[redacted]

Στην προηγούμενη διάλεξη ορίσαμε το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων ως το ολοκλήρωμα

$$(f,g) = \int_a^b w(x)\, f^*(x)\, g(x)\, dx$$

με το * να δηλώνει τον μιγαδικό συζυγή.

Αν το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν, τότε οι συναρτήσεις είναι ορθογώνιες.

Επίσης, αποδείξαμε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος Sturm-Liouville είναι ορθογώνιες συναρτήσεις όταν αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, με συνάρτηση $w(x)$ τη συνάρτηση βάρους της εξίσωσης Sturm-Liouville. Δηλαδή

$$(y_n, y_m) = \int_a^b w(x)\, y_n^*(x)\, y_m(x)\, dx = 0$$

αν $n \neq m$

Ανάπτυγμα συναρτήσεων σε ιδιοσυναρτήσεις.

Εν γένει, πλην κάποιων συγκεκριμένων εξαιρέσεων που εδώ δεν μας ενδιαφέρουν, μια συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος Sturm-Liouville σύμφωνα με τη σχέση

$$f(x) = \sum_n c_n y_n(x)$$

με $$c_n = \frac{(y_n, f)}{(y_n, y_n)}$$

Εδώ $$(y_n, f) = \int_a^b w(x)\, y_n^*(x) f(x)\, dx$$

$$(y_n, y_n) = \int_a^b w(x)\, y_n^*(x)\, y_n(x)\, dx$$

Απόδειξη

Έχουμε $f(x) = \sum_n c_n y_n(x)$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $w(x)\, y_m^*(x)$ και ολοκληρώνουμε από το a έως το b. Τότε,

$$\int_a^b w(x)\, y_m^*(x)\, f(x)\, dx = \int_a^b dx \left(\sum_n c_n y_n(x)\right) w(x)\, y_m^*(x) =$$

$$= \sum_n \int_a^b c_n\, y_m^*(x)\, w(x)\, y_n(x)\, dx =$$

$$= \sum_n c_n \int_a^b w(x)\, y_m^*(x)\, y_n(x)\, dx$$

Όπως όμως αναφέραμε παραπάνω οι συναρτήσεις $y_n(x)$, $y_m(x)$ είναι ορθογώνιες εάν $n \neq m$, οπότε το ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης θα είναι μη-μηδενικό μόνο εάν $n = m$, άρα το άθροισμα θα έχει μόνο ένα μη-μηδενικό όρο με $n = m$.

Οπότε

$$c_m \int_a^b w(x)\, y_m^*(x)\, y_m(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b w(x)\, y_m^*(x)\, f(x)\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_m (y_m, y_m) = (y_m, f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_m = \frac{(y_m, f)}{(y_m, y_m)}$$

Έτσι για $m = n$, έχουμε αυτό που ζητούσαμε να αποδείξουμε

$$c_n = \frac{(y_n, f)}{(y_n, y_n)}$$

Παράδειγμα 1: Σειρά Fourier ημιτόνων.

Είχαμε δείξει ότι το πρόβλημα Sturm-Liouville $y'' + \lambda y = 0$, με $x \in [0, L]$ και συνοριακές συνθήκες

$y(0) = y(L) = 0$ έχει ιδιοτιμές

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

και ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Επίσης, η συνάρτηση βάρους είναι $w(x) = \underline{1}$.
Έτσι για να αναπτύξουμε τη συνάρτηση

$f(x)$ στις παραπάνω ιδιοσυναρτήσεις

θα έχουμε

$$f(x) = \sum_n c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

με
$$c_n = \frac{\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), f(x)\right)}{\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)}$$

Εδώ

$$\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) = \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$$

Έτσι το ολοκλήρωμα θα γίνει

$$\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) = \int_0^L \frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L dx - \frac{1}{2}\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{L}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{L}{2n\pi}\cancelto{0}{\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\Big]_0^L} = \frac{L}{2}$$

Άρα $\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) = \frac{L}{2}$

Άρα $$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Για παράδειγμα θα αναπτύξουμε τη συνάρτηση $f(x)=1$ στις ανωτέρω ιδιοσυναρτήσεις στο διάστημα $x \in [0, L]$.

Θα έχουμε

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= -\frac{2}{\cancel{L}}\frac{\cancel{L}}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big]_0^L =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\Big[\cos(n\pi) - 1\Big] =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\Big[1 - (-1)^n\Big]$$

Για $n =$ άρτιος (2, 4, 6, ... εδώ) θα έχουμε

$$c_n = 0$$

Για $n =$ περιττός (1, 3, 5, ...) θα έχουμε

$$c_n = \frac{4}{n\pi}$$

Άρα

$$1 = \sum_{n = \text{περιττός}} \frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right]$$

Παράδειγμα 2: Σειρά Fourier συνημιτόνων

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος $y'' + \lambda y = 0$ στο διάστημα $x \in [0, L]$ με συνοριακές συνθήκες $y'(0) = y'(L) = 0$. Στη συνέχεια αναπτύξτε την συνάρτηση $f(x)$ στις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος.

Έχουμε $y'' + \lambda y = 0 \qquad y'(0) = y'(L) = 0$

Εάν $\lambda < 0$ τότε οι συνοριακές συνθήκες δεν ικανοποιούνται (αυτό μπορείτε εύκολα να το αποδείξετε ακολουθώντας τη μεθοδολογία που εφαρμόσαμε σε αντίστοιχο παράδειγμα στην πρώτη μας διάλεξη).

Οπότε θα αναλύσουμε την περίπτωση που $\lambda \geq 0 \quad (\lambda = k^2)$

Τότε εάν αναζητήσουμε λύσεις της μορφής $y = e^{\rho x}$ και θέσουμε $\lambda = k^2$ στην διαφορική μας εξίσωση παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^2 + k^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho = \pm i k$$

Έτσι οι λύσεις μας θα είναι της μορφής $y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$

Η παράγωγος της $y(x)$ θα είναι

$$y'(x) = -Ak\sin(kx) + Bk\cos(kx)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες θα έχουμε

$$y'(0) = 0 \Rightarrow -Ak\sin(0) + Bk\cos(0) \overset{=0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow B = 0$$

Άρα $y(x) = A\cos(kx)$

$$y'(x) = -Ak\sin(kx)$$

$$y'(L) = 0 \Rightarrow -Ak\sin(kL) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kL = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Οπότε $\quad k_n = \dfrac{n\pi}{L} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

με $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Σημειώνουμε ότι για $n = 0$, $\lambda_0 = 0$ και

$y_0(x) = 1$ για κάθε x.

Το ανάπτυγμα θα είναι

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Όπου $\quad c_0 = \dfrac{(1, f)}{(1, 1)}$

$$c_n = \frac{\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), f(x)\right)}{\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)}$$

Όπου $\quad (1, 1) = \displaystyle\int_0^L 1 \cdot dx = L$

$$\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) = \frac{L}{2}$$

που μπορείτε εύκολα να το αποδείξετε με τη μεθοδολογία που δείξαμε στο προηγούμενο παράδειγμα με χρήση της σχέσης $\cos^2\varphi = \dfrac{1+\cos(2\varphi)}{2}$

Οπότε

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

με $$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L y_n(x) f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\,dx$$

Για παράδειγμα ας το εφαρμόσουμε για

$f(x) = x$

Τότε $$C_0 = \frac{1}{L}\int_0^L x\,dx =$$

$$= \frac{1}{L}\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{1}{L}\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{\cancel{L}}\frac{\cancel{L}}{n\pi}\int_0^L x\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]' dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\cancelto{0}{\left.x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L} - \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\frac{L}{n\pi}\left.\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L =$$

$$= \frac{2L}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right] = \frac{2L}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Οπότε εάν το n είναι άρτιο ($n = 2, 4, 6, \ldots$ εδώ)

$$C_n = 0$$

και εάν το n είναι περιττό ($n = 1, 3, 5, \dots$)

$$c_n = -\frac{4L}{n^2\pi^2}$$

Άρα $$X = \frac{L}{2} - \sum_{n=\text{περιττός}} \frac{4L}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) =$$

$$= \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left[\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right]$$

Παράδειγμα 3: Πλήρης σειρά Fourier

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος $y'' + \lambda y = 0$ στο διάστημα $x \in [0, L]$ με περιοδικές συνοριακές συνθήκες $y(0) = y(L)$ και $y'(0) = y'(L)$. Στη συνέχεια αναπτύξτε την συνάρτηση $f(x)$ στις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος.

Έχουμε $y'' + \lambda y = 0$ $\quad$ $y(0) = y(L)$

$y'(0) = y'(L)$

Εάν $\lambda < 0$ τότε οι συνοριακές συνθήκες δεν ικανοποιούνται (μπορείτε εύκολα να το ελέγξετε αυτό).

Οπότε θα μελετήσουμε την περίπτωση $\lambda \geq 0$

Θέτουμε $\lambda = k^2$.

Τότε $y'' + k^2 y = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Η πρώτη παράγωγος θα είναι

$$y'(x) = -Ak\sin(kx) + Bk\cos(kx)$$

Εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες

$$y(0) = y(L) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\cos(0) + B\sin(0) = A\cos(kL) + B\sin(kL) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\cos(kL) - 1]A + \sin(kL)B = 0 \quad (1)$$

$$y'(0) = y'(L) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -Ak\sin(0) + Bk\cos(0) = -Ak\sin(kL) + Bk\cos(kL) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cancel{k}\sin(kL)A + B\cancel{k}\left[\cos(kL)-1\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sin(kL)A + \left[\cos(kL)-1\right]B = 0 \quad (2)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται για $k=0$. Για να έχουμε και λύσεις $k \neq 0$ θα πρέπει (μπορεί να συμπεριλάβει και το $k=0$ μέσα)

Συνθήκη για μη-τετριμμένη λύση

$$\begin{vmatrix} \cos(kL)-1 & \sin(kL) \\ -\sin(kL) & \cos(kL)-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\cos(kL)-1\right]^2 + \sin^2(kL) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2(kL) - 2\cos(kL) + 1 + \sin^2(kL) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cos(kL) + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(kL) = 1 \Rightarrow kL = 2n\pi, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$k_n = \frac{2n\pi}{L}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_n = \dfrac{4n^2\pi^2}{L^2}$, $n = 0,1,2,\ldots$

και οι ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$y_n(x) = A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),$$

$$n = 0,1,2,\ldots$$

Άρα $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]$$

με $$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) f(x)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) f(x)\,dx$$

Η παραπάνω με απλές αλλαγές μεταβλητής οδηγεί στη συνήθη μορφή της πλήρους σειράς Fourier που έχετε ήδη δει.

Άσκηση 1: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος

$y'' + \lambda y = -2y$ με συνοριακές συνθήκες

$y'(0) = y'(2) = 0$ στο διάστημα $x \in [0, 2]$.

Στη συνέχεια αναπτύξτε τη συνάρτηση

$f(x) = x^2$ στις παραπάνω ιδιοσυναρτήσεις.

Λύση

Έχουμε $$y'' + (\lambda+2) y = 0$$

$$y'(0) = y'(2) = 0$$

Θέτουμε $\mu = \lambda + 2$ τότε

$$y'' + \mu y = 0$$

Τόσο η παραπάνω εξίσωση όσο και οι συνοριακές συνθήκες είναι παρόμοιες με το παράδειγμα 2 που αναλύσαμε ανωτέρω με $\mu \to \lambda$ και $L = 2$.

Οπότε οι λύσεις που βρήκαμε στο παράδειγμα 2 θα ισχύουν και εδώ και θα έχουμε (κάντε το αναλυτικά για εξάσκηση)

$$m_n = \frac{n^2\pi^2}{2^2} \quad , \; n = 0,1,2,\ldots$$

ή $\quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4} - 2 \quad , \; n = 0,1,2,\ldots$

και $\quad y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \quad , \; n = 0,1,2,\ldots$

Άρα

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

με $\quad c_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx$

$$c_n = \frac{2}{2}\int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$c_n = \int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) f(x)\,dx$$

Για $f(x) = x^2$ θα έχουμε

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$c_n = \int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) x^2\,dx$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, όπως στο παράδειγμα 2, και μετά από πράξεις (κάντε τις για εξάσκηση) δίνει

$$c_n = \frac{16(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

Οπότε $$x^2 = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Άσκηση 2

(a) Γράψτε στη μορφή Sturm – Liouville την παρακάτω εξίσωση $y'' - 2y' + \lambda y = 0$, $x \in [0, \pi]$ με συνοριακές συνθήκες $y(0) = y(\pi) = 0$.

(β) Βρείτε τις ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος (α).

(γ) Αναπτύξτε την συνάρτηση $f(x)$ στις ιδιοσυναρτήσεις του ανωτέρω προβλήματος στο διάστημα $x \in [0, \pi]$.

Λύσεις

(α) Ακολουθώντας τη μεθοδολογία της προηγούμενης διάλεξης μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι η μορφή Liouville του προβλήματος είναι
$$e^{-2x} y'' - 2e^{-2x} y'(x) + \lambda e^{-2x} y(x) = 0$$
Κάντε το για εξάσκηση.

(β) Έχουμε $y'' - 2y' + \lambda y = 0 \quad y(0) = y(\pi) = 0$

Και εδώ έχουμε μια ομογενή διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Οπότε αναζητώ λύση της μορφής $y(x) = e^{\rho x}$

Τότε παίρνω την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\rho^2 - 2\rho + \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\lambda}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-\lambda}$$

Οπότε οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι

$$y(x) = c_1 e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{1-\lambda})x} =$$

$$= \left(c_1 e^{\sqrt{1-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}\right) e^x$$

για $\lambda \neq 1$.

Για $\lambda = 1$ θα έχουμε $\rho_{1,2} = 1$ διπλή ρίζα

Άρα τότε

$$y(x) = (ax + b)e^x$$

Για την περίπτωση που $\lambda = 1$ οι συνοριακές συνθήκες θα δώσουν

$y(0) = 0 \Rightarrow b = 0$ και $y(\pi) = 0 \Rightarrow e^{\pi} a\pi = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 0$

Άρα έχουμε μόνο την τετριμμένη λύση αφού $a = b = 0 \Rightarrow y(x) = 0$. Έτσι το $\lambda = 1$ δεν είναι ιδιοτιμή.

Για $\lambda \neq 1$ θα έχουμε τώρα από τις συνοριακή συνθήκες

$$y(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0 \Rightarrow c_2=-c_1$$

Οπότε η λύση θα είναι

$$y(x)=c_1\left(e^{\sqrt{1-\lambda}\,x}-e^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}\right)e^{x}$$

Η δεύτερη συνοριακή συνθήκη θα μας δώσει

$$y(\pi)=0 \Rightarrow c_1\left(e^{\sqrt{1-\lambda}\,\pi}-e^{-\sqrt{1-\lambda}\,\pi}\right)e^{\pi}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1\left(e^{\sqrt{1-\lambda}\,\pi}-e^{-\sqrt{1-\lambda}\,\pi}\right)=0$$

Για να έχουμε τη ζητούμενη λύση θα πρέπει η παρένθεση να δίνει μηδέν. Είναι φανερό ότι αν $\lambda<1$ τότε τα εκθετικά είναι πραγματικά και η παρένθεση δεν μπορεί να μας δώσει μηδέν. Άρα δεν υπάρχουν ιδιοτιμές όπου $\lambda<1$. Οπότε θα ελέγξουμε την περίπτωση $\lambda>1$.

Για $\lambda > 1$, $1-\lambda < 0$, έτσι

$$\sqrt{1-\lambda} = i\sqrt{\lambda-1}$$

Οπότε από τη συνθήκη θα έχουμε

$$c_1\left(e^{i\sqrt{\lambda-1}\,\pi} - e^{-i\sqrt{\lambda-1}\,\pi}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ic_1 \sin\left(\sqrt{\lambda-1}\,\pi\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda-1}\,\pi\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda-1}\,\pi = n\pi, \Rightarrow$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda-1} = n \Rightarrow \lambda_n = 1 + n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις θα είναι

$$y(x) = c_1\left(e^{i\sqrt{\lambda-1}\,x} - e^{-i\sqrt{\lambda-1}\,x}\right)e^x =$$

$$= 2ic_1 \sin\left(\sqrt{\lambda-1}\,x\right)e^x =$$

$$= 2ic_1 \sin(nx)e^x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Οπότε παραλείποντας τις σταθερές θα έχουμε

$$y_n(x) = \sin(nx)\, e^{x} \quad , \quad n = 1,2,3,\dots$$

(γ) $$f(x) = \sum_n c_n y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{x} \sin(nx)$$

Όπου $$c_n = \frac{\left(e^{x}\sin(nx),\, f(x)\right)}{\left(e^{x}\sin(nx),\, e^{x}\sin(nx)\right)}$$

με $$\left(e^{x}\sin(nx),\, e^{x}\sin(nx)\right) =$$

$$= \int_0^{\pi} e^{2x}\sin^2(nx)\, \underbrace{e^{-2x}}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{βάρους της εξ. Sturm-Liouville}}} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^2(nx)\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(e^{x}\sin(nx),\, f(x)\right) = \int_0^{\pi} e^{x}\sin(nx)\, f(x)\, e^{-2x}\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-x}\sin(nx)\, f(x)\, dx$$

Οπότε $$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\sin(nx)\, f(x)\, dx$$

Άσκηση 3: Για εξάσκηση στο σπίτι βρείτε τις ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις των παρακάτω προβλημάτων και στη συνέχεια αναπτύξτε την συνάρτηση $f(x)$ στις ιδιοσυναρτήσεις που βρήκατε.

(α) $y'' + \lambda y = 0 \qquad x \in [0, L]$

$y(0) = 0, \; y'(L) = 0$

(β) $y'' + \lambda y = 0 \qquad x \in [0, L]$

$y'(0) = 0, \; y(L) = 0$

Για σύγκριση με τα αποτελέσματα που θα βρείτε σας δίνω ότι στο (α) οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$\lambda_k = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right]^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_k(x) = \sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2L} x\right]$$

ενώ στο (β) $\lambda_k = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right]^2, \; k = 0, 1, 2, \ldots$

$$y_k(x) = \cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{2L} x\right]$$