Βασικά θεωρήματα του προβλήματος ιδιοτιμών

Για να αποδείξουμε τα βασικά θεωρήματα θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη πρόταση:

<u>Πρόταση 1</u>: Θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών στη μορφή Liouville

$$py'' + p'y' + (\lambda w - v)y = 0$$

Αν y_1, y_2 είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος με αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_1, λ_2, αυτές ικανοποιούν την λεγόμενη Ταυτότητα του Green

$$(pW)' + (\lambda_2 - \lambda_1) w y_1 y_2 = 0$$

όπου

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

είναι η Βρονσκιανή του ζεύγους των συναρτήσεων y_1, y_2

<u>Απόδειξη</u>:

$$p y_1'' + p' y_1' + (\lambda_1 w - v) y_1 = 0 \quad (1)$$

$$p y_2'' + p' y_2' + (\lambda_2 w - v) y_2 = 0 \quad (2)$$

$$y_1 \cdot (2) - y_2 \cdot (1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad p\underbrace{(y_1 y_2'' - y_1'' y_2)}_{W'} + p'\underbrace{(y_1 y_2' - y_1' y_2)}_{W} + (\lambda_2 - \lambda_1) w y_1 y_2 = 0$$

Όμως $W' = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$

Επομένως

$$pW' + p'W + (\lambda_2 - \lambda_1) w y_1 y_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (pW)' + (\lambda_2 - \lambda_1) w y_1 y_2 = 0$$

Πραγματικότητα των ιδιοτιμών

Στα φυσικά προβλήματα οι ιδιοτιμές είναι μετρήσιμες φυσικές ποσότητες, επομένως οφείλουν να είναι πραγματικοί αριθμοί. Αυτό όμως πρέπει να αποδειχθεί μαθηματικά, αφού όπως είδαμε προηγουμένως οι ιδιοτιμές προκύπτουν ως ρίζες μιας εξίσωσης $\Delta(\lambda)=0$, για την οποία δεν είναι καθόλου αυτονόητο ότι μηδενίζεται μόνο για πραγματικά λ.

<u>Θεώρημα 1</u>: Ένα πρόβλημα ιδιοτιμών στη μορφή Liouville

$$(py')' + (\lambda w - u)y = 0 \qquad , \quad 0 \le x \le L,$$

όπου

$$p(x),\ w(x),\ u(x) \in R \quad \text{και} \quad w(x) > 0$$

έχει πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda^* = \lambda$ στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις: (ικανές συνθήκες)

(α) Οι ομογενείς συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι αμιγείς, έχουν δηλ. τη γενική μορφή

$$y'(0) = h\,y(0), \qquad y'(L) = H\,y(L)$$

συμπεριλαμβανομένων των οριακών περιπτώσεων $h, H \to \infty$ ή 0 που αντιστοιχούν σε μηδενισμό της συνάρτησης ή της παραγώγου της στα άκρα του διαστήματος.

(β) Οι ομογενείς συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι περιοδικές

$$y(0) = y(L), \qquad y'(0) = y'(L)$$

και επιπλέον

$$p(0) = p(L)$$

όπου $p(x)$ ο συντελεστής του y'' στη μορφή Liouville.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω y μια ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ

$$p y'' + p' y' + (\lambda w - u) y = 0$$

Παίρνοντας το μιγαδικό συζυγή της παραπάνω εξίσωσης και χρησιμοποιώντας ότι $p, w, u \in R$ βρίσκουμε

$$p y^{*''} + p' y^{*'} + (\lambda^* w - u) y^* = 0$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η y^* είναι λύση του προβλήματος ιδιοτιμών με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ^*.

Εφαρμόζουμε την ταυτότητα του Green για

$$y_1 = y, \quad y_2 = y^*, \qquad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda^*$$

$$(pW)' = (\lambda^* - \lambda) w y y^* = (\lambda^* - \lambda) w |y|^2 \qquad (1)$$

όπου

$$W = W(y, y^*) = y y^{*'} - y' y^*$$

είναι η Βρονσκιανή των συναρτήσεων y, y^*.

Ολοκληρώνουμε την (1) στο διάστημα $[0, L]$

$$\int_0^L (pW)' dx = (\lambda^* - \lambda) \int_0^L w |y|^2 dx$$

$$\Rightarrow \quad p(L) W(L) - p(0) W(0) = (\lambda^* - \lambda) \int_0^L w |y|^2 dx$$

Επειδή $w(x) > 0$ και $y \neq 0$ είναι $\int_0^L w|y|^2 dx > 0$, οπότε για να είναι οι ιδιοτιμές πραγματικές, δηλ. $\lambda^* = \lambda$, θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$p(L) W(L) - p(0) W(0) = 0$$

(α) Αμιγείς συνοριακές συνθήκες

$$y'(0) = h\, y(0)\,, \qquad y'(L) = H\, y(L)$$

Παίρνοντας το μιγαδικό συζυγή στις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμ

$$y^{*\prime}(0) = h\, y^{*}(0)\,, \qquad y^{*\prime}(L) = H\, y^{*}(L)$$

οπότε

$$W(0) = y(0)\, y^{*\prime}(0) - y'(0)\, y^{*}(0)$$

$$\Rightarrow \quad W(0) = y(0)\cdot h\, y^{*}(0) - h\, y(0)\cdot y^{*}(0)$$

$$\Rightarrow \quad W(0) = 0$$

$$W(L) = y(L)\, y^{*\prime}(L) - y'(L)\, y^{*}(L)$$

$$\Rightarrow \quad W(L) = y(L)\cdot H\, y^{*}(L) - H\, y(L)\cdot y^{*}(L)$$

$$\Rightarrow \quad W(L) = 0$$

και επομένως

$$p(L)\, W(L) - p(0)\, W(0) = 0$$

(β) Περιοδικές συνοριακές συνθήκες

$y(0) = y(L)$, $\quad y'(0) = y'(L)$ $\quad$ και επιπλέον $\quad p(0) = p(L)$

Παίρνοντας το μιγαδικό συζυγή στις περιοδικές συνθήκες έχουμ

$$y^{*}(0) = y^{*}(L)\,, \qquad y^{*\prime}(0) = y^{*\prime}(L)$$

οπότε

$$\begin{aligned} W(L) &= y(L)\, y^{*\prime}(L) - y'(L)\, y^{*}(L) \\ &= y(0)\, y^{*\prime}(0) - y'(0)\, y^{*}(0) \\ &= W(0) \end{aligned}$$

και

$$p(L)\, W(L) - p(0)\, W(0) = 0$$

αφού επιπλέον

$$p(0) = p(L)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Οι συνοριακές συνθήκες που διασφαλίζουν ότι οι ιδιοτιμές είναι αυτοσυζυγείς μιγαδικοί αριθμοί, ισούνται δηλ. με το συζυγή τους και άρα είναι πραγματικοί αριθμοί, ονομάζονται αυτοσυζυγείς συνοριακές συνθήκες. Επομένως:

(α) Οι αμιγείς συνθήκες είναι πάντα αυτοσυζυγείς

(β) Οι περιοδικές συνθήκες είναι αυτοσυζυγείς αν $p(0) = p(L)$

Ορθογωνιότητα Ιδιοσυναρτήσεων

Στον τρισδιάστατο Ευκλίδειο χώρο, δύο διανύσματα $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)^T$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)^T$ είναι ορθογώνια όταν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν, δηλ.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = 0$$

Στον n-διάστατο διανυσματικό χώρο, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ορίζεται ως

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

όπου $*$ είναι το μιγαδικό συζυγές και οι συντεταγμένες των διανυσμάτων μπορεί να είναι μιγαδικοί αριθμοί. Τα διανύσματα X, Y είναι ορθογώνια όταν

$$(X, Y) = 0$$

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

(α) $$(X,Y) = (Y,X)^*$$

(β) $$(X, \lambda Y + \mu Z) = \lambda (X,Y) + \mu (X,Z)$$

(γ) $$(X,X) \geq 0$$

<u>Απόδειξη:</u>

(α) $$(Y,X)^* = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^* x_i \right)^* = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i = (X,Y)$$

(β) $$(X, \lambda Y + \mu Z) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* (\lambda y_i + \mu z_i)$$
$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i + \mu \sum_{i=1}^{n} x_i^* z_i$$
$$= \lambda (X,Y) + \mu (X,Z)$$

(γ) $$(X,X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0$$

<u>Παρατήρηση:</u> Το μήκος ενός διανύσματος X ορίζεται μέσω του εσωτερικού γινομένου με τη σχέση

$$\|X\| = \sqrt{(X,X)}$$

και φυσικά ισχύει

$$\|X\| \geq 0$$

Το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες ενός προβλήματος ιδιοτιμών έχει τη δομή διανυσματικού χώρου, δηλ. αν $y_1(x)$, $y_2(x)$ είναι δύο τέτοιες συναρτήσεις, κάθε γραμμικός συνδυασμός $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ικανοποιεί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Π.χ. έστω οι ο.σ.σ.

$$y(0) = 0, \qquad y'(L) = 0$$

και έστω $y_1(x)$, $y_2(x)$ δύο συναρτήσεις που τις ικανοποιούν. Για οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό $z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ έχουμε

$$z(0) = c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

$$z'(L) = c_1 y_1'(L) + c_2 y_2'(L) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

οπότε και αυτός ικανοποιεί τις ο.σ.σ.

Η παραπάνω παρατήρηση μας επιτρέπει να επεκτείνουμε γεωμετρικές έννοιες, όπως η ορθογωνιότητα και το εσωτερικό γινόμενο σε διανυσματικούς χώρους συναρτήσεων, όπως αυτός του προβλήματος ιδιοτιμών.

Έστω $f(x)$, $g(x)$ δύο συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής x, με διάστημα ορισμού $x \in [a,b]$. Θεωρούμε ότι είναι μέλη ενός διανυσματικού χώρου συναρτήσεων, και επιτρέπουμε να έχουν και μιγαδικές τιμές. Δύο ορισμοί εσωτερικού γινομένου στον διανυσματικό χώρο των συναρτήσεων που ικανοποιούν όλες τις απαραίτητες ιδιότητες είναι:

(α) $$(f,g) = \int_a^b f^*(x)\, g(x)\, dx$$

(β) $$(f,g) = \int_a^b w(x)\, f^*(x)\, g(x)\, dx$$

όπου στον δεύτερο ορισμό η συνάρτηση βάρους $w(x) \in R$ και επιπλέον είναι θετική

$$w(x) > 0, \qquad x \in [a,b]$$

Παρατηρήσεις:

1) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων του n-διάστ
του χώρου

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \quad Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$$

γράφεται ως

$$(X, Y) = \sum_i x_i^* y_i = \sum_i X^*(i)\, Y(i)$$

όπου

$$X(i) = x_i, \quad Y(i) = y_i$$

είναι οι εκφράσεις των διανυσμάτων ως συναρτήσεις της διακριτής μεταβλητής $i = 1, 2, \ldots, n$. Το εσωτερικό γινόμενο δύ συναρτήσεων

$$(f, g) = \int_a^b f^*(x) g(x)\, dx$$

είναι η συνεχής επέκταση της παραπάνω σχέσης για τα διανύσμα με την αυτονόητη μετατροπή του αθροίσματος ως προς τη διακριτ μεταβλητή i σε ολοκλήρωμα ως προς τη συνεχή μεταβλητή x. Αντίστροφα, οι συναρτήσεις f, g μπορεί να ιδωθούν ως δύο απειροδιάστατα διανύσματα με συντεταγμένες τις τιμές τους σε όλα τα σημεία του διαστήματος ορισμού.

2) Σε έναν χώρο συναρτήσεων μπορούμε μέσω του εσωτερικού γινομένου να ορίσουμε το "μήκος" μιας συνάρτηση f ως

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (α) παίρνουμε

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^*(x) f(x)\, dx} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (β) παίρνουμε

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b w(x) f^*(x) f(x)\, dx} = \sqrt{\int_a^b w(x)\, |f(x)|^2 dx}$$

Η απαίτηση $w(x) > 0$ εξασφαλίζει ότι

$$\int_a^b w(x)\, |f(x)|^2 dx \geq 0$$

__Θεώρημα 2__: Έστω η εξίσωση ιδιοτιμών στη μορφή Liouville

$$py'' + p'y' + (\lambda w - u)y = 0$$

με __αυτοσυζυγείς συνοριακές συνθήκες__ (αμιγείς ή περιοδικές). Δύο οποιεσδήποτε ιδιοσυναρτήσεις y_n, y_m του προβλήματος, που αντιστοιχο σε διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_n \neq \lambda_m$, είναι ορθογώνιες με βάρο ίσο με τη συνάρτηση βάρους της εξίσωσης Liouville, δηλ.

$$(y_n, y_m) = \int_a^b w(x)\, y_n^*(x)\, y_m(x)\, dx = 0$$

__Απόδειξη__: Εφαρμόζουμε την ταυτότητα του Green

$$(pW)' + (\lambda_2 - \lambda_1) w y_1 y_2 = 0$$

για

$$y_1 = y_n^*, \quad \lambda_1 = \lambda_n \qquad y_2 = y_m, \quad \lambda_2 = \lambda_m$$

όπου επισημαίνουμε ότι η y_n^* έχει την ίδια ιδιοτιμή λ_n με την y αφού για αυτοσυζυγείς συνοριακές συνθήκες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικ

$$(pW)' + (\lambda_m - \lambda_n) w y_n^* y_m = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b (pW)' dx = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b w y_n^* y_m \, dx$$

$$\Rightarrow p(b)W(b) - p(a)W(a) = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b w(x)\, y_n^*(x)\, y_m(x)\, dx \quad (*)$$

Όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 1, λόγω των αυτοσυζυγών συνοριακών συνθηκών το αριστερό μέλος της εξ. (*) είναι μηδέν. Επιπλέον, $\lambda_n \neq \lambda_m$, επομένως

$$(y_n, y_m) = \int_a^b w(x)\, y_n^*(x)\, y_m(x)\, dx = 0$$

<u>Παράδειγμα 1</u>: Στο παράδειγμα 3 της προηγούμενης διάλεξ δείξαμε ότι το προβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0 , \qquad y(0) = 0, \quad y'(1) = h\, y(1) \quad , \quad \underline{\underline{h > 1}}$$

έχει τις ιδιοσυναρτήσεις

$$y_1(x) = \sinh \gamma_1 x , \qquad \lambda_1 = -\gamma_1^2$$

όπου γ_1 η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\tanh \gamma_1 = \frac{1}{h}\gamma_1 \qquad (*)$$

και

$$y_n(x) = \sin k_n x , \qquad \lambda_n = k_n^2$$

όπου k_n, $n = 2, 3, \ldots$ οι θετικές λύσεις της εξίσωσης

$$\tan k = \frac{1}{h} k \qquad (**)$$

Να αποδειχθεί ότι οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες.

<u>Λύση</u>: Ξεκινάμε από τις ιδιοσυναρτήσεις y_n με $n \geq 2$. Από την εξίσωση ιδιοτιμών προκύπτει ότι η συνάρτηση βάρους είναι $w = 1$, οπότε πρέπει να δείξουμε

$$(y_n, y_m) = \int_0^1 \sin k_n x \cdot \sin k_m x \, dx = 0 , \quad n \neq m \text{ και } n, m \geq 2$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \left[\cos(k_n - k_m)x - \cos(k_n + k_m)x \right] dx$$

$$= \frac{1}{2(k_n - k_m)} \Big[\sin(k_n - k_m)x \Big]_0^1 - \frac{1}{2(k_n + k_m)} \Big[\sin(k_n + k_m)x \Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2(k_n-k_m)}\sin(k_n-k_m) - \frac{1}{2(k_n+k_m)}\sin(k_n+k_m)$$

$$= \frac{(k_n+k_m)\sin(k_n-k_m) - (k_n-k_m)\sin(k_n+k_m)}{2(k_n^2-k_m^2)}$$

$$= \frac{(k_n+k_m)(\sin k_n\cos k_m - \cos k_n \sin k_m) - (k_n-k_m)(\sin k_n\cos k_m + \cos k_n \sin k_m)}{2(k_n^2-k_m^2)}$$

$$= \frac{k_m \sin k_n \cos k_m - k_n \cos k_n \sin k_m}{k_n^2-k_m^2}$$

$$= \frac{\cos k_m \cos k_n \left(k_m \frac{\sin k_n}{\cos k_n} - k_n \frac{\sin k_m}{\cos k_m}\right)}{k_n^2-k_m^2}$$

$$= \frac{\cos k_m \cos k_n}{k_n^2-k_m^2}\left(k_m \tan k_n - k_n \tan k_m\right)$$

$$\overset{*}{=} \frac{\cos k_m \cos k_n}{k_n^2-k_m^2}\left(k_m \cdot \frac{1}{h} k_n - k_n \cdot \frac{1}{h} k_m\right)$$

$$= 0$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι η ιδιοσυνάρτηση Y_1 είναι ορθογώνι προς τις Y_n, $n \geq 2$, ότι δηλ. το ολοκλήρωμα

$$I = (Y_1, Y_n) = \int_0^1 \sinh\gamma_1 x \cdot \sin k_n x \cdot dx = 0$$

$$I = \int_0^1 \sin k_n x \cdot \sinh\gamma_1 x \, dx$$

$$= -\frac{1}{k_n}\int_0^1 (\cos k_n x)' \cdot \sinh\gamma_1 x \, dx$$

$$= -\frac{1}{k_n}\left[\cos k_n x \ \sinh \gamma x\right]_0^1 + \frac{1}{k_n}\int_0^1 \cos k_n x \cdot (\sinh \gamma_1 x)' dx$$

$$= -\frac{1}{k_n}\cos k_n \cdot \sinh \gamma_1 + \frac{\gamma_1}{k_n}\int_0^1 \cos k_n x \cdot \cosh \gamma_1 x \ dx$$

$$= -\frac{1}{k_n}\cos k_n \cdot \sinh \gamma_1 + \frac{\gamma_1}{k_n^2}\int_0^1 (\sin k_n x)' \cdot \cosh \gamma_1 x \cdot dx$$

$$= -\frac{1}{k_n}\cos k_n \cdot \sinh \gamma_1 + \frac{\gamma_1}{k_n^2}\left[\sin k_n x \cdot \cosh \gamma_1 x\right]_0^1 - \frac{\gamma_1}{k_n^2}\int_0^1 \sin k_n x \cdot (\cosh \gamma_1 x)'$$

$$I = -\frac{1}{k_n}\cos k_n \cdot \sinh \gamma_1 + \frac{\gamma_1}{k_n^2}\sin k_n \cdot \cosh \gamma_1 - \frac{\gamma_1^2}{k_n^2}\underbrace{\int_0^1 \sin k_n x \cdot \sinh \gamma_1 x \cdot dx}_{I}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{k_n^2}\right) I = -\frac{1}{k_n}\cos k_n \sinh \gamma_1 + \frac{\gamma_1}{k_n^2}\sin k_n \cosh \gamma_1$$

$$= \cos k_n \cosh \gamma_1 \cdot \left(-\frac{1}{k_n} \cdot \frac{\sinh \gamma_1}{\cosh \gamma_1} + \frac{\gamma_1}{k_n^2} \cdot \frac{\sin k_n}{\cos k_n}\right)$$

$$= \frac{\cos k_n \cosh \gamma_1}{k_n}\left(-\tanh \gamma_1 + \frac{\gamma_1}{k_n}\tan k_n\right)$$

$$\overset{(*),(**)}{=} \frac{\cos k_n \cosh \gamma_1}{k_n}\left(-\frac{1}{h}\gamma_1 + \frac{\gamma_1}{k_n} \cdot \frac{1}{h} k_n\right)$$

$$\left(1 + \frac{\gamma_1^2}{k_n^2}\right) I = 0$$

$$\Rightarrow I = 0$$

Παράδειγμα 2: Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσει του προβλήματος

$$y'' + \lambda y = 0 , \quad x \in [0, 1]$$

$$y'(0) = 0 , \quad y(1) + y'(1) = 0$$

Λύση: Μπορούμε εύκολα να δείξουμε όπως σε προηγούμενα παραδείγματα ότι για $\lambda \leq 0$ οι συνοριακές συνθήκες δεν ικανοποιούνται. Θα μελετήσουμε λοιπόν την περίπτωση $\lambda > 0$ και για ευκολία θέτουμε $\lambda = k^2$

Γενική λύση $\quad y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$

παράγωγος $\quad y' = k(c_1 \cos kx - c_2 \sin kx)$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow k \cdot c_1 \cdot \cos 0 - k \cdot c_2 \cdot \sin 0 = 0$$

$$\Rightarrow k c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(1) + y'(1) = 0 \Rightarrow c_2 \cos k - k \cdot c_2 \cdot \sin k = 0$$

$$\Rightarrow c_2 (\cos k - k \sin k) = 0$$

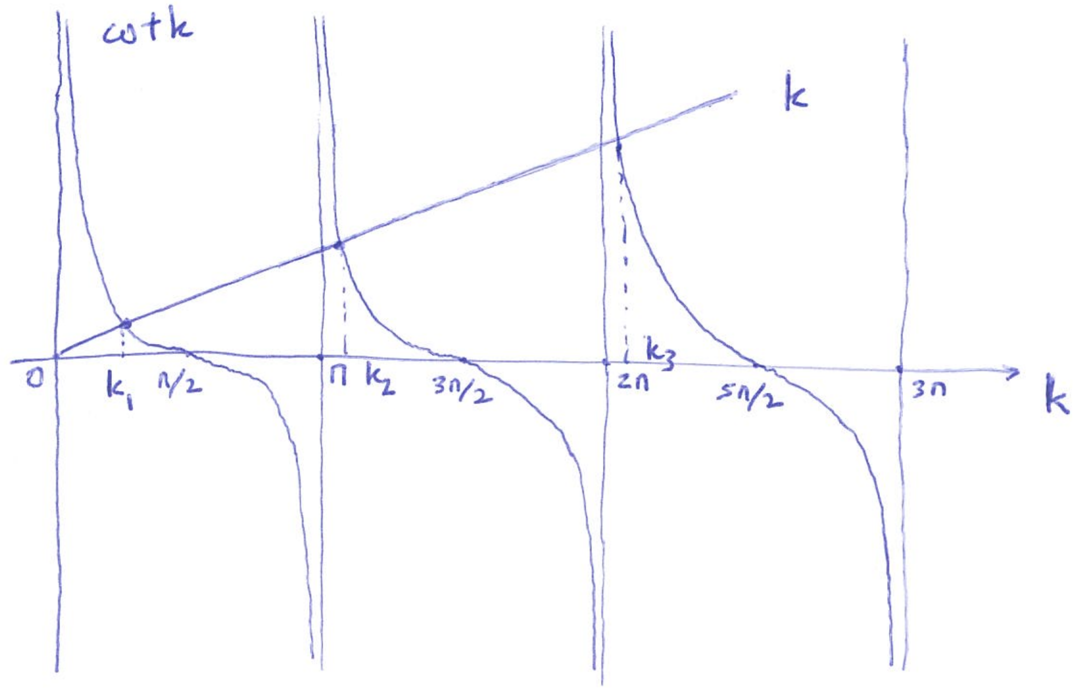
$c_2 \neq 0$ για μη τετριμμένη λύση

$$\overset{c_2 \neq 0}{\Rightarrow} \cos k - k \sin k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos k}{\sin k} = k$$

$$\Rightarrow \cot k = k$$

Οι ιδιοτιμές $\lambda = k^2$ του προβλήματος αντιστοιχούν στις θετικές λύσεις της παραπάνω εξίσωσεις, οι οποίες προκύπτουν αν σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\cot k$ και k



Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, αυτή η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις $k_1, k_2, k_3, \ldots$ Οι ιδιοτιμές λοιπόν είναι

$$\lambda_n = k_n^2 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

και οι ιδιοσυναρτήσεις

$$X_n(x) = \cos k_n x$$

<u>Παράδειγμα 3</u>: Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad x \in [0, 1]$$

$$y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$$

<u>Λύση:</u> Ως συνήθως, διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή του λ.

- $\lambda = 0$

$$y = c_1 x + c_2$$

$$y' = c_1$$

$$y(0)+y'(0)=0 \Rightarrow c_2+c_1=0 \Rightarrow c_2=-c_1 \quad (1)$$

$$y(1)+y'(1)=0 \Rightarrow c_1+c_2+c_1=0 \Rightarrow 2c_1+c_2=0 \quad (2)$$

$$(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} 2c_1-c_1=0 \Rightarrow c_1=0$$

$$(1) \Rightarrow c_2=0$$

οπότε για $\lambda=0$ βρίσκουμε μόνο την τετριμμένη λύση $y=$

- $\lambda=-\gamma^2<0$

Γενική λύση $\qquad y=c_1e^{\gamma x}+c_2e^{-\gamma x}$

Παράγωγος $\qquad y'=\gamma(c_1e^{\gamma x}-c_2e^{-\gamma x})$

$$y(0)+y'(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2+\gamma(c_1-c_2)=0$$

$$\Rightarrow (1+\gamma)c_1+(1-\gamma)c_2=0$$

$$\Rightarrow c_1=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}c_2 \quad (3)$$

$$y(1)+y'(1)=0 \Rightarrow c_1e^{\gamma}+c_2e^{-\gamma}+\gamma(c_1e^{\gamma}-c_2e^{-\gamma})=0$$

$$\Rightarrow c_1e^{\gamma}\cdot(1+\gamma)+c_2e^{-\gamma}(1-\gamma)=0$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{\gamma-1}{\cancel{\gamma+1}}c_2\cdot e^{\gamma}\cdot\cancel{(1+\gamma)}+c_2e^{-\gamma}(1-\gamma)=0$$

$$\Rightarrow c_2(\gamma-1)e^{\gamma}-c_2(\gamma-1)e^{-\gamma}=0$$

$$\Rightarrow c_2(\gamma-1)(e^{\gamma}-e^{-\gamma})=0 \quad (4)$$

Για μη τετριμμένη λύση θα πρέπει $c_2\neq0$. Επίσης, επειδή $\gamma\neq0$ είναι και $e^{\gamma}\neq e^{-\gamma}$. Τελικά

$$(4) \Rightarrow \gamma=1$$

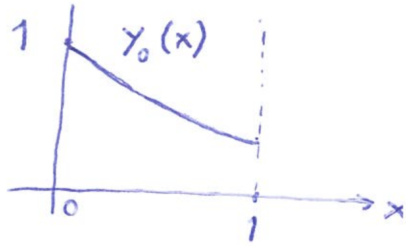
Η ιδιοτιμή είναι

$$\lambda_0 = -\gamma^2 = -1$$

ενώ για $\gamma = 1$ από την (3) παίρνουμε $c_1 = 0$. Η αντίστοι
ιδιοσυνάρτηση είναι λοιπόν

$$Y_0(x) = e^{-x}$$

και είναι η ιδιοσυνάρτηση με 0 κόμβους όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα



- $\lambda = k^2 > 0$

Γενική λύση $\qquad y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$

Παράγωγος $\qquad y' = k(c_1 \cos kx - c_2 \sin kx)$

$$y(0) + y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + k(c_1 \cdot 1 - c_2 \cdot 0) = 0$$

$$\Rightarrow c_2 + k c_1 = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = -k c_1 \quad (5)$$

$$y(1) + y'(1) = 0 \rightarrow c_1 \sin k + c_2 \cos k + k(c_1 \cos k - c_2 \sin k) = 0$$

$$\overset{(5)}{\Longrightarrow} c_1 \sin k \cancel{- k c_1 \cdot \cos k} \cancel{+ k c_1 \cos k} - k \cdot (-k c_1) \sin k = 0$$

$$\Rightarrow c_1 \sin k + c_1 k^2 \sin k = 0$$

$$\Rightarrow c_1 (1 + k^2) \sin k = 0$$

Για μη τετριμμένη λύση θα πρέπει $c_1 \neq 0$. Επίσης είναι $1 + k^2 > 1$, οπότε $1 + k^2 \neq 0$. Επομένως

$$\sin k = 0$$

$$\Rightarrow k_n = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_n = k_n^2 = (n\pi)^2 \quad , \quad n=1,2,3,\dots$$

και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n = c_1 \sin k_n x + c_2 \cos k_n x$$

$(c_2=-k_n c_1)$

$$= c_1 \sin(n\pi x) - c_1 n\pi \cos(n\pi x)$$

$$\Rightarrow y_n \sim \sin(n\pi x) - n\pi \cos(n\pi x)$$

$$= \sqrt{1+(n\pi)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(n\pi)^2}}\sin(n\pi x) - \frac{n\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^2}}\cos(n\pi x)\right]$$

θέτουμε

$$\cos\phi_n = \frac{1}{\sqrt{1+(n\pi)^2}} \quad , \quad \sin\phi_n = \frac{n\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^2}}$$

οπότε

$$y_n \sim \sin(n\pi x)\cdot\cos\phi_n - \cos(n\pi x)\sin\phi_n$$

$$= \sin(n\pi x - \phi_n)$$

όπου

$$\tan\phi_n = \frac{\sin\phi_n}{\cos\phi_n} = n\pi \quad , \quad 0<\phi_n<\frac{\pi}{2}$$

Καθώς το x αλλάζει από $x=0$ σε $x=1$, το όρισμα του ημιτόνου $\theta(x) = n\pi x - \phi_n$ αλλάζει από

$$\theta(0) = -\phi_n < 0 \quad \text{σε} \quad \theta(1) = n\pi - \phi_n$$

με

$$(n-1)\pi < \theta(1) < n\pi$$

Η ιδιοσυνάρτηση y_n μηδενίζεται στα σημεία όπου το θ παίρνει τιμές $0, \pi, 2\pi, \dots, (n-1)\pi$, οπότε έχει n κόμβους.

Παράδειγμα 4: Έστω το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y^{(4)} - \lambda y = 0 \quad , x \in [0, L]$$

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(L) = 0, \quad y''(L) = 0$$

(α) Χρησιμοποιώντας τη διαφορική εξίσωση και ολοκλήρωση κατά παράγοντες, να δείξετε ότι οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι θετικές

(β) Να λύσετε το πρόβλημα ιδιοτιμών για $\lambda = k^4 > 0$

Λύση: (α) Έστω y μια ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Έχουμε

$$y^{(4)} = \lambda y$$

$$\Rightarrow \quad y\,y^{(4)} = \lambda y^2$$

$$\Rightarrow \int_0^L y(x)\,y^{(4)}(x)\,dx = \lambda \int_0^L y^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^L y(x)\left[y^{(3)}(x)\right]' dx = \lambda \int_0^L y^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \left[y(x)\,y^{(3)}(x)\right]_0^L - \int_0^L y'(x)\,y^{(3)}(x)\,dx = \lambda \int_0^L y^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{y(L)}}_{0}\,y^{(3)}(L) - \underbrace{\cancel{y(0)}}_{0}\,y^{(3)}(0) - \int_0^L y'(x)\left[y''(x)\right]' dx = \lambda \int_0^L y^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow -\left[y'(x)\,y''(x)\right]_0^L + \int_0^L y''(x)\,y''(x)\,dx = \lambda \int_0^L y^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad -y'(L)\cancel{y'''(L)} + y'(0)\cancel{y'''(0)} + \int_0^L [y''(x)]^2 dx = \lambda \int_0^L y^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \int_0^L y^2(x)\,dx = \int_0^L [y''(x)]^2 dx \geq 0$$

Όμως $y \neq 0$ ως ιδιοσυνάρτηση, οπότε $\int_0^L y^2(x)dx > 0$ και επομένως $\lambda \geq 0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι δεν μπορεί να είναι $\lambda = 0$. Για $\lambda = 0$ η εξίσωση γίνεται $y^{(4)} = 0$ και έχει γενική λύση

$$y(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

με παραγώγους
$$y'(x) = 3c_1 x^2 + 2c_2 x + c_3$$
$$y''(x) = 6c_1 x + 2c_2$$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$

$y''(0) = 0 \Rightarrow 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$y''(L) = 0 \Rightarrow 6c_1 \cdot L = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$y(L) = 0 \Rightarrow c_3 \cdot L = 0 \Rightarrow c_3 = 0$

οπότε $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ και μόνο η τετριμμένη λύση $y = 0$ ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες για $\lambda = 0$.

(β) Για $\lambda = k^4$, αν θέσουμε $y = e^{\rho x}$ στη δ.ε. βρίσκουμε

$$\rho^4 - k^4 = 0 \Rightarrow (\rho^2 - k^2)(\rho^2 + k^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \pm k \quad , \quad \rho = \pm ik$$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} + c_3 \sin kx + c_4 \cos kx$$

με παραγώγους

$$y' = k(c_1 e^{kx} - c_2 e^{-kx}) + k(c_3 \cos kx - c_4 \sin kx)$$

$$y'' = k^2(c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}) - k^2(c_3 \sin kx + c_4 \cos kx)$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_4 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = -c_4 \quad (1)$$

$$y''(0) = 0 \Rightarrow k^2(c_1 + c_2) - k^2 c_4 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = c_4 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \quad (3)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 2c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \quad (4)$$

$$y(L) = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} c_1 e^{kL} + c_2 e^{-kL} + c_3 \sin kL = 0$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} c_1 (e^{kL} - e^{-kL}) + c_3 \sin kL = 0 \quad (5)$$

$$y''(L) = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} k^2(c_1 e^{kL} + c_2 e^{-kL}) - k^2 \cdot c_3 \sin kL = 0$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} c_1 (e^{kL} - e^{-kL}) - c_3 \sin kL = 0 \quad (6)$$

$$(5) + (6) \Rightarrow 2c_1 (e^{kL} - e^{-kL}) = 0$$

$$\overset{L \neq 0}{\Rightarrow} c_1 = 0$$

$$(5) - (6) \Rightarrow 2c_3 \sin kL = 0$$

$$\Rightarrow \sin kL = 0 \qquad (c_3 \neq 0 \text{ για μη τετριμμένη λύση})$$

$$\Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι λοιπόν

$$\lambda_n = k_n^4 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

<u>Παράδειγμα 5:</u> Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος

$$y^{(4)} - \lambda y = 0, \qquad x \in [0,1]$$

$$y(0)=0, \; y'(0)=0, \qquad y(1)=0, \; y'(1)=0$$

<u>Λύση</u>: Ακολουθώντας τη διαδικασία του προηγούμενου παραδείγματος και χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες και τις νέες συνοριακές συνθήκες, μπορούμε να δείξουμε ότι το πρόβλημα έχει μη τετριμμένη λύση μόνο για $\lambda > 0$.

Θέτουμε λοιπόν $\lambda = k^4$ και όπως πριν έχουμε τη γενική λύση

$$y = c_1 \sinh kx + c_2 \cosh kx + c_3 \sin kx + c_4 \cos kx$$

όπου παρατηρήστε ότι το πρώτο μέρος της λύσης το έχουμε γράψει ως

$$c_1 \sinh kx + c_2 \cosh kx$$

αντί

$$c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

κάτι που επιτρέπεται γιατί τα $\sinh kx$, $\cosh kx$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των e^{kx}, e^{-kx}

$$\sinh kx = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}, \qquad \cosh kx = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$$

Προσέξτε ότι

$$(\sinh kx)' = k\,\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = k \cdot \cosh kx$$

$$(\cosh kx)' = k\,\frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = k \cdot \sinh kx$$

οπότε

$$y' = k\,(c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx + c_3 \cos kx - c_4 \sin kx)$$

$$y'' = k^2 (c_1 \sinh kx + c_2 \cosh kx - c_3 \sin kx - c_4 \cos kx)$$

$$y(0)=0 \Rightarrow c_2+c_4=0 \Rightarrow c_4=-c_2 \quad ①$$

$$y'(0)=0 \Rightarrow c_1+c_3=0 \Rightarrow c_3=-c_1 \quad ②$$

$$y(1)=0 \xRightarrow{①,②} c_1 \sinh k + c_2 \cosh k - c_1 \sin k - c_2 \cos k = 0$$

$$\Rightarrow c_1(\sinh k - \sin k) + c_2(\cosh k - \cos k) = 0 \quad ③$$

$$y'(1)=0 \xRightarrow{①,②} c_1 \cosh k + c_2 \sinh k - c_1 \cos k + c_2 \sin k = 0$$

$$\Rightarrow c_1(\cosh k - \cos k) + c_2(\sinh k + \sin k) = 0 \quad ④$$

Το γραμμικό σύστημα ③, ④ έχει μη τετριμμένη λύση όταν η ορίζουσα των συντελεστών μηδενίζεται, δηλ.

$$\begin{vmatrix} \sinh k - \sin k & \cosh k - \cos k \\ \cosh k - \cos k & \sinh k + \sin k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\sinh k - \sin k)(\sinh k + \sin k) - (\cosh k - \cos k)^2 = 0$$

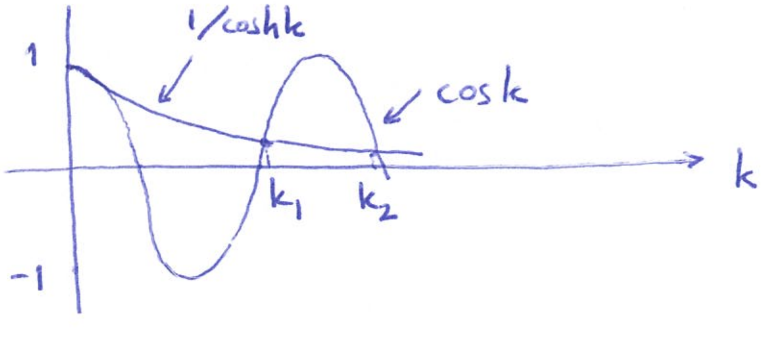
$$\Rightarrow \sin^2 hk - \sin^2 k - \cos^2 hk + 2\cosh k \cdot \cos k - \cos^2 k = 0$$

$$\Rightarrow 2\cosh k \cdot \cos k = \underbrace{\cos^2 hk - \sin^2 hk}_{1} + \underbrace{\sin^2 k + \cos^2 k}_{1}$$

$$\Rightarrow \cosh k \cdot \cos k = 1$$

$$\Rightarrow \cos k = \frac{1}{\cosh k}$$

Η εξίσωση αυτή έχει άπειρες λύσεις όπως φαίνεται στο σχή



Οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι

$$\lambda_n = k_n^4 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Όσον αφορά τις ιδιοσυναρτήσεις, επειδή όλοι οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 είναι μη μηδενικοί, θέτουμε

$$c_2 = 1$$

και έχουμε

$$(3) \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{\cosh k_n - \cos k_n}{\sinh k_n - \sin k_n}$$

$$(2) \Rightarrow \quad c_3 = \frac{\cosh k_n - \cos k_n}{\sinh k_n - \sin k_n}$$

$$(1) \Rightarrow \quad c_4 = -1$$

οπότε

$$Y_n(x) = c_1 \sinh k_n x + c_2 \cosh k_n x + c_3 \sin k_n x + c_4 \cos k_n x$$

$$\Rightarrow Y_n(x) = \cosh k_n x - \cos k_n x - \frac{\cosh k_n - \cos k_n}{\sinh k_n - \sin k_n} \cdot (\sinh k_n x - \sin k_n x)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Τα προβλήματα ιδιοτιμών τέταρτης τάξης που παρουσιάσαμε, συναντώνται στη μελέτη ελαστικών ταλαντώσεων δοκών.

Επέκταση της βασικής θεωρίας σε ιδιόμορφα προβλήματα ιδιοτιμών.

<u>Πρόταση 2</u>: Τα δύο βασικά θεωρήματα του προβλήματος ιδιοτιμών Sturm-Liouville (πραγματικότητα ιδιοτιμών και ορθογωνιότητα ιδιοσυναρτήσεων) ισχύουν και στην περίπτωση όπου το ένα ή και τα δύο άκρα του διαστήματος $[a,b]$ στο οποίο ορίζεται το πρόβλημα είναι ιδιόμορφα, π.χ. $p(a)=0$ ή/και $p(b)=0$, αν αντικαταστήσουμε την εκεί συνοριακή συνθήκη με την απαίτηση να είναι η συνάρτηση πεπερασμένη στο ιδιόμορφο άκρο.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω π.χ. ότι το άκρο $x=a$ είναι ιδιόμορφο με $p(a)=0$. Στο άκρο $x=a$ απαιτούμε να είναι πεπερασμένη η λύση του προβλήματος ιδιοτιμών.

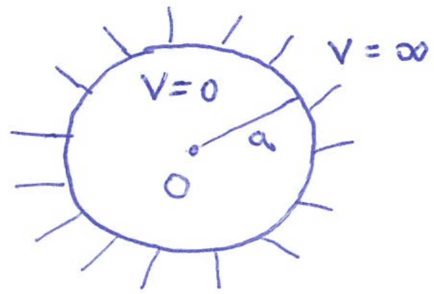
Η απόδειξη των βασικών θεωρημάτων στηρίζεται στο μηδενισμό της συνοριακής έκφρασης

$$p(b)W(b) - p(a)W(a)$$

Η Βρονσκιανή στο σημείο $x=a$, $W(a)$, είναι πεπερασμένη, γιατί έχουμε απαιτήσει να είναι πεπερασμένες οι λύσεις στο σημείο αυτό. Επομένως $p(a)W(a)=0$.

Στο σημείο $x=b$, αν είναι ομαλό και έχουμε μία π.χ. αμιγή συνοριακή συνθήκη, τότε $W(b)=0$ όπως έχουμε δείξει. Αν είναι και αυτό ιδιόμορφο με $p(b)=0$, απαιτούμε οι λύσεις να είναι πεπερασμένες, οπότε $p(b)W(b)=0$.

Παράδειγμα 6: Ένα απλό μοντέλο κβαντικής τελείας είναι το απειρόβαθο σφαιρικό πηγάδι δυναμικού



$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \infty, & r \geq a \end{cases}$$

όπου το δυναμικό είναι μηδέν εντός της σφαίρας ακτίνας a και άπειρο εκτός. Οι ενεργειακές ιδιοτιμές E και ιδιοσυναρτήσ $R(r)$ μηδενικής στροφορμής ($\ell=0$) προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\left(r^2 R'\right)' + V(r)R = ER \qquad \left(\begin{array}{cc} \text{αντιστοιχία} & \\ R & y \\ r & x \\ E & \lambda \end{array}\right)$$

με συνοριακή συνθήκη το μηδενισμό της ιδιοσυνάρτησης για r=

$$R(a) = 0.$$

(α) Γράψτε τη δ.ε. στη μορφή Liouville. Ποια είναι η απαιτη για τη λύση $R(r)$ στο άκρο $r=0$? Βρείτε το βάρος $w(r)$ κα δείξτε ότι η έκφραση για το εσωτερικό γινόμενο (R,R) είνα

$$(R,R) = \int_0^a r^2 R^2(r)\,dr$$

(β) Η παραπάνω έκφραση του εσωτερικού γινομένου μας οδηγεί να θεωρήσουμε αντί της $R(r)$ τη συνάρτηση

$$u(r) = r\,R(r)$$

Βρείτε την δ.ε. που ικανοποιεί η u για $r<a$ και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες.

(γ) Λύστε το πρόβλημα ιδιοτιμών ως προς u και βρείτε τις ιδιοτιμές E_n και τις ιδιοσυναρτήσεις R_n

Λύση :(a) Για $r<a$ έχουμε $V(r)=0$ οπότε η δ.ε.

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}(r^2R')' = ER$$

$$\Rightarrow (r^2R')' + \frac{2mE}{\hbar^2}\cdot r^2\cdot R = 0$$

επομένως $p(r)=r^2$, $w(r)=r^2$

Επειδή $p(0)=0$, το $r=0$ είναι ιδιόμορφο σημε

Σύμφωνα με την πρόταση 2, απαιτούμε το $R(0)$ να είναι πεπερασμένο. Επίσης

$$(R,R) = \int_0^a w(r)R(r)\cdot R(r)\,dr = \int_0^a r^2R^2(r)\,dr$$

(B) $u = rR \Rightarrow R = \frac{u}{r} \Rightarrow R' = \frac{u'r-u}{r^2}$

οπότε $(r^2R')' + \frac{2mE}{\hbar^2}r^2R = 0$

$$\Rightarrow \left(\cancel{r^2}\frac{u'r-u}{\cancel{r^2}}\right)' + \frac{2mE}{\hbar^2}r^2\cdot\frac{u}{r} = 0$$

$$\Rightarrow u''r + \cancel{u'} - \cancel{u'} + \frac{2mE}{\hbar^2}ru = 0$$

$$\Rightarrow u'' + \frac{2mE}{\hbar^2}u = 0$$

Συνοριακές συνθήκες :

$r=0$ $\quad u(0) = 0\cdot R(0) = 0$, αφού $R(0)$ πεπερασμένο

$r=a$ $\quad u(a) = a\cdot R(a) = 0$

(γ) Το πρόβλημα:

$$u'' + \frac{2mE}{\hbar^2} u = 0, \quad u(0) = 0, \; u(a) = 0$$

έχει επιλυθεί στο παράδειγμα 4 της πρώτης διάλεξης (για $a = L$). Οι ενεργειακές ιδιοτιμές είναι

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

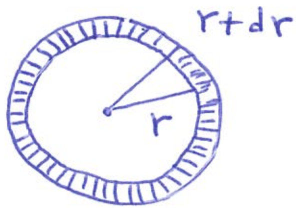
με ιδιοσυναρτήσεις

$$u_n \sim \sin \frac{n\pi r}{a}$$

οπότε

$$R_n(r) \sim \frac{\sin \frac{n\pi r}{a}}{r}$$

Η κανονικοποίηση των ιδιοσυναρτήσεων γίνεται ως εξής. Η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο στο σφαιρικό φλοιό πάχους dr, που σχηματίζεται από τα σφαιρικά κελύφη ακτίνων r και $r+dr$ είναι



$$P_r(r)dr = 4\pi r^2 R_n^2(r)\, dr = 4\pi u_n^2(r)\, dr$$

Η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο εντός της σφαίρας ακτίνας a πρέπει να ισούται με 1, δηλαδή

$$\int_0^a P_r(r)dr = 1 \Rightarrow 4\pi \int_0^a u_n^2(r)dr = 1$$

$$\Rightarrow 4\pi A^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi r}{a}\, dr = 1 \Rightarrow 4\pi A^2 \cdot \frac{a}{2} = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \quad \text{και} \quad R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{\sin \frac{n\pi r}{a}}{r}$$