Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών

Παράδειγμα 1: Η μονοδιάστατη εξίσωση αγωγής θερμότητας

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1) \quad u : u(x,t)$$

$x \in [0, L]$

Συνοριακές Συνθήκες : $u(0,t) = u(L,t) = 0$

Αρχική συνθήκη : $u(x,0) = f(x)$

Αναζητούμε λύσεις χωριζόμενης μορφής

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

και αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[X(x)T(t)\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[X(x)T(t)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(x)\frac{dT}{dt} = T(t)\frac{d^2X}{dx^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T(t)}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = \text{σταθερά} =$$

$$= -\lambda \quad \left(\begin{array}{c}\text{με } \lambda > 0\\ \text{αρνητικό}\end{array}\right) \qquad (2)$$

Αυτό έπρεπε να το περιμένουμε γιατί η χωρική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda X(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X(x) = 0 \qquad (3)$$

που θα ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)\,T(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(0) = 0$$

και $u(L,t) = 0 \Rightarrow X(L)\,T(t) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow X(L) = 0$$

μόνο αν η σταθερά είναι αρνητική.

Οπότε θέτουμε $\lambda = k^2$ και παίρνουμε από την εξίσωση (3)

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες

$$X(0) = 0 \Rightarrow A\overbrace{\cos(0)}^{\to 1} + B\overbrace{\sin(0)}^{\to 0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0 \quad \text{οπότε} \quad X(x) = B\sin(kx)$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow B\sin(kL) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kL = n\pi \, , \text{ με } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Άρα $k_n = \dfrac{n\pi}{L}$, με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Άρα $\lambda_n = k_n^2 = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, με $n = 1, 2, 3, \ldots$

και $X_n(x) = B_n \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Από την εξίσωση (2) θα έχουμε

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda_n T(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_n(t) = S'_n e^{-\lambda_n t}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Οπότε

$$u_n(x,t) = X_n(x)\, T_n(t) =$$

$$= \underbrace{B_n S'_n}_{c_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n t}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Άρα $u_n(x,t) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n t}$,

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ειδικές λύσεις

Η γενική λύση είναι γραμμικός συνδυασμός της ειδικής λύσης.

Οπότε η γενική λύση της εξίσωσης θα είναι

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n t} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \quad (4)$$

Μέχρι τώρα δεν έχουμε χρησιμοποιήσει την αρχική συνθήκη. Στο σημείο αυτό (δηλαδή στη γενική λύση) θα χρησιμοποιήσουμε την αρχική συνθήκη.

Έχουμε $u(x,0) = f(x)$

Οπότε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Υπενθυμίζω ότι εάν

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \quad \text{με } y_n(x)$$

ιδιοσυναρτήσεις

τότε $$c_n = \frac{(y_n, f)}{(y_n, y_n)}$$

Εδώ $y_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, οπότε

$$c_n = \frac{\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), f(x)\right)}{\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)}$$, με $n=1,2,3,\ldots$

Έχουμε δείξει ότι

$$\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) =$$

$$= \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2}$$

Άρα $c_n = \frac{2}{L}\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), f(x)\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\, dx$$

Έστω $f(x) = T_0$ (σταθερό)

Τότε $$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) T_0 \, dx =$$

$$= \frac{2}{L} T_0 \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{2T_0}{L}\left[-\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L =$$

$$= \frac{2T_0}{L}\left(-\frac{L}{n\pi}\right)\left[\cos(n\pi) - \cos(0)\right] =$$

$$= \frac{2T_0}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

Άρα αν $n =$ άρτιος $c_n = 0$

Αν $n =$ περιττός $c_n = \dfrac{4T_0}{n\pi}$

Άρα $$u(x,t) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n=\text{περιττός}} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right] \cdot e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{L^2}t} =$$

$$= \frac{4T_0}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\pi^2}{L^2}t} + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}t} + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) e^{-25\frac{\pi^2}{L^2}t} + \dots \right]$$

Παράδειγμα 2: Η μονοδιάστατη εξίσωση αγωγής θερμότητας με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5) \qquad u : u(x,t)$$

$x \in [0, L]$

Συνοριακές συνθήκες

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$$

Αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = f(x)$$

Εδώ $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ άρα $u_x(0,t)=0$ σημαίνει

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

Η εξίσωση (5) μπορεί επίσης να γραφτεί με την παραπάνω μορφή

$$u_t = u_{xx}$$

Και εδώ ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία με ~~[illegible]~~ το παράδειγμα 1, δηλαδή $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

Άρα με αντικατάσταση στην εξίσωση (5)

θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = \text{σταθερά} =$$

$$= -\lambda \quad (\overset{\lambda \geq 0}{\text{αρνητική}} \text{ ή μηδέν})$$

Και εδώ η σταθερά θα πρέπει να είναι αρνητική (ή και μηδέν) για να ικανοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες που οδηγούν εδώ

σε $\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0$ ή $X'(0) = 0$

και $\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L} = 0$ ή $X'(L) = 0$

Η εξίσωση για την $X(x)$ θα είναι πάλι

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X(x) = 0$$

Θέτουμε $\lambda = k^2$ και έχουμε λύσεις

$$X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Για τις συνοριακές συνθήκες χρειαζόμαστε την $X'(x)$ και την υπολογίζουμε

$$X'(x) = -kA\sin(kx) + Bk\cos(kx)$$

Εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες

$$X'(0) = 0 \Rightarrow -kA\sin(0) + Bk\cos(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 0 \;, \quad X(x) = A\cos(kx)$$

$$X'(L) = 0 \Rightarrow -kA\sin(kL) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kL = n\pi \;, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Δηλαδή $k_n = \dfrac{n\pi}{L}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Άρα $X_n(x) = A_n \cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Η διαφορική εξίσωση για το $T(t)$ θα

είναι πάλι $\frac{dT}{dt} = -\lambda_n T \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = S'_n e^{-\lambda_n t} =$$

$$= S'_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Οπότε $u_n(x,t) = \underbrace{A_n S'_n}_{c_n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$

με $n = 0, 1, 2, \ldots$

Άρα οι ειδικές λύσεις $u_n(x,t)$ θα είναι

$$u_n(x,t) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

με $n = 0, 1, 2, \ldots$

Οπότε η γενική λύση θα είναι

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \quad (6)$$

Από την αρχική συνθήκη θα έχουμε

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Οπότε

$$c_0 = \frac{(1, f(x))}{\underbrace{(1,1)}_{L}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

και

$$c_n = \frac{\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), f(x)\right)}{\underbrace{\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)}_{\frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\,dx$$

με $n = 1, 2, 3, \dots$

Παράδειγμα 3: Κυματική εξίσωση σε μια διάσταση. Το πρόβλημα της ταλαντευόμενης χορδής.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (7) \qquad u : u(x,t)$$

$x \in [0, L]$

Συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Αρχικές συνθήκες

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x)$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (7) θα έχουμε

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[X(x)T(t)\right] - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[X(x)T(t)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T(t)\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{1}{c^2}X(x)\frac{d^2T}{dt^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{1}{c^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T}{dt^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T}{dt^2} = \text{σταθερά} =$$

$$= -\lambda \quad \left(\begin{array}{l} \lambda > 0 \\ \text{αρνητική η σταθερά και εδώ} \end{array} \right)$$

Η σταθερά είναι και εδώ αρνητική αφού οι συνοριακές συνθήκες είναι ίδιες με του παραδείγματος 1, δηλαδή

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$$

και ικανοποιούνται μόνο αν η σταθερά είναι αρνητική.

Οπότε θα έχουμε ότι

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda \Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X(x) = 0$$

και $\frac{1}{c^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T}{dt^2} = -\lambda \Rightarrow \frac{dT}{dt^2} + \lambda c^2 T(t) = 0$

Θέλουμε $\lambda = k^2$ και έχουμε για τη χωρική συνάρτηση

$$X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών θα έχουμε $X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

άρα $X(x) = B\sin(kx)$

$$X(L) = 0 \Rightarrow B\sin(kL) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L},$$

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Άρα $X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n=1,2,3,\ldots$

και $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$

Η διαφορική εξίσωση για την χρονική συνάρτηση θα είναι

$$\frac{d^2T}{dt^2} + k_n^2 c^2 T(t) = 0$$

$$T_n(t) = \Gamma_n \cos(k_n c t) + \Delta_n \sin(k_n c t)$$

με $n=1,2,3,\ldots$

Ορίζουμε $\omega = \frac{\pi c}{L}$. Έτσι αφού $k_n c = \frac{\pi c}{L} n = \omega n$

Άρα $T_n(t) = \Gamma_n \cos(\omega n t) + \Delta_n \sin(\omega n t)$

με $n=1,2,3,\ldots$

Οπότε οι ειδικές λύσεις θα είναι

$$u_n(x,t) = X_n(x)\, T_n(t) \Rightarrow$$

$$u_n(x,t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\Gamma_n \cos(\omega n t) + \Delta_n \sin(\omega n t) \right] =$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t) \right],$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Οπότε η γενική λύση θα είναι

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[a_n \cos(\omega n t) + \right.$$

$$\left. + b_n \sin(\omega n t) \right]$$

Τώρα από τις αρχικές συνθήκες θα έχουμε

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Οπότε, όπως έχουμε εξηγήσει στο παράδειγμα 1, θα έχουμε

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\, dx$$

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ενώ από τη δεύτερη αρχική συνθήκη θα έχουμε

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

$$u_t(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[-wn a_n \sin(wnt) + wn b_n \cos(wnt) \right]$$

Άρα $u_t(x, 0) = g(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} wn b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Οπότε

$$\omega n b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) g(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b_n = \frac{2}{\omega n L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) g(x)\,dx$$

με $n = 1, 2, 3, \dots$

Άρα έτσι βρίσκουμε και τα a_n, b_n.