Μη-ομογενείς συνοριακές συνθήκες -

- Μη-ομογενείς εξισώσεις -

- Προβλήματα σε άπειρα χωρία.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί η εξίσωση αγωγής θερμότητας

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad u: u(x,t)$$

στο διάστημα $0 \le x \le L$ με συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t) = T_0 \qquad \text{για } t > 0$$

$$u(L,t) = T_1$$

$$u(x,0) = f(x)$$

Γράφουμε τη λύση στη μορφή

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x)$$

όπου η συνάρτηση $v(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση αγωγής θερμότητας σε στάσιμη κατάσταση, δηλαδή για $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \qquad 0 \le x \le L$$ (2)

ενώ ταυτόχρονα ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $v(0) = T_1$ και $v(L) = T_1$.

Τότε η συνάρτηση $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$ ικανοποιεί, με αντικατάσταση της λύσης στην αρχική εξίσωση, την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

αλλά και με αντικατάσταση στις συνθήκες έχουμε

$$w(0,t) = 0$$

$$w(L,t) = 0$$

$$w(x,0) = f(x) - v(x) \equiv g(x)$$

Όπως παρατηρούμε η εξίσωση που ικανοποιεί η $w(x,t)$ είναι ίδια με την αρχική εξίσωση (εξίσωση αγωγής θερμότητας), ενώ οι συνοριακές συνθήκες για την $w(x,t)$ είναι ομογενείς, και μάλιστα την λύση της εξίσωσης αυτής, με αυτές τις συνοριακές συνθήκες την έχουμε επιλύσει.

Για την συνάρτηση $v(x)$ θα έχουμε

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = A \Rightarrow v(x) = Ax + B$$

Με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών έχουμε

$$v(0) = T_0 \Rightarrow B = T_0$$

$$v(L) = T_1 \Rightarrow A \cdot L + T_0 = T_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AL = T_1 - T_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{T_1 - T_0}{L}$$

Οπότε $v(x) = T_0 + \frac{(T_1 - T_0)}{L} x$

Η συνάρτηση $w(x,t)$ έχει συζητηθεί σε παλιότερο παράδειγμα και θα έχει τη μορφή

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t}$$

Οπότε από την αρχική συνθήκη

$$w(x,0) = f(x) - v(x) = g(x)$$

θα έχουμε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

άρα $$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - v(x)]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Ας πάρουμε την συγκεκριμένη περίπτωση που $f(x)=0$, δηλαδή εάν η αρχική συνθήκη για την συνάρτηση $u(x,t)$ ήταν $u(x,0)=0$, τότε θα

έχουμε

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[-T_0 - \frac{(T_1 - T_0)}{L}x\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Αν κάνουμε το ολοκλήρωμα (έχουμε κάνει πολλά παρόμοια, κάντε το για εξάσκηση)

$$a_n = -\frac{2}{n\pi}\left[T_0 - T_1(-1)^n\right]$$

με $n = 1, 2, 3, \ldots$

Οπότε η λύση θα είναι

$$u(x,t) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_0 - T_1(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} +$$

$$+ T_0 + (T_1 - T_0)\frac{x}{L}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να λυθούν και προβλήματα της μονοδιάστατης εξίσωσης αγωγής θερμότητας με άλλες συνοριακές συνθήκες.

Δείτε, π.χ. το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 2: Να λυθεί η εξίσωση αγωγής θερμότητας

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad u : u(x,t)$$

$x \in [0, L]$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t) = T_0 \qquad t>0$$

$$u_x(L,t) = 0$$

και αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = f(x).$$

Έστω ότι $u(x,t) = w(x,t) + v(x)$

Όπου η $v(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

και τις συνοριακές συνθήκες $v(0) = T_0$ και

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=L} = 0 .$$

Τότε $v(x) = Ax + B$ όπου με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών θα έχουμε

$$v(0) = T_0 \Rightarrow B = T_0$$

$$\frac{dv}{dx} = A \;, \quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=L} = 0 \Rightarrow A = 0$$

Άρα $v(x) = T_0$

Επίσης η συνάρτηση $W(x,t)$ θα ικανοποιεί την αρχική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

με ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$w(0,t) = 0 \qquad w_x(0,t) = 0$$

και αρχική συνθήκη

$$W(x,0) = f(x) - v(x) = f(x) - T_0 = g(x)$$

Η εξίσωση θα λυθεί με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών.

Θα έχουμε $\quad W(x,t) = X(x)\,T(t)$ όπου

$$T(t)\,X''(x) = X(x)\,\dot{T}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \text{σταθερά}$$

Η σταθερά θα πρέπει να είναι αρνητική για να ικανοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες, οπότε την διαλέγουμε $-k^2$ με $k>0$.

Έτσι θα έχουμε

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0$$

$$\dot{T}(t) = -k^2 T(t)$$

Άρα $T(t) = c\, e^{-k^2 t}$

και $X(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)$

όπου με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών θα έχουμε $c_1 = 0$ και

$$k c_2 \cos(kL) = 0 \Rightarrow kL = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

με $n = 0, 1, 2, \ldots$

Άρα $k_n = (2n+1)\dfrac{\pi}{2L}$, με $n = 0, 1, 2, \ldots$

Άρα $X_n(x) = c_{2n} \sin\left[\dfrac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]$

$$T_n(t) = c_n\, e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Άρα $W(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$

Υπενθυμίζω ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα το έχουμε λύση ως άσκηση.

Με εφαρμογή της αρχικής συνθήκης θα έχουμε

$$W(x,0) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]$$

όπου $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] dx =$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - T_0] \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] dx$$

με $n = 0, 1, 2, \ldots$

Έστω ότι η αρχική συνθήκη είναι $u(x,0) = T_1$, τότε $f(x) = T_1$.

Οπότε θα έχουμε

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L (T_1 - T_0)\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]dx =$$

$$= (T_1 - T_0)\frac{4}{\pi(2n+1)}$$

Άρα

$$W(x,t) = \frac{4(T_1 - T_0)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

και $u(x,t) = T_0 + W(x,t) =$

$$= T_0 + \frac{4(T_1 - T_0)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Παράδειγμα 3: Να επιλυθεί η μονοδιάστατη μη-ομογενής εξίσωση αγωγής θερμότητας

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad u: u(x,t)$$

$x \in [0,1]$

με συνοριακές συνθήκες

11

$u(0,t) = A$

$u(1,t) = B \qquad t > 0$

και αρχική συνθήκη

$u(x,0) = 0$

Πέρα από τις μη-ομογενείς συνοριακές συνθήκες και η μορφή της εξίσωσης που είναι μη-ομογενής δημιουργεί πρόβλημα μια και δεν οδηγεί σε χωριζόμενες εξισώσεις. Π.χ. εαν θέσουμε $u(x,t) = X(x)T(t)$

τότε

$$T(t) \quad X''(x) + \gamma = X(x)\,\dot{T}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{\gamma}{X(x)T(t)} = \frac{\dot{T}(t)}{T(t)}$$

άρα δεν είναι διαχωρίσιμη.

Θα χειριστούμε το πρόβλημα αυτό όπως τα προηγούμενα δύο παραδείγματα.

Έστω $\quad u(x,t) = w(x,t) + v(x)$

Μετά την αντικατάσταση θα έχουμε

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{d^2 v}{dx^2} + \gamma = \frac{\partial w}{\partial t}$$

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $v(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{d^2 v}{dx^2} + \gamma = 0$

οπότε η $w(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

που δεν είναι άλλη από την ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση αγωγής θερμότητας.

Επίσης από τις συνοριακές συνθήκες θα έχουμε

$$u(0,t) = w(0,t) + v(0) = A$$

$$u(1,t) = w(1,t) + v(1) = B$$

Θεωρούμε ότι

$$v(0) = A \quad , \quad v(1) = B$$

Άρα $w(0,t)=0$

$w(1,t)=0$

Τέλος από την αρχική συνθήκη θα έχουμε

$u(x,0) = v(x) + w(x,0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow w(x,0) = -v(x)$

Οπότε συνοψίζοντας θα έχουμε

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\gamma$$

$v(0) = A \quad , \quad v(1) = B$

Άρα $\dfrac{dv}{dx} = -\gamma x + c_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v(x) = -\frac{\gamma x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

Με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών θα έχουμε

$v(0) = A \Rightarrow c_2 = A$

Άρα $v(x) = -\dfrac{\gamma x^2}{2} + c_1 x + A$

Επίσης $v(1) = -\frac{\gamma}{2} + c_1 + A = B \Rightarrow$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\gamma}{2} + B - A$$

Οπότε $v(x) = -\frac{\gamma}{2}x^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + B - A\right)x + A$

Επίσης, για την συνάρτηση $w(x,t)$ έχουμε

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$w(0,t) = 0 \qquad w(1,t) = 0$$

$$w(x,0) = -v(x)$$

Η λύση της εξίσωσης θα είναι

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2 t}$$

Έτσι με εφαρμογή της αρχικής συνθήκης

θα έχουμε

$$w(x,0) = -v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$$

Έτσι $a_n = -2 \int_0^1 v(x) \sin(n\pi x)\, dx =$

$$= 2 \int_0^1 \left[\frac{\gamma}{2} x^2 - \left(\frac{\gamma}{2} + B - A \right) x - A \right] \sin(n\pi x)\, dx =$$

$$= \frac{2\gamma}{n^3 \pi^3} \left[(-1)^n - 1 \right] - \frac{2}{n\pi} \left[A - (-1)^n B \right]$$

Κάντε το παραπάνω ολοκλήρωμα για εξάσκηση.

Οπότε τελικά η λύση θα είναι

$$u(x,t) = -\frac{\gamma}{2} x^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + B - A \right) x + A +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2\gamma}{n^3 \pi^3} \left[(-1)^n - 1 \right] - \frac{2}{n\pi} \left[A - (-1)^n B \right] \right\} \cdot$$

$$\cdot \sin(n\pi x)\, e^{-n^2 \pi^2 t}$$

Άσκηση: Χρησιμοποιήστε την παραπάνω διαδικασία για να επιλύσετε την εξίσωση $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h$ $\quad u: u(x,t)$

στο διάστημα $x \in [0, L]$ με συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t)=0 \quad , \quad u(L,t)=0$$

και αρχικές συνθήκες

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u_t(x,0)=0$$

Η λύση που πρέπει να βρείτε είναι

$$u(x,t) = \frac{hx}{2c^2}(L-x) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4L^2h}{c^2\pi^3}\right) \cdot$$

$$\cdot \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right] \cdot \cos\left[\frac{(2n+1)\pi c t}{L}\right]$$

Παράδειγμα 4: Να λυθεί η εξίσωση αγωγής θερμότητας $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ $\quad u: u(x,t)$

στο διάστημα $-\infty < x < \infty$

Με συνοριακή συνθήκη η λύση να είναι παντού πεπερασμένη (και στό άπειρο)

και αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = f(x)$$

Θέτουμε $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

Με αντικατάσταση θα έχουμε

$$X''(x)\,T(t) = X(x)\,\dot{T}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \text{σταθερά}$$

Η σταθερά θα πρέπει να είναι αρνητική ή μηδέν για να έχουμε λύσεις που να είναι πεπερασμένες παντού. Έστω η σταθερά να είναι $-k^2$ με $k \geq 0$

τότε $X''(x) + k^2 X(x) = 0$

$$\dot{T}(t) = -k^2 T(t)$$

Οπότε $X(x) = A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$

πεπερασμένα παντού

$$T(t) = C_k' e^{-k^2 t}$$

$$u_k(x,t) = \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right] e^{-k^2 t}$$

$k \to$ συνεχής δείκτης στο διάστημα $k \geq 0$.

Η γενική λύση θα είναι ένα "συνεχές άθροισμα", δηλαδή ολοκλήρωμα ως προς k,

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \left[a(k)\cos(kx) + b(k)\sin(kx) \right] \cdot e^{-k^2 t}\, dx$$

Η λύση μπορεί να γραφτεί και ως

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, e^{ikx}\, e^{-k^2 t}\, dk$$

Με εφαρμογή της αρχικής συνθήκης θα έχουμε

$$u(x,0) = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, e^{ikx}\, dk$$

Θυμίζω τις σχέσεις του μετασχηματισμού Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{ikx}\, dk$$ Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$ Μετασχηματισμός Fourier

Οπότε στην περίπτωση μας θα έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\sqrt{2\pi}\, C(k)}_{\tilde{f}(k)}\, e^{ikx}\, dk$$

Άρα $\sqrt{2\pi}\, C(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ότι

$$f(x) = \delta(x)$$

Τότε $C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}$

Άρα $u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - k^2 t}\, dk$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται με την μεθοδολογία που χρησιμοποιήσαμε σε παλιότερη διάλεξη για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier Γκαουσιανής συνάρτησης.

Συγκεκριμένα, από τον εκθέτη θα έχουμε

$$ikx - k^2 t = -t\left(k - \frac{ix}{2t}\right)^2 - \frac{x^2}{4t}$$

Οπότε $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(k-\frac{ix}{2t}\right)^2} e^{-\frac{x^2}{4t}}\, dk =$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(k-\frac{ix}{2t}\right)^2}\, dk$$

Θέτουμε $y = k - \frac{ix}{2t}$ $\quad dy = dk \quad$ $k \to \infty, y \to \infty$, $\ k \to -\infty, y \to -\infty$

Άρα $u(x,t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty^2}\, dy$

Επίσης αφού $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ με $\lambda > 0$

Παίρνουμε $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$