Παράδειγμα 4: Εγκάρσια ταλάντωση δοκού. ①

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \qquad u : u(x,t)$$

$x \in [0, L]$

Συνοριακές συνθήκες $u(0,t) = u(L,t) = 0$

$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(L,t) = 0$

Αρχικές συνθήκες $u(x,0) = f(x)$

$u_t(x,0) = g(x)$

Έστω $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση θα έχουμε

$$X(x)\frac{d^2T}{dt^2} + a^2 T(t)\frac{d^4X}{dx^4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2 T(t)}\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{1}{X(x)}\frac{d^4X}{dx^4} = \text{σταθερά}$$

Πριν προχωρήσουμε, ας δούμε το πρόσημο της σταθεράς.

Έστω ότι η σταθερά είναι θετική, τότε (2)

$$-\frac{1}{X(x)}\frac{d^4X}{dx^4} = \lambda^4 \Rightarrow$$ (με $\lambda>0$ για απλότητα)

$$\Rightarrow X''''(x) + \lambda^4 X(x) = 0$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$X(0) = X(L) = 0$$

$$X''(0) = X''(L) = 0$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $X(x) = e^{\rho x}$

Τότε $-\rho^4 = \lambda^4 \Rightarrow \rho^4 = -\lambda^4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho = (-1)^{1/4}\lambda,\ -(-1)^{1/4}\lambda,\ (-1)^{3/4}\lambda,\ -(-1)^{3/4}\lambda \text{ ή}$$

$$\rho = (0.707+0.707i)\lambda, (-0.707-0.707i)\lambda,$$

$$(-0.707+0.707i)\lambda,\ (0.707-0.707i)\lambda$$

Οι παραπάνω λύσεις έχουν ένα καθαρά εκθετικό μέρος και ένα ταλαντωτικό μέρος και δεν ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. Οπότε η σταθερά δεν μπορεί να είναι θετική.

Έστω ότι η σταθερά είναι μηδέν, τότε (3)

$$\frac{1}{\bar{X}(x)} \frac{d^4 \bar{X}}{dx^4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{X}(x) = Ax^3 + Bx^2 + \Gamma x + \Delta$$

Από τις συνοριακές συνθήκες θα έχουμε

$$\bar{X}(0) = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

$$\bar{X}(L) = 0 \Rightarrow AL^3 + BL^2 + \Gamma L = 0 \quad (1)$$

$$\bar{X}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + \Gamma$$

$$\bar{X}''(x) = 6Ax + 2B$$

$$\bar{X}''(0) = 0 \Rightarrow 2B = 0 \Rightarrow B = 0$$

Οπότε $\bar{X}(x) = Ax^3 + \Gamma x$

$$\bar{X}''(L) = 0 \Rightarrow 6AL = 0 \Rightarrow A = 0$$

Άρα από την εξίσωση (1) θα έχουμε $\Gamma = 0$.

Οπότε $\bar{X}(x) = 0$ (τετριμμένη λύση), άρα και η σταθερά δεν μπορεί να είναι μηδέν.

Οπότε μένει η περίπτωση που η σταθερά είναι αρνητική. Τότε

$$-\frac{1}{X(x)}\frac{d^4X}{dx^4} = -\lambda^4 \Rightarrow \quad (\text{με } \lambda>0)$$

$$\Rightarrow \quad X''''(x) - \lambda^4 X(x) = 0$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $X(x) = e^{\rho x}$

$$\rho^4 - \lambda^4 = 0 \Rightarrow \rho = \lambda, -\lambda, i\lambda, -i\lambda$$

Οπότε η λύση θα είναι

$$X(x) = S_1 e^{\lambda x} + S_2 e^{-\lambda x} + S_3 e^{i\lambda x} + S_3 e^{-i\lambda x}$$

$$\text{ή } X(x) = A\cosh(\lambda x) + B\sinh(\lambda x) + \Gamma\cos(\lambda x) + \Delta\sin(\lambda x)$$

$$X'(x) = \lambda A\sinh(\lambda x) + \lambda B\cosh(\lambda x) - \lambda\Gamma\sin(\lambda x) + \lambda\Delta\cos(\lambda x)$$

$$X''(x) = \lambda^2 A\cosh(\lambda x) + \lambda^2 B\sinh(\lambda x) -$$

$$-\lambda^2\Gamma\cos(\lambda x) - \lambda^2\Delta\sin(\lambda x)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες θα έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} X(0)=0 \Rightarrow \quad A+\Gamma=0 \\ X''(0)=0 \Rightarrow \quad \lambda^2(A-\Gamma)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\Gamma=0$$

Επίσης

$$X(L)=0 \Rightarrow \quad B\sinh(\lambda L)+\Delta\sin(\lambda L)=0 \quad (2)$$

$$X''(L)=0 \Rightarrow \quad \lambda^2 B\sinh(\lambda L)-\lambda^2\Delta\sin(\lambda L)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad B\sinh(\lambda L)-\Delta\sin(\lambda L)=0 \quad (3)$$

Αν προσθέσουμε τις εξισώσεις (2) και (3) θα έχουμε $2B\sinh(\lambda L)=0 \Rightarrow B=0$ αφού $\sinh(\lambda L)\neq 0$

Αν αφαιρέσουμε τις εξισώσεις (2) και (3) θα έχουμε $2\Delta\sin(\lambda L)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin(\lambda L)=0 \Rightarrow \lambda L=n\pi \ , \text{ με } n=1,2,3,\ldots$$

Οπότε $\lambda=\dfrac{n\pi}{L}$, με $n=1,2,3,\ldots$

Άρα $X_n(x)=\Delta_n\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$, με $n=1,2,3,\ldots$

Η εξίσωση για τη μεταβλητή $T(t)$ θα είναι

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\lambda^4 a^2 T(\cancel{t}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2T}{dt^2} + a^2\lambda^4 T(t) = 0$$

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$T(t) = E\cos(a\lambda^2 t) + Z\sin(a\lambda^2 t)$$

Οπότε

$$T_n(t) = E_n \cos\left[a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] + Z_n \sin\left[a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right]$$

Οπότε οι ειδικές λύσεις θα είναι

$$u_n(x,t) = \Delta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \left\{ E_n \cos\left[a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] + Z_n \sin\left[a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] \right\} =$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left\{ a_n \cos\left[a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] + b_n \sin\left[a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] \right\}, \quad \mu\varepsilon \quad n = 1,2,3,\dots$$

Οπότε η γενική λύση θα είναι

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left\{ a_n \cos\left[a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] + \right.$$

$$\left. + b_n \sin\left[a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] \right\}$$

Οπότε μένει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a_n, b_n.

Από τις αρχικές συνθήκες θα έχουμε

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\, dx$$

Επίσης

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ -a_n \sin\left[a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] + b_n \cos\left[a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] \right\}$$

Οπότε αφού $u_t(x,0)=g(x) \Rightarrow$ ⑧

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) g(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{aL}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) g(x)\,dx$$

Άσκηση 1: Να λυθεί η μονοδιάστατη εξίσωση αγωγής θερμότητας

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad u : u(x,t)$$

$x \in [0, L]$

με συνοριακές συνθήκες

$u(0,t)=0 \quad , \quad u_x(L,t)=0$

και αρχική συνθήκη

$u(x,0) = T_0$.

Λύση

Έχουμε $u(x,t) = X(x)T(t)$ θα έχουμε

$$X(x)\frac{dT}{dt} = T(t)\frac{d^2X}{dx^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T(t)}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = \text{σταθερά}$$

Και εδώ η σταθερά θα πρέπει να είναι αρνητική για να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες $X(0)=0$ και $X'(L)=0$

Επιλέγω τη σταθερά $-\lambda$ (με $\lambda>0$), οπότε οι εξισώσεις μας θα γίνουν

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda\, T(t) \Rightarrow T(t) = c_1 e^{-\lambda t}$$

Επίσης $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

Θέτω $\lambda = k^2$ και θα έχω λύση

$$X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Από τις συνοριακές συνθήκες θα έχουμε

$X(0)=0 \Rightarrow A=0$, άρα $X(x) = B\sin(kx)$

$X'(x) = Bk\cos(kx)$

Έτσι από τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη θα πάρουμε

$X'(L)=0 \Rightarrow Bk\cos(kL)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow kL = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, με $n=0,1,2,\ldots$

$\Rightarrow k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L} = \frac{m\pi}{2L}$, με m περιττό.

Οπότε

$X_n(x) = B_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] =$ $n=0,1,2,\ldots$

ή $X_m(x) = B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)$ με m περιττό

και $T_n(t) = C_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$, με $n=0,1,2,\ldots$

ή $T_m(t) = C_m e^{-\frac{m^2\pi^2}{4L^2}t}$, με m περιττό.

Οπότε οι ειδικές λύσεις θα είναι

$$u_n(x,t) = \underbrace{B_n\, \delta_n'}_{a_n} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

με $n = 0, 1, 2, \ldots$

ή

$$u_m(x,t) = a_m \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2}{4L^2}t}$$

με m περιττό

Άρα η γενική λύση θα είναι

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t} =$$

$$= \sum_{m:\text{περιττό}} a_m \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Με εφαρμογή των αρχικών συνθηκών θα έχουμε

$$u(x,0) = f(x) = T_0 \Rightarrow$$

(11)

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\left(\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right], f(x)\right)}{\underbrace{\left(\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right], \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]\right)}_{\frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] f(x)\,dx =$$

$$= \frac{2T_0}{L}\int_0^L \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] dx =$$

$$= \frac{2T_0}{L}\left[-\frac{2L}{(2n+1)\pi}\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]\Bigg|_0^L =$$

$$= -\frac{4T_0}{(2n+1)\pi}\left[\underbrace{\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\right]}_{0} - \underbrace{\cos 0}_{1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4T_0}{(2n+1)\pi}$$

Οπότε θα έχουμε

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4T_0}{(2n+1)\pi} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

$$= \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t} =$$

$$= \frac{4T_0}{m} \sum_{m \text{ περιττό}} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Άσκηση 2: Να λυθεί η κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad , u : u(x,t)$$

με $x \in [0, \pi]$ και συνοριακές συνθήκες

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ και

αρχική συνθήκη $u(x,0) = \sin^3 x$ και $u_t(x,0) = 0$.

Δίνεται ότι $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Λύση

Εδώ θα πρέπει να ακολουθήσουμε όλα τα βήματα που κάναμε στην κυματική εξίσωση (δείτε παράδειγμα 3) με την αντικατάσταση $L = \pi$ και $c = 1$, οπότε θα έχουμε γενική λύση

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \left[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right]$$

(Σημειώνουμε ότι για $L = \pi$ και $c = 1$, $\omega = 1$)

Με εφαρμογή των αρχικών συνθηκών θα έχουμε

$$u(x,0) = \sin^3 x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = \sin^3 x$$

Εδώ χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\sin^3 x = 3\sin x - \sin(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

Οπότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} \frac{3}{4}, & \text{για } n=1 \\ -\frac{1}{4}, & \text{για } n=3 \\ 0, & \text{για } n \neq 1,3 \end{cases}$$

Από τη δεύτερη αρχική συνθήκη θα έχουμε

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\, n \Big[-a_n \sin(nt) +$$
$$+ b_n \cos(nt) \Big]$$

$$u_t(x,0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n n \sin(nx) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n = 0$$

Οπότε τελικά

$$u(x,t) = \frac{3}{4}\sin(x)\cos t - \frac{1}{4}\sin(3x)\cos(3t)$$

Άσκηση 3: Να λυθεί η μονοδιάστατη εξίσωση αγωγής θερμότητας

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad u : u(x,t)$$

στο διάστημα $x \in [0, \pi]$ με

συνοριακές συνθήκες $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

και αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = \sin^3 x$$

Λύση: Ακολουθήστε τη διαδικασία της άσκησης 2 και θα βρείτε

$$u(x,t) = \frac{3}{4}e^{-t}\sin x - \frac{1}{4}e^{-9t}\sin(3x)$$