Η διδιάστατη κυματική εξίσωση – Εξίσωση Helmholtz

Η κυματική εξίσωση σε δύο διαστάσεις έχει τη μορφή

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

όπου σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$u : u(x,y)$$

ενώ σε πολικές συντεταγμένες

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$u : u(\rho,\theta)$$

Θέτουμε $u(x,y,t) = U(x,y)\,T(t)$

Τότε με αντικατάσταση στην κυματική εξίσωση θα έχουμε

$$T(t)\,\nabla^2 U - \frac{1}{c^2}\,U(x,y)\,\frac{d^2T}{dt^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla^2 U}{U(x,y)} = \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{T(t)}\,\frac{d^2T}{dt^2} = \text{σταθερά}$$

Θεωρούμε ότι η σταθερά είναι αρνητική για να μπορούν να ικανοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες που θα δούμε στη συνέχεια. Τότε αν θεωρήσουμε τη σταθερά $-k^2$ (με $k \geq 0$ γενικά)

Τότε

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0$$ Εξίσωση Helmholtz

και $$\frac{d^2T}{dt^2} + k^2c^2\,T(t) = 0$$

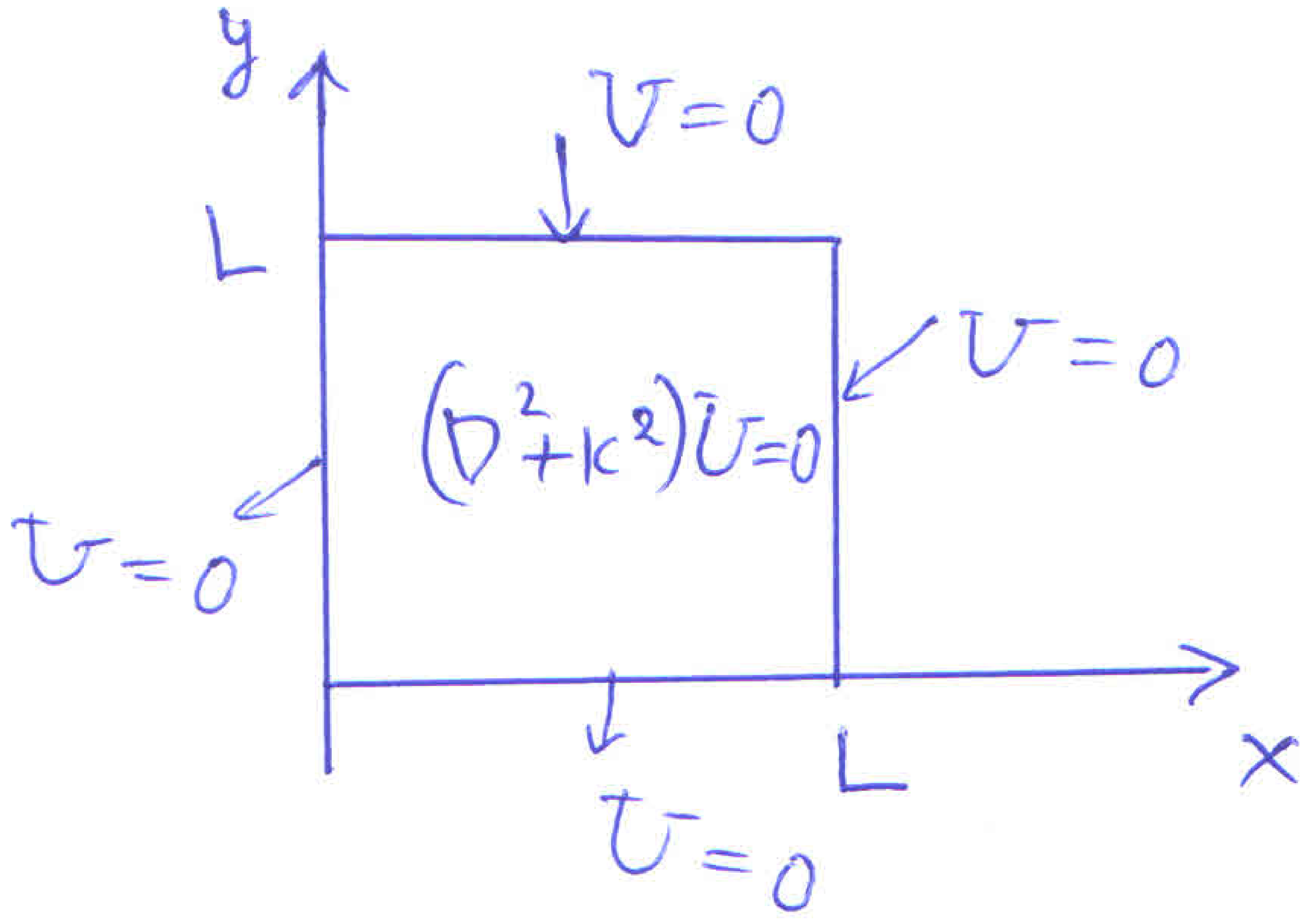
Ορίζουμε $\omega = kc$ και θα έχουμε

$$T(t) = A'\cos(\omega t) + B'\sin(\omega t)$$

Παράδειγμα 1: Η διδιάστατη κυματική εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες: Ταλαντώσεις ενός τετραγωνικού τυμπάνου.

Να λυθεί η κυματική εξίσωση για ένα τετραγωνικό τύμπανο πλευράς L με συνοριακές συνθήκες $U(x,y)\Big|_S = 0$ όπου S η περίμετρος του τυμπάνου. ③

Δηλαδή οι συνοριακές συνθήκες για το πρόβλημα του παρακάτω σχήματος



θα είναι

$$U(0,y) = U(L,y) = 0$$

$$U(x,0) = U(x,L) = 0$$

Για τη λύση της εξίσωσης Helmholtz (4)

θα έχουμε

$$U(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

Τότε με αντικατάσταση στην εξίσωση θα έχουμε

$$Y(y)\frac{d^2X}{dx^2} + X(x)\frac{d^2Y}{dy^2} + k^2 X(x)Y(y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2} - k^2 = \text{σταθερά}$$

Για να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες που για τις συναρτήσεις $X(x)$ και $Y(y)$ θα είναι

$$X(0) = X(L) = 0$$

$$Y(0) = Y(L) = 0$$

θα πρέπει η σταθερά να είναι αρνητική δηλαδή εδώ $-k_x^2$, με k_x θετικό.

Οπότε οι εξισώσεις θα είναι

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + (k^2 - k_x^2) Y(y) = 0$$

Εδώ μπορούμε να θέσουμε

$$k_y^2 = k^2 - k_x^2 \Rightarrow k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Οπότε $$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0$$

Η λύση για την εξίσωση της συνάρτησης $X(x)$ θα είναι

$$X(x) = A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)$$

Η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών θα είναι

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow B\sin(k_x L) = 0 \Rightarrow k_x L = n\pi$$

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Οπότε $k_x = \frac{n\pi}{L}$, με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Άρα $X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$,

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Η λύση για την εξίσωση της συνάρτησης $Y(y)$ θα είναι

$$Y(y) = \Gamma \cos(k_y y) + \Delta \sin(k_y y)$$

Με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών θα είναι

$$Y(0) = 0 \Rightarrow \Gamma = 0$$

$$Y(L) = 0 \Rightarrow \Delta \sin(k_y L) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_y L = m\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_y = \frac{m\pi}{L} \quad \text{με } m = 1, 2, 3, \ldots$$

Οπότε $Y_m(y) = \Delta_m \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)$

με $m = 1, 2, 3, \ldots$

Άρα θα έχουμε

$$U_{n,m}(x,y) = \underbrace{B_n \Delta_m}_{C_{nm}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)$$

με $n,m = 1,2,3,\dots$

Επίσης $T_{n,m}(t) = A'_{nm}\cos(\omega_{nm}t) + B'_{nm}\sin(\omega_{nm}t)$

με $\omega_{nm} = k_{nm}c = \frac{c\pi}{L}\sqrt{n^2+m^2}$

με $n,m = 1,2,3,\dots$

Οπότε οι ειδικές λύσεις θα είναι

$$u_{nm}(x,y,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \cdot$$

$$\left[a_{nm}\cos(\omega_{nm}t) + b_{nm}\sin(\omega_{nm}t)\right]$$

με $n,m = 1,2,3,\dots$

Η γενική λύση της εξίσωσης θα είναι (8)

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[a_{nm} \cos(\omega_{nm} t) + b_{nm} \sin(\omega_{nm} t) \right]$$

Οι συντελεστές a_{nm} και b_{nm} θα υπολογισθούν από τις αρχικές συνθήκες.

Θεωρούμε αρχικές συνθήκες

$$u(x,y,0) = f(x,y)$$

$$u_t(x,y,0) = g(x,y)$$

Τότε $$f(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \overbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)}^{W_{nm}(x,y)}$$

Μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$(W_{nm}, W_{n'm'}) = \int_0^L dx \int_0^L dy \; W_{nm}(x,y) \; W_{n'm'}(x,y) =$$

$$= \int_0^L dx \; \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) \cdot$$

$$\cdot \int_0^L dy \; \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{L}\right) =$$

$$= 0 \quad \text{για} \quad \begin{matrix} n \neq n' \\ \text{ή} \\ m \neq m' \end{matrix}$$

Ενώ

$$(W_{nm}, W_{nm}) = \int_0^L dx \int_0^L dy \, \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{m\pi y}{L}\right) =$$

$$= \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \int_0^L \sin^2\left(\frac{m\pi y}{L}\right) dy = \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{L^2}{4}$$

Οπότε $\quad a_{nm} = \dfrac{(W_{nm}, f)}{(W_{nm}, W_{nm})}$

Άρα $$a_{nm} = \frac{4}{L^2} \int_0^L dx \int_0^L dy\, f(x,y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)$$

Επίσης

$$u_t(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} w_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[-a_{nm} \sin(\omega_{nm} t) + b_{nm} \cos(\omega_{nm} t) \right]$$

Οπότε

$$u_t(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} \omega_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) =$$

$$= g(x,y)$$

Οπότε $$\omega_{nm} b_{nm} = \frac{(W_{nm}, g)}{(W_{nm}, W_{nm})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b_{nm} = \frac{4}{\omega_{nm} L^2} \int_0^L dx \int_0^L dy\, g(x,y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)$$

Παράδειγμα 2: Η διδιάστατη κυματική εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες: Ταλαντώσεις ενός κυκλικού τυμπάνου.

Σκοπός είναι να επιλύσουμε την κυματική εξίσωση εντός ενός κυκλικού τυμπάνου ακτίνας a με συνοριακές συνθήκες

$$U\Big|_{S} = 0$$

S: Περίμετρος του κυκλικού τυμπάνου

Θα ξεκινήσουμε με την επίλυση της εξίσωσης Helmholtz

Σε πολικές συντεταγμένες

$$U : U(\rho, \theta)$$

Οπότε $\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2\right) U(\rho,\theta) = 0$

με $\rho < a$

Θέτουμε $U(\rho,\theta) = R(\rho)\,\Theta(\theta)$

Οπότε

$$\Theta(\theta)\rho^2 \frac{d^2R}{d\rho^2} + \Theta(\theta)\rho\frac{dR}{d\rho} + R(\rho)\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \rho^2k^2\Theta(\theta)R(\rho)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R(\rho)}\left(\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \rho^2k^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \text{σταθερά}$$

Εδώ για να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη περιοδικότητας

$$\Theta(\theta) = \Theta(\theta+2\pi)$$

θα πρέπει η σταθερά να είναι θετική ή είναι μηδέν, έστω σταθερά $= \nu^2$ με $\nu \geq 0$.

Τότε

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} + (\rho^2k^2 - \nu^2)R(\rho) = 0$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \nu^2\Theta(\theta) = 0$$

Όπως έχουμε ήδη αναλύσει σε προηγούμενο παράδειγμα η συνθήκη περιοδικότητας οδηγεί σε $\nu = n$, με $n = 0, 1, 2, \ldots$

Άρα $\Theta_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$

με $n = 0, 1, 2, \ldots$

Η ακτινική εξίσωση θα είναι

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (k^2\rho^2 - n^2) R(\rho) = 0$$

Θυμίζουμε ότι η εξίσωση Bessel n τάξεως

είναι της μορφής

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y(x) = 0$$

που έχει λύση τις συναρτήσεις Bessel

πρώτου είδους $J_n(x)$.

Η παραπάνω ακτινική εξίσωση μπορεί να

γραφτεί ως

$$k^2\rho^2 \frac{d^2 R}{d(k\rho)^2} + k\rho \frac{dR}{d(k\rho)} + \left[(k\rho)^2 - n^2\right] R = 0$$

Επίσης, μια επιπλέον συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η λύση, είναι ότι η λύση θα πρέπει να είναι πεπερασμένη για $\rho=0$ (δηλαδή να την απειρίζεται στο $\rho=0$).

Η λύση $$R_n(\rho) = J_n(k\rho)$$

με $n=0,1,2,\ldots$

που προκύπτει από την μορφή της ακτινικής εξίσωσης ικανοποιεί και την συνοριακή συνθήκη της πεπερασμένης λύσης για $\rho=0$.

Η ακτινική λύση θα πρέπει να ικανοποιεί και την συνοριακή συνθήκη

$$U(\rho,\theta)\Big|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow R(ka)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_n(ka)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ka = x_{nm}$$ m-οστή ρίζα της συνάρτησης Bessel n τάξεως

με $n=0,1,2,\ldots$ ή $k_{nm}=\dfrac{x_{nm}}{a}$
$m=1,2,3,\ldots$

Σειρά της ρίζας	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$
1	2.4048	3.8317	5.1356
2	5.5201	7.0156	8.4172
3	8.6537	10.1735	11.6198
4	11.7915	13.3237	14.7960
5	14.9309	16.4706	17.9598

Οπότε $R_{nm}(\rho) = J_n\left(x_{nm}\frac{\rho}{a}\right)$

με $n = 0, 1, 2, \ldots$

$m = 1, 2, 3, \ldots$

Οπότε

$$U_{nm}(\rho,\theta) = J_n\left(x_{nm}\frac{\rho}{a}\right)\left[A_{nm}\cos(n\theta) + B_{nm}\sin(n\theta)\right]$$

με $n = 0, 1, 2, \ldots$

$m = 1, 2, 3, \ldots$

Η λύση αυτή θα συνδυαστεί με την χρονική συνάρτηση $T(t)$ για να βρούμε την γενική λύση $u(\rho,\theta,t)$.

Θεωρούμε ως αρχικές συνθήκες τις

$$u(\rho,\theta,0) = f(\rho)$$
$$u_t(\rho,\theta,0) = 0$$

Τότε η λύση για την χρονική συνάρτηση $T(t)$ θα είναι

$$T_{nm}(t) = A'_{nm}\cos(\omega_{nm}t)$$

όπου $\omega_{nm} = \frac{c}{a}x_{nm}$

Οπότε η γενική λύση θα είναι

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(x_{nm}\frac{\rho}{a}\right)\cdot$$
$$\cdot\left[a_{nm}\cos(n\theta) + b_{nm}\sin(n\theta)\right]\cos(\omega_{nm}t)$$

Με εφαρμογή της αρχικής συνθήκης $u(\rho,\theta,0) = f(\rho)$ θα έχουμε

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(x_{nm}\frac{\rho}{a}\right)\left[a_{nm}\cos(n\theta) + b_{nm}\sin(n\theta)\right]$$

Αφού δεν υπάρχει γωνιακή εξάρτηση στην αρχική συνθήκη , τότε

$$a_{nm} = 0 \quad \text{για} \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots$$
$$b_{nm} = 0$$

Άρα $$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{om} J_0\left(x_{om} \frac{\rho}{a}\right)$$

όπου $$a_{om} = \frac{(J_0(k_m \rho), f(\rho))}{(J_0(k_m\rho), J_0(k_m \rho))}$$

όπου $k_m = \dfrac{x_{om}}{a}$

Που δίνει $$c_m = a_{om} = \frac{\int_0^a \rho J_0(k_m \rho) f(\rho) d\rho}{\int_0^a \rho J_0^2(k_m \rho) d\rho}$$

Οπότε
$$u = u(\rho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(x_{om} \frac{\rho}{a}\right) \cos(w_{om} t)$$

Παράδειγμα : Διδιάστατη εξίσωση αγωγής θερμότητας

Να λυθεί η διδιάστατη εξίσωση αγωγής θερμότητας σε μια ορθογώνια επίπεδη λεπτή πλάκα που βρίσκεται στο επίπεδο xy.

Η εξίσωση θα έχει τη μορφή

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$0 \leq x \leq a \,,\; 0 \leq y \leq b$ $\qquad u : u(x,y,t)$

$$\left.\begin{aligned} u(0,y,t) &= u(a,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) &= u(x,b,t) = 0 \end{aligned}\right] \text{ Συνοριακές συνθήκες}$$

$u(x,y,0) = f(x,y)$ Αρχική συνθήκη

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$u(x,y,t) = U(x,y)\,T(t)$$

Τότε $\quad T(t)\,\nabla^2 U = U(x,y)\,\dfrac{dT}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\nabla^2 U}{U(x,y)} = \frac{1}{T(t)} \frac{dT}{dt} = \text{σταθερά}$$

Για να ικανοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες η σταθερά θα πρέπει να είναι αρνητική, έστω σταθερά $= -k^2$ με $k > 0$. Τότε

$$\nabla^2 U + k^2 U(x,y) = 0$$

$$\frac{dT}{dt} = -k^2 T(t) \Rightarrow T(t) = C e^{-k^2 t}$$

Για τη λύση της εξίσωσης Helmholtz θα έχουμε

$$U(x,y) = X(x) Y(y)$$

Με αντικατάσταση θα έχουμε (ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το Παράδειγμα 1)

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0$$

με $k^2 = k_x^2 + k_y^2$

Οι συνοριακές συνθήκες θα είναι

$$X(0) = X(a) = 0$$

$$Y(0) = Y(b) = 0$$

Οπότε $X(x) = A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)$

$$Y(y) = \Gamma\cos(k_y y) + \Delta\sin(k_y y)$$

και έτσι εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες

παίρνουμε $X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$$X(a) = 0 \Rightarrow B\sin(k_x a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$Y(0) = 0 \Rightarrow \Gamma = 0$$

$$Y(b) = 0 \Rightarrow \Delta\sin(k_y b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_y = \frac{m\pi}{b}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Άρα $\quad V_{nm}(x,y) = \overset{B_n \Delta_m}{\overset{\shortparallel}{E_{nm}}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$

με $\quad n,m = 1,2,3,\dots$

Οπότε θα έχουμε $\quad k_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$

με $n,m = 1,2,3,\dots$

και

$$T_{nm}(t) = S'_{nm}\, e^{-k_{nm}^2 t}$$

Άρα η γενική λύση θα είναι

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cdot e^{-k_{nm}^2 t}$$

Άρα με εφαρμογή της αρχικής συνθήκης θα είναι

$$u(x,y,0) = f(x,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \overbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)}^{W_{nm}(x,y)}$$

Έτσι θα έχουμε

$$a_{nm} = \frac{(W_{nm}, f)}{(W_{nm}, W_{nm})}$$

όπου

$$(W_{nm}, f) = \int_0^a dx \int_0^b dy \, \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) f(x,y)$$

$$(W_{nm}, W_{nm}) = \int_0^a dx \int_0^b dy \, \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right) =$$

$$= \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \sin^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy =$$

$$= \frac{ab}{4}$$

Άρα $$a_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b dy \, f(x,y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

Παράδειγμα: Πρόβλημα Dirichlet σε κύβο.

Το πρόβλημα αυτό αφορά την εξίσωση Laplace $\nabla^2 u = 0 \quad u: u(x,y,z)$

ή $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

για $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$, $0 \le z \le \pi$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(0,y,z) = 0$$
$$u(\pi,y,z) = f(y,z)$$
$$u(x,0,z) = u(x,\pi,z) = 0$$
$$u(x,y,0) = u(x,y,\pi) = 0$$

Έστω ότι οι λύσεις είναι της μορφής

$$u(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

Τότε με αντικατάσταση στην εξίσωση θα έχουμε

$$Y(y)Z(z)\frac{d^2X}{dx^2} + X(x)Z(z)\frac{d^2Y}{dy^2} + X(x)Y(y)\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} = \text{σταθερά}$$

Οι ομογενείς συνοριακές συνθήκες του προβλήματος θα είναι

$$X(0) = 0$$

$$Y(0) = Y(\pi) = 0$$

$$Z(0) = Z(\pi) = 0$$

Για να ικανοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες για τη συνάρτηση $Z(z)$ θα πρέπει η σταθερά να είναι θετική. Έστω σταθερά $= k_z^2$ με $k_z > 0$ τότε

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2} = k_z^2$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 Z(z) = 0$$

Από την πρώτη εξίσωση θα έχουμε

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} - k_z^2 = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2} = \text{σταθερά}$$

και εδώ η σταθερά θα πρέπει να είναι θετική για να ικανοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες για τη συνάρτηση $Y(y)$. Έστω σταθερά $= k_y^2$ με $k_y > 0$.

Τότε

$$\frac{d^2X}{dx^2} - (k_y^2 + k_z^2)\,X(x) = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2\,Y(y) = 0$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις θα έχουμε

$$Y(y) = A\cos(k_y y) + B\sin(k_y y)$$

Και με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών

$Y(0) = 0$, $Y(\pi) = 0$ θα έχουμε

$A = 0$ και $k_y \pi = n\pi$, με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Άρα $k_y = n$ και $Y_n(y) = B_n \sin(ny)$

Επίσης $Z(z) = \Gamma \cos(k_z z) + \Delta \sin(k_z z)$

όπου με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών

θα έχουμε $Z(0) = 0$, $Z(\pi) = 0$

και παίρνουμε $\Gamma = 0$ και

$k_z \pi = m\pi$, με $m = 1, 2, 3, \ldots$

Οπότε $k_z = m$ και $Z_m(z) = \Delta_m \sin(mz)$

Τέλος η εξίσωση για την $X(x)$ θα είναι

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - (n^2 + m^2) X(x) = 0$$

με λύση

$$X_{nm}(x) = E_{nm} \cosh\left(\sqrt{n^2+m^2}\, x\right) + Z_{nm} \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\, x\right)$$

Με εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης

$X(0)=0$ είναι $E_{nm}=0$, άρα

$$X_{nm}(x) = Z_{nm} \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\, x\right)$$

με $n,m = 1,2,3,\ldots$

Οπότε η γενική λύση θα είναι

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\, x\right) \sin(ny) \sin(mz)$$

Το a_{nm} θα υπολογισθεί από τη συνοριακή συνθήκη $u(\pi,y,z) = f(y,z)$, δηλαδή από τη μη-ομογενή συνοριακή συνθήκη,

άρα

$$f(y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\, \pi\right) \sin(ny) \sin(mz)$$

Οπότε θα έχουμε

$$a_{nm} \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\, \pi\right) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} dy \int_0^{\pi} dz\, f(y,z) \sin(ny) \sin(mz)$$

Δηλαδή

$$a_{nm} = \frac{4}{\pi^2 \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\,\pi\right)} \int_0^{\pi} dy \int_0^{\pi} dz\, f(y,z) \sin(ny) \sin(mz)$$