόκρισης του συστήματος θα προσδιορίζεται από τον όρο $|\lambda|^n$. Αν $|\lambda| < 1$ η κρουστική απόκριση αποτελεί φθίνουσα ημιτονοειδή σειρά (βλέπε Παράδειγμα 7.5.3). Στη περίπτωση αυτή το σύστημα είναι ευσταθές. Αντίθετα αν $|\lambda| > 1$ η κρουστική απόκριση αποτελεί αύξουσα ημιτονοειδή σειρά και το σύστημα είναι ασταθές. Αν $|\lambda| = 1$ η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι ημιτονοειδής σειρά με σταθερό πλάτος.

Στο Σχήμα 7.12 παριστάνεται η συμπεριφορά της κρουστικής απόκρισης ενός αιτιατού συστήματος διακριτού χρόνου, όπως αυτή προσδιορίζεται από τη θέση των πόλων του στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 7.12 Η συμπεριφορά της κρουστικής του απόκρισης ενός συστήματος διακριτού χρόνου ανάλογα με τη θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς του στο μιγαδικό επίπεδο z.

Παράδειγμα 7.5.8

Θεωρούμε το σύστημα διακριτού χρόνου, με είσοδο $x(n)$ και έξοδο $y(n)$, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$3y(n) - 7y(n-1) + 2y(n-2) = 3x(n-2) \quad (7.5.37)$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος για να είναι το σύστημα α) αιτιατό και β) ευσταθές. Μπορεί να είναι το σύστημα συγχρόνως αιτιατό και ευσταθές;

Λύση Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό z και στα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε

$$\begin{aligned} Z \left[y(n) - \frac{7}{3}y(n-1) + \frac{2}{3}y(n-2) \right] &= Z [x(n-2)] \\ Y(z) \left[1 - \frac{7}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2} \right] &= z^{-2}X(z) \end{aligned}$$

και η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{z^{-2}}{1 - \frac{7}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}} \\ &= \frac{1}{z^2 - \frac{7}{3}z + \frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{\left(z - \frac{1}{3}\right)(z - 2)} \end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας την $H(z)$ σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{C_1}{z - \frac{1}{3}} + \frac{C_2}{z - 2} \\ &= -\frac{3}{5} \frac{1}{z - \frac{1}{3}} + \frac{3}{5} \frac{1}{z - 2} \end{aligned} \quad (7.5.38)$$

(α) Για να είναι το σύστημα αιτιατό πρέπει η περιοχή σύγκλισης να είναι $|z| > 2$. Έτσι η κρουστική απόκριση του αιτιατού συστήματος είναι

$$h(n) = -\frac{3}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) + \frac{3}{5} (2)^{n-1} u(n-1) \quad (7.5.39)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το ζευγάρι Mz 5 του Πίνακα 7.2.

(β) Για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει η περιοχή σύγκλισης να περιέχει το μοναδιαίο κύκλο δηλαδή να είναι $\frac{1}{3} < |z| < 2$. Έτσι η κρουστική απόκριση του ευσταθούς συστήματος είναι

$$h(n) = -\frac{3}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) - \frac{3}{5} (2)^{n-1} u(-n) \quad (7.5.40)$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν τα ζευγάρια Mz 5 και 8 του Πίνακα 7.2.

Παρατηρήσεις

- Η παραπάνω εξίσωση διαφορών δεν μπορεί να περιγράψει σύστημα που να είναι συγχρόνως ευσταθές και αιτιατό.
- Για την περίπτωση αιτιατού συστήματος $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \infty$.

Σύνοψη Κεφαλαίου

Στο Κεφάλαιο αυτό ορίσαμε το μετασχηματισμό z και το μονόπλευρο μετασχηματισμό z, παρουσιάστηκαν οι ιδιότητές τους και υπολογίσαμε τους μετασχηματισμούς z ορισμένων βασικών σημάτων διακριτού χρόνου, τα οποία συναντάμε στη μελέτη γραμμικών συστημάτων. Στη συνέχεια προσδιορίσαμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό z. Είδαμε ότι αν η μορφή του μετασχηματισμού z είναι απλή, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό z με τη βοήθεια του Πίνακα 7.2. Αν ο μετασχηματισμός z δεν έχει απλή μορφή αλλά είναι ρητή συνάρτηση, τότε αναλύουμε τη συνάρτηση σε απλά κλάσματα και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού z και του Πίνακα 7.2 υπολογίζουμε εύκολα το σήμα χωρίς να καταφύγουμε στην εξίσωση αντιστροφής.

Επίσης στο Κεφάλαιο αυτό αναπτύξαμε τις εφαρμογές του μετασχηματισμού z. Ειδικότερα εξετάσαμε τη δυνατότητα που έχει ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z να επιλύει γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές οι οποίες δεν έχουν μηδενικές αρχικές συνθήκες. Η δυνατότητα αυτή οφείλεται στις ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού z που αναφέρονται στη δεξιά και αριστερή ολίσθηση. Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν οι εφαρμογές του μετασχηματισμού z σε ότι αφορά τη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων διακριτού χρόνου. Προσδιορίσαμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος από την εξίσωση διαφορών που σχετίζει την έξοδο και την είσοδο του συστήματος, υποθέτοντας ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές. Επίσης με τη βοήθεια της εξίσωσης διαφορών, προσδιορίσαμε το μονόπλευρο μετασχηματισμό z της εξόδου του συστήματος, το οποίο μπορεί να μη βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας και αντιστρέφοντας το μονόπλευρο μετασχηματισμό z προσδιορίσαμε την έξοδο του συστήματος. Τέλος παρουσιάσαμε τα συμπεράσματα που εξάγουμε από την περιοχή σύγκλισης και τη θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο και τα οποία αφορούν στην ευστάθεια και την αιτιότητα του συστήματος διακριτού συστήματος καθώς και στη συμπεριφορά της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

7.6 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

7.1 Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα το οποίο χαρακτηρίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = x(n) + x(n - 2)$$

Να προσδιοριστεί ο συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $H(z)$. Με τη βοήθεια της $H(z)$ να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος $H(\Omega)$. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου $|H(\Omega)|$ και της φάσης $\arg H(\Omega)$ σε συνάρτηση με την Ω .

7.2 Δίνεται το ευσταθές και αιτιατό σύστημα, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$$

1. Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος
2. Να υπολογιστεί η απόκριση του συστήματος αν το σήμα εισόδου είναι

$$x(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

7.3 Αιτιατό σύστημα διακριτού χρόνου έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{z+1}{z^2 - 0,9z + 0,81}$$

1. Να σχεδιαστεί το πεδίο σύγκλισης οι πόλοι και τα μηδενικά του συστήματος.
2. Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.
3. Να προσδιοριστεί η εξίσωση διαφορών, με σταθερούς συντελεστές, η οποία χαρακτηρίζει το σύστημα.

7.4 Δίνεται σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0,81z^{-2}}, \quad |z| > 0,9$$

1. Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.
2. Να προσδιοριστεί η έξοδος του συστήματος αν η είσοδός του είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

7.5 Δίνεται ΓΧΑ σύστημα το οποίο έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος αν η είσοδός του είναι το σήμα

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

7.6 Να υπολογιστεί η αιτιατή λύση της εξίσωσης

$$y(n) - \frac{3}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) = x(n), \quad n \geq 0$$

όταν

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

αν $y(-1) = 4$ και $y(-2) = 10$

7.7 Ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα έχει κρουστική απόκριση

$$h(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

1. Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος όταν το σήμα εισόδου είναι $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$. Οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι $y(-1) = 4$ και $y(-2) = 10$.

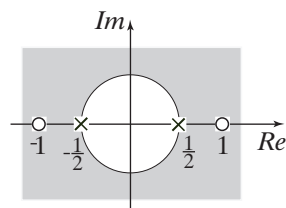
2. Ποιο είναι το σήμα στην έξοδο του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση;

7.8 Δίνεται ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $h(0) = 1$, $h(1) = 2$ και $h(2) = 1$

1. Να υπολογίσετε τη απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ του συστήματος και

2. να κάνετε τη γραφική παραστάση του μέτρου της απόκρισης συχνότητας του συστήματος σε συνάρτηση με τη συχνότητα.

7.9 Να βρεθεί το σήμα διακριτού χρόνου, του οποίου ο μετασχηματισμός z έχει περιοχή σύγκλισης, τους πόλους και τα μηδενικά που εικονίζονται στο Σχήμα 7.13.



Σχήμα 7.13 Οι πόλοι, τα μηδενικά και η περιοχή σύγκλισης στο Πρόβλημα 7.9.

7.10 Δίνεται το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - \frac{k}{4}z^{-1}}{1 + \frac{k}{3}z^{-1}}$$

1. Για ποιες τιμές του k το σύστημα είναι ευσταθές;
2. Για $k = 1$ και σήμα εισόδου $x(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, ποια είναι η έξοδος του συστήματος;

7.11 Για ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα δίνονται

1. Αν το σήμα εισόδου είναι το σήμα $x(n) = (-2)^n$, τότε η έξοδος του συστήματος είναι το σήμα $y(n) = 0$ και
2. αν το σήμα εισόδου είναι το σήμα $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ τότε η έξοδος του συστήματος είναι το σήμα $y(n) = \delta(n) + c \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$, όπου c σταθερά ποσότητα.
 1. Να βρεθεί η σταθερά c .
 2. Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, και
 3. να προσδιοριστεί η έξοδος του συστήματος όταν η είσοδος του είναι το σήμα $x(n) = 1$.

7.12 Δίνεται το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η είσοδος $x(n]$ και η έξοδος $y(n)$ ικανοποιούν την εξίσωση διαφορών

$$y(n) + \frac{k}{3}y(n-1) = x(n) - \frac{k}{4}x(n-1)$$

Το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία.

1. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και να σχεδιάσετε το διάγραμμα των πόλων και μηδενικών και να σχεδιάσετε τη περιοχή σύγκλισής της.
2. Για ποιες τιμές της παραμέτρου k το σύστημα είναι ευσταθές;
3. Να προσδιοριστεί η έξοδος του συστήματος αν $k = 1$ και το σήμα εισόδου είναι

$$x(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

7.13 Ένα αιτιατό σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-2) + x(n) - x(n-2)$$

όπου $x(n)$ είναι το σήμα εισόδου και $y(n)$ το σήμα εξόδου. Να υπολογιστούν

1. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

2. Να γίνει το διάγραμμα των πόλων και μηδενικών και η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος
3. Η κρουστική απόκριση του συστήματος.
4. Η έξοδος του συστήματος αν $x(n) = u(n)$ όπου $u(n)$ είναι η μοναδιαία βηματική ακολουθία.

Το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία.

7.14 Δίνεται σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0,81z^{-2}}, \quad |z| > 0,9$$

1. Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.
2. Να προσδιοριστεί η έξοδος του συστήματος αν η είσοδός του είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

7.15 Αν $x(n) = a^n$ να υπολογιστούν οι μονόπλευροι μετασχηματισμοί z

1. $\mathcal{X}[x(n - 2)]$
2. $\mathcal{X}[x(n + 2)]$

7.16 Να βρεθεί η κρουστική απόκριση τηλεπικοινωνιακού καναλιού στο οποίο παρουσιάζονται δύο διαδόσεις, δηλαδή, περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών,

$$y(n) = x(n) + ax(n - 1)$$

Για ποιες τιμές της παραμέτρου a το αντίστοιχο σύστημα είναι αιτιατό και ευσταθές;

Βιβλιογραφία

- 7.1 Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, Λ. Κοφίδης, “Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων”, *Τυπωθήτω - Γιώργος Δαρδανός*, Αθήνα 2003.
- 7.2 Ν. Καλουπτσίδης, “Σήματα Συστήματα και Αλγόριθμοι”, *Δίαυλος*, Αθήνα, 1994.
- 7.3 J. G. Proakis, D. G. Manolakis, “Introduction to Digital Signal Processing”, *MacMillan Publishing Company*, 1994.
- 7.4 A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, “Digital Signal Processing”, *Prentice - Hall Inc.*, N. Y., 1975.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΜΕΡΙΚΑ ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Στο παράρτημα αυτό αναφέρονται οι τρόποι παράστασης ενός μιγαδικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο και ορίζονται μερικές βασικές έννοιες, όπως *μέτρο*, *φάση*, *πραγματικό μέρος*, *φανταστικό μέρος μιγαδικού αριθμού* και *συζυγής μιγαδικός αριθμός*.

A.1 ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η μορφή ενός μιγαδικού αριθμού z δίνεται από την εξίσωση

$$z = x + jy \quad (\text{A.1.1})$$

όπου $j = \sqrt{-1}$ και x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, οι οποίοι αντίστοιχα ονομάζονται *πραγματικό μέρος* και *φανταστικό μέρος* ή *τιμήμα*, του μιγαδικού αριθμού. Συνήθως συμβολίζουμε $x = \Re[z]$ και $y = \Im[z]$. Ο μιγαδικός αριθμός z μπορεί επίσης να παρασταθεί σε πολικές συντεταγμένες από την εξίσωση

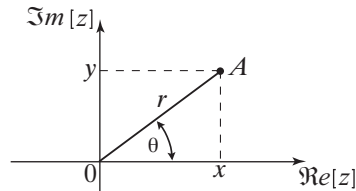
$$z = r \cdot e^{j\theta} \quad (\text{A.1.2})$$

όπου $r > 0$ είναι το *μέτρο* του μιγαδικού αριθμού z , το μέτρο συμβολίζεται και με $|z|$ και θ είναι η *γωνία* ή η *φάση* του μιγαδικού αριθμού z ($\theta = \arg z$ ή $\theta = \angle z$). Στο Σχήμα A.1 υπάρχει η παράσταση ενός μιγαδικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο. Η σχέση μεταξύ των δύο αυτών εκφράσεων των μιγαδικών αριθμών απορρέει από τη *σχέση του Euler*

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (\text{A.1.3})$$

ή από την σχεδίαση του z στο μιγαδικό επίπεδο, Σχήμα A.1. Παρατηρούμε ότι

$$x = r \cdot \cos \theta \text{ και } y = r \cdot \sin \theta \quad (\text{A.1.4})$$



Σχήμα Α.1 Παράσταση ενός μιγαδικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο.

όπου

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \sin^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.5})$$

Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler έχουμε

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= \cos \theta + j \cdot \sin \theta & \cos \theta &= \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \\ e^{-j\theta} &= \cos \theta - j \cdot \sin \theta & \sin \theta &= \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

A.2 ΣΥΖΥΓΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Αν $z = x + jy = r \cdot e^{j\theta}$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε ο συζυγής μιγαδικός του z που συμβολίζεται ως z^* , δίνεται από τη σχέση

$$z^* = x - jy = r \cdot e^{-j\theta} \quad (\text{A.2.1})$$

Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς έχουμε τις ιδιότητες

1. Αν ένας μιγαδικός αριθμός είναι ίσος με το συζυγή του μιγαδικό αριθμό, τότε το φανταστικό του μέρος είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή ο αριθμός είναι πραγματικός, πράγματι

$$z = z^* \Rightarrow x + jy = x - jy \Rightarrow y = 0$$

2. Το τετράγωνο του μέτρου μιγαδικού αριθμού είναι ίσο με το γινόμενο του μιγαδικού αριθμού επί το συζυγή του μιγαδικό αριθμό, πράγματι

$$z \cdot z^* = r \cdot e^{j\theta} \cdot r \cdot e^{-j\theta} = r^2$$

3. Το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού είναι ίσο με το ημίθροισμα του μιγαδικού αριθμού και του συζυγή του μιγαδικού αριθμού, πράγματι

$$z + z^* = x + jy + x - jy = 2x \text{ και } \Re[z] = \frac{z + z^*}{2}$$

4. Το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού είναι ίσο με την ημιδιαφορά του συζυγούς μιγαδικού αριθμού του από το μιγαδικό αριθμό διαφύμενη με j , πράγματι

$$z - z^* = x + jy - x + jy = 2jy \text{ και } \Im m[z] = \frac{z - z^*}{2j}$$

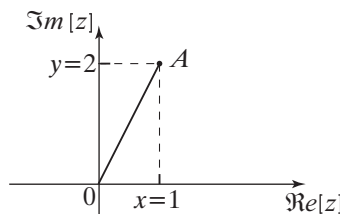
Παράδειγμα Α.1

Να εκφραστεί ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{4+3j}{2-j}$ σε πολική μορφή και να παρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύση Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με το συζυγή του παρονομαστή, έτσι έχουμε

$$z = \frac{4 + 3j}{2 - j} = \frac{(4 + 3j)(2 + j)}{(2 - j)(2 + j)} = \frac{8 + 4j + 6j - 3}{4 + 1} = \frac{5 + 10j}{5} = 1 + 2j$$

Στο Σχήμα Α.2 βλέπουμε τη παράσταση του μιγαδικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα Α.2 Η γραφική παράσταση του μιγαδικού αριθμού στο Παράδειγμα Α.1.

Παράδειγμα Α.2

Να εκφραστεί ο μιγαδικός αριθμός $z = \sqrt{3} + j$ σε πολική μορφή και να παρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύση Με τη βοήθεια των σχέσεων (Α.1.5) υπολογίζεται το μέτρο του μιγαδικού αριθμού

$$r = \sqrt{3 + 1} = 2$$

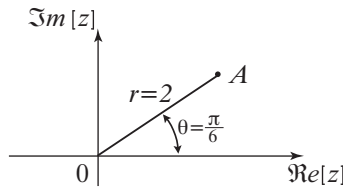
και η φάση του

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

έτσι η πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού είναι

$$z = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}$$

Στο Σχήμα Α.3 υπάρχει η παράσταση του μιγαδικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο



Σχήμα Α.3 Η γραφική παράσταση του μιγαδικού αριθμού στο Παράδειγμα Α.2.

Α.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Α.1 Να εκφραστεί κάθε ένας από τους μιγαδικούς σε καρτεσιανή μορφή και να παρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο στο οποίο να φαίνεται το πραγματικό και το φανταστικό τμήμα κάθε αριθμού.

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \quad z_2 = 3 \cdot e^{j4\pi} + 2 \cdot e^{j5\pi} \quad z_3 = \frac{6 \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}}}{1-j} \quad z_4 = -2j \cdot e^{j\frac{9\pi}{4}}$$

Α.2 Να εκφραστεί κάθε ένας από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε πολική μορφή και να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο όπου να φαίνεται το μέτρο και η φάση κάθε αριθμού.

$$z_1 = -3 \quad z_2 = (1-j)^4 \quad z_3 = (\sqrt{3} + j^3) (\sqrt{3} + j)^2 \quad z_4 = \frac{\sqrt{3} + j}{1 + j\sqrt{3}}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ο βασικός σκοπός του παραρτήματος είναι να παρουσιάσει τον τρόπο ανάλυσης μιας ρητής συνάρτησης, δηλαδή, μιας συνάρτησης η οποία μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο πολυωνύμων της μεταβλητής, σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)$ η οποία έχει τη μορφή

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$$

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση στην οποία ο βαθμός του αριθμητή, m , είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή, n ($m < n$) και στη συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση που ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του παρονομαστή.

B.1 Ο ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ $N(x)$ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ ΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΤΟΥ $D(x)$.

Όταν ο βαθμός του πολυώνυμου του αριθμητή $N(x)$, είναι μικρότερος του βαθμού του πολυώνυμου του παρονομαστή $D(x)$, δηλαδή είναι $m < n$, αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων

$$D(x) = \prod_{i=1}^n (x - \rho_i) \quad (\text{B.1.1})$$

όπου $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ οι ρίζες του $D(x)$. Ανάλογα με τη φύση των ριζών διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

B.1.1 Ρίζες διακεκριμένες και πραγματικές

Ας θεωρήσουμε ότι ο βαθμός του παρονομαστή είναι 2, οπότε η συνάρτηση $f(x)$ γράφεται διαδοχικά

$$f(x) = \frac{b_1 x + b_0}{x^2 + a_1 x + a_0} = \frac{b_1 x + b_0}{(x - \rho_1)(x - \rho_2)} = \frac{C_1}{x - \rho_1} + \frac{C_2}{x - \rho_2} \quad (\text{B.1.2})$$

Το πρόβλημα είναι να υπολογίσουμε τις σταθερές C_1 και C_2 . Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών έχουμε διαδοχικά:

$$b_1x + b_0 = C_1(x - \rho_2) + C_2(x - \rho_1) = (C_1 + C_2)x - (C_1\rho_2 + C_2\rho_1)$$

από την οποία έχουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= b_1 \\ C_1\rho_2 + C_2\rho_1 &= -b_0 \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος δίνει τις τιμές των σταθερών C_1 και C_2

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{b_1\rho_1 + b_0}{\rho_1 - \rho_2} \\ C_2 &= \frac{b_1\rho_2 + b_0}{\rho_2 - \rho_1} \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

Αν και ο τρόπος αυτός ισχύει πάντα, υπάρχει μια πιο εύκολη μέθοδος. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη σταθερά C_1 πολλαπλασιάζουμε την (B.1.2) με $x - \rho_1$ και έχουμε

$$(x - \rho_1)f(x) = C_1 + C_2 \frac{x - \rho_1}{x - \rho_2} \quad (\text{B.1.4})$$

Αφού οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 είναι διακριτές, ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της (B.1.4) είναι ίσος με μηδέν για $x = \rho_1$, έτσι έχουμε

$$C_1 = (x - \rho_1)f(x)|_{x=\rho_1} = \frac{b_1\rho_1 + b_0}{\rho_1 - \rho_2} \quad (\text{B.1.5})$$

όμοια βρίσκουμε και

$$C_2 = (x - \rho_2)f(x)|_{x=\rho_2} = \frac{b_1\rho_2 + b_0}{\rho_2 - \rho_1} \quad (\text{B.1.6})$$

Οι δύο αυτοί τρόποι γενικεύονται, αν ο βαθμός του παρονομαστή είναι n , και έχουμε

$$f(x) = \frac{C_1}{x - \rho_1} + \frac{C_2}{x - \rho_2} + \dots + \frac{C_n}{x - \rho_n} \quad (\text{B.1.7})$$

και οι σταθερές υπολογίζονται από τον τύπο

$$C_k = (x - \rho_k)f(x)|_{x=\rho_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{B.1.8})$$

Β.1.2 Ρίζες πολλαπλές και πραγματικές

Ας υποθέσουμε ότι ο παρονομαστής έχει μία διπλή πραγματική ρίζα, την ρ_1 , και μία απλή πραγματική ρίζα, την ρ_2 , τότε η συνάρτηση $f(x)$ γράφεται:

$$f(x) = \frac{b_2x^2 + b_1x + b_0}{(x - \rho_1)^2(x - \rho_2)} \quad (\text{B.1.9})$$

Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε ένα ανάπτυγμα της μορφής:

$$f(x) = \frac{C_{11}}{(x - \rho_1)} + \frac{C_{12}}{(x - \rho_1)^2} + \frac{C_{21}}{(x - \rho_2)} \quad (\text{B.1.10})$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές C_{11} , C_{12} και C_{21} μπορούμε και εδώ να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών να εξισώσουμε τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων και να λύσουμε το σύστημα. Υπάρχει όμως και για αυτή την περίπτωση ένας απλούστερος τρόπος.

Πολλαπλασιάζουμε την (B.1.10) με $(x - \rho_1)^2$ και έχουμε:

$$(x - \rho_1)^2 f(x) = C_{11}(x - \rho_1) + C_{12} + \frac{C_{21}(x - \rho_1)^2}{(x - \rho_2)} \quad (\text{B.1.11})$$

Από την (B.1.11) υπολογίζουμε την C_{12} με τη σχέση:

$$C_{12} = (x - \rho_1)^2 f(x) \Big|_{x=\rho_1} = \frac{b_2\rho_1^2 + b_1\rho_1 + b_0}{\rho_1 - \rho_2} \quad (\text{B.1.12})$$

Για να υπολογίσουμε το C_{11} διαφορίζουμε την (B.1.11) ως προς x και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(x - \rho_1)^2 f(x)] &= C_{11} + C_{21} \frac{2(x - \rho_1)(x - \rho_2) - (x - \rho_1)^2}{(x - \rho_2)^2} \\ &= C_{11} + C_{21} \left[\frac{2(x - \rho_1)}{(x - \rho_2)} - \frac{2(x - \rho_1)^2}{(x - \rho_2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.1.13})$$

ο τελευταίος όρος της (B.1.13) είναι ίσος με μηδέν για $x = \rho_1$ έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{d}{dx} (x - \rho_1)^2 f(x) \Big|_{x=\rho_1} \\ &= \frac{2b_2\rho_1 + b_1}{\rho_1 - \rho_2} - \frac{b_2\rho_1^2 + b_1\rho_1 + b_0}{(\rho_1 - \rho_2)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.1.14})$$

Ο συντελεστής C_{21} υπολογίζεται από τη γνωστή σχέση:

$$\begin{aligned} C_{21} &= (x - \rho_2) f(x) \Big|_{x=\rho_2} \\ &= \frac{b_2\rho_2^2 + b_1\rho_2 + b_0}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.1.15})$$

Γενικά, αν το πολυώνυμο του παρονομαστή έχει τη ρίζα ρ_1 με πολλαπλότητα r και $n-r$ απλές ρίζες $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{n-r+1}$ τότε ο παρονομαστής αναλύεται

$$D(x) = (x - \rho_1)^r \prod_{i=2}^{n-r+1} (x - \rho_i) \quad (\text{B.1.16})$$

έτσι συνάρτηση $f(x)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως

$$f(x) = \frac{C_{11}}{(x - \rho_1)} + \frac{C_{12}}{(x - \rho_1)^2} + \dots + \frac{C_{1r}}{(x - \rho_1)^r} + \frac{C_{21}}{(x - \rho_2)} + \dots + \frac{C_{(n-r)1}}{(x - \rho_{n-r})} \quad (\text{B.1.17})$$

και οι συντελεστές C_{1i} , $i = 1, 2, \dots, r$ υπολογίζονται από την:

$$C_{1i} = \frac{1}{(r-i)!} \left. \frac{d^{r-i}}{dx^{r-i}} [(x - \rho_1)^r f(x)] \right|_{x=\rho_1} \quad (\text{B.1.18})$$

οι υπόλοιπες σταθερές C_{ki} , $i = 2, 3, \dots, n-r$ υπολογίζονται με την (B.1.8).

B.1.3 Ύπαρξη μιγαδικών ριζών

Αν το πολυώνυμο $D(x)$ έχει ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών $\rho_1 = \sigma + j\omega$ και $\rho_2 = \rho_1^* = \sigma - j\omega$, τότε η συνάρτηση $f(x)$ αναλύεται ως:

$$f(x) = \frac{C_1}{x - \rho_1} + \frac{C_2}{x - \rho_1^*} + \frac{C_3}{(x - \rho_3)^r} + \dots + \frac{C_n}{x - \rho_n} \quad (\text{B.1.19})$$

Όλοι οι συντελεστές υπολογίζονται από την σχέση:

$$C_k = (x - \rho_k) f(x) \Big|_{x=\rho_k}, k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{B.1.20})$$

σημειώνεται ότι οι συντελεστές C_1 και C_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί ($C_2 = C_1^*$). Σε περίπτωση που οι ρίζες εμφανίζονται με κάποια πολλαπλότητα, ακολουθεί η προηγούμενη μεθοδολογία.

B.2 Ο ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ $N(x)$ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ Η ΙΣΟΣ ΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΤΟΥ $D(x)$

Αν ο βαθμός του πολυώνυμου του αριθμητή $N(x)$, είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του πολυώνυμου του παρονομαστή $D(x)$, δηλαδή, $m \geq n$, κάνουμε τη διαίρεση και η συνάρτηση $f(x)$ γράφεται:

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \Pi(x) + \frac{g(x)}{D(x)} \quad (\text{B.2.1})$$

Επειδή ο βαθμός του πολυώνυμου $g(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του $D(x)$, ο όρος $\frac{g(x)}{D(x)}$ στην (B.2.1) αναλύεται σε απλά κλάσματα όπως σε κάποια από τις περιπτώσεις που περιγράψαμε.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Ο βασικός σκοπός του παραρτήματος είναι να παρουσιάσει χρήσιμες σχέσεις από τα μαθηματικά.

Γ.1 Τριγωνομετρία.

Για το ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος ισχύουν οι σχέσεις

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad (\Gamma.1.1)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad (\Gamma.1.2)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (\Gamma.1.3)$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (\Gamma.1.4)$$

$$\cos \left(\theta \pm \frac{\pi}{2} \right) = \mp \sin \theta \quad (\Gamma.1.5)$$

$$\sin \left(\theta \pm \frac{\pi}{2} \right) = \pm \cos \theta \quad (\Gamma.1.6)$$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin \theta \cos \phi \pm \cos \theta \sin \phi \quad (\Gamma.1.7)$$

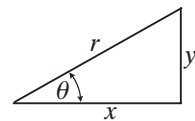
$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos \theta \cos \phi \mp \sin \theta \sin \phi \quad (\Gamma.1.8)$$

$$2 \sin \theta \sin \phi = \cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi) \quad (\Gamma.1.9)$$

$$2 \cos \theta \cos \phi = \cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi) \quad (\Gamma.1.10)$$

$$2 \sin \theta \cos \phi = \sin(\theta - \phi) + \sin(\theta + \phi) \quad (\Gamma.1.11)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad (\Gamma.1.12)$$



Το ορθογώνιο τρίγωνο.

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad (\Gamma.1.13)$$

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\Gamma.1.14)$$

$$4 \cos^3 \theta = 3 \cos \theta + \cos(3\theta) \quad (\Gamma.1.15)$$

$$4 \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - \sin(3\theta) \quad (\Gamma.1.16)$$

$$a \cos \theta - b \sin \theta = A \cos(\theta + \phi) \quad (\Gamma.1.17)$$

όπου

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}(b/a)$$

$$a = A \cos \phi$$

$$b = A \sin \phi$$

Γ.2 Αόριστα ολοκληρώματα.

Γ.2.1 Ρητών αλγεβρικών συναρτήσεων

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1 \quad (\Gamma.2.1)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln|a+bx| \quad (\Gamma.2.2)$$

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}, \quad n > 0 \quad (\Gamma.2.3)$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^n} = \frac{-1}{(n-1)b(a+bx)^{n-1}}, \quad n > 1 \quad (\Gamma.2.4)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \left(\frac{bx}{a} \right) \quad (\Gamma.2.5)$$

$$\int \frac{x dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) \quad (\Gamma.2.6)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{a^2 + x^2} = x - a \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \quad (\Gamma.2.7)$$

Γ.2.2 Τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\int \cos(cx) dx = \frac{1}{c} \sin(cx) \quad (\Gamma.2.8)$$

$$\int x \cos(cx) dx = \frac{1}{c^2} [\cos(cx) + cx \sin(cx)] \quad (\Gamma.2.9)$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x \quad (\Gamma.2.10)$$

$$\int \sin(cx) dx = -\frac{1}{c} \cos(cx) \quad (\Gamma.2.11)$$

$$\int x \sin(cx) dx = \frac{1}{c^2} [\sin(cx) + cx \cos(cx)] \quad (\Gamma.2.12)$$

$$\int x^2 \sin x dx = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x \quad (\Gamma.2.13)$$

Γ.2.3 Εκθετικών συναρτήσεων

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (\Gamma.2.14)$$

$$\int x e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) \quad (\Gamma.2.15)$$

$$\int e^{ax} \sin(cx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + c^2} [a \sin(cx) - c \cos(cx)] \quad (\Gamma.2.16)$$

$$\int e^{ax} \cos(cx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + c^2} [a \cos(cx) + c \sin(cx)] \quad (\Gamma.2.17)$$

Γ.2.4 Ορισμένα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x/2\sigma^2} dx = \sigma\sqrt{2\pi}, \quad \sigma > 0 \quad (\Gamma.2.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x/2\sigma^2} dx = \sigma^3\sqrt{2\pi}, \quad \sigma > 0 \quad (\Gamma.2.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x+bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{b^2}{4a^2}}, \quad a > 0 \quad (\Gamma.2.20)$$

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sinc}(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\Gamma.2.21)$$

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sinc}^2(x) dx = \frac{\pi}{2} \quad (\Gamma.2.22)$$

Γ.3 Γεωμετρικές σειρές

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2} \quad (\Gamma.3.1)$$

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad (\Gamma.3.2)$$

$$\sum_{n=1}^N n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} \quad (\Gamma.3.3)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^n = \begin{cases} \frac{1-x^N}{1-x}, & x \neq 1 \\ N, & x = 1 \end{cases} \quad (\Gamma.3.4)$$

$$\sum_{n=k}^m x^n = \begin{cases} \frac{x^k - x^{m+1}}{1-x}, & x \neq 1 \\ m - k + 1, & x = 1 \end{cases} \quad (\Gamma.3.5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1 \quad (\Gamma.3.6)$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x}, \quad |x| < 1 \quad (\Gamma.3.7)$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1 \quad (\Gamma.3.8)$$

$$\sum_{n=0}^N e^{j(\theta+n\phi)} = \frac{\sin[(N+1)\phi/2]}{\sin(\phi/2)} e^{j[\theta+(N\phi/2)]} \quad (\Gamma.3.9)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\Gamma.3.10)$$

Ευρετήριο

- Άθροισμα της συνέλιξης, 51
Αθροιστής, 32
Αιτιατό σήμα, 4
Αιτιατό σύστημα, 37
Αιτιοκρατικό σήμα, 7
Ακολουθία ετεροσυσχέτισης, 249
Ακολουθία συσχέτισης, 249
Αμφίπλευρη ακολουθία, 242
Αμφίπλευρο σήμα, 207
Αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace, 200
Αμφίπλευρος μετασχηματισμός Z , 234
Ανάκλαση, 8
Αναλογογηφιακός μετατροπέας, 33
Αναλυτική συνάρτηση, 204
Ανάπτυγμα Fourier, 69
Αντιστροφή συστήματος, 35
Αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier, 171
Απόκριση ισχύος, 113
Απόκριση μηδενικής εισόδου, 270
Απόκριση μηδενικής εισόδου, 270
Απόκριση μηδενικής κατάστασης, 270
Απόκριση μοναδιαίου δείγματος, 51
Απόκριση πλάτους, 55
Απόκριση συχνότητας συστήματος, 55, 57
Απόκριση φάσης, 55
Αριστερόπλευρη ακολουθία, 244
Αριστερόπλευρο σήμα, 208
Αρμονικά συσχετιζόμενα εκθετικά σήματα
διακριτού χρόνου, 137
συνεχούς χρόνου, 67, 68
Αρμονική συνιστώσα φάσματος, 70
Άρτιο σήμα, 5

Περιττό σήμα, 5
Βαθμωτός πολλαπλασιαστής, 32

Γραμμική συνέλιξη, 51, 177
Γραμμικό σύστημα, 37
Γραμμικό φάσμα, 83

Γραφικός προσδιορισμός της συνέλιξης, 47

Decibel, 125
Δειγματοληψία, 2
περίοδος δειγματοληψίας, 2
Δεξιόπλευρη ακολουθία, 244
Δεξιόπλευρο σήμα, 209
Διαγράμματα Bode, 125
Διακριτό Φάσμα, 79, 74
Διακριτός μετασχηματισμός Fourier, 171
Διαμόρφωση, 95, 135
Διαμορφωτής, 61
Διάσταση διανυσματικού χώρου, 64
Διατήρηση της συχνότητας, 55, 57
Διαφορική εξίσωση
δεύτερης τάξης, 35
με σταθερούς συντελεστές, 34
πρώτης τάξης, 34
Διαφοριστής, 41
Δυσμός, 105
Δυναμικό σύστημα, 39

Euler σχέση, 279
Είσοδος συστήματος, 32
Εκθετική σειρά Fourier, 69
Ενέργεια σήματος, 6
Ενεργειακό σήμα, 6
Εξίσωση ανάλυσης, 69, 139, 145
Εξίσωση σύνθεσης, 70, 139, 145
Έξοδος συστήματος, 32
Εσωτερικό γινόμενο
διανυσμάτων, 65
σημάτων, 66
Ευκλείδειος χώρος σημάτων, 66
Ευσταθές σύστημα, 40
Εφαρμογές των MF, 119
Εφαρμογές των ML, 219
Εφαρμογές των Mz, 262

Ζώνη
αποκοπής, 128
διέλευσης, 128
μετάβασης, 130

Θεμελιώδης αναλογική περίοδος, 11
συχνότητα, 11
κυκλική συχνότητα, 11
Θεμελιώδης ψηφιακή κυκλική συχνότητα, 14
Θεώρημα Parseval, 99
Θεώρημα της συνέλιξης του ML, 211
Θεώρημα της συνέλιξης του MF, 97

Ιδανικό κατωπερατό φίλτρο, 128
Ιδανικό φίλτρο βασικής ζώνης, 128
Ιδιότητες συστημάτων, 37
Ιδιότητες της συνέλιξης, 45
αντιμεταθετική, 45
επιμεριστική, 46
προσεεριστική, 46
ταντοτική, 46
Ιδιότητες του ML, 209, 217
Ιδιότητες του MF, 151, 176
Ιδιότητες του Mz, 245, 251
Ισχύς σήματος, 7

Καθυστέρηση, 249
Κατάσταση ηρεμίας, 37
Κβάντιση, 2
Κεντρικός λοβός, 115
Κριτήριο Nyquist, 168
Κρουστική ακολουθία, 26
Κρουστική απόκριση συστήματος, 44, 51
Κρουστική συνάρτηση, 19
Κυκλική ανάκλαση ακολουθίας, 173
Κυκλική ολίσθηση ακολουθίας, 174
Κυκλική συνέλιξη ακολουθιών, 175
Κυκλική συχνότητα, 4
Κυκλική συχνότητα -3 dB, 127
Κωδικοποίηση, 3

 L_2 -μέτρο

Μεικτή σύνδεση συστημάτων, 35
Μεταβατική κατάσταση, 269
Μέση τιμή σήματος, 70

- Μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, 113
- Μετασχηματισμός Fourier, 55, 57, 88, 145, 171
- Μετασχηματισμός Laplace, 54, 200
- Μετασχηματισμός z, 57, 234
- Μέτρο διανύσματος, 65
- μγαδικού αριθμού, 279
- σήματος, 66
- Μηδενικό συνάρτησης, 204
- Μήκος διανύσματος, 65
- Μγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου, 14
- συνεχούς χρόνου, 10
- Μοναδιαία βηματική ακολουθία, 26
- Μοναδιαίο βήμα διακριτού χρόνου, 26
- Μοναδιαίο δείγμα, 26
- Μοναδιαίος κύκλος, 235
- Μόνιμη κατάσταση, 269
- Μονοδιάστατο σήμα, 1
- Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace, 216
- Μονόπλευρος Μετασχηματισμός z, 234
- Νομοτελειακό σήμα, 7
- Ολοκλήρωμα της συνελίξης, 44
- Ολοκληρωτής, 61
- Ορθογώνια διανύσματα, 65
- σήματα, 66
- Ορθογώνιο σύνολο σημάτων, 137
- Ορθογώνιος παλμός, 24
- Ορθοκανονική βάση σημάτων, 66
- Ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων, 65
- Παλμός ορθογώνιος, 24
- τριγωνικός, 24
- Παλμοκοδική διαμόρφωση, 3
- Παραθύρωση, 174
- Παράλληλη σύνδεση συστημάτων, 31
- Παραμβολή, 154
- Πεπερασμένο σήμα, 5
- Περιβάλλουσα, 13
- Περιοδικό σήμα, 3
- Περιοδική συνελίξη, 157
- Περίοδος, 3
- δειγματοληψία, 164
- θεμελιώδης, 3
- Περιοχή σύγκλισης, 200, 251
- Περιττό σήμα, 5
- Πολυαπλασιαστής, 32
- Πόλος συνάρτησης, 204
- Πολυωνμικό εκθετικό σήμα, 205
- Πραγματικό εκθετικό σήμα, 11
- Πραγματικό μέρος μιγαδικού αριθμού, 279
- Ρητή συνάρτηση, 121, 204
- Σειρά Fourier διακριτού χρόνου, 139,
- Σειριακή σύνδεση συστημάτων, 35
- Σήμα, 1
- αιτιατό, 4
- αιτιοκρατικό, 7
- αναλογικό, 2
- άπειρης διάρκειας, 5
- απλής συχνότητας, 12
- άρτιο, 5
- διακριτού χρόνου, 2
- διδιάστατο, 1
- ενέργειας, 7
- εκθετικής τάξης, 208
- ισχύος, 7
- μονοδιάστατο, 1
- νομοτελειακό, 7
- περιοδικό, 3
- περιττό, 5
- πεπερασμένης διάρκειας, 5
- πεπερασμένο, 5
- πολυδιάστατο, 1
- στοχαστικό, 7
- συνεχούς χρόνου, 2
- τυχαίο, 7
- υψηλών συχνοτήτων, 72
- φθίνων ημιτονοειδές, 13
- χαμηλών συχνοτήτων, 72
- ψηφιακό, 3
- Σημείο -3dB, 114
- Σημείο ανωμαλίας συνάρτησης, 204
- Σταθερά απόσβεσης συστήματος, 34
- Σταθερά ελατηρίου, 34
- Σταθερά συνιστώσα φάσματος, 70
- Περιττό σήμα, 5
- Σταθερά χρόνου, 126
- Στοχαστικό σήμα, 7
- Στοχαστικό σύστημα, 32
- Συζυγής μιγαδικός αριθμός, 280
- Συνάρτηση αναλυτική, 204
- αυτοσυσχέτισης, 99, 111, 250
- δειγματοληψία, 93
- κλίσης, 25
- μοναδιαίου βήματος, 18
- προσήμου, 25
- Συνάρτηση δέλτα ή κρουστική ή Dirac, 19
- ιδιότητα ολίσθησης, 20
- Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος, 54, 50, 57
- Συνδέσεις συστημάτων, 35
- με ανατροφοδότηση ή με ανάδραση, 35
- μεικτή, 35
- παράλληλη, 35
- σειριακή, 35
- Συνελίξη, 44, 51
- Συνεχές φάσμα, 145
- Συνεχής συνιστώσα φάσματος, 70
- Συνθήκες Dirichlet, 74
- Συντελεστές Fourier, 70, 139
- Συντελεστής συσχέτισης, 249
- αυτοσυσχέτισης, 250
- Σύστημα, 32
- αιτιατό, 37
- αιτιοκρατικό, 32
- αναλογικό, 32
- αντιστρέψιμο, 38
- γραμμικό, 37
- διαμόρφωσης, 61
- δεύτερης τάξης, 35, 122
- διακριτού χρόνου, 28
- διαφόρισης, 41
- ευσταθές, 40
- καθυστέρησης, 32
- με μνήμη, 39
- μέσης τιμής, 38, 45, 62
- μίας εισόδου μιας εξόδου, 32
- ολοκλήρωσης, 61
- πλήρους ανόρθωσης, 60
- πολλών εισόδων μιας εξόδου, 32
- πολλών εισόδων πολλών εξόδων, 32
- πρώτης τάξης, 34, 121, 188
- στοχαστικό, 32
- συνεχούς χρόνου, 32
- χρονικά αναλλοίωτο, 39
- χωρίς μνήμη, 34
- υβριδικό, 33
- Συχνότητα -3dB,
- Συχνότητα Nyquist, 168

- Συχνότητα αποκοπής, 128
Συχνότητα δειγματοληψίας, 164
Σχέση μεταξύ ML και MF, 201
Σχέση του Euler, 279
- Τάξη συστήματος, 34
Ταυτότητα Parseval, 77
Τμηματικά ομαλές συναρτήσεις, 74
Τριγωνικός παλμός, 24
Τριγωνομετρική σειρά Fourier, 70
Τυχαίο σήμα, 7
- Υβριδικό σύστημα, 33
Υπαρξη MF, 72
- Φαινόμενο Gibbs, 82, 90
Φανταστικό μέρος μιγαδικού αριθμού, 279
- Φάση μιγαδικού αριθμού, 279
Φάσμα σήματος, 70
 διακριτό, 88
 συνεχές, 88, 145
Φάσμα συχνοτήτων, 104
Φασματικά μηδενικά, 90
Φασματικές γραμμές, 70, 139
Φασματική πυκνότητα ενέργειας, 100
Φασματική πυκνότητα ισχύος, 113
Φασματική πυκνότητα πλάτους, 88
Φέρουσα συχνότητα, 96, 135
Φθίνοντα ημιτονοειδή σήματα, 13
ΦΕΦΕ ευσταθές σύστημα, 40
Φίλτρο, 128
 βαθυπερατό, 130
 βασικής ζώνης, 128, 130
- ζωνοδιαβατό, 130
ζωνοφρακτικό, 130
κατωπερατό, 128
υψιπερατό, 130
απόρριψης συχνότητας, 130
- Χρονικά αναλλοίωτο σύστημα, 39
Χρονική
 διαστολή, 8
 συστολή, 9
Χρονική μετατόπιση, 9
Χρονική σταθερά, 126
Χώρος σημάτων, 66
- Ψηφιακό σήμα, 2
Ψηφιακή κυκλική συχνότητα, 14
Ψηφιοαναλογικός μετατροπέας, 33