# Συνάρτηση Δέλτα

Συνάρτηση δέλτα του Dirac.

Βασική σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\, f(x)\, dx = f(a)$$

Για $a=0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, f(x)\, dx = f(0)$$

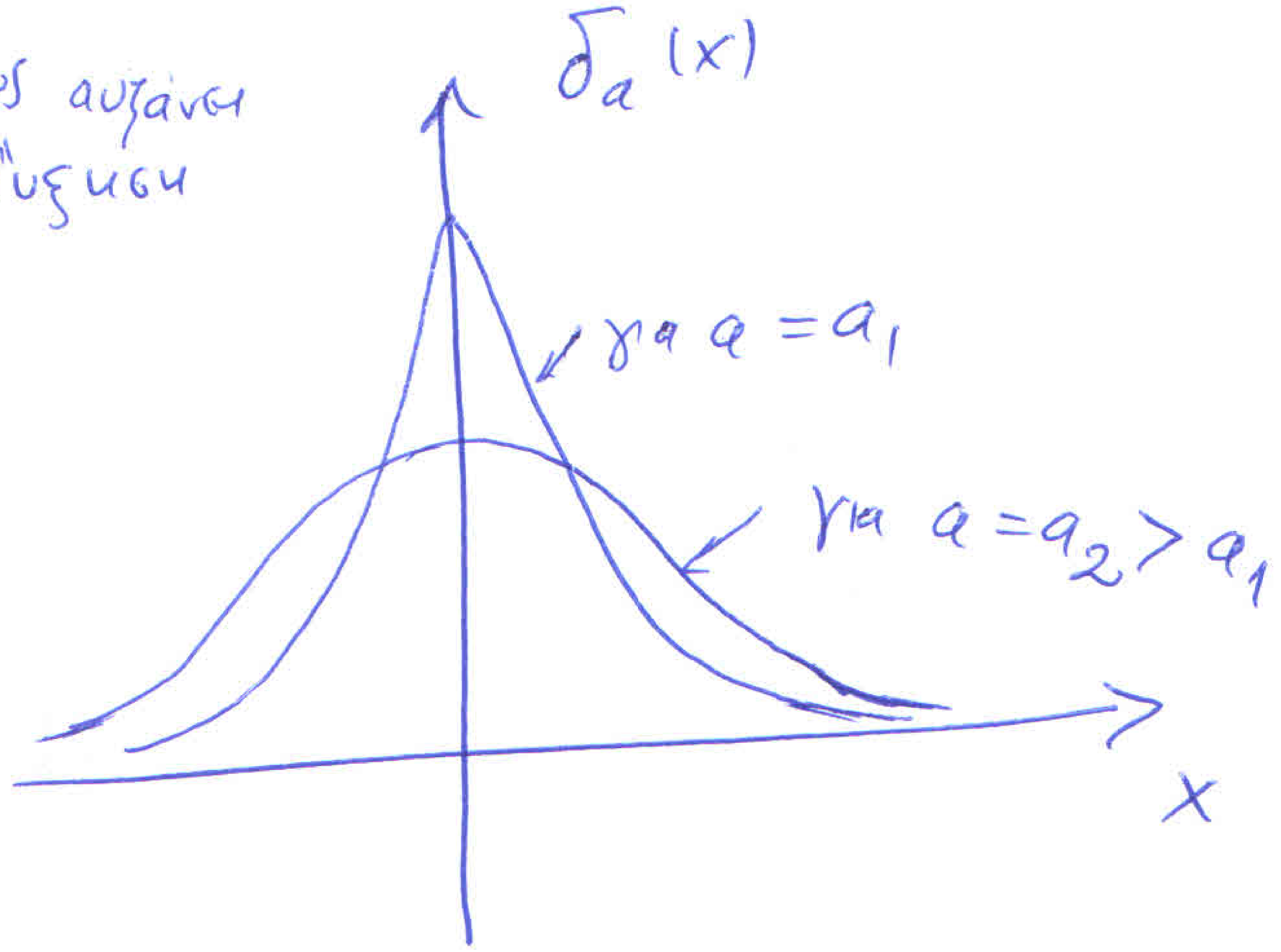
Ορισμός ως όριο άλλης συνάρτησης

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \delta_a(x)$$

Το πλάτος αυξάνει με την αύξηση του $a$

Το ύψος μειώνεται με την αύξηση του $a$




Για $a \to 0$ η $\delta_a(x)$ δίνει για εξαιρετικά υψηλή (πρακτικά άπειρη) και εξαιρετικά στενή συνάρτηση.

Για $f(x)=1$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$ ← Εμβαδόν της συνάρτησης δέλτα

Παράδειγμα 1: Υπολογίστε τις παρακάτω ποσότητες.

1) $$I=\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-3)\, e^{-\frac{x^2}{3}}\, dx$$

2) $$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\cos(\pi x)\,\delta(x-1) - \sin(x)\,\delta\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx$$

Έχουμε $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-3)\, e^{-\frac{x^2}{3}}\, dx =$$

$$= e^{-\frac{3^2}{3}} = e^{-3}$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\cos(\pi x)\,\delta(x-1) - \sin(x)\,\delta\left(x+\pi/2\right)\right]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\pi x)\,\delta(x-1)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\,\delta\left(x+\pi/2\right)dx$$

$$= \cos(\pi) - \sin\left(-\pi/2\right) = -1 + \sin\left(\pi/2\right) =$$

$$= -1 + 1 = 0$$

Η συνάρτηση δέλτα $\delta(x)$ είναι η γενικευμένη συνάρτηση που το ολοκλήρωμα του γινομένου της με μια συνάρτηση ελέγχου δίνει την τιμή της τελευταίας στο $x=0$.

Έστω δύο γενικευμένες συναρτήσεις $g_1(x)$ και $g_2(x)$. Αυτές θα είναι ίσες εάν τα ολοκληρώματα του γινομένου τους με μια τυχούσα συνάρτηση ελέγχου είναι ίσα. Δηλαδή, εάν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x) f(x)\, dx$$

τότε $g_1(x) = g_2(x)$.

Ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα

I. $\delta(\lambda x) = \dfrac{1}{|\lambda|}\delta(x)$ με $\lambda$ πραγματικός με $\lambda \neq 0$

Απόδειξη

(A) $\lambda > 0$ $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda x) f(x)\, dx$

Θέτω $y = \lambda x \Rightarrow x = \dfrac{y}{\lambda}$

$y=\lambda x \Rightarrow dy = \lambda\, dx \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{\lambda}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda x) f(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) f\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{\lambda} f(0) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \delta(x) \text{ για } \lambda > 0$$

(B) Εάν $\lambda < 0$ Θέτω πάλι $y = \lambda x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda x) f(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(y) f\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) f\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy = -\frac{1}{\lambda} f(0) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(\lambda x) = -\frac{1}{\lambda} \delta(x) \text{ για } \lambda < 0$$

Οπότε αποδείξαμε την ιδιότητα.

Για $\lambda = -1$ θα έχουμε $\delta(-x) = \delta(x)$

Η συνάρτηση δέλτα είναι άρτια συνάρτηση

II. $x\delta(x) = 0$

Απόδειξη

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta(x)\,f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\overbrace{x\,f(x)}^{g(x)}\,dx =$$

$$= g(0) = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot f(x)\,dx$$

Άρα αποδείχθη.

III. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\,f(x)\,dx = -f'(0)$

Απόδειξη

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\,f(x)\,dx = \overset{0}{\left.\cancel{\delta(x)\,f(x)}\right]_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,f'(x)\,dx =$$

$$= -f'(0)$$

Παράδειγμα 2: Στις προηγούμενες διαλέξεις δείξαμε ότι το πρόβλημα Sturm-Liouville

$y'' + \lambda y = 0$ στο διάστημα $x \in [0,1]$ με συνοριακές συνθήκες $y(0) = y(1) = 0$ έχει ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x) = \sin(n\pi x)$,

$n = 1, 2, 3, \dots$

Να αναπτύξετε την συνάρτηση $f(x) = \delta(x - 1/2)$ στις παραπάνω ιδιοσυναρτήσεις

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n \quad , \quad c_n = \frac{(y_n, f)}{(y_n, y_n)}$$

Εδώ $\delta(x - 1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)$

$$c_n = \frac{(\sin(n\pi x), \delta(x - 1/2))}{(\sin(n\pi x), \sin(n\pi x))}$$

Εδώ έχουμε

$(\sin(n\pi x), \sin(n\pi x)) = \dfrac{1}{2}$ Το έχουμε αποδείξει στην προηγούμενη διάλεξη.

$$\left(\sin(n\pi x), \delta(x-\tfrac{1}{2})\right) = \int_0^1 \sin(n\pi x)\,\delta(x-\tfrac{1}{2})\,dx =$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Για $n = 2k$ $\quad \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0$

με $k = 1, 2, \ldots$

Άρα $\quad \delta(x-\tfrac{1}{2}) = 2\sum_{n=\text{περιττός}} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(n\pi x) =$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \sin\left[\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\pi\right] \sin\left[(2k+1)\pi x\right]$$

Άσκηση: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\delta(3x-2)\,dx$$

Απάντηση: Κάντε την αλλαγή μεταβλητής $y = 3x-2$ και θα βρείτε $I = \frac{4}{27}$.

# Μετασχηματισμός Fourier

$$F[f(x)] = \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

$$F^{-1}[\tilde{f}(k)] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{ikx}\, dk$$

Παρατηρούμε ότι

$$F[1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\, dx$$

$$\underset{\tilde{\delta}(k)}{\underset{\shortparallel}{F[\delta(x)]}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, e^{-ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier θα έχουμε

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\delta}(k)\, e^{ikx}\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\, dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, dk \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, dk$$

- Θεώρημα Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk$$

- Θεώρημα Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g^*(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, \tilde{g}^*(k)\, dk$$

με $f(x), g(x)$ τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. → δηλαδή $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx$ → πεπερασμένα

(11)

Θα αποδείξουμε το θεώρημα Parseval, μια και το θεώρημα Plancherel προκύπτει από το θεώρημα Parseval με $g(x)=f(x)$.

Έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\,\tilde{g}^{*}(k)\,dk = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx\right] \cdot$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x')\,e^{-ikx'}\,dx'\right]^{*} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\,e^{-ikx}\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,g^{*}(x')\,e^{ikx'} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, g^{*}(x')\int_{-\infty}^{+\infty} dk\; e^{ik(x'-x)}$$

Σύμφωνα με τη σχέση που δείξαμε παραπάνω $\delta(x'-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ik(x'-x)}$

Οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, \tilde{g}(k)^{*}\, dk = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, g^{*}(x')\, \delta(x'-x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; f(x)\, g^{*}(x) \qquad \text{Αποδείχθη.}$$

- Γραμμικότητα του μετασχηματισμού Fourier

$$h(x) = a\, f(x) + b\, g(x) \qquad a, b \to \text{σταθερές}$$

$$F[h(x)] = F[a f(x)] + F[b\, g(x)] =$$

$$= a\, F[f(x)] + b\, F[g(x)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{h}(k) = a\, \tilde{f}(k) + b\, \tilde{g}(k)$$

- Σχέση μετάθεσης στο χώρο

Εαν $h(x) = f(x - x_0)$ τότε $\tilde{h}(k) = e^{-ikx_0}\, \tilde{f}(k)$

Έχουμε $$\tilde{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x_0)\, e^{-ikx}\, dx$$

Θέτουμε $y = x - x_0 \quad dy = dx$

$$\Downarrow$$

$$x = y + x_0$$

Έτσι $\tilde{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-iky} e^{-ikx_0}\, dy =$

$$= e^{-ikx_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iky} dy =$$

$$= e^{-ikx_0} \tilde{f}(k)$$

- Σχέση μετάθεσης στο χώρο των k.

$$F\left[e^{iax} f(x)\right] = \tilde{f}(k-a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\overbrace{(k-a)}^{k'}x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ik'x} dx = \tilde{f}(k') = \tilde{f}(k-a)$$

- $F[f(ax)] = \frac{1}{|a|}\tilde{f}\left(\frac{k}{a}\right)$

(A) $a>0$

$$F[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\, e^{-ikx}\, dx$$

Θέτω $y = ax \Rightarrow x = \frac{y}{a}$

$$dx = \frac{dy}{a}$$

$$F[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-i\frac{k}{a}y}\, dy =$$

$$= \frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{k}{a}\right)$$

(B) $a<0$ Θέτω πάλι $y=ax$

$$F[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} f(y)\, e^{-i\frac{k}{a}y}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-i\frac{k}{a}y}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{k}{a}\right)$$

Οπότε αποδείχθη.

• $$F\left[\frac{df}{dx}\right] = ik\,\tilde{f}(k)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df}{dx}e^{-ikx}\,dx = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-ikx}\Big]_{-\infty}^{+\infty}} \xrightarrow{} 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-ik)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ikx}\,dx =$$

$$= ik\,\tilde{f}(k)$$ Αποδείχθη

Γενικότερα

$$F\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (ik)^n\,\tilde{f}(k)$$

• Μετασχηματισμός Fourier συνέλιξης

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,g(x-y)\,dy$$

$$\tilde{h}(k) = \sqrt{2\pi}\,\tilde{f}(k)\,\tilde{g}(k)$$

Έχουμε $\tilde{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)e^{-ikx}\,dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y)\, g(x-y) \right] e^{-ikx}$$

Θέτω $x - y = u$ $\quad dx = du$

$\Downarrow$

$x = u + y$

Οπότε

$$\tilde{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y)\, g(u)\, e^{-ik(u+y)} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du\, g(u)\, e^{-iku}}_{\tilde{g}(k)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y)\, e^{-iky}}_{\sqrt{2\pi}\, \tilde{f}(k)} =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \tilde{f}(k)\, \tilde{g}(k)$$ Αποδείχθη.

- $\tilde{f}(k)^{*} = \tilde{f}(-k)$ εάν η $f(x)$ είναι πραγματική συνάρτηση

$$\tilde{f}(k)^{*} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx} \right]^{*} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) \left(e^{-ikx}\right)^* dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx =$$

$$= \tilde{f}(-k)$$

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(x) = e^{-ax}\theta(x)$, όπου $\theta(x)$ η συνάρτηση βήματος Heaviside με $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ και $a > 0$.

Έχουμε $$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax} \theta(x) e^{-ikx} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(a+ik)x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{a+ik}\right) \underbrace{e^{-(a+ik)x}\Big]_0^{\infty}}_{-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+ik}$$

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(x) = e^{-a|x|}$ με $a>0$.

Έχουμε $\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-ikx} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-ikx} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{(a-ik)x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-(a+ik)x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a-ik} \underbrace{e^{(a-ik)x}}_{\downarrow 1} \Big]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+ik} \underbrace{e^{-(a+ik)x}}_{\downarrow 1} \Big]_{0}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a-ik} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+ik} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a+ik+a-ik}{(a-ik)(a+ik)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}$$

Παράδειγμα 3: Ο μετασχηματισμός Fourier της συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ είναι $\tilde{f}(k) = e^{-k^2}$.
Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(2x+3)$.

Έχουμε $F[f(2x+3)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(2x+3)\, e^{-ikx} dx$

Θέτω $y = 2x+3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2}$

$dx = \frac{dy}{2}$

Οπότε $F[f(2x+3)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ik\frac{y-3}{2}} \frac{dy}{2} =$

$$= \frac{1}{2} e^{i\frac{3}{2}k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-i\frac{k}{2}y} dy =$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}ik} \tilde{f}(k/2) = \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}ik} e^{-\frac{k^2}{4}}$$

Παράδειγμα 4: Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(x) = e^{-ax^2}$ με $a > 0$.

Έχουμε

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx$$

Ο εκθέτης είναι

$$ax^2 + ikx = a\left(x^2 + i\frac{k}{a}x\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{ik}{2a}x + \frac{k^2}{4a^2} - \frac{k^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{ik}{2a}x - \frac{k^2}{4a^2}\right) + \frac{k^2}{4a} =$$

$$= a\left(x + \frac{ik}{2a}\right)^2 + \frac{k^2}{4a}$$

Έτσι $\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x + \frac{ik}{2a}\right)^2 - \frac{k^2}{4a}} dx =$

$$= e^{-\frac{k^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{ik}{2a}\right)^2} dx$$

Θέτω $y = x + \frac{ik}{2a}$ $\quad dx = dy$

Έτσι $\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy$

Γνωρίζουμε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Οπότε $\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

**Παράδειγμα 5:** Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x) = \delta(x-\pi)\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \delta(x+\pi)\cos(x)$.

Έχουμε $\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\delta(x-\pi)\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \delta(x+\pi)\cos(x)\right] e^{-ikx} dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\pi) \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{-ikx} dx -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x+\pi) \cos(x)\, e^{-ikx} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{\downarrow \atop 1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} e^{-ik\pi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\cos(-\pi)}_{\downarrow \atop {\cos\pi \atop {\downarrow \atop -1}}} e^{ik\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik\pi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\cos(k\pi) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k\pi)$$

Χρησιμοποιήσαμε ότι $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$

Άσκηση 1: Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(x) = e^{-|x-1|}$.

Απάντηση: $\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-ik}}{k^2+1}$

Άσκηση 2: Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(x) = x e^{-|x|}$.

Απάντηση: $\tilde{f}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4ik}{(k^2+1)^2}$