Η μέθοδος της συνάρτησης Green

Η συνάρτηση Green για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

Το πρόβλημα είναι να λύσουμε τη μη-ομογενή εξίσωση

$$\mathcal{L}\, y(x) = f(x)$$

$\mathcal{L}$: δευτεροτάξιος διαφορικός τελεστής

σε συνδυασμό με ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

$$\mathcal{L}\, y(x) = f(x) \quad + \quad \text{Ο.Σ.Σ.}$$

$$x \in [a, b]$$

Έστω ότι η λύση της εξίσωσης μπορεί να γραφτεί ως

$$y(x) = \int_a^b G(x,x')\, f(x')\, dx'$$

$G(x,x')$: συνάρτηση <u>Green</u>

$$\mathcal{L} = \alpha(x)\frac{d^2}{dx^2} + \beta(x)\frac{d}{dx} + \gamma(x)$$

Τοπική μορφή δευτεροτάξιου διαφορικού τελεστή.

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και παίρνουμε

$$\mathcal{L} y(x) = \mathcal{L} \int_a^b G(x,x') f(x') dx' =$$

$$= \int_a^b \mathcal{L} G(x,x') f(x') dx' = f(x)$$

Θυμίζω όμως ότι

$$\int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{συνάρτηση} \\ \text{δέλτα}}}{\delta(x-x')} f(x') dx' = f(x)$$

Οπότε $\quad \mathcal{L} G(x,x') = \delta(x-x')$

Επίσης η συνάρτηση Green ικανοποιεί τις Ο.Σ.Σ. που ικανοποιεί και η $y(x)$.

Η συνάρτηση Green μέσω ιδιοσυναρτήσεων

Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\mathcal{L} y = \lambda y + \text{Ο.Σ.Σ.}$$

Το οποίο έχουμε λύσει και έχουμε βρει τις ιδιοτιμές λ_n και τις ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x)$. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε κανονικοποιήσει τις ιδιοσυναρτήσεις μας, δηλαδή ικανοποιούν τη σχέση

$$(y_n, y_n) = 1 .$$

Έστω ότι αναπτύσσουμε τις λύσεις της μη-ομογενούς εξίσωσης

$$\mathcal{L} y(x) = f(x)$$

στις ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x)$.

$$y(x) = \sum_n c_n y_n(x)$$

Επίσης αναπτύσσουμε και τη συνάρτηση $f(x)$ στις ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x)$

$$f(x) = \sum_n f_n y_n(x)$$

Τότε με αντικατάσταση στη μη-ομογενή εξίσωση θα έχουμε

$$\mathcal{L} y(x) = \mathcal{L} \sum_n c_n y_n(x) = \sum_n f_n y_n(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_n c_n \mathcal{L} y_n(x) = \sum_n f_n y_n(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_n c_n \lambda_n y_n(x) = \sum_n f_n y_n(x)$$

Οπότε $\quad c_n \lambda_n = f_n \Rightarrow c_n = \dfrac{f_n}{\lambda_n}$

Όμως από τη σχέση

$$f(x) = \sum_n f_n y_n(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n = \frac{(y_n, f)}{\underbrace{(y_n, y_n)}_{1}} = (y_n, f)$$

Άρα $\; f_n = (y_n, f) \;$ και

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n} (y_n, f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b w(x') \, y_n^*(x') f(x') \, dx'$$

Άρα $y(x) = \sum_n c_n y_n(x) =$

$$= \sum_n \frac{1}{\lambda_n}\left[\int_a^b W(x') y_n^*(x') f(x') dx'\right] y_n(x) =$$

$$= \int_a^b \left[\sum_n \frac{y_n^*(x') y_n(x) W(x')}{\lambda_n}\right] f(x') dx'$$

Θυμόμαστε ότι

$$y(x) = \int_a^b G(x,x') f(x') dx'$$

Άρα η συνάρτηση Green γράφεται ως

$$G(x,x') = \sum_n \frac{y_n(x) y_n^*(x') W(x')}{\lambda_n}$$

Κατασκευή της συνάρτησης Green

Έστω μη-ομογενής εξίσωση με Ο.Σ.Σ.

$$\mathcal{L} y(x) = f(x) \quad + \text{ Ο.Σ.Σ.}$$
$$x \in [a,b]$$

Τότε η λύση μπορεί να γραφτεί ως

$$y(x) = \int_a^b G(x,x')\, f(x')\, dx'$$

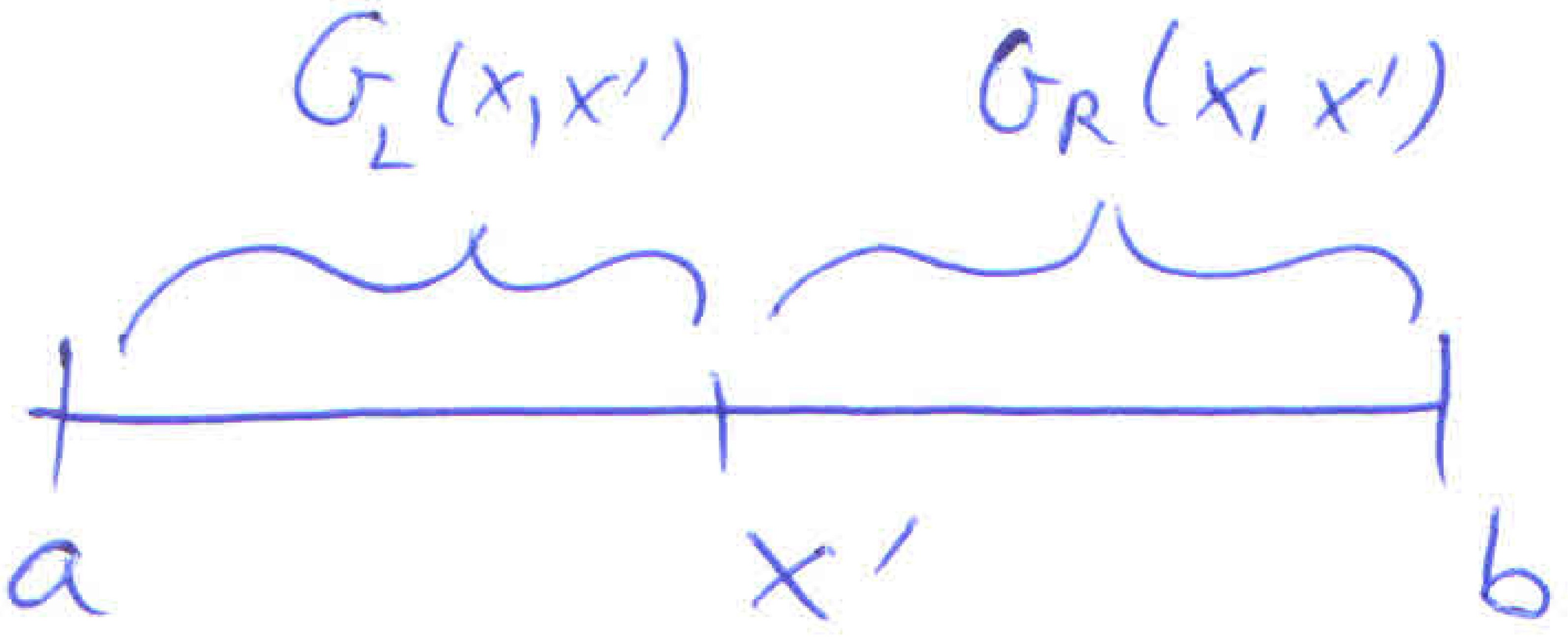
όπου $G(x,x')$ η συνάρτηση Green που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathcal{L}\, G(x,x') = \delta(x-x') + \text{Ο.Σ.Σ.}$$

Επίσης $x' \in [a,b]$

Για $x \neq x'$ η εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Green είναι ομογενής αφού η $\delta(x-x')$ είναι μηδέν για $x \neq x'$,

άρα για $x \neq x'$ $\mathcal{L}\, G(x,x') = 0$ + Ο.Σ.Σ.



Χωρίζουμε τη συνάρτηση Green ως

$$G(x,x') = \begin{cases} G_L(x,x') & a < x < x' \\ G_R(x,x') & x' < x < b \end{cases}$$

Τόσο η $G_L(x,x')$ όσο και η $G_R(x,x')$ ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση

$$\mathcal{L}\, G_L(x,x') = 0$$

$$\mathcal{L}\, G_R(x,x') = 0$$

Επίσης η $G_L(x,x')$ και η $G_R(x,x')$ ικανοποιούν τις Ο.Σ.Σ. της αρχικής εξίσωσης.

Τέλος οι $G_L(x,x')$ και $G_R(x,x')$ ικανοποιούν τις συνθήκες συναρμογής

$$G_L = G_R \quad \text{στο} \quad x = x'$$

$$G_R' - G_L' = \frac{1}{\alpha} \quad \text{στο} \quad x = x'$$

όπου $\alpha(x)$ ο συντελεστής της δεύτερης παραγώγου του τελεστή $\mathcal{L}$.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί η εξίσωση

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = x \quad \text{στο διάστημα} \quad x \in [0,1]$$

με συνοριακές συνθήκες $y(0) = y(1) = 0$ με τη

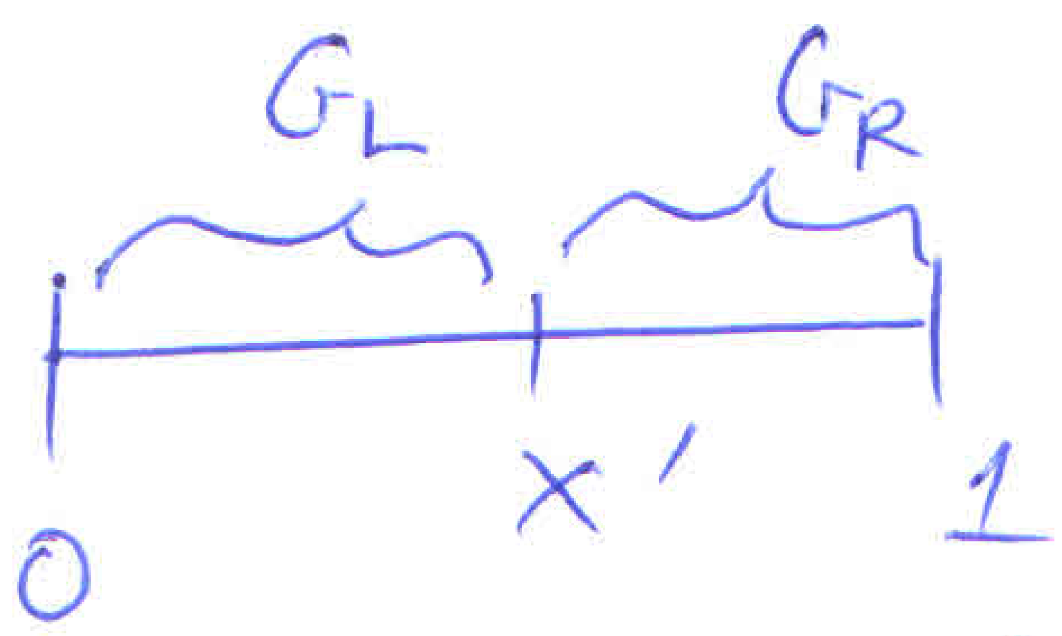
Μέθοδο της συνάρτησης Green.

Επιλέγουμε τον τελεστή $\mathcal{L} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$

Η συνάρτηση Green θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$-\frac{d^2 G}{dx^2} = \delta(x-x')$$

$$x \in [0,1]$$



$$G(x,x') = \begin{cases} G_L(x,x'), & 0<x<x' \\ G_R(x,x'), & x'<x<1 \end{cases}$$

Για $x \neq x'$

$$-\frac{d^2 G_L}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 G_L}{dx^2} = 0$$

$$-\frac{d^2 G_R}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 G_R}{dx^2} = 0$$

Οι λύσεις των εξισώσεων θα είναι

$$G_L = Ax + B$$

$$G_R = \Gamma x + \Delta$$

Από τις Ο.Σ.Σ. θα έχουμε $G_L(0,x') = 0$ και

$$G_R(1,x') = 0$$

Οπότε $G_L(0,x')=0 \Rightarrow B=0$

$$G_R(1,x')=0 \Rightarrow \Gamma+\Delta=0 \Rightarrow \Gamma=-\Delta$$

Άρα $G_L = Ax \qquad G_L' = A$

$$G_R = \Delta(1-x) \qquad G_R' = -\Delta$$

Από τις συνθήκες συναρμογής θα έχουμε

$x=x'$, $G_L = G_R \Rightarrow Ax' = \Delta(1-x')$

$x=x'$, $G_R' - G_L' = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow -\Delta - A = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A+\Delta = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 1-\Delta$$

Έτσι αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$(1-\Delta)x' = \Delta(1-x') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' - \cancel{\Delta x'} = \Delta - \cancel{\Delta x'} \Rightarrow \Delta = x'$$

Άρα $A = 1-x'$

Οπότε $G_L(x,x') = x(1-x')$

$$G_R(x,x') = (1-x)x'$$

(10)

Άρα η συνάρτηση Green είναι $G(x,x') = \begin{cases} x(1-x') \;, & 0<x<x' \\ (1-x)x' \;, & x'<x<1 \end{cases}$

Η εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε είναι της μορφής

$$\mathcal{L}\, y(x) = f(x) \quad \text{με} \quad \mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \qquad \text{και} \quad f(x) = x$$

Άρα $y(x) = \int_0^1 G(x,x')\, f(x')\, dx' =$

$$= \int_0^x G_R(x,x')\, f(x')\, dx' + \int_x^1 G_L(x,x')\, f(x')\, dx'$$

Οπότε με αντικατάσταση της συνάρτησης Green παίρνουμε

$$y(x) = (1-x)\int_0^x x' f(x')\, dx' + x\int_x^1 (1-x') f(x')\, dx'$$

Με $f(x) = x$ θα έχουμε

$$y(x) = (1-x)\int_0^x x'^2\, dx' + x\int_x^1 (x' - x'^2)\, dx' =$$

$$= (1-x)\left.\frac{x'^3}{3}\right|_0^x + x\left.\left[\frac{x'^2}{2} - \frac{x'^3}{3}\right]\right|_x^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = (1-x)\frac{x^3}{3} + x\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \cancel{\frac{x^4}{3}} + \frac{x}{6} - \frac{x^3}{2} + \cancel{\frac{x^4}{3}} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(x - x^3\right)$$

Παράδειγμα 2: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

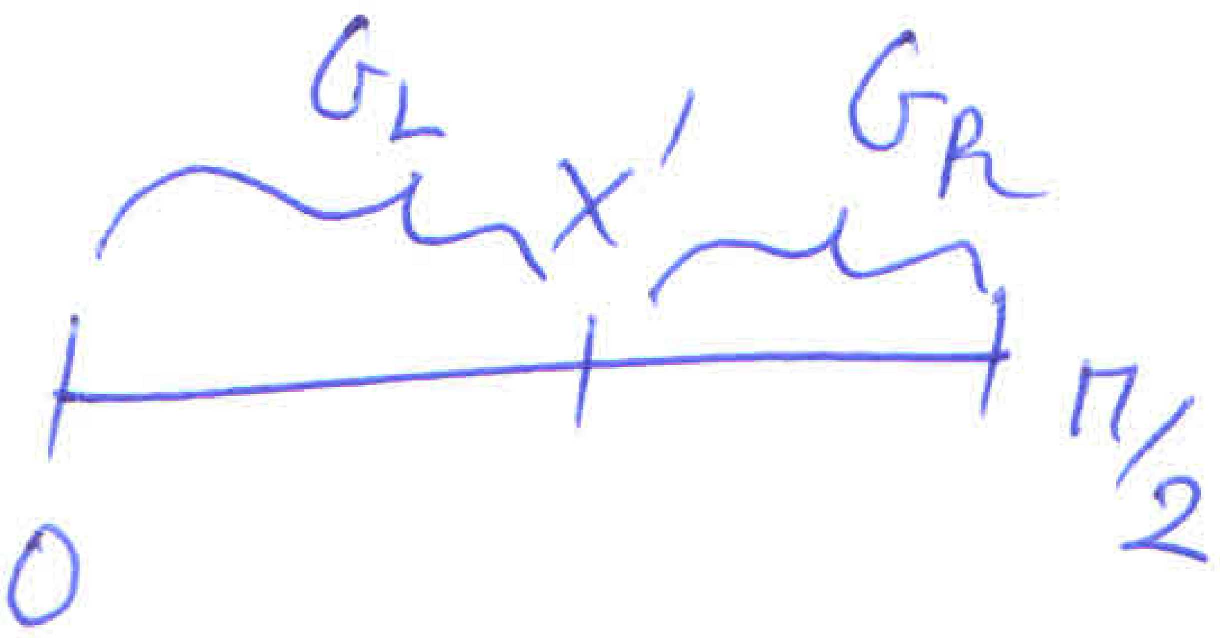
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y(x) = x \quad \text{στο διάστημα } x \in [0, \pi/2]$$

με συνοριακές συνθήκες $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$, με τη μέθοδο της συνάρτησης Green.

Θα βρούμε αρχικά τη συνάρτηση Green.

Ο τελεστής $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + 1$ και η συνάρτηση Green ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d^2 G(x,x')}{dx^2} + G(x,x') = \delta(x-x')$$



$$G(x,x') = \begin{cases} G_L(x,x'), & 0<x<x' \\ G_R(x,x'), & x'<x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Οι $G_L(x,x')$ και $G_R(x,x')$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$G_L'' + G_L = 0 \qquad G_R'' + G_R = 0$$

Οπότε

$$G_L(x,x') = A\cos(x) + B\sin(x)$$

$$G_R(x,x') = \Gamma\cos(x) + \Delta\sin(x)$$

Από τις Ο.Σ.Σ. θα έχουμε

$$G_L(0,x') = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$G_R\left(\frac{\pi}{2},x'\right) = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

Άρα $G_L(x,x') = B\sin(x) \qquad G_L'(x,x') = B\cos(x)$

$\qquad G_R(x,x') = \Gamma\cos(x) \qquad G_R'(x,x') = -\Gamma\sin(x)$

Οπότε από τις συνθήκες συναρμογής θα έχουμε

$$x = x', \quad G_L = G_R \Rightarrow B\sin(x') = \Gamma\cos(x')$$

$$x = x', \quad G_R' - G_L' = 1 \Rightarrow -\Gamma\sin(x') - B\cos(x') = 1$$

Οπότε $B = \Gamma \dfrac{\cos(x')}{\sin(x')}$

και $-\Gamma\sin(x') - \Gamma\dfrac{\cos^2(x')}{\sin(x')} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Gamma\,[\underbrace{\sin^2(x') + \cos^2(x')}_{1}] = -\sin(x') \Rightarrow$$ (13)

$$\Rightarrow \quad \Gamma = -\sin(x') \quad \text{και} \quad B = -\cos(x')$$

Οπότε $G_L(x,x') = -\sin(x)\cos(x')$

$G_R(x,x') = -\cos(x)\sin(x')$

Οπότε $G(x,x') = \begin{cases} \to -\sin(x)\cos(x') & , 0<x<x' \\ \to -\cos(x)\sin(x') & , x'<x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Τότε $y(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} G(x,x')\, x'\, dx' =$

$$= \int_0^{x} G_R(x,x')\, x'\, dx' + \int_x^{\frac{\pi}{2}} G_L(x,x')\, x'\, dx' =$$

$$= -\cos(x)\int_0^{x} x'\sin(x')\,dx' - \sin(x)\int_x^{\frac{\pi}{2}} x'\cos(x')\,dx' =$$

$$= -\cos(x)\int_0^{x} x'\,[-\cos(x')]'\,dx' - \sin(x)\int_x^{\frac{\pi}{2}} x'\,[\sin(x')]'\,dx' =$$

$$= -\cos(x)\left[-x'\cos(x')\Big|_0^{x} + \int_0^{x}\cos(x')\,dx'\right] -$$

$$-\sin(x)\left[x'\sin(x')\Big|_{x}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{x}^{\frac{\pi}{2}}\sin(x')\,dx'\right] =$$

$$= -\cos(x)\left[-x\cos(x) + \sin(x')\Big|_{0}^{x}\right] -$$

$$-\sin(x)\left[\frac{\pi}{2} - x\sin(x) + \cos(x')\Big|_{x}^{\frac{\pi}{2}}\right] =$$

$$= x\cos^2(x) - \cancel{\cos(x)\sin(x)} - \frac{\pi}{2}\sin(x) + x\sin^2(x) +$$
$$+ \cancel{\sin(x)\cos(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = x - \frac{\pi}{2}\sin(x)$$

Παράδειγμα 3: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της συνάρτησης Green για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''(x) + \frac{1}{4}y(x) = \sin(2x)$$

στο διάστημα $x \in [0, \pi]$ με συνοριακά συνθήκες $y(0) = y(\pi) = 0$. Για τη λύση:

Α. Χρησιμοποιήστε την μεθοδολογία των δύο προηγούμενων παραδειγμάτων.

Β. Χρησιμοποιήστε την μέθοδο αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις.

Για την μέθοδο A ακολουθήστε την μεθοδολογία που αναπτύξαμε (κάντε το ως άσκηση) και θα βρείτε

$$G(x,x') = \begin{cases} -2\cos\left(\frac{x'}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right), & 0<x<x' \\ -2\sin\left(\frac{x'}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) & x'<x<\pi \end{cases}$$

$$y(x) = -\frac{4}{15}\sin(2x)$$

Για τη μέθοδο B θα βρούμε αρχικά τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις της εξίσωσης

$$y'' + \frac{1}{4}y = \lambda y \qquad y(0) = y(\pi) = 0$$

Θα έχουμε $y'' + \left(\frac{1}{4}-\lambda\right)y = 0$

Για να ικανοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες θα πρέπει $\frac{1}{4}-\lambda > 0$

Θέτουμε $k^2 = \frac{1}{4}-\lambda$ με $k>0$

Τότε $y'' + k^2 y = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες

$y(0)=0 \Rightarrow A=0$

Άρα $y(x) = B\sin(kx)$

$y(\pi)=0 \Rightarrow B\sin(k\pi)=0 \Rightarrow k\pi = n\pi$, με $n=1,2,3,\dots$

$\Updownarrow$

$k=n$, με $n=1,2,3,\dots$

Άρα οι ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$y_n(x) = B_n \sin(nx)$$

και ιδιοτιμές $\lambda = \frac{1}{4} - k^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{1}{4} - n^2, \text{ με } n=1,2,3,\dots$$

Κανονικοποιούμε τις ιδιοσυναρτήσεις.

Επιβάλουμε $(y_n, y_n) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_n^2 \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2(nx)\,dx}_{\frac{\pi}{2}} = 1 \Rightarrow B_n^2 \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Άρα οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις θα είναι $y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)$, με $n=1,2,3,\dots$

Τώρα από τη σχέση που είχαμε βρει παραπάνω έχουμε ότι η συνάρτηση Green γράφεται ως

$$G(x,x') = \sum_n \frac{y_n(x)\, y_n^*(x')\, w(x')}{\lambda_n}$$

Οπότε εδώ θα έχουμε (θυμίζω $w(x)=1$ εδώ)

$$G(x,x') = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)\sin(nx')}{\frac{1}{4}-n^2}$$

Οπότε

$$y(x) = \int_0^{\pi} G(x,x')\, \underbrace{f(x')}_{\sin(2x') \text{ στο πρόβλημα μας}}\, dx' =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)\sin(nx')}{\frac{1}{4}-n^2}\right]\sin(2x')\, dx' =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\frac{1}{4}-n^2}\int_0^{\pi} \sin(nx')\sin(2x')\, dx'$$

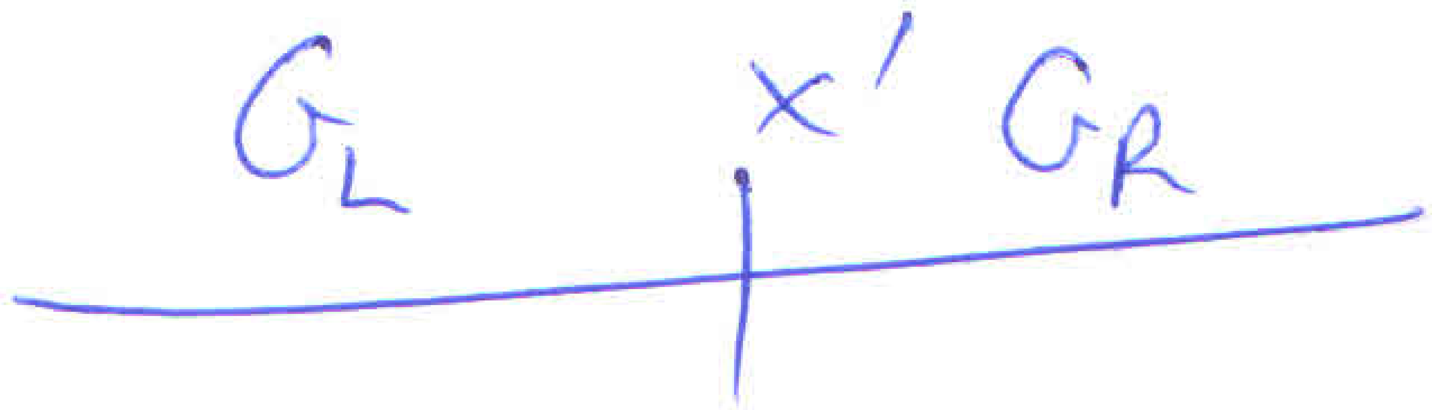
Όμως οι συναρτήσεις $\sin(nx)$ είναι ορθογώνιες οπότε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi}\sin(nx')\sin(2x')\,dx'$ είναι μη-μηδενικό μόνο αν $n=2$, έτσι αυτός θα είναι και ο μόνος όρος που θα συνεισφέρει στο άθροισμα.

Άρα $$y(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin(2x)}{\frac{1}{4}-2^2}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^2(2x)\,dx}_{\pi/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{4}{15}\sin(2x)$$

Παράδειγμα 4: Να βρεθεί η συνάρτηση Green του τελεστή $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2}+k^2$ (με $k>0$) στο διάστημα $-\infty<x<\infty$ με συνοριακές συνθήκες

$$y(-\infty) = y(\infty) = 0$$



Έστω $$G(x,x') = \begin{cases} G_L(x,x'), & x<x' \\ G_R(x,x'), & x>x' \end{cases}$$

Οι εξισώσεις που ικανοποιούν οι $G_L(x,x')$ και $G_R(x,x')$ είναι

$$-G_L'' + k^2 G_L = 0$$

$$-G_R'' + k^2 G_R = 0$$

Οπότε οι λύσεις θα είναι

$$G_L(x,x') = A e^{-kx} + B e^{kx}$$

$$G_R(x,x') = \Gamma e^{-kx} + \Delta e^{kx}$$

Από τις συνοριακές συνθήκες θα έχουμε

$$G_L(x\to-\infty, x') = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$G_R(x\to\infty, x') = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

Άρα $G_L(x,x') = B e^{kx}$ $\quad G_L'(x,x') = kBe^{kx}$

$G_R(x,x') = \Gamma e^{-kx}$ $\quad G_R'(x,x') = -k\Gamma e^{-kx}$

Από τις συνθήκες συναρμογής θα έχουμε

$$x = x' \ , \ G_L = G_R \Rightarrow B e^{kx'} = \Gamma e^{-kx'}$$

$$x = x' \ , \ G_R' - G_L' = -1 \Rightarrow -k\Gamma e^{-kx'} - kBe^{kx'} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma e^{-kx'} + B e^{kx'} = \frac{1}{k}$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$B = \Gamma e^{-2kx'}$$

και με αντικατάσταση στη δεύτερη έχουμε

$$\Gamma e^{-kx'} + \Gamma e^{-kx'} = \frac{1}{k} \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{2k} e^{kx'}$$

ενώ $B = \frac{1}{2k} e^{kx'} e^{-2kx'} = \frac{1}{2k} e^{-kx'}$

Άρα $G_L(x,x') = \frac{1}{2k} e^{k(x-x')}$

$G_R(x,x') = \frac{1}{2k} e^{-k(x-x')}$

Άρα $G(x,x') = \begin{cases} \frac{1}{2k} e^{k(x-x')} &, x<x' \\ \frac{1}{2k} e^{-k(x-x')} &, x>x' \end{cases}$

που γράφεται και ως

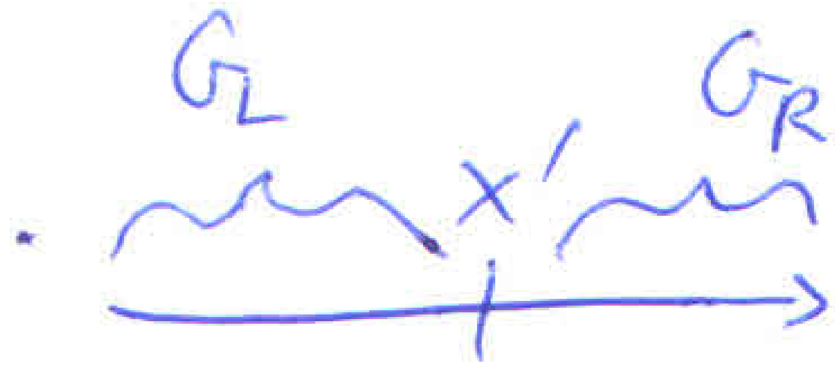
$$G(x,x') = \frac{1}{2k} e^{-k|x-x'|}$$

αφού $|x-x'| = \begin{cases} x'-x &, \text{για } x<x' \\ x-x' &, \text{για } x>x' \end{cases}$

Παράδειγμα 5: Να βρεθεί η συνάρτηση Green του τελεστή $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \quad (k>0)$

με συνοριακή συνθήκη "εξερχόμενου κύματος" στο $x \to \pm\infty$. Δηλαδή ζητάμε να είναι της μορφής e^{ikx} για $x \to \infty$ και e^{-ikx} για $x \to -\infty$.

$$G(x,x') = \begin{cases} G_L(x,x'), & x<x' \\ G_R(x,x'), & x>x' \end{cases}$$



Οι εξισώσεις που ικανοποιούν οι $G_L(x,x')$ και $G_R(x,x')$ είναι

$$G_L'' + k^2 G_L = 0 \Rightarrow G_L(x,x') = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$G_R'' + k^2 G_R = 0 \Rightarrow G_R(x,x') = \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx}$$

Από τις συνοριακές συνθήκες θα έχουμε

$A = 0$ και $\Delta = 0$

Άρα $G_L(x,x') = Be^{-ikx}$ $\quad G_L'(x,x') = -ikBe^{-ikx}$

$G_R(x,x') = \Gamma e^{ikx}$ $\quad G_R'(x,x') = ik\Gamma e^{ikx}$

Από τις συνθήκες συναρμογής θα έχουμε

$x = x'$, $G_L = G_R \Rightarrow Be^{-ikx'} = \Gamma e^{ikx'}$

$x = x'$, $G_R' - G_L' = 1 \Rightarrow ik\Gamma e^{ikx'} + ikBe^{-ikx'} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Gamma e^{ikx'} + Be^{-ikx'} = \frac{1}{ik}$$

Από την πρώτη εξίσωση θα έχουμε

$$B = \Gamma e^{2ikx'}$$

Με αντικατάσταση στη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$\Gamma e^{ikx'} + \Gamma e^{ikx'} = \frac{1}{ik} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma = \frac{1}{2ik} e^{-ikx'}$$

και $B = \frac{1}{2ik} e^{-ikx'} e^{2ikx'} = \frac{1}{2ik} e^{ikx'}$

Άρα $G_L(x,x') = \frac{1}{2ik} e^{-ik(x-x')}$

$$G_R(x,x') = \frac{1}{2ik} e^{ik(x-x')}$$

Οπότε $G(x,x') = \begin{cases} \frac{1}{2ik} e^{-ik(x-x')}, & x<x' \\ \frac{1}{2ik} e^{ik(x-x')}, & x>x' \end{cases}$

ή $G(x,x') = \frac{1}{2ik} e^{ik|x-x'|}$