Εισαγωγή στις μερικές διαφορικές εξισώσεις

Βασικοί ορισμοί

Μερική διαφορική εξίσωση ή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους για την άγνωστη συνάρτηση $f(x, y, z, \dots)$ ονομάζουμ[ε] μια εξίσωση που περιέχει τις ανεξάρτητες μεταβλητές $x, y, z, \dots$ την f, και μερικές παραγώγους της f. Τάξη της εξίσωσης ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξη μερικών παραγώγων που εμφανίζονται στην εξίσωση.

π.χ.

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \qquad \text{(πρώτης τάξης)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(δεύτερης τάξης)}$$

Λύση μιας μ.δ.ε. σε ένα χωρίο $D \in \mathbb{R}^n$ λέγεται κάθε συνάρτηση $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ που την επαληθεύει σε κάθε σημείο $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ του D. Η <u>γενική λύση</u> μιας μ.δ.ε έχει τη μορφή

$$\varphi(g_1, g_2, \dots, g_n, f) = 0$$

όπου ϕ <u>αυθαίρετη</u> συνάρτηση των συγκεκριμένων συναρτήσεων $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ και της λύσης f που ορίζεται πεπλεγμένα από την παραπάνω σχέση. <u>Μερική λύση</u> λέγεται κάθε λύσ[η] που προκύπτει από τη γενική για μια συγκεκριμένη μορφή της αυθαίρετης συνάρτησης που υπαγορεύεται από επιπρόσθετες συνθήκες, όπως συνοριακές συνθήκες (συγκεκριμένες τιμές στο περίβλημα του χωρίου D) ή αρχικές συνθήκες (αν μία μεταβλητή είναι ο χρόνος t, π.χ. η μορφή της λύσης για $t=0$, $f(x,0)$).

Παράδειγμα 1: Η μ.δ.ε

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y} = y^2$$

έχει γενική λύση

$$\varphi\left(\frac{y}{x}, \; f(x,y) - \frac{y^2}{x} \right) = 0,$$

όπου $\varphi(u,v)$ αυθαίρετη συνάρτηση.

(α) Να βρεθεί η μερική λύση που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $\varphi(u,v) = u - v$

(β) Να δειχθεί ότι η μερική λύση επαληθεύει τη μ.δ.ε.

Λύση: (α) $u = \frac{y}{x}$, $\quad v = f - \frac{y^2}{x}$

οπότε

$$\varphi(u,v) = 0$$

$$\Rightarrow u - v = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} - \left(f - \frac{y^2}{x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x}$$

(β) $$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} + \frac{2y}{x}$$

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} \right) + xy \left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x} \right)$$

$$= -y - y^2 + y + 2y^2$$

$$= y^2 \quad \checkmark$$

Παρατήρηση: Αν μία μ.δ.ε για τη συνάρτηση $f(x,y)$ περιλαμβάνει μερικές παραγώγους μόνο ως προς τη μία μεταβλητή, π.χ. y, την λύνουμε ως συνήθη δ.ε. ως προς y, προσέχοντας όμως ότι οι σταθερές ολοκλήρωσης είναι συναρτήσεις της άλλης μεταβλητής, x.

Παράδειγμα 2: Να λυθούν οι μ.δ.ε.

(α)
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 4f(x,y)$$

(β)
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$$

Λύση: (α) Δεν υπάρχουν μερικές παράγωγοι ως προς x, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε το x ως παράμετρο. Η εξίσωση ως προς y

$$f'' - 4f = 0$$

έχει γενική λύση

$$f = c_1(x)e^{2y} + c_2(x)e^{-2y}$$

όπου οι "σταθερές" c_1, c_2 εξαρτώνται από την "παράμετρο" x.

(β) Θέτουμε $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ οπότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{dp}{dy}$$ και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{dp}{dy} + 2p = 0$$

$$\Rightarrow \frac{p'}{p} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \ln p = -2$$

$$\Rightarrow \ln p = -2 \int dy$$

$$\Rightarrow \ln p = -2y + c'(x)$$

$$\Rightarrow p = e^{c'(x)} \cdot e^{-2y}$$

$$\left(c(x) = e^{c'(x)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = c(x)\, e^{-2y}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int c(x)\, e^{-2y}\, dx + g(y)$$

$g(y)$ αυθαίρετη συνάρτηση

$$\Rightarrow f(x,y) = h(x)\, e^{-2y} + g(y)$$

$h(x) = \int c(x)\, dx$ αυθαίρετη συνάρτηση

Μία μ.δ.ε. λέγεται γραμμική αν περιλαμβάνει γραμμικούς συνδυασμούς της άγνωστης συνάρτησης $f(x,y,z)$ και των μερικών παραγώγων της, με συντελεστές συναρτήσεις των x, y, z.

Μία μ.δ.ε. λέγεται ημιγραμμική, αν οι συντελεστές των γραμμικών συνδυασμών είναι συναρτήσεις των x, y, z και επιπλέον της f.

π.χ. $$g_1(x,y) f_x + g_2(x,y) f_{xy} + g_3(x,y) f_{yy} + g_4(x,y) f = g_5(x,y)$$

(γραμμική δεύτερης τάξης)

$$g_1(x,y,f) f_x + g_2(x,y,f) f_y + g_3(x,y) f = g_4(x,y,f)$$

(ημιγραμμική πρώτης τάξης)

Μία γραμμική μ.δ.ε. λέγεται <u>ομογενής</u>, αν όλοι οι όροι της περιέχουν μερικές παραγώγους της ίδιας τάξης.

π.χ.

$$g_1(x,y)\, f_x + g_2(x,y)\, f_y = 0$$

ομογενής πρώτης τάξης

$$g_1(x,y)\, f_{xx} + g_2(x,y)\, f_{xy} + g_3(x,y)\, f_{yy} = 0$$

ομογενής δεύτερης τάξης

<u>Παρατήρηση</u>: Πολλές από τις μ.δ.ε. της Φυσικής είναι γραμμικές ή/και ομογενείς.

<u>Αρχή της επαλληλίας</u>: Αν $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ είναι δύο λύσεις μιας ομογενούς μ.δ.ε., ή γενικότερα μιας γραμμικής μ.δ.ε. που δεν περιέχει όρο της μορφής $g(x,y)$, τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$f(x,y) = k\, f_1(x,y) + \lambda\, f_2(x,y), \quad k, \lambda \in R$$

είναι επίσης λύση.

π.χ. η αρχή της επαλληλίας ισχύει για την μ.δ.ε.

$$g_1(x,y)\, f_x + g_2(x,y)\, f_y + g_3(x,y)\, f = 0$$

αλλά <u>δεν ισχύει</u> για την

$$g_1(x,y)\, f_x + g_2(x,y)\, f_y + g_3(x,y)\, f = \underbrace{g_4(x,y)}_{\text{λόγω αυτού του όρου}}$$

ούτε για την ημιγραμμική μ.δ.ε.

$$g_1(x,y,f)\, f_x + g_2(x,y)\, f_y + g_3(x,y)\, f = 0$$

λόγω αυτού

Ημιγραμμικές μ.δ.ε. πρώτης τάξης

<u>Πρόταση 1</u>: Έστω η ημιγραμμική μ.δ.ε. πρώτης τάξης για την άγνωστη συνάρτηση $z(x,y)$

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

(α) Αν η σχέση $u(x,y,z) = c$ ορίζει μία λύση (πρώτο ολοκλήρωμα) του χαρακτηριστικού (ή προσαρτημένου) συστήματος

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

τότε η συνάρτηση $z(x,y)$ που ορίζεται πεπλεγμένα από τη σχέση αυτή είναι λύση της μ.δ.ε.

(β) Αν

$$u(x,y,z) = c_1, \quad v(x,y,z) = c_2$$

είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα του χαρακτηριστικού συστήματος, τότε η γενική λύση της μ.δ.ε. είναι

$$F(u(x,y,z), v(x,y,z)) = 0$$

όπου F αυθαίρετη συνάρτηση

<u>Παρατήρηση</u>: Με την παραπάνω πρόταση, η λύση μιας ημιγραμμικής μ.δ.ε. πρώτης τάξης ανάγεται στη λύση του χαρακτηριστικού συστήματος, που είναι ένα σύστημα συνήθων δ.ε.

Η μ.δ.ε. είναι ημιγραμμική γιατί ο συντελεστής R εξαρτάται και από την άγνωστη συνάρτηση $z(x,y)$.

<u>Απόδειξη</u>: (α) $u(x,y,z) = c$ σταθερό

$$\Rightarrow du = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz = 0 \quad (1)$$

Όμως $z = z(x,y)$ οπότε

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy = 0$$

Όμως x, y ανεξάρτητες μεταβλητές οπότε

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \quad (4)$$

Από το χαρακτηριστικό σύστημα όμως έχουμε

$$dx = \frac{P}{R} dz, \qquad dy = \frac{Q}{R} dz \quad (5)$$

$$(1) \xrightarrow{(3),(4),(5)} -\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{P}{R} dz - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{Q}{R} dz + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{P}{R} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{Q}{R} \frac{\partial z}{\partial y} - 1 \right) dz$$

$$\Rightarrow \frac{P}{R} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{Q}{R} \frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} = R$$

(β) Πρόταση 1.1, σελ. 22, και πρόταση 2.1, σελ. 27, του βιβλίου "Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων".

Παράδειγμα 3: Να βρεθεί η γενική λύση της μ.δ.ε.

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + \gamma z = 0, \qquad a, b, \gamma \neq 0 \text{ σταθερές}$$

Λύση: $P = a, \quad Q = b, \quad R = -\gamma z$

Χαρακτηριστικό σύστημα:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{-\gamma z} \qquad (*)$$

Η πρώτη ισότητα είναι μια συνήθης δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{a} = \int \frac{dy}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} + c$$

$$\Rightarrow bx = ay + ac$$

$$\Rightarrow ay - bx = -ac = c_1$$

Επομένως, ένα πρώτο ολοκλήρωμα του χαρακτηριστικού συστήματος είναι

$$u(x,y,z) = ay - bx = c_1$$

Από τη δεύτερη ισότητα της $(*)$ έχουμε

$$\frac{dz}{-\gamma z} = \frac{dy}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{\gamma}{b}\, dy$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -\frac{\gamma}{b}\int dy$$

$$\Rightarrow \ln z = -\frac{\gamma}{b} y + c$$

$$\Rightarrow \quad z = e^{c} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\beta} y}$$

$$\Rightarrow \quad z\, e^{\frac{\gamma}{\beta} y} = e^{c} = c_2$$

Επομένως, ένα άλλο πρώτο ολοκλήρωμα του χαρακτηριστικού συστήματος, γραμμικώς ανεξάρτητο του προηγούμενου, είναι το

$$v(x,y,z) = z\, e^{\frac{\gamma}{\beta} y} = c_2$$

Σύμφωνα με την πρόταση 1, η γενική λύση της μ.δ.ε. είναι

$$F\left(ay - \beta x,\ z e^{\frac{\gamma}{\beta} y}\right) = 0$$

όπου $F(u,v)$ αυθαίρετη συνάρτηση δύο μεταβλητών. Αν υποθέσουμε ότι η $F(u,v)$ μπορεί να λυθεί ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, έχουμε

$$z\, e^{\frac{\gamma}{\beta} y} = \varphi(ay - \beta x)$$

$$\Rightarrow \quad z(x,y) = e^{-\frac{\gamma}{\beta} y}\, \varphi(ay - \beta x)$$

όπου $\varphi(w)$ αυθαίρετη συνάρτηση μίας μεταβλητής.

<u>Παράδειγμα 4</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της μ.δ.ε.

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$$

<u>Λύση</u>: Η μ.δ.ε. γράφεται

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

οπότε $\quad P = x^2, \quad Q = -y^2, \quad R = 0$

και το χαρακτηριστικό σύστημα είναι

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{0}$$

Από τη δεύτερη ισότητα έχουμε

$$dz = 0 \Rightarrow z = c_1$$

Από την πρώτη ισότητα

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int -\frac{dy}{y^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} = \frac{1}{y} - c_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c_2$$

Τα δύο γραμμικώς ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα του χαρακτηριστικού συστήματος είναι λοιπόν

$$z = c_1 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c_2$$

Η γενική λύση της μ.δ.ε είναι

$$F\left(z, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 0$$

ή, αν λύσουμε ως προς την πρώτη μεταβλητή

$$z = \phi\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

όπου $\phi(w)$ αυθαίρετη συνάρτηση μίας μεταβλητής.

Παράδειγμα 5: Να βρεθεί η γενική λύση της μ.δ.ε.

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)z$$

Λύση: $P = xy$, $Q = 2xy$, $R = (x+y)z$

Χαρακτηριστικό σύστημα:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{(x+y)z} \quad (*)$$

Από την πρώτη ισότητα

$$\frac{dx}{\cancel{xy}} = \frac{dy}{2\cancel{xy}}$$

$$\Rightarrow 2dx = dy$$

$$\Rightarrow 2\int dx = \int dy$$

$$\Rightarrow 2x = y + c_1$$

οπότε ένα πρώτο ολοκλήρωμα είναι

$$2x - y = c_1$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ισότητα πρώτου και τρίτου μέλους του χαρακτηριστικού συστήματος $(*)$:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{(x+y)z} \quad (**)$$

Μπορούμε να απαλοίψουμε το y χρησιμοποιώντας το πρώτο ολοκλήρωμα

$$2x - y = c_1 \Rightarrow y = 2x - c_1$$

και να φέρουμε την εξίσωση $(**)$ σε μορφή χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dx}{x(2x-c_1)} = \frac{dz}{(x+2x-c_1)z} = \frac{dz}{(3x-c_1)z}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{3x-c_1}{x(2x-c_1)}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{3x-c_1}{x(2x-c_1)}\,dx$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους θα πρέπει να αναλύσουμε τη ρητή συνάρτηση σε μερικά κλάσματα

$$\frac{3x-c_1}{x(2x-c_1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-c_1}$$

$$\Rightarrow 3x-c_1 = A(2x-c_1) + Bx$$

$$\Rightarrow 3x-c_1 = (2A+B)x - Ac_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A+B=3 & \Rightarrow B=1 \\ -Ac_1 = -c_1 & \Rightarrow A=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x-c_1} \right) dx$$

$$\Rightarrow \ln|z| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|\underbrace{2x-c_1}_{y}| + c_2$$

$$\Rightarrow \ln|z| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|y| + c_2$$

$$\Rightarrow \ln|z| - \ln|x| = \ln|y|^{1/2} + c_2$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{z}{x}\right| - \ln|y|^{1/2} = c_2$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{z}{x\sqrt{|y|}}\right| = c_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z}{x\sqrt{|y|}} = \pm e^{c_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z}{x\sqrt{|y|}} = c$$

αυτό είναι ένα άλλο πρώτο ολοκλήρωμα του χαρακτηριστικού συστήματος

Η γενική λύση της μ.δ.ε. είναι

$$F\left(2x-y, \frac{z}{x\sqrt{|y|}}\right) = 0 \quad , \quad F(u,v) \text{ αυθαίρετη συνάρτηση}$$

ή, αν λύσουμε ως προς τη δεύτερη μεταβλητή

$$\frac{z}{x\sqrt{|y|}} = \phi(2x-y)$$

$$\Rightarrow \quad z = x\sqrt{|y|}\,\phi(2x-y) \quad , \quad \phi(w) \text{ αυθαίρετη συνάρτηση}$$

<u>Παράδειγμα 6</u>: Να λυθεί η μ.δ.ε.

$$2y(2a-x)\frac{\partial z}{\partial x} + (x^2+z^2-y^2-4ax)\frac{\partial z}{\partial y} + 2yz = 0$$

<u>Λύση</u>: Χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{dx}{2y(2a-x)} = \frac{dy}{x^2+z^2-y^2-4ax} = \frac{dz}{\underbrace{-2yz}_{\text{προσοχή}}}$$

Από ισότητα πρώτου και τρίτου όρου

$$\frac{dx}{\cancel{2y}(2a-x)} = \frac{dz}{-\cancel{2y}z}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{2a-x} = \frac{-dz}{z}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{2a-x} = -\int \frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow -\int \frac{dx}{2a-x} = \int \frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \ln|2a-x| = \ln|z| + c$$

$$\Rightarrow \ln|2a-x| - \ln|z| = c$$

$$\Rightarrow \ln\left(\left|\frac{2a-x}{z}\right|\right) = c$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2a-x}{z}\right| = e^c$$

$$\Rightarrow \frac{2a-x}{z} = \pm e^c$$

$$\Rightarrow \frac{2a-x}{z} = c_1 \quad \text{πρώτο ολοκλήρωμα}$$

Για να βρούμε ένα ακόμη πρώτο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε την εξής ιδιότητα μιας ισότητας με κλάσματα:

Αν $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{\xi}{\zeta}$ τότε το κλάσμα $\frac{r_1\kappa + r_2\mu + r_3\xi}{r_1\lambda + r_2\nu + r_3\zeta}$ είναι επίσης ίσο με αυτά. Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή στο χαρακτηριστικό σύστημα με $r_1 = x$, $r_2 = y$, $r_3 = z$

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x\cdot 2y(2a-x) + y(x^2+z^2-y^2-4ax) + z(-2yz)} = \frac{dz}{-2yz}$$

$$\Rightarrow \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\cancel{4axy} - 2yx^2 + yx^2 + yz^2 - y^3 - \cancel{4axy} - 2yz^2} = \frac{dz}{-2yz}$$

$$\Rightarrow \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{-yx^2 - y^3 - yz^2} = \frac{dz}{-2yz}$$

$$\Rightarrow \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{-\cancel{y}(x^2+y^2+z^2)} = \frac{dz}{-2\cancel{y}z}$$

$$\Rightarrow \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{dz}{z} \quad (*)$$

Αν θέσουμε $\quad r^2 = x^2+y^2+z^2$

$$\Rightarrow 2r\,dr = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$$

οπότε η $(*)$ γίνεται

$$\frac{2r\,dr}{r^2} = \frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow 2\frac{dr}{r} = \frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{dr}{r} = \int \frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow 2\ln r = \ln|z| + c \qquad (r>0)$$

$$\Rightarrow \ln(r^2) - \ln|z| = c$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{r^2}{|z|}\right) = c$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{|z|} = e^c \Rightarrow \frac{r^2}{z} = \pm e^c = c_2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{z} = c_2$$, ένα άλλο πρώτο ολοκλήρωμα

Γενική λύση της μ. δ. ε.

$$F\left(\frac{2a-x}{z}, \frac{x^2+y^2+z^2}{z}\right) = 0$$

Μέθοδος διαφορικών τελεστών για γραμμικές μ.δ.ε. με σταθερούς συντελεστές

Ορισμός διαφορικών τελεστών:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D_x D_y = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

Με τη χρήση των διαφορικών τελεστών, κάθε γραμμική μ.δ.ε. με σταθερούς συντελεστές γράφεται στη μορφή

$$P(D_x, D_y)z = f(x,y)$$

όπου $P(u,v)$ πολυωνυμική συνάρτηση και $f(x,y)$ γνωστή συνάρτηση

π.χ.
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 8\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x$$

$$\underbrace{(D_x^2 + 4D_xD_y - 3D_y^2 + 8D_x - D_y)}_{P(D_x, D_y)} z = \underbrace{ye^x}_{f(x,y)}$$

Ομογενείς γραμμικές μ.δ.ε. με σταθερούς συντελεστές

<u>Πρόταση 2</u>: Η γενική λύση μιας ομογενούς μ.δ.ε (που όλοι οι όροι της περιέχουν παραγώγους της ίδιας τάξης), η οποία με τη βοήθεια των διαφορικών τελεστών γράφεται ως

$$F(D_x, D_y) = 0$$

καθορίζεται από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$F(w, 1) = 0$$

και συγκεκριμένα είναι το άθροισμα των όρων που προκύπτουν ως εξής:

- Σε κάθε απλή πραγματική ρίζα w_1 αντιστοιχεί ο όρος

$$\varphi_1(y+w_1x)$$

- Σε κάθε διπλή πραγματική ρίζα w_1 αντιστοιχεί ο όρος

$$\varphi_1(y+w_1x) + x\varphi_2(y+w_1x)$$

- Σε κάθε ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών $a\pm ib$ αντιστοιχούν οι όροι

$$\varphi_1(y+(a+ib)x) + \varphi_2(y+(a-ib)x)$$

όπου φ_1, φ_2 αυθαίρετες συναρτήσεις

<u>Απόδειξη</u>: Θα αποδείξουμε την πρόταση για την ομογενή μ.δ.ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \gamma\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ σταθερές}$$

Παρατηρήστε ότι με χρήση των διαφορικών τελεστών η εξίσωση γράφεται

$$(\alpha D_x^2 + \beta D_x D_y + \gamma D_y^2) z = 0$$

οπότε

$$F(D_x, D_y) = \alpha D_x^2 + \beta D_x D_y + \gamma D_y^2$$

ενώ η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$F(w,1) = \alpha w^2 + \beta w + \gamma = 0$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$z = f(u), \quad u = y + wx$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\cdot w, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)w^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f''(u)\cdot w$$

Η μ.δ.ε γίνεται

$$\alpha \omega^2 f''(u) + \beta \omega f''(u) + \gamma f''(u) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha \omega^2 + \beta \omega + \gamma) f''(u) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \omega^2 + \beta \omega + \gamma = 0$$

$$\Rightarrow F(\omega, 1) = 0$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή του $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

- $\Delta > 0$. Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Σε καθεμία αντιστοιχεί η λύση

$$\varphi_i (y + \omega_i x) \quad , \quad i = 1, 2$$

και η γενική λύση της μ.δ.ε είναι

$$z = \varphi_1 (y + \omega_1 x) + \varphi_2 (y + \omega_2 x)$$

όπου φ_1, φ_2 αυθαίρετες συναρτήσεις

- $\Delta = 0$. Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει διπλή πραγματική ρίζα

$$\omega = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

Δύο ανεξάρτητες λύσεις είναι οι

$$\varphi_1 (y + \omega x) , \quad x \varphi_2 (y + \omega x)$$

και η γενική λύση της μ.δ.ε. είναι

$$z = \varphi_1 (y + \omega x) + x \varphi_2 (y + \omega x)$$

όπου φ_1, φ_2 αυθαίρετες συναρτήσεις

• $\Delta < 0$. Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$w_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} = a \pm ib$$

Δύο ανεξάρτητες λύσεις είναι οι

$$\varphi_1(y + w_1 x) = \varphi_1(y + (a+ib)x)$$

$$\varphi_2(y + w_2 x) = \varphi_2(y + (a-ib)x)$$

Η γενική μιγαδική λύση της μ.δ.ε είναι

$$z = \varphi_1(y + (a+ib)x) + \varphi_2(y + (a-ib)x)$$

ενώ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αυτής είναι επίσης λύσεις της μ.δ.ε.

<u>Παράδειγμα 7</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της μ.δ.ε.

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - 4\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + 5\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} - 4\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} + 4\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0$$

<u>Λύση</u>: Καταρχήν παρατηρούμε ότι η μ.δ.ε. είναι ομογενής αφού σε όλους τους όρους έχουμε παραγώγους τέταρτης τάξης. Χρησιμοποιώντας τους διαφορικούς τελεστές D_x, D_y, η μ.δ.ε. γράφεται

$$(D_x^4 - 4D_x^3 D_y + 5D_x^2 D_y^2 - 4D_x D_y^3 + 4D_y^4)z = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση, που προκύπτει από την παραπάνω μορφή με $w \to D_x$, $1 \to D_y$, είναι

$$w^4 - 4w^3 + 5w^2 - 4w + 4 = 0$$

$$\Rightarrow w^4 - 4w^3 + 4w^2 + w^2 - 4w + 4 = 0$$

$$\Rightarrow w^2(w^2-4w+4)+(w^2-4w+4)=0$$

$$\Rightarrow (w^2+1)(w^2-4w+4)=0$$

$$\Rightarrow (w^2+1)(w-2)^2=0$$

$\Rightarrow w=2$ (διπλή ρίζα), $w=\pm i$ (συζυγείς μιγαδικές)

Γενική λύση

$$z=\underbrace{\varphi_1(\cancel{y}+2x)+x\varphi_2(y+2x)}_{\text{μέρος που αντιστοιχεί στη διπλή ρίζα}}+\underbrace{\varphi_3(y+ix)+\varphi_4(y-ix)}_{\text{μέρος που αντιστοιχεί στις συζυγείς μιγαδικές}}$$

όπου $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ αυθαίρετες συναρτήσεις μίας μεταβλητής

<u>Πρόταση 3</u>: Μια γραμμική μ.δ.ε. με σταθερούς συντελεστές λέγεται αναλύσιμη αν η έκφρασή της με τους διαφορικούς τελεστές D_x, D_y παραγοντοποιείται σε πρωτοβάθμιους όρους

$$(a_1D_x+b_1D_y+\gamma_1)(a_2D_x+b_2D_y+\gamma_2)\dots(a_nD_x+b_nD_y+\gamma_n)z=0.$$

Η γενική λύση μιας τέτοιας εξίσωσης είναι το άθροισμα των ακόλουθων μερικών λύσεων:

(α) Σε κάθε παράγοντα $a_1D_x+b_1D_y+\gamma_1$ αντιστοιχεί η λύση

$$z=e^{-\frac{\gamma_1}{a_1}x}\varphi(a_1y-b_1x), \quad \text{αν } a_1\neq 0$$

$$z=e^{-\frac{\gamma_1}{b_1}y}\varphi(a_1y-b_1x), \quad \text{αν } b_1\neq 0$$

(β) Σε κάθε παράγοντα $(a_1D_x+b_1D_y+\gamma_1)^k$ αντιστοιχεί η λύση

$$z=e^{-\frac{\gamma_1}{a_1}x}\left[\varphi_1(a_1y-b_1x)+x\varphi_2(a_1y-b_1x)+\dots x^{k-1}\varphi_k(a_1y-b_1x)\right]$$

<u>Απόδειξη</u>: (α) Από το παράδειγμα 3 έχουμε ότι για $\beta_1 \neq 0$, η λύση της εξίσωσης

$$(a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1) z = 0$$

είναι η

$$z = e^{-\frac{\gamma_1}{\beta_1} y} \varphi(a_1 y - \beta_1 x)$$

Αντίστοιχα, αν $a_1 \neq 0$ μπορούμε να δείξουμε ότι η λύση είναι

$$z = e^{-\frac{\gamma_1}{a_1} x} \varphi(a_1 y - \beta_1 x)$$

Συγκεκριμένα, θα πρέπει στο παράδειγμα 3 να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα πρώτου και τρίτου μέλους στο χαρακτηριστικό σύστημα.

(β) Βρίσκουμε πρώτα τη δράση του απλού παράγοντα $a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1$ στη συνάρτηση

$$z_n = e^{-\frac{\gamma_1}{a_1} x} \cdot x^n \cdot \varphi(a_1 y - \beta_1 x)$$

$$\begin{aligned}(a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1) z &= \cancel{a_1 \left(-\frac{\gamma_1}{a_1}\right) z_n} + a_1 \cdot e^{-\frac{\gamma_1}{a_1} x} \cdot n x^{n-1} \cdot \varphi(a_1 y - \beta_1 x) \\ &\quad + \cancel{a_1 e^{-\frac{\gamma_1}{a_1} x} \cdot x^n \cdot (-\beta_1) \varphi'(u)} + \cancel{\beta_1 e^{-\frac{\gamma_1}{a_1} x} \cdot x^n \cdot a_1 \varphi'(u)} \\ &\quad + \cancel{\gamma_1 z_n} \\ &= a_1 n \cdot e^{-\frac{\gamma_1}{a_1} x} \cdot x^{n-1} \varphi(a_1 y - \beta_1 x)\end{aligned}$$

δηλαδή υποβιβάζει την τάξη του x^n κατά 1.

Επειδή

$$(a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1) z_0 = 0$$

είναι φανερό ότι

$$(a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1)^k z_n = 0$$

για $n = 0, 1, 2, \ldots, k-1$

<u>Πρόταση 4</u>: Η <u>γενική λύση</u> της εξίσωσης

$$\underbrace{(a_n D_x + b_n D_y + \gamma_n)(a_{n-1} D_x + b_{n-1} D_y + \gamma_{n-1}) \ldots \underbrace{(a_1 D_x + b_1 D_y + \gamma_1) z}_{u_{n-1}}}_{u_1} = f(x,y)$$

είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της εξίσωσης με $f=0$ και μιας <u>μερικής λύσης</u> της εξίσωσης με $f \neq 0$ η οποία προκύπτει λύνοντας την αλυσίδα των παρακάτω μ.δ.ε.

$$(a_n D_x + b_n D_y + \gamma_n) u_1 = f(x,y)$$

$$(a_{n-1} D_x + b_{n-1} D_y + \gamma_{n-1}) u_2 = u_1$$

$$\vdots$$

$$(a_1 D_x + b_1 D_y + \gamma_1) z = u_{n-1}$$

<u>Παράδειγμα 8</u>: Να λυθεί η μ.δ.ε.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin(x+y)$$

<u>Λύση</u>: Χρησιμοποιώντας τους διαφορικούς τελεστές D_x, D_y η εξίσωση γράφεται

$$(D_x^2 - 2D_y^2) z = \sin(x+y)$$

$$\Rightarrow (D_x + \sqrt{2} D_y)(D_x - \sqrt{2} D_y) z = \sin(x+y)$$

Εφαρμόζουμε την πρόταση 4, οπότε βρίσκουμε πρώτα τη γενική λύση της εξίσωσης με $f=0$, δηλ. της

$$(D_x + \sqrt{2} D_y)(D_x - \sqrt{2} D_y) z = 0$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3, η λύση αυτή είναι

$$z_0 = \varphi_1(y - \sqrt{2}x) + \varphi_2(y + \sqrt{2}x)$$

Για να βρούμε μία μερική λύση της μ.δ.ε. με $f \neq 0$, πρέπει να λύσουμε την αλυσίδα

$$(D_x + \sqrt{2} D_y) u = \sin(x+y) \quad (1)$$

$$(D_x - \sqrt{2} D_y) z = u \quad (2)$$

Η (1) είναι
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{2} \frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x+y)$$

και επιλύεται χρησιμοποιώντας την πρόταση 1 και το χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\sqrt{2}} = \frac{du}{\sin(x+y)}$$

Έχουμε
$$\sqrt{2}\, dx = dy$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2} x + c$$

$$\Rightarrow y - \sqrt{2} x = c \quad (3)$$

και
$$\frac{du}{\sin(x+y)} = dx$$

$$\Rightarrow du = \sin(x+y)\, dx$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} du = \sin(x + \sqrt{2} x + c)\, dx$$

$$\Rightarrow du = \sin[(1+\sqrt{2})x + c]\, dx$$

$$\Rightarrow u = \int \sin[(1+\sqrt{2})x + c]\, dx$$

$$\Rightarrow u = -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \cos[(1+\sqrt{2})x + c]$$

$$\Rightarrow u = -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \cos(x+y)$$

(μας ενδιαφέρει η μερική λύση οπότε παίρνουμε σταθερά ολοκλήρωσης 0)

Στο τελικό αποτέλεσμα αντικαθιστούμε $y = \sqrt{2} x + c$ από (3)

Έχοντας βρει την u, προχωράμε με παρόμοιο τρόπο στη λύση της (2) που γίνεται

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \sqrt{2}\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cos(x+y)$$

Χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\sqrt{2}} = \frac{dz}{-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cos(x+y)}$$

$$dy = -\sqrt{2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int dy = -\sqrt{2}\int dx$$

$$\Rightarrow y = -\sqrt{2}x + c \qquad (4)$$

$$\Rightarrow y + \sqrt{2}x = c$$

και

$$dz = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cos(x+y)\,dx$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} dz = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cos(x-\sqrt{2}x+c)\,dx$$

$$\Rightarrow dz = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cos[(1-\sqrt{2})x+c]\,dx$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}\int\cos[(1-\sqrt{2})x+c]\,dx$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\sqrt{2}}\sin[(1-\sqrt{2})x+c]$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{1-2}\sin[(1-\sqrt{2})x+c]$$

$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} z_\mu = \sin(x+y)$$

Αυτή είναι η μερική λύση της αρχικής μ.δ.ε.

Η γενική λύση είναι

$$z = z_0 + z_\mu$$

$$\Rightarrow \quad z = \varphi_1(y - \sqrt{2}\,x) + \varphi_2(y + \sqrt{2}\,x) + \sin(x+y)$$

όπου φ_1, φ_2 αυθαίρετες συναρτήσεις μίας μεταβλητής

Παρατήρηση: Η μερική λύση θα μπορούσε να εξαχθεί αν με απλή παρατήρηση της μ.δ.ε. αναζητήσουμε λύση της μορφής

$$z = A\sin(x+y)$$

οπότε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -A\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = A\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -A\sin(x+y)$$

και

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin(x+y)$$

$$\Rightarrow \quad -A\sin(x+y) - 2(-A)\sin(x+y) = \sin(x+y)$$

$$\Rightarrow \quad -A\sin(x+y) + 2A\sin(x+y) = \sin(x+y)$$

$$\Rightarrow \quad A\sin(x+y) = \sin(x+y)$$

$$\Rightarrow \quad A = 1$$

άρα $\quad z_\mu = \sin(x+y)$