

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

**ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

Τμήμα Επιστήμης των Υλικών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ιωσήφ Γαλανάκης

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του τμήματος Δ.Ι. Φωτεινό και τον επίκουρο καθηγητή του τμήματος Ε. Πασπαλάκη οι οποίοι είναι οι συγγραφείς του πρώτου μέρους των σημειώσεων (κεφάλαια 1 έως και 3) και οι οποίοι έθεσαν στην διάθεση μου τα αντίστοιχα ηλεκτρονικά αρχεία ώστε να συμπεριληφθούν στις παρούσες σημειώσεις.

Ιωσήφ Γαλανάκης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α

Κεφ. 1 :	Ταλαντώσεις	1
Κεφ. 2 :	Λανγκρανζιανός και Χαμιλτονιανός φορμαλισμός	29
Κεφ. 3 :	Κυματική	43

ΜΕΡΟΣ Β:	Θεωρία Συνεχούς Μέσου	53
Κεφ. 4 :	Τανυστές	55
Κεφ. 5 :	Θεωρία Ελαστικότητας	61
Κεφ. 6 :	Κάμψη Δοκών Ασκήσεις-Παραδείγματα	75 81

Κεφάλαιο 1

Ταλαντώσεις

1.1 Βασικές έννοιες: εξίσωση κίνησης

Σκοπός μας στην παράγραφο αυτή είναι η συνοπτική παρουσίαση γνωστών βασικών εννοιών μηχανικής οι οποίες θα μας χρειαστούν στην μελέτη των ταλαντώσεων που είναι το θέμα του παρόντος κεφαλαίου. Μια από τις βασικές έννοιες της μηχανικής είναι η έννοια του σωματιδίου ή υλικού σημείου. Σωματίδιο ονομάζουμε ένα σώμα τις διαστάσεις του οποίου μπορούμε να θεωρήσουμε αμελητέες ως προς την κίνηση του. Η θέση του σωματιδίου στο χώρο καθορίζεται από τη διανυσματική ακτίνα \mathbf{r} ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, όπου $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα στους αντίστοιχους άξονες. Η ταχύτητα σωματιδίου μάζας m δίδεται από τη σχέση $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, η ορμή του από τη σχέση $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ και η επιτάχυνση από τη σχέση $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$.

Η εξίσωση κίνησης, η οποία καθορίζει πως ένα σώμα θα κινηθεί κάτω από την επίδραση μιας δύναμης \mathbf{F} είναι η

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (1.1\alpha)$$

ή

εάν η μάζα είναι χρονικώς ανεξάρτητη,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \text{ή} \quad m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (1.1\beta)$$

η οποία αποτελεί τη διαφορική έκφραση του δεύτερου νόμου του Newton. Από την εξίσωση κίνησης (1.1) μπορούν να εξαχθούν μια σειρά από ενδιαφέροντα αποτελέσματα όπως, για παράδειγμα, ότι εάν η συνολική δύναμη \mathbf{F} είναι μηδέν η ορμή του σωματιδίου διατηρείται μια και $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$. Η μελέτη της εξίσωσης κίνησης (1.1) είναι ένα από τα βασικότερα θέματα στη Μηχανική.

Η κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου ορίζεται ως $T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2$, όπου $p = |\mathbf{p}|, v = |\mathbf{v}|$. Μπορούμε να ορίσουμε επίσης τη δυναμική ενέργεια (ή δυναμικό) ενός σωματιδίου μεσώ του έργου που γίνεται από τη δύναμη \mathbf{F} για τη μεταφορά του σωματιδίου από τυχόν σημείο 1 σε τυχόν σημείο 2:

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V_1 - V_2. \quad (1.2)$$

Το έργο που χρειάζεται να καταναλωθεί για τη μεταφορά του σωματιδίου είναι απλώς η διαφορά της δυναμικής ενέργειας στα δύο σημεία. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται και στη μορφή

$$\mathbf{F} = -\vec{\nabla}V, \quad (1.3)$$

όπου $\vec{\nabla} = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Στα συστήματα που θα

μελετήσουμε η δυναμική ενέργεια θα είναι συνάρτηση της θέσης και ενδεχόμενα του χρόνου. Δεν θα μελετήσουμε συστήματα όπου η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση της ταχύτητας. Η ολική ενέργεια σωματιδίου ορίζεται ως το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας, $E = T + V$. Όπως μπορούμε να δείξουμε (δείξτε το σαν άσκηση) εάν η δυναμική ενέργεια δεν είναι συνάρτηση του χρόνου τότε η ολική ενέργεια διατηρείται, δηλαδή ισχύει

$$E = T + V = \text{σταθ}. \quad (1.4)$$

Η δύναμη σε αυτή τη περίπτωση χαρακτηρίζεται διατηρητική.

1.2 Μελέτη κίνησης απλού αρμονικού ταλαντωτή

Η κίνηση του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι αρκετά σημαντική μια και, όπως θα δείξουμε και παρακάτω, μπορεί να περιγράψει την κίνηση μιας σειράς συστημάτων. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την κίνηση του απλού αρμονικού ταλαντωτή επιλύοντας την διαφορική εξίσωση κίνησης. Η δυναμική ενέργεια ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή δίδεται από τη σχέση

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad k > 0, \quad \text{άρα και η δύναμη δίδεται από τη σχέση}$$

$$F(x) = -kx, \quad (1.5)$$

δηλαδή υπακούει το νόμο του Hooke.

Η εξίσωση κίνησης, εξίσωση (1.1), γράφεται στην περίπτωση αυτή ως

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (1.6)$$

όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι γνωστή ως κυκλική συχνότητα. Η εξίσωση (1.6) είναι γραμμική όμογενής

διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης με σταθερούς συντελεστές και η λύση της βρίσκεται με την αντικατάσταση $x(t) = e^{st}$ στην εξίσωση (1.6) από όπου καθορίζεται και η τιμή του s , σε $s = \pm i\omega$.

Οπότε η εξίσωση (1.6) έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις τις $\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}$ ή ισοδύναμα τις $\{\cos \omega t, \sin \omega t\}$ και η γενική λύση έχει τη μορφή

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (1.6)$$

όπου οι συντελεστές A, B καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Η λύση (1.6) γράφεται και στην ισοδύναμη μορφή

$$x(t) = \Gamma \cos(\omega t + \phi), \quad (1.7)$$

με $\Gamma = \sqrt{A^2 + B^2}$ και $\tan\phi = -\frac{B}{A}$. Η σταθερά Γ ονομάζεται πλάτος ταλάντωσης και η σταθερά ϕ αρχική φάση ταλάντωσης. Στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι $x(t=0) = x_0$ και $v(t=0) = v_0$ θα έχουμε $\Gamma = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$ και $\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$.

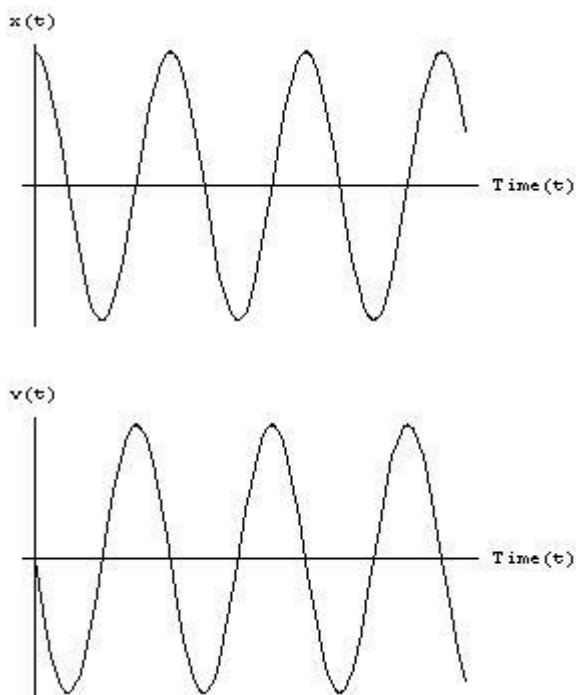
Η ολική ενέργεια του προβλήματος είναι $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ και επειδή

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\Gamma\omega \sin(\omega t + \phi), \quad (1.8)$$

παίρνουμε ότι

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2\Gamma^2, \quad (1.9)$$

δηλαδή η ολική ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους ταλάντωσης. Ένα παράδειγμα ταλάντωτικής κίνησης παρατίθεται στο σχήμα 1.1 όπου ο ταλαντωτής έχει αρχικά μηδενική ταχύτητα και θετική απομάκρυνση.



Σχήμα 1.1: Απλή αρμονική ταλάντωση.

Άσκηση 1.1: Υπολογίσετε την τάση ενός αρχικά φορτισμένου πυκνωτή χωρητικότητας C που συνδεεται σε σειρά με πηνίο αυτεπαγωγής L (κύκλωμα LC).

Άσκηση 1.2: Το απλό η μαθηματικό εκρεμμές αποτελείται από ένα σωματίδιο μάζας m που έχει προσδεθεί στο χαμηλότερο άκρο μιας αβαρούς ράβδου ή ενός νήματος μήκους L . Αν το εκρεμμές

απομακρυνθεί κατά γωνία θ από τον άξονα ισορροπίας να μελετηθεί η κίνηση για μικρές γωνίες. (Υποθέστε ότι για μικρές γωνίες ισχύει $\sin \theta \approx \theta$).

1.3 Ταλαντωτής με απόσβεση

Στην περίπτωση που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, από τη στιγμή που το σωματίδιο μας άρχισε να κινείται τότε η κίνηση διαρκούσε για πάντα. Η κίνηση αυτή υπεραπλουστεύει την πραγματικότητα στην οποία δυνάμεις τριβής ή απόσβεσης ασκούνται στο σωματίδιο και έχουν ως αποτέλεσμα την σταδιακή μείωση του πλάτους ταλάντωσης μέχρι σημείου όπου να μην συμβαίνουν πια ταλαντώσεις. Την επιδραση των δυνάμεων τριβής ή ταλάντωσης στην κίνηση του απλού αρμονικού ταλαντωτή θα μελετήσουμε στην παράγραφο αυτή. Θα θεωρήσουμε ότι η δύναμη τριβής ή απόσβεσης είναι ανάλογη της ταχύτητας του σωματιδίου και θα επιλύσουμε την εξίσωση κίνησης (1.1).

Η συνολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο στην περίπτωση αυτή είναι

$$F = -kx - b \frac{dx}{dt}, \quad (1.10)$$

με $b > 0$ για να περιγράφει απόσβεση. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad (1.11)$$

όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι η κυκλική συχνότητα και $\gamma = b/m$ η σταθερά απόσβεσης. Η εξίσωση (1.22)

είναι όμογενής διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης με σταθερούς συντελεστές και η λύση της βρίσκεται με την αντικατάσταση $x(t) = e^{st}$ στην εξίσωση (1.22) από όπου καθορίζεται και η τιμή του s σε

$$s_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2}. \quad (1.12)$$

Περίπτωση 1: $s_1 \neq s_2$

Στην περίπτωση που $s_1 \neq s_2$ η εξίσωση (1.11) έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις τις $\{e^{s_1 t}, e^{s_2 t}\}$ και η γενική λύση έχει τη μορφή

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} \left[A \exp\left(\sqrt{\gamma^2/4 - \omega^2} t\right) + B \exp\left(-\sqrt{\gamma^2/4 - \omega^2} t\right) \right], \quad (1.13)$$

όπου οι συντελεστές A, B καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Η μορφή της κίνησης καθορίζεται από το συντελεστή $\sqrt{\gamma^2/4 - \omega^2}$ έτσι ώστε:

$$\text{I. } \frac{\gamma^2}{4} < \omega^2, \quad \sqrt{\gamma^2/4 - \omega^2} \text{ Φανταστικός} \quad (1.14\alpha)$$

$$\text{II. } \frac{\gamma^2}{4} > \omega^2, \quad \sqrt{\gamma^2/4 - \omega^2} \text{ Πραγματικός} \quad (1.14\beta)$$

(A) Υπο-αποσβενόμενη κίνηση ($\frac{\gamma^2}{4} < \omega^2$).

Στην περίπτωση αυτή $\sqrt{\gamma^2/4 - \omega^2} = i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2/4} = i\tilde{\omega}$. Δηλαδή

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} (A_1 \cos \tilde{\omega} t + B_1 \sin \tilde{\omega} t), \quad (1.15)$$

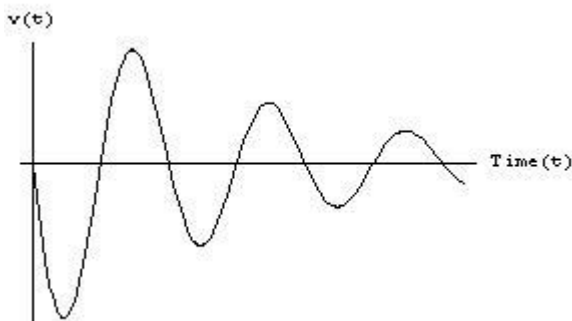
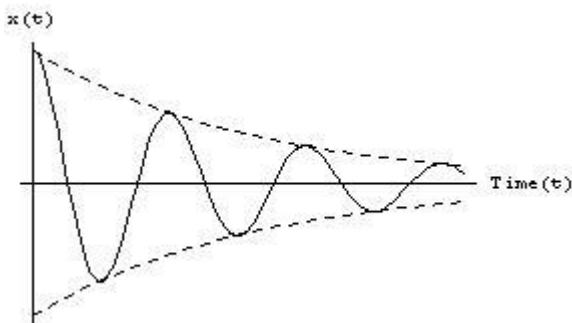
όπου οι συντελεστές A_1, B_1 καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, η οποία γράφεται και στη μορφή

$$x(t) = \Gamma e^{-\gamma t/2} \cos(\tilde{\omega} t + \phi), \quad (1.16)$$

με $\Gamma = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ και $\tan \phi = -\frac{B_1}{A_1}$. Η κίνηση στην περίπτωση αυτή είναι αποσβενόμενη

ταλάντωση με συχνότητα ταλάντωσης $\tilde{\omega}$ και ρυθμό απόσβεσης $\gamma/2$.

Ένα παράδειγμα ταλάντωτικής κίνησης με απόσβεση παρατίθεται στο σχήμα 1.2 όπου ο ταλαντωτής έχει αρχικά μηδενική ταχύτητα, θετική απομάκρυνση και $\gamma = 0.2\omega$.



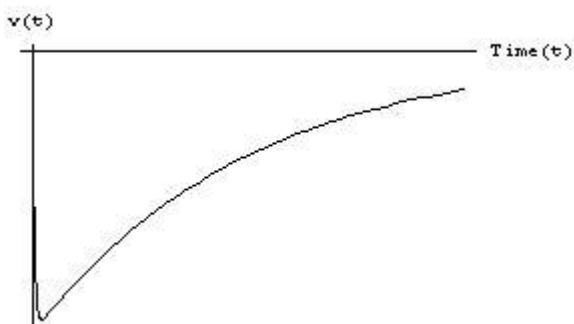
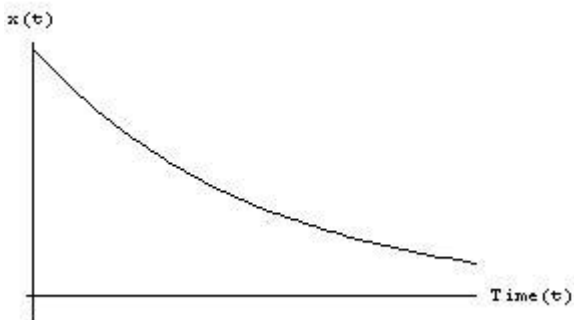
Σχήμα 1.2: Υπο-αποσβενόμενη κίνηση. Οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τα $ae^{-\gamma t/2}$ ($-ae^{-\gamma t/2}$) για θετική (αρνητική) απομακρύνση.

(B) Υπερ-αποσβενόμενη ($\frac{\gamma^2}{4} > \omega^2$)

Στην περίπτωση αυτή $\sqrt{\gamma^2/4 - \omega^2} = \lambda$

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} (Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}), \quad (1.17)$$

και η κίνηση του σωματιδίου δεν είναι περιοδική, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 1.3).



Σχήμα 1.3: Υπερ-αποσβενόμενη κίνηση στην περίπτωση που $\gamma = 10\omega$. Οι αρχικές συνθήκες και ο χρόνος κίνησης είναι ο ίδιος με το

Περίπτωση 2: $s_1 = s_2$

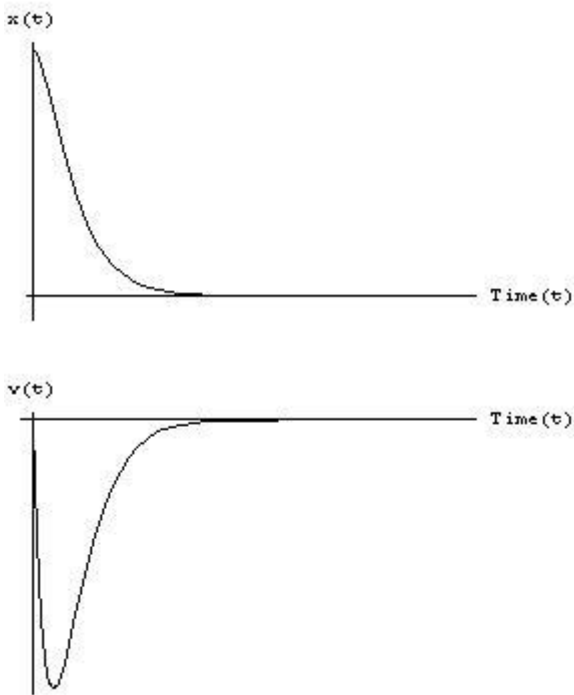
(Γ) Κρίσιμα αποσβενόμενη κίνηση ($\frac{\gamma^2}{4} = \omega^2$)

Στην περίπτωση τώρα που $\frac{\gamma^2}{4} = \omega^2$ τότε το s παίρνει την τιμή $s = -\frac{\gamma}{2}$ (διπλή ρίζα), τότε η εξίσωση

(1.11) έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις τις $\{e^{st}, te^{st}\}$ και η γενική λύση έχει τη μορφή

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} (A_2 + B_2 t), \quad (1.18)$$

όπου οι συντελεστές A_2, B_2 καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Ούτε στην περίπτωση αυτή έχουμε ταλαντωτική κίνηση όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.4. Ο ρυθμός με τον οποίο η απομάκρυνση και η ταχύτητα αποσβένει στην κρίσιμα αποσβενόμενη κίνηση είναι γρηγορότερος από την περίπτωση της υπερ-αποσβενόμενης κίνησης.



Σχήμα 1.4: Κρίσιμη κίνηση. Οι αρχικές συνθήκες και ο χρόνος κίνησης είναι ο ίδιος με το σχήμα 3.

Άσκηση 1.3: Αφού εκφράσετε τις λύσεις (1.17) και (1.18) μέσω των αρχικών συνθηκών $x(t=0) = x_0$, $v(t=0) = v_0$ να καθορίσετε τις τις αρχικές συνθήκες, και για τις δύο περιπτώσεις, για τις οποίες που η απομάκρυνση $x(t)$ αλλάζει πρόσημο (αν βέβαια αλλάζει) κατά τη χρονική εξέλιξη του συστήματος.

Άσκηση 1.4 Υπολογίσετε τη χρονική μεταβολή της τάσης ενός αρχικά φορτισμένου πυκνωτή χωρητικότητας C που συνδέεται σε σειρά με πηνίο αυτεπαγωγής L και αντίσταση R (κύκλωμα RLC).

Άσκηση 1.5: Απλό εκρεμμές που έχει αρχικά απομακρυνθεί κατά γωνία θ από τον άξονα ισορροπίας υπόκειται σε δύναμη αντιστάσης της μορφής $F_{αντ} = 2m\sqrt{g/L} \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)$. Να μελετηθεί η κίνηση για μικρές γωνίες.

1.4 Ταλαντωτής που διεγείρεται από απλή περιοδική δύναμη

Σε πολλές περιπτώσεις φυσικών συστημάτων μας ενδιαφέρει η απόκριση του συστήματος σε εξωτερικές διεγέρσεις που μπορούν να περιγραφούν ως χρονικά εξαρτημένες δυνάμεις. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την απόκριση ενός αποσβενόμενου αρμονικού ταλαντωτή στην περίπτωση διέγερσης από μια περιοδική δύναμη της μορφής $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$. Η συνολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο στην περίπτωση αυτή είναι

$$F = -kx - b \frac{dx}{dt} + F(t), \quad (1.19)$$

έτσι η εξίσωση κίνησης γράφεται ως

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \cos \omega_0 t, \quad (1.20)$$

με $f = F_0/m$. Η λύση της εξίσωσης (1.20) μπορεί να γράφει ως άθροισμα δύο λύσεων $x(t) = x_{ομ}(t) + x_{μ\epsilon\pi}(t)$, όπου $x_{ομ}(t)$ είναι η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$\frac{d^2x_{ομ}}{dt^2} + \gamma \frac{dx_{ομ}}{dt} + \omega^2 x_{ομ} = 0, \quad (1.21)$$

και $x_{μ\epsilon\pi}(t)$ μια οποιαδήποτε μερική λύση που αναπαράγει το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1.20). Η λύση της ομογενούς εξίσωσης (1.21) έχει μελετηθεί αναλυτικά στην προηγούμενη παράγραφο. Έτσι μας απομένει να βρούμε την μερική λύση $x_{μ\epsilon\pi}(t)$. Επειδή στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1.20) η χρονική εξάρτηση είναι $\cos \omega_0 t$ διαλέγουμε τη μερική λύση να είναι γραμμικός συνδυασμός ημιτόνου και συνημιτόνου του ίδιου ορίσματος, δηλαδή

$$x_{μ\epsilon\pi}(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (1.22)$$

Αναφέρουμε εδώ ότι η παραπάνω μερική λύση χρησιμοποιείται και στην περίπτωση που η δύναμη έχει χρονική εξάρτηση $\sin \omega_0 t$ ή οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό $\cos \omega_0 t$ και $\sin \omega_0 t$. Όπως έχουμε αναφέρει και στην παράγραφο 1.2 η εξίσωση (1.22) μπορεί να γραφεί και στην ισοδύναμη μορφή

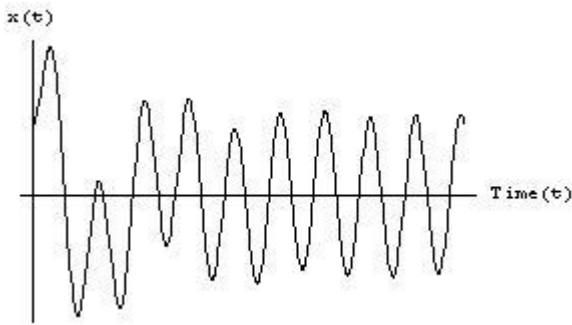
$$x_{μ\epsilon\pi}(t) = \Gamma \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (1.23)$$

όπου τα Γ, ϕ είναι το πλάτος και η φάση της ταλάντωσης. Το επόμενο βήμα είναι να αντικαταστήσουμε την λύση (1.23) στην εξίσωση (1.20) και να υπολογίσουμε τους συντελεστές Γ, ϕ οι οποίοι παίρνουν τη μορφή

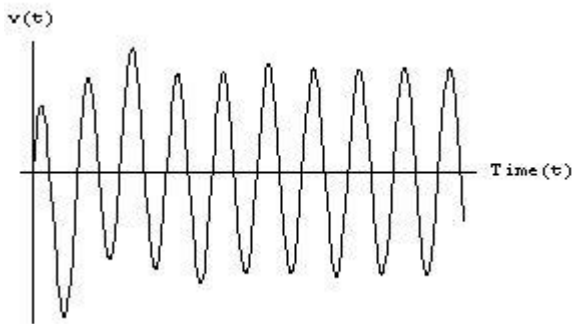
$$\Gamma = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 \gamma^2}} \quad \text{και} \quad \tan \phi = \frac{\gamma \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.24)$$

Άσκηση 1.6: Υπολογίστε τους συντελεστές Γ, ϕ της μερικής λύσης στην περίπτωση που η δύναμη είναι της μορφής $F(t) = F_0 \sin \omega_0 t$.

Η γενική λύση είναι $x(t) = x_{ομ}(t) + x_{μ\epsilon\pi}(t)$, επειδή όμως η λύση της ομογενούς πάει στο μηδέν καθώς το σύστημα εξελίσσεται χρονικά (δείτε την παράγραφο 1.3) για μεγάλους χρόνους $t \gg 1/\gamma$ η λύση θα είναι απλώς η μερική λύση. Δηλαδή η ομογενής λύση παίζει ρόλο μόνο σε μικρούς χρόνους τάξης μεγέθους $1/\gamma$. Οι λεπτομέρειες της κίνησης φαίνονται στο σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5



Συντονισμός

Το πλάτος και η φάση ταλάντωσης Γ, ϕ εξαρτώνται από τα ω, ω_0 . Μπορούμε να υπολογίσουμε τη συχνότητα διέγερσης που το πλάτος ταλάντωσης παρουσιάζει μέγιστο, κρατώντας σταθερά τα ω, γ ,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_0} = 0, \tag{1.25}$$

με αποτέλεσμα $\omega_0^{(R)} = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2/2}$. Η συχνότητα $\omega_0^{(R)}$ ονομάζεται συχνότητα συντονισμού. Παρατηρούμε ότι η συχνότητα συντονισμού μικραίνει όταν ο συντελεστής απόσβεσης γ μεγαλώνει. Επίσης, δεν έχουμε συντονισμό όταν $\omega^2 < \gamma^2/2$ επειδή η συχνότητα συντονισμού γίνεται μιγαδική. Σε αυτή την περίπτωση το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται μονοτονικά με τη συχνότητα ω_0 .

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την τιμή της κυκλικής συχνότητας του ταλαντωτή για την οποία το πλάτος ταλάντωσης μεγιστοποιείται, κρατώντας σταθερά τα ω_0, γ , ως

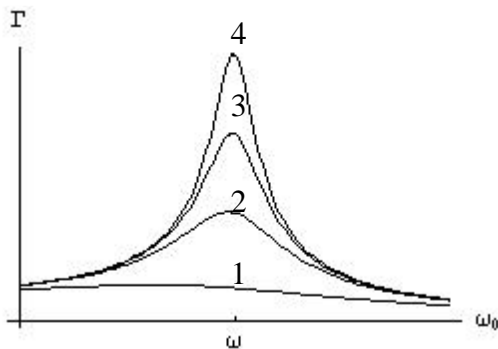
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} = 0, \tag{1.26}$$

με αποτέλεσμα $\omega^{(R)} = \omega_0$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συχνότητα συντονισμού σε αυτή την περίπτωση είναι διαφορετική από προηγουμένως. Στην περίπτωση όμως που ο συντελεστής απόσβεσης γ είναι μικρός οι δύο συχνότητες δεν διαφέρουν πολύ.

Ο συντελεστής ποιότητας

$$Q = \frac{\omega^{(R)}}{\gamma}, \quad (1.27)$$

είναι ο συντελεστής χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει το βαθμό απόσβεσης στο σύστημα μας. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.6 όταν το Q είναι μεγάλο έχουμε ένα καθαρό φαινόμενο συντονισμού ενώ όταν το Q είναι μικρό το φαινόμενο συντονισμού αμβλύνεται ή και εξαφανίζεται εντελώς. Παρόμοια συμπεριφορά παίρνουμε και στην περίπτωση που μεταβάλλουμε τη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή κρατώντας τη συχνότητα διέγερσης σταθερή.



Σχήμα 1.6. Γραφική αναπαράσταση του πλάτους ταλάντωσης Γ ως συνάρτηση της συχνότητας διέγερσης για διαδοχικές τιμές του συντελεστή ποιότητας $Q = 1$ (καμπύλη 1), $Q = 4$ (καμπύλη 2), $Q = 7$ (καμπύλη 3) και $Q = 10$ (καμπύλη 4).

Παράδειγμα. Να βρεθούν οι συχνότητες συντονισμού της χρονικής μέσης κινητικής ενέργειας του σωματιδίου για χρόνους $t \gg 1/\gamma$.

Η ταχύτητα του σωματιδίου για μεγάλους χρόνους δίνεται από τη σχέση

$$v(t \gg 1/\gamma) = \frac{-f\omega_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2\gamma^2}} \sin(\omega_0 t + \phi), \quad (1.28)$$

και η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι

$$T = \frac{m}{2} \frac{f^2\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2\gamma^2} \sin^2(\omega_0 t + \phi), \quad (1.29)$$

Η μέση κινητική ενέργεια, η οποία είναι χρονοανεξάρτητη, υπολογίζεται ολοκληρώνοντας σε μια πλήρη περίοδο ταλάντωσης ως

$$\langle T \rangle = \frac{m}{2} \frac{f^2\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2\gamma^2} \langle \sin^2(\omega_0 t + \phi) \rangle, \quad (1.30)$$

με

$$\langle \sin^2(\omega_0 t + \phi) \rangle = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} dt \sin^2(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2}, \quad (1.31)$$

άρα

$$\langle T \rangle = \frac{m}{4} \frac{f^2 \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 \gamma^2}. \quad (1.32)$$

Το μέγιστο στην μέση κινητική ενέργεια, με τα ω, γ σταθερά, δηλαδή η συχνότητα συντονισμού της κινητικής ενέργειας, βρίσκεται από τη σχέση

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \omega_0} = 0, \quad (1.33)$$

και δίνεται στη συχνότητα ω , δηλαδή στη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή. Το μέγιστο στην μέση κινητική ενέργεια, με τα ω_0, γ σταθερά, βρίσκεται από τη σχέση

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \omega} = 0, \quad (1.34)$$

και δίνεται στη συχνότητα ω , πάλι στη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή.

Βέβαια η ενέργεια στο σύστημα μας δίνεται από το εξωτερικό πεδίο και απορροφάται από τον ταλαντωτή μας. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η χρονική μέση ισχύς που η εξωτερική δύναμη αποδίδει στον ταλαντωτή, η οποία δίδεται από τη σχέση

$$P = \langle F(t)v(t) \rangle = - \frac{mf^2 \omega_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 \gamma^2}} \langle \sin(\omega_0 t + \phi) \cos \omega_0 t \rangle, \quad (1.35)$$

όμως

$$\langle \sin(\omega_0 t + \phi) \cos \omega_0 t \rangle = \langle \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \rangle \cos \phi + \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle \sin \phi, \quad (1.36)$$

με

$$\langle \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = 1/2. \quad (1.37)$$

$$\text{Οπότε } \langle \sin(\omega_0 t + \phi) \cos \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2} \sin \phi. \quad (1.38)$$

Και επειδή $\sin \phi = - \frac{\gamma \omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega_0^2}}$, η ισχύς γίνεται

$$P = \frac{1}{2} \frac{\gamma m f^2 \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 \gamma^2}. \quad (1.39)$$

Άσκηση 1.7: Να δείξετε ότι οι συχνότητες συντονισμού της μέσης χρονικά δυναμικής ενέργειας του σωματιδίου για χρόνους $t \gg 1/\gamma$ είναι ίδιες με τις συχνότητες συντονισμού της απομάκρυνσης.

Άσκηση 1.8: Να υπολογίσετε την χρονική μέση ισχύ που απορροφάται λόγω τριβής. Ποια ή σχέση της ισχύος αυτής με την ισχύ που δίδεται από την εξίσωση (1.39). Στη συνέχεια μελετήστε το φαινόμενο συντονισμού και στις δύο περιπτώσεις.

Άσκηση 1.9: Υπολογίστε τη χρονική μεταβολή της τάσης ενός αρχικά φορτισμένου πυκνωτή χωρητικότητας C που συνδέεται σε σειρά με πηνίο αυτεπαγωγής L , αντίσταση R (κύκλωμα RLC), στο οποίο εφαρμόζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη της μορφής $E_0 \cos \omega_0 t$. Στην συνέχεια μελετήστε το φαινόμενο συντονισμού στο φορτίο του πυκνωτή και στην τάση του πηνίου.

1.5 Ταλαντωτής που διεγείρεται από γενικής μορφής περιοδική δύναμη

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την απόκριση ενός αποσβενόμενου αρμονικού ταλαντωτή στην περίπτωση διέγερσης από μια περιοδική δύναμη γενικής μορφής. Για να κατανοήσουμε καλύτερα τα αποτελέσματα θα ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα μιας περιοδικής δύναμης της μορφής $F(t) = F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos \omega_2 t$. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση κίνησης (1.1) γράφεται ως

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_1 \cos \omega_1 t + f_2 \cos \omega_2 t, \quad (1.40)$$

όπου $f_1 = F_1/m$ και $f_2 = F_2/m$. Η λύση της εξίσωσης αυτής δίνεται με τον τρόπο που αναλύσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, $x(t) = x_{\text{ομ}}(t) + x_{\text{μep}}(t)$ όπου η ομογενής ικανοποιεί την εξίσωση (1.21) και η μερική λύση μια οποιαδήποτε λύση που αναπαράγει το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1.40). Λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης (1.40) η μερική λύση παίρνει τη μορφή

$$x_{\text{μep}}(t) = \Gamma_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \Gamma_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad (1.41)$$

όπου με αντικατάσταση στην εξίσωση (1.40) βρίσκουμε τα πλάτη και φάσεις της ταλάντωσης ως

$$\Gamma_1 = \frac{f_1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + \omega_1^2 \gamma^2}}, \quad \tan \phi_1 = \frac{\gamma \omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2}. \quad (1.42\alpha)$$

$$\Gamma_2 = \frac{f_2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_2^2 \gamma^2}}, \quad \tan \phi_2 = \frac{\gamma \omega_2}{\omega_2^2 - \omega^2}. \quad (1.43\beta)$$

Είναι φανερό ότι οι συντελεστές πλάτους και φάσης είναι όμοιοι με αυτούς που υπολογίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο σαν κάθε όρος της δύναμης να μην βλέπει την επίδραση των υπολοίπων όρων πάνω στο σωματίδιο μας. Το αποτέλεσμα αυτό είναι απόρροια της γραμμικότητας της εξίσωσης (1.40).

Ενδιαφέρον στην περίπτωση αυτή έχει το φαινόμενο του συντονισμού. Θα εξετάσουμε το φαινόμενο συντονισμού της χρονικά μέσης κινητικής ενέργειας. Η κινητική ενέργεια, για μεγάλους χρόνους, στην περίπτωση αυτή είναι

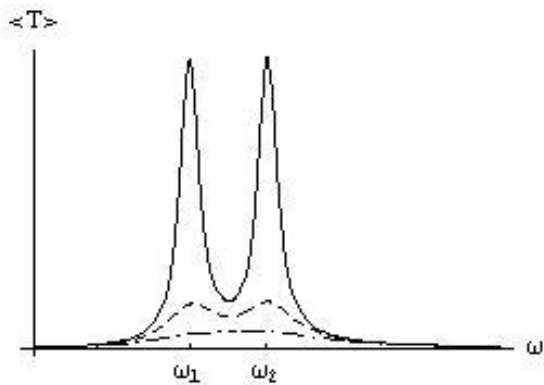
$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[\Gamma_1^2\omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \phi_1) + \Gamma_2^2\omega_2^2 \sin^2(\omega_2 t + \phi_2) + 2\Gamma_1\Gamma_2\omega_1\omega_2 \sin(\omega_1 t + \phi_1)\sin(\omega_2 t + \phi_2)]. \quad (1.44)$$

Υπολογίζοντας τη μέση χρονικά τιμή κάθε όρου θα έχουμε

$\langle \sin^2(\omega_1 t + \phi_1) \rangle = \langle \sin^2(\omega_2 t + \phi_2) \rangle = 1/2$ και $\langle \sin(\omega_1 t + \phi_1)\sin(\omega_2 t + \phi_2) \rangle = 0$ και η μέση κινητική ενέργεια γίνεται

$$\langle T \rangle = \frac{m}{4} \left[\frac{f_1^2 \omega_1^2}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + \omega_1^2 \gamma^2} + \frac{f_2^2 \omega_2^2}{(\omega^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_2^2 \gamma^2} \right]. \quad (1.45)$$

Οι συχνότητες συντονισμού της κινητικής ενέργειας με τα $\omega_1, \omega_2, \gamma$ σταθερά είναι ω_1 και ω_2 , δηλαδή ίδιες με τις συχνότητες διέγερσης. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, όταν οι συχνότητες διέγερσης είναι μακριά και δεν υπάρχει μεγάλη απόσβεση βλέπουμε καθαρά δύο συχνότητες συντονισμού στο σύστημα μας (Σχήμα 1.7, συνεχόμενη καμπύλη). Στην περίπτωση όμως που η απόσβεση μεγαλώνει ή οι συχνότητες διέγερσης έρχονται κοντά η επικάλυψη των δύο καμπυλών είναι αρκετά μεγάλη έτσι ώστε δημιουργείται μόνο μια πλατιά κορυφή στο σύστημα μας, δηλαδή μόνο μια συχνότητα συντονισμού, όπως φαίνεται από τη διακεκομμένη καμπύλη με κουκίδες στο σχήμα 1.7.



Σχήμα 1.7. Γραφική αναπαράσταση της μέσης κινητικής ενέργειας ως συνάρτηση της φυσικής συχνότητας του ταλαντωτή όταν $\gamma = 0.3(\omega_2 - \omega_1)$ (συνεχόμενη καμπύλη), $\gamma = 0.6(\omega_2 - \omega_1)$ (διακεκομμένη καμπύλη) και $\gamma = 1.5(\omega_2 - \omega_1)$ (διακεκομμένη καμπύλη με κουκίδες).

Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα μας στην περίπτωση που η δύναμη που ασκείται στον ταλαντωτή είναι της μορφής $F(t) = \sum_n F_n \cos \omega_n t$. Στην περίπτωση αυτή η μερική λύση,

σύμφωνα με τα παραπάνω θα είναι της μορφής

$$x_{\mu\phi}(t) = \sum_n \Gamma_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (1.46)$$

όπου

$$\Gamma_n = \frac{f_n}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + \omega_n^2 \gamma^2}}, \quad \tan \phi_n = \frac{\gamma \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}. \quad (1.47)$$

Άσκηση 1.10: Να βρεθεί η μερική λύση στην περίπτωση που $F(t) = \sum_n F_n \sin \omega_n t$.

Φτάνουμε λοιπόν σε ένα σημαντικό συμπέρασμα. Όταν ένα σώμα διεγείρεται από μια δύναμη που μπορεί να γραφεί σαν μια σειρά (πεπερασμένη ή άπειρη) αρμονικών όρων τότε η λύση της μερικής εξίσωσης μπορεί να γραφεί σαν μια παρόμοια σειρά αρμονικών όρων. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αρκετά σημαντικό αν θυμηθούμε ότι κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier, που είναι απλώς μια άπειρη σειρά αρμονικών όρων. Δηλαδή, μια οποιαδήποτε περιοδική δύναμη με περίοδο $T = 2\pi/\omega'$ μπορεί να αναπτυχθεί ως

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega't) + b_n \sin(n\omega't), \quad (1.48)$$

όπου

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(\tau) \cos(n\omega'\tau) d\tau, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(\tau) \sin(n\omega'\tau) d\tau. \quad (1.49)$$

Έτσι με χρήση της σειράς Fourier και της μεθόδου που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο αυτό μπορούμε να επιλύσουμε κάθε πρόβλημα εξωτερικά διεγερόμενου ταλαντωτή που διεγείρεται από οποιασδήποτε μορφής περιοδική δύναμη.

Άσκηση 1.11: Να μελετήσετε ένα αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση που διεγείρεται από περιοδική δύναμη της μορφής $F(t) = \begin{cases} ht & 0 < t < \pi \\ -ht & -\pi < t < 0 \end{cases}$.

1.6 Διδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής

Θα μελετήσουμε τώρα την κίνηση ενός σωματιδίου σε δύο διαστάσεις. Αν η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι της μορφής

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} = -kx\mathbf{e}_x - ky\mathbf{e}_y, \quad (1.50)$$

τότε η εξίσωση κίνησης (1.1) θα είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = -\omega^2(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y), \quad (1.51)$$

με $\omega = \sqrt{k/m}$. Η δύναμη (1.50) χαρακτηρίζει ένα διδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή. Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται και

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x, \quad (1.52\alpha)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2y, \quad (1.52\beta)$$

δηλαδή έχουμε απλώς δύο εξισώσεις μονοδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή. Η λύση των εξισώσεων αυτών, όπως γνωρίζουμε από την παράγραφο 1.2 είναι

$$x(t) = \Gamma_x \cos(\omega t + \phi_x), \quad (1.53\alpha)$$

$$y(t) = \Gamma_y \cos(\omega t + \phi_y), \quad (1.53\beta)$$

δηλαδή και στις δύο διευθύνσεις θα έχουμε απλη αρμονική ταλάντωση, όμως τα πλάτη και οι φάσεις μπορεί να διαφέρουν.

Μας ενδιαφέρει να εξάγουμε και την εξίσωση καμπύλης που περιγράφει την κίνηση του σωματιδίου στο επίπεδο. Γι' αυτό γράφουμε το $x(t)$ ως

$$\begin{aligned} x(t) &= \Gamma_x \cos(\omega t + \phi_y - \phi_y + \phi_x) = \Gamma_x \cos(\omega t + \phi_y + \delta) \\ &= \frac{\Gamma_x}{\Gamma_y} \Gamma_y \cos(\omega t + \phi_y) \cos \delta - \Gamma_x \sin(\omega t + \phi_y) \sin \delta \quad , \quad (1.54) \\ &= \frac{\Gamma_x}{\Gamma_y} y(t) \cos \delta - \Gamma_x \sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \phi_y)} \sin \delta \end{aligned}$$

με $\delta = \phi_x - \phi_y$. Η εξίσωση (1.54) μετά από απλές πράξεις μπορεί να γραφεί ως

$$\Gamma_y x - \Gamma_x y \cos \delta = -\Gamma_x \sqrt{\Gamma_y^2 - y^2} \sin \delta, \quad (1.55)$$

ή

$$\Gamma_y^2 x^2 - 2\Gamma_x \Gamma_y xy \cos \delta + \Gamma_x^2 y^2 = \Gamma_x^2 \Gamma_y^2 \sin^2 \delta. \quad (1.56)$$

Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει πλήρως την κίνηση του σωματιδίου μας στο επίπεδο. Στη γενική της μορφή δεν χαρακτηρίζει κάποια γνωστή καμπύλη, υπάρχουν όμως κάποιες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις. Όταν οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι τέτοιες ώστε $\delta = (n + 1/2)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ τότε

$$\frac{x^2}{\Gamma_x^2} + \frac{y^2}{\Gamma_y^2} = 1, \quad (1.57)$$

δηλαδή το σωματίδιο κάνει ελλειπτική κίνηση. Όταν τώρα έχουμε $\delta = (n + 1/2)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ αλλά και $\Gamma_x = \Gamma_y$ τότε

$$x^2 + y^2 = \Gamma_x^2, \quad (1.58)$$

άρα έχουμε κυκλική κίνηση. Εάν $\delta = 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ θα έχουμε

$$(\Gamma_y x - \Gamma_x y)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{\Gamma_y}{\Gamma_x} x, \quad (1.59)$$

άρα ευθύγραμμη κίνηση και τέλος αν $\delta = (2n + 1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$(\Gamma_y x + \Gamma_x y)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{\Gamma_y}{\Gamma_x} x, \quad (1.60)$$

επίσης ευθύγραμμη κίνηση αλλά αντίθετα από προηγουμένως.

1.7 Γενική μελέτη κίνησης σε μια διάσταση - σημεία ισορροπίας - μικρές ταλαντώσεις

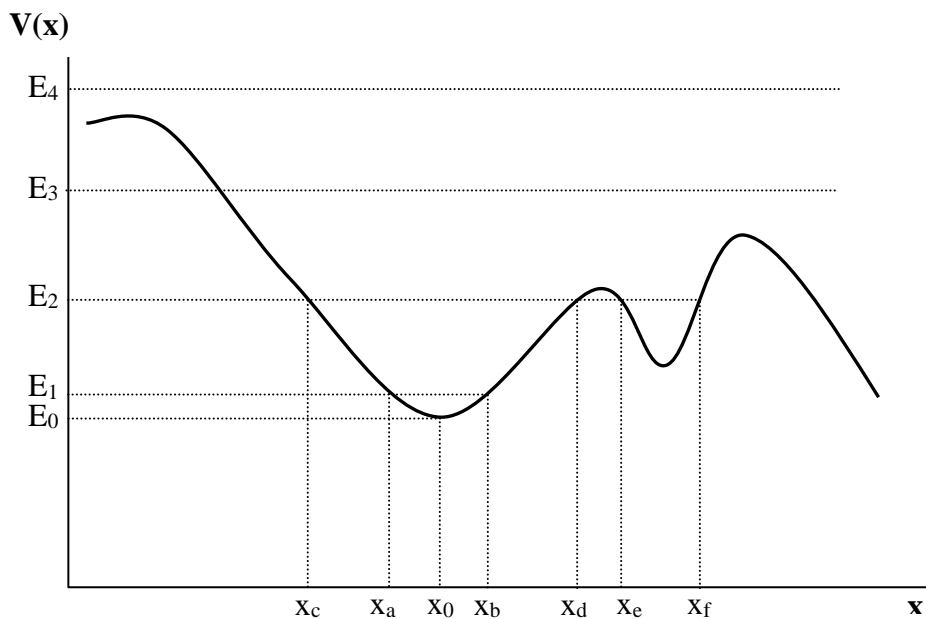
Εάν περιορίσουμε τη κίνηση του σωματιδίου μας σε μία διάσταση, από την εξίσωση (1.4) έχουμε

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x). \quad (1.61)$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση ως $v(t) = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}$ η οποία είναι διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και μπορεί να ολοκληρωθεί για να δώσει

$$t - t_i = \sqrt{\frac{1}{2}m} \int_{x_i}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \quad (1.62)$$

όπου $x(t = t_i) = x_i$. Η εξίσωση (1.62) αποτελεί τη γενική λύση της εξίσωσης κίνησης σε μονοδιάστατο δυναμικό. Το μόνο που απομένει είναι να βάλουμε το $V(x)$ στην εξίσωση και να ολοκληρώσουμε (χρησιμοποιώντας ακόμα και αριθμητικές τεχνικές στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζετε αναλυτικά).



Σχήμα 1.8

Επειδή, όμως, η κινητική ενέργεια είναι θετική η ολική ενέργεια υπερβαίνει πάντοτε την δυναμική ενέργεια, δηλαδή το σωματίδιο μας επιτρέπεται να κινείται μόνο σε διαστήματα όπου $V(x) \leq E$. Για παράδειγμα στο σχήμα 1.8, σωματίδιο με ενέργεια E_1 επιτρέπεται να κινείται μόνο μεταξύ x_a και x_b και η κίνηση του σωματιδίου είναι περιοδική. Τα σημεία όπου η δυναμική ενέργεια γίνεται ίση με την ολική ενέργεια $V(x) = E$, δηλαδή τα σημεία x_a και x_b στο σχήμα 1.8, καθορίζουν τα όρια της κίνησης και ονομάζονται σημεία καμπής. Παρόμοια εάν το σωματίδιο έχει ενέργεια E_2 τότε η κίνηση είναι επιτρεπτή μόνο μεταξύ των δύο περιοχών $x_c \leq x \leq x_d$ και $x_e \leq x \leq x_f$. Πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι, σύμφωνα πάντα με την κλασική θεωρία, το σωματίδιο δεν μπορεί να διαπεράσει το φράγμα δυναμικού και να βρεθεί από τη μία επιτρεπτή περιοχή στην άλλη. Από τη στιγμή που βρίσκεται σε μια από τις δύο περιοχές θα συνεχίσει να βρίσκεται σε αυτή την περιοχή για πάντα, εάν η ενέργεια του δεν αλλάξει. Ένα σωματίδιο με ενέργεια E_3 θα έρχεται από το άπειρο θα σταματάει στο $x = x_g$ και θα γυρίζει στο άπειρο, ενώ ένα σωματίδιο με ενέργεια E_4 εκτελεί μη δέσμια κίνηση και μπορεί να βρίσκεται σε κάθε θέση. Η ταχύτητα του, όμως, θα αλλάζει μια και εξαρτάται από τη διαφορά $E_4 - V(x)$. Τέλος ένα σωματίδιο με ενέργεια E_0 θα έχει σταθερή θέση $x = x_0$ και μηδενική ταχύτητα.

Το σημείο x_0 στο σχήμα 1.8, το ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας, είναι ένα σημείο ισορροπίας μια και εάν τοποθετήσουμε ένα σωματίδιο εκεί δεν θα μετακινηθεί. Τα σημεία ισορροπίας χωρίζονται σε ευσταθή και ασταθή. Στα ευσταθή σημεία, εάν το σωματίδιο τοποθετηθεί κοντά στο σημείο ισορροπίας θα επιστρέψει σε αυτό ενώ σε ασταθή δεν επιστρέφει στο σημείο ισορροπίας. Στην περίπτωση που η κίνηση γίνεται κοντά σε σημείο ισορροπίας, έστω στο x_0 , τότε η δυναμική ενέργεια μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor και να θεωρήσουμε ότι οι πρώτοι όροι της σειράς αυτής είναι αρκετοί για να περιγράψουν την κίνηση:

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0) \left[\frac{dV(x)}{dx} \right]_{x=x_0} + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \left[\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} + \dots \quad (1.63)$$

Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται προσέγγιση *μικρών ταλαντώσεων*. Ο σταθερός όρος $V(x_0)$ μπορεί να απαλειφθεί με επαναπροδιορισμό του μηδένος της δυναμικής ενέργειας, χωρίς συνέπειες στην κίνηση του σωματίου (υπενθυμίζουμε ότι

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}). \text{ Επίσης, } \left[\frac{dV(x)}{dx} \right]_{x=x_0} = 0 \text{ μια και το σημείο } x_0 \text{ είναι σημείο ισορροπίας. Οπότε η}$$

εξίσωση (1.63) δίδει

$$V(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} (x - x_0)^2. \quad (1.64)$$

Μπορούμε τώρα από το πρόσημο του $\left[\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0}$ να καθορίσουμε εάν η ισορροπία μας είναι

ευσταθής ή ασταθής. Ευσταθής θα είναι εάν $\left[\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} > 0$ και ασταθής εάν $\left[\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} < 0$.

Στην περίπτωση ευσταθούς ισορροπίας, όπως στο παράδειγμά μας, το αποτέλεσμα (1.64) μας δείχνει ότι κάθε μορφής δυναμικό μπορεί για μικρές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας του να προσεγγιστεί από το δυναμικό του απλού αρμονικού ταλαντωτή $V(q) = \frac{1}{2}kq^2$, με

$k = \left[\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0}$ και $q = x - x_0$. Άρα και οι μικρές ταλαντώσεις γύρω από σημείο ισορροπίας ενός

σωματιδίου που κινείται σε οποιοδήποτε δυναμικό είναι απλές αρμονικές ταλαντώσεις.

Παράδειγμα 1. Να υπολογιστεί η περίοδος ταλάντωσης, συναρτήσει της ολικής ενέργειας E , για σωματίδιο μάζας m που η δυναμική του ενέργεια περιγράφεται από (α) $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ και (β)

$V(x) = -\frac{a}{x}$, $x \geq 0$ και $V(x) \rightarrow \infty, x < 0$, και k, a θετικές σταθερές.

(α) Η περίοδος ταλάντωσης, είναι απλώς δύο φορές ο χρόνος που το σωματίδιο χρειάζεται για να κινηθεί μεταξύ δύο σημείων καμπής, έστω x_a και x_b , και μπορεί να υπολογισθεί από την εξίσωση (1.62) ως

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (1.65)$$

Στην περίπτωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή όπου $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ τα σημεία καμπής βρίσκονται

από τη σχέση $V(x) = E$ άρα $x_a = -\sqrt{\frac{2E}{k}}$, $x_b = \sqrt{\frac{2E}{k}}$. Έτσι,

$$T = \sqrt{2m} \int_{-\sqrt{\frac{2E}{k}}}^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kx^2}} = \sqrt{2m} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.66)$$

Άρα η περίοδος του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι ανεξάρτητη της ολικής ενέργειας.

(β) Στην περίπτωση του δυναμικού $V(x) = -\frac{a}{x}$, $x \geq 0$ και $V(x) \rightarrow \infty, x < 0$ τα σημεία καμπής είναι

τα $x_a = 0$ και $x_b = \frac{a}{|E|}$. Τότε,

$$T = \sqrt{2m} \int_0^{\frac{a}{|E|}} \frac{dx}{\sqrt{-|E| + \frac{a}{x}}} = \sqrt{2m} \frac{a\pi}{2|E|^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow T = \frac{\sqrt{ma}\pi}{\sqrt{2}|E|^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.67)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι $T \rightarrow 0$ όταν $|E| \rightarrow \infty$ και $T \rightarrow \infty$ όταν $|E| \rightarrow 0$.

Παράδειγμα 2. Μελετήστε την κίνηση για μικρές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας ενός σωματιδίου που κινείται στο δυναμικό $V(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$ όπου $b > 0$ και $a \neq 0$.

Αρχικά βρίσκουμε το σημείο ισορροπίας από τη σχέση

$$\left[\frac{dV(x)}{dx} \right]_{x=x_0} = 0 \Rightarrow \frac{a}{x_0^2} - 2\frac{b}{x_0^3} = 0, \quad (1.68)$$

άρα $x_0 = \frac{2b}{a}$. Γύρω από το σημείο ισορροπίας το δυναμικό μπορεί να προσεγγιστεί σύμφωνα με τη σχέση (1.64). Στην περίπτωση μας

$$\left[\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0} = -2\frac{a}{x_0^3} + 6\frac{b}{x_0^4} = \frac{a^4}{8b^3} > 0, \quad (1.69)$$

έτσι η ισορροπία είναι ευσταθής, οπότε και η κίνηση γύρω από το σημείο ισορροπίας είναι ίδια με του αρμονικού ταλαντωτή

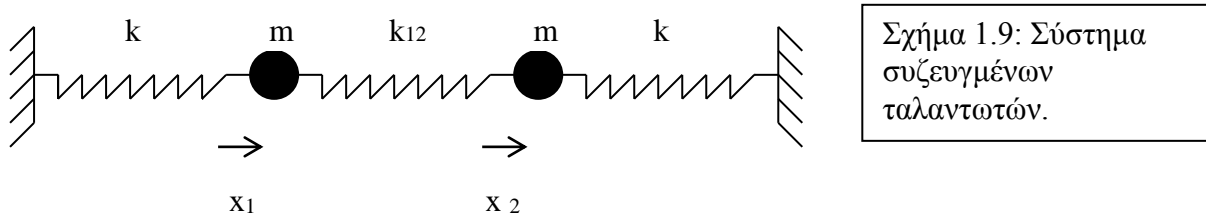
$$x(t) = x_0 + \Gamma \cos(\omega t + \phi), \quad (1.70)$$

με $\omega = 2\pi/T$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left[\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right]_{x=x_0}}} = 2\pi \sqrt{\frac{8mb^3}{a^4}}$ και Γ, ϕ αυθαίρετες σταθερές.

1.8 Συζευγμένες ταλαντώσεις - κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

Σε φυσικά προβλήματα που μπορούν να προσεγγιστούν από περισσότερες του ενός αρμονικούς ταλαντωτές οι ταλαντωτές αυτοί αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και δημιουργούν ένα σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα άτομα ενός στερεού τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω ελαστικών δυνάμεων με αποτέλεσμα να κάνουν ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας τους. Επίσης ένα μόριο, το οποίο αποτελείται από πολύ λιγότερα άτομα μπορεί να είναι ένα απλούστερο φυσικό παράδειγμα. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε ένα απλό μονοδιάστατο σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών το οποίο αποτελείται από δύο μάζες που είναι συνδεδεμένες με ένα ελατήριο μεταξύ τους αλλά και ταυτόχρονα συνδεδεμένες με δύο ελατήρια (από ένα η κάθε μάζα) που είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία. Ονομάζουμε τις μάζες m_1 και m_2 και τις σταθερές ελατηρίων k_1, k_2, k_{12} όπου k_1 (k_2) η σταθερά του ελατηρίου

που συνδέει τη μάζα m_1 (m_2) με το αντίστοιχο ακλόνητο σημείο και k_{12} η σταθερά του ελατηρίου που συνδέει τις δύο μάζες. Θα αναλύσουμε μόνο την περίπτωση που $k_1 = k_2 = k$ και $m_1 = m_2 = m$ (δείτε το σχήμα 1.9).



Μας ενδιαφέρει να αναλύσουμε την κίνηση του συστήματος κατά τον άξονα που συνδέει τις δύο μάζες. Έστω x_1, x_2 οι απομακρύνσεις από τα σημεία ισορροπίας των μαζών m_1 και m_2 αντίστοιχα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα m_1 είναι $-kx_1$ λόγω της επιμήκυνσης του ελατηρίου k_1 , $-k_{12}x_1$ λόγω της συμπίεσης του ελατηρίου k_{12} και $k_{12}x_2$ λόγω της επιμήκυνσης του ελατηρίου k_{12} . Συνδυάζοντας τις δυνάμεις παίρνουμε την εξίσωση κίνησης στη μορφή

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 - k_{12}(x_1 - x_2). \quad (1.71)$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση κίνησης για τη μάζα m_2 ως

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx_2 + k_{12}(x_1 - x_2). \quad (1.72)$$

Παρατηρούμε ότι οι δυνάμεις που ασκούνται από το ελατήριο k_{12} εξαρτώνται μόνο από τη διαφορά $x_1 - x_2$. Η επίλυση των παραπάνω δύο εξισώσεων είναι το βασικό θέμα μας. Η επίλυση μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους και θα αναλύσουμε δύο από αυτές.

Μέθοδος 1 : Απλός τρόπος αποσύζευξης εξισώσεων.

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή μας ενδιαφέρει να βρούμε γραμμικούς συνδυασμούς των x_1, x_2 που να οδηγούν σε εξίσωσης κίνησης απλής αρμονικής κίνησης. Παρατηρώντας τις εξισώσεις (1.71) και (1.72) βλέπουμε ότι αν ορίσουμε ως νέες μεταβλητές τις

$$h_1 = x_1 + x_2, \quad h_2 = x_1 - x_2, \quad (1.73)$$

τότε οι εξισώσεις κίνησης για τις νέες μεταβλητές γίνονται

$$m \frac{d^2 h_1}{dt^2} = -kh_1, \quad (1.74\alpha)$$

$$m \frac{d^2 h_2}{dt^2} = -(k + 2k_{12})h_2. \quad (1.74\beta)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για τις νέες μεταβλητές οι εξισώσεις κίνησης είναι εξισώσεις κίνησης απλής αρμονικής ταλάντωσης. Καταφέραμε λοιπόν με μια απλή αλλαγή μεταβλητών να

μετατρέψουμε ένα πρόβλημα συζευγμένων ταλαντωτών σε πρόβλημα ανεξάρτητων ταλαντωτών. Οι μεταβλητές h_1, h_2 ονομάζονται *κανονικές μεταβλητές* του συστήματος και εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις που ονομάζονται *κανονικοί τρόποι ταλάντωσης* του συστήματος (δείτε το σχήμα 1.10).

Η λύση των εξισώσεων (1.74α) και (1.74β) δίνεται από τις σχέσεις

$$h_1(t) = \Gamma_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad h_2(t) = \Gamma_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad (1.75)$$

όπου $\Gamma_1, \Gamma_2, \phi_1, \phi_2$ αυθαίρετες σταθερές και

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}, \quad (1.76)$$

οι κυκλικές συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλαντώσεως οι οποίες ονομάζονται *ιδιοσυχνότητες* ή κανονικές συχνότητες του συστήματος. Από τις εξισώσεις (1.73) παίρνουμε ότι

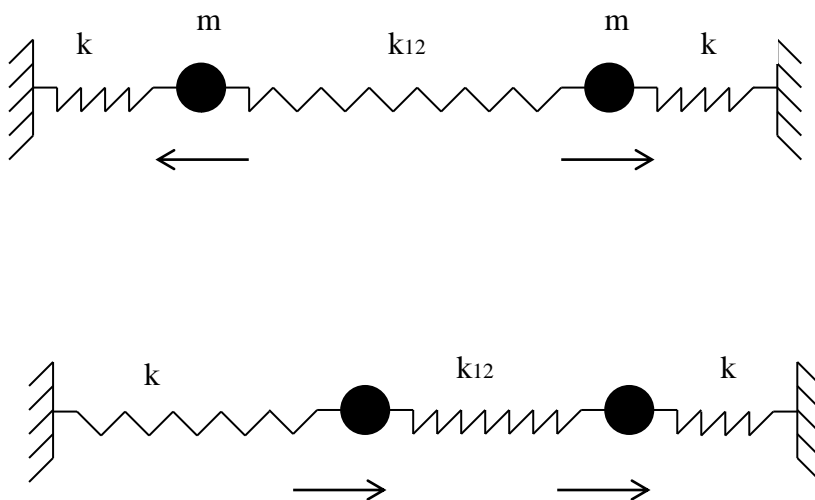
$$x_1 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2), \quad x_2 = \frac{1}{2}(h_1 - h_2), \quad (1.77)$$

άρα οι λύσεις είναι

$$x_1(t) = \frac{\Gamma_1}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{\Gamma_2}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad (1.78\alpha)$$

$$x_2(t) = \frac{\Gamma_1}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_1) - \frac{\Gamma_2}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (1.78\beta)$$

δηλαδή οι λύσεις του προβλήματος είναι απλώς ένας γραμμικός συνδυασμός των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γενικό και ισχύει και σε πολύπλοκα προβλήματα συζευγμένων ταλαντωτών.



Σχήμα 1.10: Γραφική αναπαράσταση των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ενός συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών.

Άσκηση 1.12: Μελετήστε τις μικρές ταλαντώσεις των γωνιών ενός συστήματος δύο απλών όμοιων εκκρεμών που οι μάζες τους συνδέονται με ελατήριο.

Μέθοδος 2: Γενικός Τρόπος

Οι εξισώσεις (1.71) και (1.72) μπορούν να γραφούν και στη μορφή

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k+k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k+k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.79)$$

η οποία με τις αντικαταστάσεις

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k+k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k+k_{12} \end{pmatrix}, \quad (1.80)$$

παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} + \frac{1}{m} \mathbf{k} \mathbf{x} = 0. \quad (1.81)$$

Λόγω της μορφής της παραπάνω εξίσωσης θα αναζητήσουμε λύσεις

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} e^{i\omega t}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (1.82)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.81) θα έχουμε

$$-\omega^2 \mathbf{A} + \frac{1}{m} \mathbf{k} \mathbf{A} = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \frac{k+k_{12}}{m} - \omega^2 & -\frac{k_{12}}{m} \\ -\frac{k_{12}}{m} & \frac{k+k_{12}}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.83)$$

η οποία έχει λύση όταν η ορίζουσα του πίνακα μας μηδενίζεται, δηλαδή

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \frac{k+k_{12}}{m} - \omega^2 & -\frac{k_{12}}{m} \\ -\frac{k_{12}}{m} & \frac{k+k_{12}}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.84)$$

η οποία έχει λύσεις (ιδιοτιμές)

$$\omega_1^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad \omega_2^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}}, \quad (1.85)$$

και ιδιοδιανύσματα (μη κανονικοποιημένα)

$$\omega = \omega_1^{(\pm)}, \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \omega = \omega_2^{(\pm)}, \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1.86)$$

Οι απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών (1.85) είναι οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος και τα ιδιοδιανύσματα καθορίζουν τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Δηλαδή για $\omega = \omega_1^{(\pm)}$ έχουμε τον συμμετρικό τρόπο ταλάντωσης, που περιγράφεται από την κανονική συντεταγμένη h_1 , και μας

δείχνει ότι οι δύο μάζες ταλαντώνονται σε φάση και για $\omega = \omega_2^{(\pm)}$ έχουμε τον αντισυμμετρικό τρόπο ταλάντωσης, που περιγράφεται από την κανονική συντεταγμένη h_2 , και μας δείχνει ότι οι δύο μάζες ταλαντώνονται με διαφορά φάσης 180 μοιρών.

Η λύση των εξισώσεων (1.71) και (1.72) με τη μέθοδο αυτή δίνεται από τη σχέση

$$x_1(t) = A_1^+ \exp(i\omega_1^+ t) + A_1^- \exp(i\omega_1^- t) + A_2^+ \exp(i\omega_2^+ t) + A_2^- \exp(i\omega_2^- t), \quad (1.87\alpha)$$

$$x_2(t) = A_1^+ \exp(i\omega_1^+ t) + A_1^- \exp(i\omega_1^- t) - A_2^+ \exp(i\omega_2^+ t) - A_2^- \exp(i\omega_2^- t), \quad (1.87\beta)$$

η οποία μπορεί να ξαναγραφεί και ως

$$x_1(t) = A_1^+ \exp(i\omega_1 t) + A_1^- \exp(-i\omega_1 t) + A_2^+ \exp(i\omega_2 t) + A_2^- \exp(-i\omega_2 t), \quad (1.88\alpha)$$

$$x_2(t) = A_1^+ \exp(i\omega_1 t) + A_1^- \exp(-i\omega_1 t) - A_2^+ \exp(i\omega_2 t) - A_2^- \exp(-i\omega_2 t), \quad (1.88\beta)$$

ή και στη ισοδύναμη μορφή των εξισώσεων (1.78α) και (1.78β). Φυσικά θα πρέπει $(A_1^+)^* = A_1^-$ και $(A_2^+)^* = A_2^-$ ώστε οι απομακρύνσεις $x_1(t), x_2(t)$ να είναι πραγματικές.

Παράδειγμα: Να μελετηθεί η κίνηση του συστήματος με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = x_0, x_2(0) = 0$,

$$\left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx_2}{dt} \right|_{t=0} = 0 \text{ στην περίπτωση ασθενούς σύζευξης μεταξύ των μαζών, δηλαδή όταν}$$

$$k_{12} \ll k.$$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω αρχικές συνθήκες στις εξισώσεις (1.88α) και (1.88β) παίρνουμε

$$x_1(t) = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = x_0 \left[\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \right], \quad (1.89\alpha)$$

$$x_2(t) = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = x_0 \left[\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \right]. \quad (1.89\beta)$$

Όταν $k_{12} \ll k$, βάση της εξίσωσης (1.85) θα έχουμε

$$\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1, \quad (1.90)$$

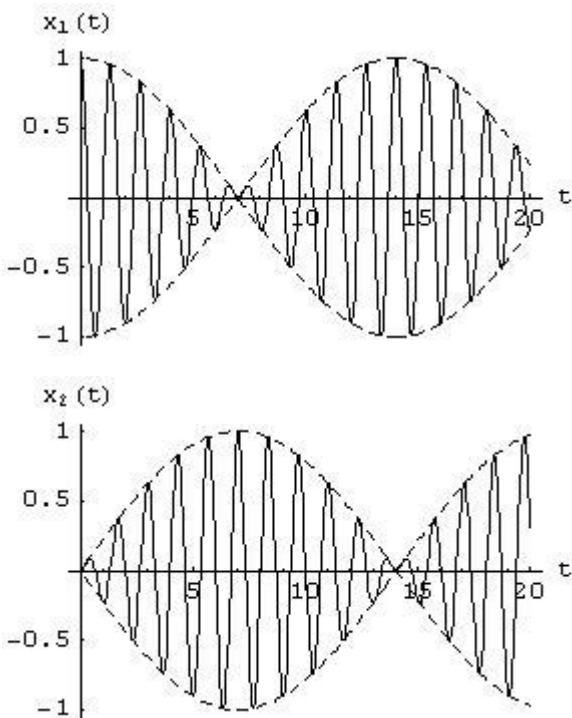
και συνεπώς οι όροι $\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$ μεταβάλλονται πολύ πιο γρήγορα από ότι οι

όροι $\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right), \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$. Στην περίπτωση αυτή η κίνηση φαίνεται στο Σχήμα 1.11. Η

περιβάλλουσα, αργή, κίνηση στο σχήμα είναι λόγω των όρων $\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right), \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$ ενώ η

γρήγορη κίνηση λόγω των όρων $\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η

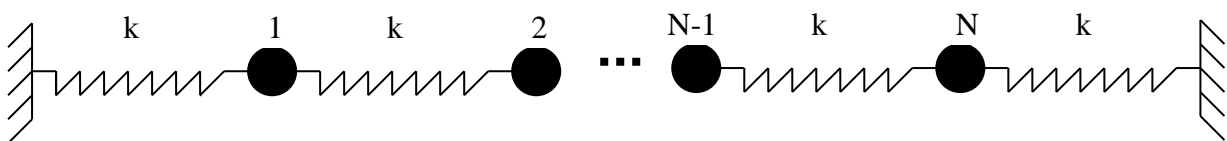
κίνηση μεταφέρεται από τον πρώτο ταλαντωτή στον δεύτερο ταλαντωτή και αντίστροφα. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως διακρότημα.



Σχήμα 1.11

1.9 Γενικευμένο σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε ένα γενικευμένο μονοδιάστατο σύστημα N συζευγμένων ταλαντωτών, δείτε το σχήμα 1.12, το οποίο αποτελείται από N όμοιες μάζες που η κάθε μια είναι συνδεδεμένη με την επόμενη με όμοιο ελατήριο (από ένα η κάθε μάζα) και η πρώτη (που θα είναι η μάζα με χαρακτηριστικό αριθμό ή δείκτη 1) και η τελευταία (που θα είναι η μάζα με δείκτη N) συνδέονται μέσω ελατηρίων σε ακλόνητα σημεία x_0, x_{N+1} . Ονομάζουμε τις μάζες m και τις σταθερές ελατηρίων k . Μας ενδιαφέρει να αναλύσουμε την κίνηση του συστήματος κατά τον άξονα που συνδέει τις μάζες (διαμήκης κίνηση). Έστω x_1, x_2, \dots, x_N οι απομακρύνσεις από τα σημεία ισορροπίας των μαζών με δείκτες $1, 2, \dots, N$ αντίστοιχα.



Σχήμα 1.12: Σύστημα N συζευγμένων ταλαντωτών.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα με δείκτη j είναι

$$F_j = -k(x_j - x_{j-1}) - k(x_j - x_{j+1}), \quad \text{με } j = 1, \dots, N, \quad (1.91)$$

και

$$x_0 = x_{N+1} = 0, \quad (1.92)$$

οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Η εξίσωση κίνησης για την τυχούσα μάζα με δείκτη j είναι

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} = \frac{k}{m} (x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}), \quad (1.93)$$

άρα όλο το πρόβλημα περιγράφεται από ένα σύστημα N διαφορικών εξισώσεων. Για την επίλυση του συστήματος, κατά το συνήθη τρόπο, θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής

$$x_j(t) = A_j e^{i\omega t}, \quad (1.94)$$

οι οποίες με αντικατάσταση στην εξίσωση (1.93) οδηγούν στην εξίσωση

$$-\frac{k}{m} A_{j-1} + \left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right) A_j - \frac{k}{m} A_{j+1} = 0, \quad (1.95)$$

και $A_0 = A_{N+1} = 0$ για τις συνοριακές συνθήκες. Η εξίσωση (1.95) είναι μια εξίσωση διαφορών και είναι αυτή που πρέπει να λυθεί για τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων του συστήματος. Γράφοντας την εξίσωση διαφορών σε μορφή πίνακα καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται από την ορίζουσα του πίνακα

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 2\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} - \omega^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = 0. \quad (1.96)$$

Για την περίπτωση που $N = 1$ παίρνουμε $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ ενώ για $N = 2$ παίρνουμε δύο ιδιοσυχνότητες τις

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \text{όπως περιμέναμε από την προηγούμενη παράγραφο. Για τις περιπτώσεις}$$

που $N = 3$ θα πάρουμε τρεις ιδιοσυχνότητες και για $N = 4$ θα πάρουμε τέσσερις ιδιοσυχνότητες μετά από μια σειρά από απλές πράξεις (κάντε το σαν άσκηση). Όταν όμως ο αριθμός των ταλαντωτών μεγαλώνει ο παραπάνω τρόπος γίνεται πολύπλοκος και έτσι η συγκεκριμένη μέθοδος δύσχρηστη.

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα στην γενική περίπτωση αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$A_j = A \exp[i(j\gamma - \delta)] , \quad (1.97)$$

με A πραγματική σταθερά. Αντικαθιστώντας στην λύση (1.97) στην εξίσωση (1.95) παίρνουμε ότι

$$\omega^2 = \frac{k}{m} (2 - e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}) = \frac{2k}{m} (1 - \cos \gamma) = \frac{4k}{m} \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad \text{ή} \quad \omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad (1.98)$$

για τις ιδιοσυχνότητες του προβλήματος. Βέβαια δεν έχουμε καθορίσει την σταθερά γ η οποία θα καθοριστεί από τις συνοριακές συνθήκες οι οποίες θα μας δώσουν, για το πραγματικό μέρος του A_j το οποίο έχει και φυσικό νόημα

$$\cos \delta = 0 \quad \text{άρα} \quad \delta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.99)$$

και

$$\cos\left[(N+1)\gamma - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] = 0 \Rightarrow \sin[(N+1)\gamma] = 0 \quad \text{άρα} \quad \gamma = \frac{n\pi}{N+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.100)$$

οπότε

$$\omega = \omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.101)$$

και

$$A_j^{(n)} = A_n \sin\left(j \frac{n\pi}{N+1}\right), \quad n = 1, 2, \dots. \quad (1.102)$$

Άσκηση 1.13: Δείξτε, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, ότι εάν έχουμε N ταλαντωτές θα έχουμε ακριβώς N ιδιοσυχνότητες, άρα και N κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, στο σύστημα μας.

1.10 Εγκάρσιες ταλαντώσεις

Στις δύο προηγούμενες παραγράφους μελετήσαμε μονοδιάστατα συστήματα που ταλαντώνονται κατά τον άξονα που συνδέει τις μάζες (διαμήκης κίνηση). Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τι συμβαίνει όταν η διέγερση του συστήματος γίνεται σε άξονα κάθετο σε αυτόν που συνδέει τις μάζες (εγκάρσια κίνηση). Θα μελετήσουμε ένα απλό μονοδιάστατο σύστημα με μια μάζα και δύο όμοια ελατήρια όπου η μάζα συνδέεται εκατέρωθεν με τα ελατήρια σε ακλόνητα σημεία. Εάν ονομάσουμε άξονα x τον άξονα που συνδέει τις μάζες και άξονα y τον άξονα κάθετο στον x μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το πρόβλημα των μικρών ταλαντώσεων κατά τον άξονα y . Η δύναμη επαναφοράς κατά τον άξονα y είναι $F = -2kL \sin \theta$. Επειδή όμως για μικρές ταλαντώσεις του συστήματος, δηλαδή για $y \ll d$, μπορούμε να προσεγγίσουμε

$$L = \sqrt{y^2 + d^2} \approx d \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + d^2}} \approx \frac{y}{d}, \quad (1.103)$$

παίρνουμε ότι η δύναμη που ασκείται από τα ελατήρια στη μάζα m είναι $F = -2ky$, άρα υπακούει το νόμο του Hooke. Άρα όσα είπαμε για την κίνηση ενός απλού ταλαντωτή μπορούν τώρα να εφαρμοστούν και στο πρόβλημα της εγκάρσιας ταλάντωσης. Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία και στην περίπτωση του προβλήματος των δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων της παραγράφου 1.8, αλλά με όμοια ελατήρια, θα έχουμε (βρείτε τις δυνάμεις σαν άσκηση) για τις εξισώσεις κίνησης της εγκάρσιας κίνησης

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -ky_1 - k(y_1 - y_2), \quad (1.104)$$

και

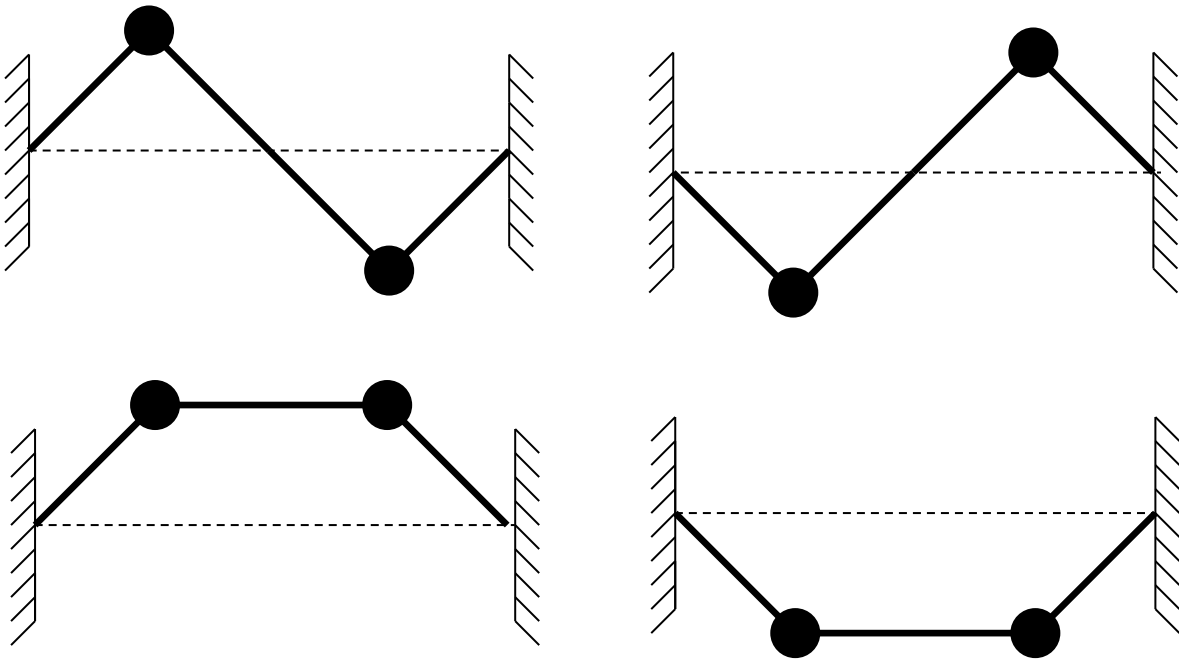
$$m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -ky_2 + k(y_1 - y_2), \quad (1.105)$$

οι οποίες είναι όμοιες με τις εξισώσεις (1.71) και (1.72). Άρα και η ανάλυση της παραγράφου 1.8 ισχύει και σε αυτή την περίπτωση δηλαδή υπάρχουν δύο κανονικοί τρόποι ταλάντωσης στο σύστημα μας, ο συμμετρικός με ιδιοσυχνότητα $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ και ο αντισυμμετρικός με ιδιοσυχνότητα

$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ οι οποίοι φαίνονται και στο σχήμα 1.13. Τα αποτελέσματα αυτά γενικεύονται και στο παράδειγμα που μελετήσαμε στην παράγραφο 1.9, αλλά για την εγκάρσια κίνηση του συστήματος. Η εξίσωση κίνησης για την τυχούσα μάζα με δείκτη j στην περίπτωση αυτή είναι

$$\frac{d^2 y_j}{dt^2} = \frac{k}{m} (y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}), \quad (1.104)$$

που είναι όμοια με την εξίσωση (1.93), άρα και τα αποτελέσματα που βγάλαμε για τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος ισχύουν και στην περίπτωση αυτή. Δηλαδή υπάρχουν N κανονικοί τρόποι ταλάντωσης που περιγράφονται από τις ιδιοσυχνότητες της εξίσωσης (1.101).



Σχήμα 1.13: Γραφική αναπαράσταση των κανονικών τρόπων εγκάρσιας ταλάντωσης (για απλότητα τα ελατήρια έχουν αντικατασταθεί από νήματα).

Κεφάλαιο 2

Λανγκρανζιανός και Χαμιλτονιανός Φορμαλισμός-Εισαγωγή στη Μηχανική Στερεού Σώματος

2.1 Εισαγωγή στην άλγεβρα μεταβολών

Ας θεωρήσουμε το παρακάτω πρόβλημα. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ για την οποία το παρακάτω ολοκλήρωμα παρουσιάζει ακρότατα (μέγιστα, ελάχιστα ή σαγματικά σημεία):

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx, \quad (2.1)$$

με $y' = \frac{dy}{dx}$. Προβλήματα όπως το παραπάνω, που αναφέρονται στον προσδιορισμό ακρότατων τιμών ολοκληρωμάτων τα οποία περιέχουν άγνωστες συναρτήσεις υπάγονται στον τομέα άλγεβρας ή λογισμού μεταβολών. Στην εφαρμογή της άλγεβρας μεταβολών στην μηχανική μας ενδιαφέρει συνήθως ο υπολογισμός ελαχίστων των ολοκληρωμάτων της παραπάνω μορφής, έτσι θα ειδικεύσουμε τη συζήτηση μας για την περίπτωση που το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται ελάχιστο.

Για να επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα υποθέτουμε ότι υπάρχει μια καμπύλη (συνάρτηση) έστω $y = y(x)$ που ελαχιστοποιεί τα παραπάνω ολοκλήρωμα. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει μια άλλη καμπύλη, $y(x, a) = y(x) + a\eta(x)$ που διαφέρει έστω και λίγο από την $y(x)$, όπου $\eta(x)$ μια τυχαία συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και a μια μικρή παράμετρο. Η συνάρτηση $\eta(x)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Για την καμπύλη $y(x, a)$ το ολοκλήρωμα (2.1) παίρνει τη μορφή

$$J(a) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, a), y'(x, a), x] dx. \quad (2.2)$$

Επειδή όμως για $a = 0$ η συνάρτηση $y(x, a) = y(x)$, η συνάρτηση $J(a)$ (μια πιο ακριβής ονομασία της J είναι συναρτησιακό και όχι συνάρτηση) γίνεται ελάχιστη. Μια αναγκαία συνθήκη είναι για να ισχύει αυτό είναι

$$\left. \frac{\partial J}{\partial a} \right|_{a=0} = 0, \quad (2.3)$$

και αυτό πρέπει να ισχύει για κάθε συνάρτηση $\eta(x)$. Όμως

$$\frac{\partial J(a)}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial a} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right] dx. \quad (2.4)$$

Από το δεύτερο όρο του ολοκληρώματος θα πάρουμε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες και με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ ότι

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} = - \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx, \quad (2.5)$$

και έτσι

$$\frac{\partial J(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx. \quad (2.6)$$

Για την περίπτωση που το συναρτησιακό ελαχιστοποιείται πρέπει να ισχύει η συνθήκη (2.3) η οποία σε συνδυασμό με την εξίσωση (2.6) οδηγεί στην εξίσωση

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (2.7)$$

Η παραπάνω είναι γνωστή ως εξίσωση Euler ή εξίσωση Euler-Lagrange και είναι αυτή που πρέπει να ικανοποιείται για να γίνει το συναρτησιακό ελάχιστο.

Άσκηση 2.1: Να βρεθεί η καμπύλη η οποία δίνει την ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων σε καρτεσιανό επίπεδο x, y .

Εάν η συνάρτηση f που βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα εξαρτάται από περισσότερες από μια εξαρτημένες μεταβλητές (έστω N στο πλήθος), έτσι ώστε $f = f(y_i, y_i', x)$ με $i = 1, 2, \dots, N$ τότε για να γίνει το ολοκλήρωμα ελάχιστο η εξίσωση Euler-Lagrange παίρνει τη μορφή

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad \text{με } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.8)$$

2.2 Λαγκρανζιανή - εξίσωση Lagrange

Ορίζουμε ως δράση το ολοκλήρωμα χρόνου της διαφοράς μεταξύ κινητικής και δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt. \quad (2.9)$$

Ορίζουμε επίσης ως Λαγκρανζιανή (Lagrangian) τη διαφορά κινητικής και δυναμικής ενέργειας

$$L = T - V, \quad (2.10)$$

έτσι

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (2.11)$$

Η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος είναι συνάρτηση των γενικευμένων μεταβλητών θέσης και ταχύτητας, που θα τις συμβολίζουμε ως $q_i, \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$, όπως και του χρόνου.

Αρχή του Hamilton: Από όλες τις διαδρομές σύμφωνα με τις οποίες ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να κινηθεί από ένα σημείο σε ένα άλλο σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (σε συνάρτηση με όλους τους περιορισμούς), η διαδρομή που το σύστημα ακολουθεί είναι αυτή που ελαχιστοποιεί τη δράση.

Σύμφωνα λοιπόν με την αρχή του Hamilton και χρησιμοποιώντας την εξίσωση Euler-Lagrange παίρνουμε ότι η Λαγκρανζιανή ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις που είναι γνωστές ως εξισώσεις Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 . \quad (2.12)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μαζί με τις εξισώσεις για τους περιορισμούς αλλά και τις αρχικές συνθήκες είναι αρκετές για να περιγράψουν πλήρως την κίνηση του συστήματος. Κατ' αναλογία με την εξίσωση κίνησης του Newton μπορούμε να ορίσουμε ως γενικευμένη ορμή την έκφραση

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} , \quad (2.13)$$

και ως γενικευμένη δύναμη την έκφραση

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} , \quad (2.14)$$

έτσι ώστε η εξίσωση για την Λαγκρανζιανή να παίρνει τη μορφή $\frac{dp_i}{dt} = F_i$.

Παράδειγμα 1: Κίνηση σε μια διάσταση σε διατηρητικό πεδίο δυνάμεων.

Θεωρούμε ότι ένα σώμα μάζας m κινείται σε μια διάσταση σε διατηρητικό πεδίο δυνάμεων που περιγράφεται από το δυναμικό $V(x)$. Η Λαγκρανζιανή του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) . \quad (2.15)$$

Όμως

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} . \quad (2.16)$$

Έτσι η εξίσωση κίνησης δίνεται από τη σχέση (2.12)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x} , \quad (2.17)$$

που είναι ίδια με την εξίσωση κίνησης Newton.

Παράδειγμα 2: Να δείξετε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος δύο μαζών που αναλύθηκε στην παράγραφο 1.8.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο μαζών γράφεται ως

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2, \quad (2.18)$$

και η δυναμική ενέργεια ως

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2. \quad (2.19)$$

Έτσι η Λαγκρανζιανή γράφεται ως

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}k_{12}(x_1 - x_2)^2, \quad (2.20)$$

και έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= m\dot{x}_1, & \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= m\dot{x}_2, \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -kx_1 - k_{12}(x_1 - x_2), & \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -kx_2 + k_{12}(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

άρα χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.12) παίρνουμε τις εξισώσεις (1.71), (1.72) για την κίνηση του συστήματος.

Αναφέραμε παραπάνω την έννοια των γενικευμένων μεταβλητών. Θα αναλύσουμε συνοπτικά την έννοια αυτών συντεταγμένων. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα που αποτελείται από N στοιχειώδεις μάζες. Η θέση του συστήματος αυτού μπορεί να περιγραφεί πλήρως με τη χρήση N διανυσμάτων θέσης. Επειδή κάθε τέτοιο διάνυσμα μπορεί να περιγραφεί με τρεις αριθμούς (για παράδειγμα μπορεί να αναλυθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες) τότε χρειαζόμαστε $3N$ ανεξάρτητες συντεταγμένες για να περιγράψουμε το σύστημα. Υπάρχει όμως η περίπτωση, λόγω της φύσης της κίνησης, να υπάρχουν περιορισμοί, εκφραζόμενοι με εξισώσεις, που να συνδέουν κάποιες από τις συντεταγμένες που περιγράφουν το σύστημα. Τότε οι συντεταγμένες δεν είναι ανεξάρτητες. Αν για παράδειγμα υπάρχουν M εξισώσεις περιορισμών (ή δεσμών) τότε θα υπάρχουν $3N - M$ ανεξάρτητες μεταβλητές που περιγράφουν το σύστημα και τότε λέμε ότι το σύστημα έχει $3N - M$ βαθμούς ελευθερίας.

Τονίζουμε ότι οι $3N - M$ μεταβλητές που περιγράφουν το σύστημα δεν είναι απαραίτητο να διαλεχτούν μέσα από ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων. Οποιοσδήποτε $3N - M$ ανεξάρτητες παράμετροι μπορούν να διαλεχτούν αρκεί να περιγράφουν πλήρως την

κατάσταση του συστήματος. Επίσης δεν είναι απαραίτητο οι συντεταγμένες αυτές να έχουν διαστάσεις θέσεις, μπορεί για παράδειγμα να είναι γωνίες ή συντεταγμένες που έχουν διαστάσεις ενέργειας, κλπ. και γι' αυτό ονομάζονται *γενικευμένες συντεταγμένες*. Ανάλογα με το πρόβλημα που μελετάμε διαλέγουμε κατάλληλα τις συντεταγμένες εκείνες που είναι βολικές για την απλούστερη ανάλυσή του. Στη περίπτωση που οι εξισώσεις των περιορισμών μπορούν να επιλυθούν έτσι ώστε να μπορούμε να απαλείψουμε κάποιες από τις συντεταγμένες που περιγράφουν το σύστημα και να καταλήξουμε σ' ένα σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων ίσο σε πλήθος με τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος, χαρακτηρίζουμε το σύστημα ολόνομο. Στην περίπτωση που αυτό δεν είναι εφικτό το σύστημα ονομάζεται μη-ολόνομο.

Υπάρχουν δύο τρόποι που μπορούμε να το μελετήσουμε ένα ολόνομο σύστημα που υπόκειται σε περιορισμούς. Ο πρώτος, ο οποίος ίσως είναι και ο πιο απλός αλλά πολλές φορές σε πολύπλοκα προβλήματα είναι δύσκολο να εφαρμοστεί, έχει ήδη περιγραφεί παραπάνω. Απλώς χρησιμοποιούμε τους περιορισμούς για την απαλοιφή κάποιων συντεταγμένων έτσι ώστε να βρούμε τις γενικευμένες συντεταγμένες του προβλήματος και να χρησιμοποιήσουμε κατόπιν τη σχέση (2.12) για τη δυναμική του συστήματος. Ο δεύτερος τρόπος χρησιμοποιεί πολλαπλασιαστές Lagrange¹ και, αν και φαίνεται περισσότερο πολύπλοκος από τον πρώτο, έχει το πλεονέκτημα ότι χρησιμοποιώντας τον μπορούμε να υπολογίσουμε τις δυνάμεις περιορισμών. Θα αναλύσουμε τον τρόπο αυτό συνοπτικά παρακάτω.

Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με τη θεωρία πολλαπλασιαστών Lagrange, για να υπολογίσουμε τα ακρότατα μιας συνεχώς διαφορίσιμης συνάρτησης $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ της οποίας οι μεταβλητές υπόκεινται σε M συνεχώς διαφορίσιμες σχέσεις περιορισμών $\phi_k(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $k = 1, 2, \dots, M$,

ορίζουμε τη συνάρτηση $F = f + \sum_{k=1}^M \lambda_k \phi_k$ και προσδιορίζουμε τις παραμέτρους λ_k , που ονομάζονται

πολλαπλασιαστές Lagrange, και τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_N χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.22)$$

και τις εξισώσεις περιορισμών. Έστω ότι έχουμε περιορισμούς της μορφής $\phi_k(q_i, t)$ (που περιγράφουν ολόνομο σύστημα) τότε η εξίσωση Lagrange (2.12) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} \lambda_k = 0, \quad (2.23)$$

¹ Για τη θεωρία πολλαπλασιαστών Lagrange δείτε π.χ. I.S. Sokolnikoff and R.M. Redheffer, *Μαθηματικά για Φυσικούς και Μηχανικούς*, Εκδόσεις ΕΜΠ, (2001), σελ. 388.

όπου λ_k είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange που τους διαλέγουμε ίσους σε πλήθος με τις σχέσεις περιορισμού και η φυσική τους σημασία είναι ότι δίνουν τις δυνάμεις περιορισμών. Η γενικευμένη δύναμη περιορισμού δίνεται από τη σχέση

$$Q_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i}. \quad (2.24)$$

Παράδειγμα.: Να μελετηθεί η κίνηση απλού εκκρεμούς μάζας m και μήκους ℓ το οποίο εκτρέπεται κατά γωνία θ από τη θέση ισοροπίας του χρησιμοποιώντας Λαγκρανζιανό φορμαλισμό.

Το σύστημα αυτό μπορεί να περιγραφεί με δύο γενικευμένες συντεταγμένες r, θ όπου το r χαρακτηρίζει το μήκος του εκκρεμούς που όμως περιορίζεται από τη σχέση περιορισμού $r = \ell$. Το πρόβλημα αυτό λύνεται και με τους δύο τρόπους που αναλύσαμε παραπάνω. Ας ξεκινήσουμε με την απλή μέθοδο. Η Λαγκρανζιανή γράφεται ως

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mg\ell \cos \theta, \quad (2.25)$$

παίρνοντας μηδέν την δυναμική ενέργεια όταν $\theta = \pi/2$. Η σχέση περιορισμού $r = \ell$ δίνει επίσης $\dot{r} = 0$ και αντικαθιστώντας τις συνθήκες αυτές στην Λαγκρανζιανή παίρνουμε ότι το σύστημα περιγράφεται πλήρως από τη γενικευμένη συντεταγμένη θ :

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta. \quad (2.26)$$

Άρα

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}, \quad (2.27)$$

και οδηγούμαστε στην εξίσωση κίνησης (2.12)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0. \quad (2.28)$$

Με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange τώρα θα πρέπει να εισάγουμε ένα πολλαπλασιαστή Lagrange, έστω λ . Η συνάρτηση περιορισμού είναι $\phi(r) = r - \ell$. Τότε χρησιμοποιώντας την Λαγκρανζιανή της εξίσωσης (2.24) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mg\ell \sin \theta, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m\ell^2\dot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, & \frac{\partial L}{\partial r} &= m\ell\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta, \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= 1, & \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.23) παίρνουμε

$$m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta = -\lambda, \quad (2.30\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mgr \sin \theta = 0. \quad (2.30\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις εξισώσεις για τους περιορισμούς, $r = \ell$, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$, θα πάρουμε από την εξίσωση (2.30β) την εξίσωση (2.28) και από την εξίσωση (2.30α) ότι

$$\lambda = m\ell\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta, \quad (2.31)$$

που είναι η τάση του νήματος ως συνάρτηση των $\theta, \dot{\theta}$.

Άσκηση 2.2: Χρησιμοποιώντας φορμαλισμό Lagrange να μελετήσετε την κίνηση του εκκρεμούς του παραπάνω παραδείγματος εάν επιτρέπουμε επιπλέον στο σύστημα να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα κατακόρυφο άξονα που περνάει από το σημείο πρόσδεσης του εκκρεμούς.

Άσκηση 2.3: Θεωρήστε ότι ένα σώματιο κινείται πάνω σε μια ημισφαιρική επιφάνεια. Χρησιμοποιώντας φορμαλισμό Lagrange να μελετήσετε την κίνηση του σωματίου. Να υπολογίσετε την δύναμη περιορισμού που υπόκειται το σώματιο και την γωνία που το σώματιο θα φύγει από την ημισφαιρική επιφάνεια θεωρώντας ότι αρχικά ξεκινά από την ισορροπία στην κορυφή της ημισφαιρικής επιφάνειας.

2.3 Χαμιλτονιανή - κανονικές εξισώσεις κίνησης

Στην προηγούμενη παράγραφο αναπτύξαμε μια προσέγγιση της δυναμικής ενός συστήματος μέσω της Λαγκρανζιανής. Η Λαγκρανζιανή εξαρτάται μόνο από την κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος έτσι είχαμε μια περιγραφή του συστήματος βασισμένη στην ενέργεια και όχι στη δύναμη όπως γίνεται με την εξίσωση του Newton. Παρόμοια προσέγγιση στο πρόβλημα, δηλαδή βασισμένη στην ενέργεια του συστήματος, γίνεται με την Χαμιλτονιανή (Hamiltonian). Η Χαμιλτονιανή ορίζεται ως

$$H = \sum_{j=1}^N p_j \dot{q}_j - L, \quad (2.32)$$

όπου $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ οι γενικευμένες ορμές, q_j οι γενικευμένες θέσεις, \dot{q}_j οι γενικευμένες ταχύτητες και

L η Λαγκρανζιανή. Η Χαμιλτονιανή, σε αντίθεση με την Λαγκρανζιανή που είναι συνάρτηση της γενικευμένης θέσης, ταχύτητας και χρόνου, είναι συνάρτηση της γενικευμένης θέσης, ορμής, και χρόνου. Οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_{j=1}^N p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k, t). \quad (2.33)$$

Οι γενικευμένες ταχύτητες όμως μπορούν να γραφούν ως συνάρτηση των γενικευμένων θέσεων, ορμών, και χρόνου ως $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_k, p_k, t)$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \sum_{j=1}^N p_j \dot{q}_j - \frac{\partial}{\partial p_i} L(q_k, \dot{q}_k, t). \quad (2.34)$$

Όμως

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \sum_{j=1}^N p_j \dot{q}_j = \dot{q}_i + \sum_{j=1}^N p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}, \quad (2.35\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} L(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^N p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}, \quad (2.35\beta)$$

άρα

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (2.36)$$

Επίσης

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{j=1}^N p_j \dot{q}_j - \frac{\partial}{\partial q_i} L(q_k, \dot{q}_k, t), \quad (2.37)$$

το οποίο με ανάλογες πράξεις με το προηγούμενο οδηγεί στη σχέση

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.38)$$

Οι εξισώσεις (2.36) και (2.38) είναι γνωστές ως κανονικές εξισώσεις κίνησης ή εξισώσεις κίνησης Hamilton και είναι οι εξισώσεις κίνησης στην περίπτωση που θέλουμε να περιγράψουμε ένα σύστημα με τη Χαμιλτονιανή.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η δυναμική ενέργεια δεν εξαρτάται από την ταχύτητα. Τότε

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.39)$$

Η κινητική ενέργεια μπορεί να γραφεί ως

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i. \quad (2.40)$$

Έτσι η Χαμιλτονιανή γίνεται $H = 2T - (T - V)$ που μας δίνει ότι

$$H = T + V. \quad (2.41)$$

Το παραπάνω μας δείχνει ότι η Χαμιλτονιανή είναι ίση με την ενέργεια του συστήματος.

Άσκηση 2.4: Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της Χαμιλτονιανής βρείτε την εξίσωση κίνησης για σωματίο που κινείται σε διατηρητικό πεδίο δυνάμεων.

2.4 Σύστημα δύο σωματίων-κίνηση σε κεντρικό δυναμικό

Στην παράγραφο αυτή μας ενδιαφέρει να εισάγουμε βασικές έννοιες της κίνησης ενός συστήματος που αποτελείται από δύο μάζες m_1, m_2 . Η θέση του συστήματος μπορεί να περιγραφεί πλήρως χρησιμοποιώντας δύο διανύσματα θέσης $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ αντίστοιχα. Η μελέτη της κίνησης του συστήματος γίνεται πιο απλή αν χρησιμοποιήσουμε δύο νέα διανύσματα θέσης : του κέντρου μάζας

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.42)$$

και της διαφοράς μεταξύ των μαζών

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (2.43)$$

Τότε

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad (2.44\alpha)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (2.44\beta)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος γράφεται ως

$$T = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\mathbf{r}}_2|^2 = \frac{1}{2} \mu |\dot{\mathbf{r}}|^2 + \frac{1}{2} M |\dot{\mathbf{R}}|^2, \quad (2.45)$$

όπου

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.46)$$

ανοιγμένη μάζα του συστήματος και $M = m_1 + m_2$ η συνολική μάζα του συστήματος. Παίρνοντας τώρα το σύστημα συντεταγμένων που περιγράφει το σύστημα στο κέντρο μάζας του συστήματος τότε $\mathbf{R} = 0$ και

$$T = \frac{1}{2} \mu |\dot{\mathbf{r}}|^2. \quad (2.46)$$

Η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = \frac{1}{2} \mu |\dot{\mathbf{r}}|^2 - V(\mathbf{r}). \quad (2.47)$$

Έχουμε λοιπόν καταφέρει να μετατρέψουμε τη μελέτη της κίνησης σε κίνηση απλώς ενός σωματιδίου που έχει ως μάζα την ανοιγμένη μάζα. Στην περίπτωση που το δυναμικό εξαρτάται

μόνο από την απόσταση μεταξύ των σωματιδίων, δηλαδή $V(\mathbf{r}) = V(r)$ με $r = |\mathbf{r}|$ η κίνηση έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Το δυναμικό αυτό ονομάζεται κεντρικό δυναμικό.

Στο σύστημα συντεταγμένων κέντρου μάζας η στροφορμή γράφεται ως

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} . \quad (2.48)$$

Έτσι

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mu \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} . \quad (2.49)$$

Επειδή όμως έχουμε κεντρικό δυναμικό η δύναμη είναι ακτινική και έτσι $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$, οπότε

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 , \quad (2.50)$$

άρα η στροφορμή διατηρείται. Είναι λοιπόν βολικό να δουλέψουμε σε πολικές συντεταγμένες r, θ .

Η Λαγκρανζιανή χρησιμοποιώντας τις πολικές συντεταγμένες παίρνει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) . \quad (2.51)$$

Χρησιμοποιώντας την Λαγκρανζιανή για τη γενικευμένη συντεταγμένη θ παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\theta}) = 0 , \quad (2.52)$$

η οποία εκφράζει διαφορετικά το γεγονός ότι η στροφορμή διατηρείται. Γράψουμε λοιπόν ότι η στροφορμή έχει τη μορφή

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} , \quad (2.53)$$

και η Χαμιλτονιανή του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$H = \frac{1}{2\mu} p_r^2 + V_{\text{eff}}(r) , \quad (2.54)$$

όπου

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) , \quad (2.55)$$

με V_{eff} να ορίζεται ως ενεργό δυναμικό. Η κίνηση λοιπόν του συστήματος καταλήγει μονοδιάστατη κίνηση ενός σωματιδίου με μάζα την ανοιγμένη μάζα όπου όμως υπόκειται στο ενεργό και όχι μόνο στο εξωτερικό δυναμικό.

Άσκηση 2.5: Δύο μάζες που συνδέονται με ένα ελατήριο και ταλαντώνονται αποτελούν ένα βασικό μοντέλο για τις ταλαντώσεις διατομικού μορίου. Μελετήστε το σύστημα αυτό.

Άσκηση 2.6: Δύο μάζες που συνδέονται με μια αβαρή ράβδο και περιστρέφονται πάνω σε επίπεδο (στερεός στροφέας) αποτελούν ένα βασικό μοντέλο για την περιστροφική κίνηση διατομικού μορίου. Μελετήστε το σύστημα αυτό.

Άσκηση 2.7: Να μελετηθεί η ευστάθεια και οι μικρές ταλαντώσεις γύρω από τα σημεία ευστάθειας ενός συστήματος δύο σωματιδίων που υπόκειται σε δυναμικό

$$(α) V(r) = -\frac{k}{r} \text{ και } (β) V(r) = mg(r - \ell).$$

2.5 Τανυστής της αδράνειας

Ας θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα κινείται με τέτοιο τρόπο ώστε ένα σημείο του να παραμένει πάντα σταθερό, έστω O . Η κίνηση του σώματος αυτού μπορεί να περιγραφεί ως περιστροφή γύρω από άξονα που περνάει από το σταθερό σημείο. Διαλέγοντας την αρχή των αξόνων του συστήματος αναφοράς μας στο σταθερό σημείο μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}$ το οποίο έχει κατεύθυνση κατά τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής. Ορίζοντας τη θέση σε σχέση με το O μιας σημειακής μάζας m_i με το ακτινικό διάνυσμα \mathbf{r}_i παίρνουμε ότι η ταχύτητα της μάζας m_i σε σχέση με το O γράφεται ως

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i. \quad (2.56)$$

Η στροφορμή του στερεού σώματος δίνεται από το άθροισμα των στροφορμών για τις σημειακές μάζες, δηλαδή

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i). \quad (2.57)$$

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (2.58)$$

έχουμε

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \sum_i m_i |\mathbf{r}_i|^2 - \sum_i m_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}), \quad (2.59)$$

η οποία μπορεί να γραφεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως

$$L_x = \omega_x I_{xx} + \omega_y I_{xy} + \omega_z I_{xz}, \quad (2.60α)$$

$$L_y = \omega_x I_{yx} + \omega_y I_{yy} + \omega_z I_{yz}, \quad (2.60β)$$

$$L_z = \omega_x I_{zx} + \omega_y I_{zy} + \omega_z I_{zz}, \quad (2.60γ)$$

όπου

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i, \quad (2.61α)$$

$$I_{yx} = -\sum_i m_i y_i x_i, \quad I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i, \quad (2.61β)$$

$$I_{zx} = -\sum_i m_i z_i x_i, \quad I_{zy} = -\sum_i m_i z_i y_i, \quad I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (2.61\gamma)$$

Μπορούμε να γράψουμε σε μια πιο συνοπτική μορφή τις συνιστώσες της στροφορμής ως

$$L_j = \sum_i I_{jk} \omega_k, \quad (2.62)$$

με τους δείκτες j, k να παίρνουν τις τιμές x, y, z . Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τον *τανυστή της αδράνειας* ως

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

ο οποίος είναι ένας τανυστής δεύτερης τάξης. Τα διαγώνια στοιχεία I_{jj} του τανυστή της αδράνειας είναι γνωστά ως *ροπές αδράνειας* και τα μη διαγώνια στοιχεία ως *γινόμενα αδράνειας*. Επειδή όμως για τα γινόμενα αδράνειας ισχύει ότι $I_{jk} = I_{kj}$ ο τανυστής της αδράνειας είναι ένας συμμετρικός τανυστής. Σε διανυσματική γραφή θα έχουμε για τη στροφορμή:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.64)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left[\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \right]. \quad (2.65)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την εξίσωση (2.58) παίρνουμε

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{jk} I_{jk} \omega_j \omega_k. \quad (2.66)$$

Βέβαια ο παραπάνω τανυστής με κατάλληλη επιλογή του συστήματος συντεταγμένων μπορεί να γίνει διαγώνιος, δηλαδή τα γινόμενα αδράνειας να μηδενιστούν. Για να βρούμε το σύστημα συντεταγμένων που κάνει διαγώνιο τον τανυστή της αδράνειας διαγωνοποιούμε τον τανυστή (με τις γνωστές μεθόδους που χρησιμοποιούνται στην άλγεβρα πινάκων). Οι ιδιοτιμές του τανυστή δίνουν τις τιμές για τις ροπές αδράνειας, και ονομάζονται κύριες ροπές αδράνειας, και οι ιδιοσυναρτήσεις καθορίζουν το σύστημα συντεταγμένων που κάνει τον τανυστή διαγώνιο, οι άξονες του οποίου ονομάζονται κύριοι άξονες αδράνειας. Στην περίπτωση αυτή

$$I_{jk} = \tilde{I} \delta_{jk}, \quad (2.67)$$

όπου I_j οι κύριες ροπές αδράνειας και δ_{jk} το δέλτα του Kronecker. Τότε

$$L_k = \tilde{I}_k \omega_k, \quad (2.68)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \tilde{I}_k \omega_k^2. \quad (2.69)$$

Τονίζουμε τέλος ότι στην περίπτωση που έχουμε μια συνεχή κατανομή μαζών τότε η άθροιση στον υπολογισμό των στοιχείων του τανυστή της αδράνειας αντικαθίσταται από ολοκλήρωση. Έτσι για παράδειγμα έχουμε:

$$I_{xx} = \int_V \rho(\mathbf{r})(y^2 + z^2) d^3\mathbf{r}, \quad (2.70\alpha)$$

$$I_{xy} = -\int_V \rho(\mathbf{r})xy d^3\mathbf{r}, \quad (2.70\beta)$$

κλπ, όπου $\rho(\mathbf{r})$ η πυκνότητα του σώματος.

Άσκηση 2.8: Υπολογίστε τον τανυστή αδράνειας για ένα μοντέλο μορίου με τέσσερις όμοιες μάζες διατεταγμένες σε τετράγωνο. Πάρτε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων (α) στο κέντρο μάζας του μορίου και (β) πάνω σε μια από τις μάζες.

Άσκηση 2.9: Υπολογίστε τον τανυστή αδράνειας ενός ομογενούς κύβου πυκνότητας ρ , μάζας M , και ακμής a παίρνοντας την αρχή του συστήματος συντεταγμένων στο κέντρο μάζας του.

Άσκηση 2.10: Χρησιμοποιώντας Λαγκρανζιανό φορμαλισμό μελετήστε την κύλιση χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο ενός συμπαγούς κυλίνδρου.

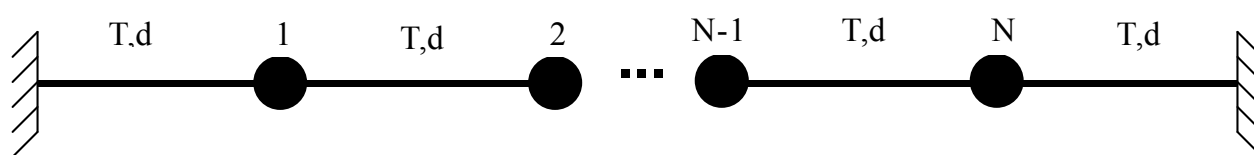
\

Κεφάλαιο 3: Κυματική

3.1 Κυματική εξίσωση

Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει η εγκάρσια κίνηση του συστήματος του σχήματος 3.1, το οποίο είναι παρόμοιο με το σύστημα της παραγράφου 1.10 αλλά στην περίπτωση που τα ελατήρια έχουν αντικατασταθεί από όμοια νήματα μήκους d και τάσης T το καθένα τα οποία υπακούουν το νόμο του Hooke. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση κίνησης του συστήματος είναι ίδια με την εξίσωση (1.106) αλλά με $k = T/d$, άρα

$$\frac{m}{d} \frac{d^2 y_j}{dt^2} = \frac{T}{d} \frac{y_{j-1} - y_j}{d} - \frac{T}{d} \frac{y_j - y_{j+1}}{d}. \quad (3.1)$$



Σχήμα 3.1

Μας ενδιαφέρει να βγάλουμε μια νέα εξίσωση κίνησης για την περίπτωση που το σύστημα μας είναι συνεχές, δηλαδή για την περίπτωση που το d τείνει στο μηδέν και η συνάρτηση $y_j(t)$ γίνεται $y(z,t)$, δηλαδή καθορίζεται από την συνεχή μεταβλητή z και όχι τη διακριτή μεταβλητή j . Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$\frac{y_j - y_{j+1}}{d} \rightarrow \frac{y(z,t) - y(z+d,t)}{d} \rightarrow -\left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=d/2}, \quad (3.2)$$

και

$$\frac{y_{j-1} - y_j}{d} \rightarrow \frac{y(z-d,t) - y(z,t)}{d} \rightarrow -\left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=d/2}, \quad (3.3)$$

άλλά και

$$\frac{1}{d} \left(\left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z+d/2} - \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z-d/2} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}, \quad (3.4)$$

άρα η εξίσωση κίνησης (3.1) παίρνει το μορφή

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (3.5)$$

με $\rho = m/d$ τη γραμμική πυκνότητα μάζας του νήματος και $y(z,t)$ την *κυματοσυνάρτηση*. Η εξίσωση (3.1) είναι γνωστή ως *μονοδιάστατη εξίσωση κύματος* και έχει εξαιρετική σημασία αφού περιγράφει μια σειρά από σημαντικά φυσικά προβλήματα. Επειδή η σταθερά ρ/T έχει διαστάσεις

αντίστροφης ταχύτητας μπορούμε να ορίσουμε ταχύτητα $v = \sqrt{T/\rho}$ και η κυματική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (3.6)$$

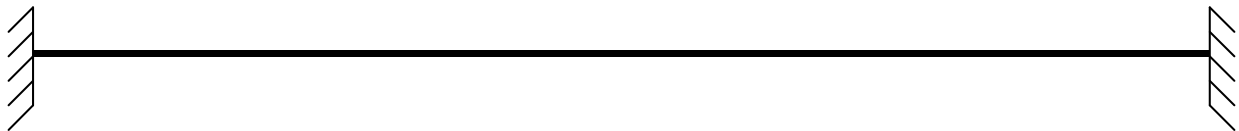
3.2 Στάσιμα κύματα, Επίλυση της κυματικής εξίσωσης με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών.

Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής, δηλαδή μιας χορδής που είναι στερεωμένη στα δύο άκρα της σε ακλόνητα σημεία και δέχεται μια διέγερση κατά τον κάθετο άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2. Η εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα αυτό είναι η κυματική εξίσωση (3.6). Η επίλυση του προβλήματος γίνεται με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών σύμφωνα με την οποία η λύση $y(z,t)$ εκφράζεται ως

$$y(z,t) = Y(z)T(t), \quad (3.7)$$

δηλαδή ως γινόμενο μιας συνάρτησης της θέσης και μιας συνάρτησης του χρόνου. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται και σε άλλες περιπτώσεις φυσικών προβλημάτων με επιτυχία. Με την παραπάνω αντικατάσταση η κυματική εξίσωση (3.6) γράφεται ως

$$T \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = \frac{Y}{v^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad \text{ή} \quad \frac{v^2}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (3.8)$$



Σχήμα 3.2

Η εξίσωση (3.8) μας λέει ότι δύο συναρτήσεις διαφορετικών μεταβλητών, η μια της θέσης z και η άλλη του χρόνου t , είναι ίδιες για κάθε z,t . Για να ισχύει αυτό και τα δύο μέλη θα πρέπει να είναι σταθερά. Διαλέγουμε, για ευκολία στις μετέπειτα πράξεις, τη σταθερά που είναι ίσα τα δύο μέλη της εξίσωσης (3.8) με $-\omega^2$, άρα παίρνουμε δύο εξισώσεις:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} Y = 0, \quad (3.9\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T = 0. \quad (3.9\beta)$$

Και οι δύο παραπάνω εξισώσεις έχουν γνωστή λύση. Από τη δεύτερη εξίσωση θα πάρουμε

$$T(t) = \Gamma \cos(\omega t + \phi), \quad (3.10)$$

άρα

$$y(z,t) = Y(z)\cos(\omega t + \phi), \quad (3.11)$$

όπου η σταθερά Γ έχει απορροφηθεί στην $Y(z)$. Η εξίσωση (3.11) δίνει τη γενική μορφή ενός στάσιμου κύματος. Από την εξίσωση (3.9α) παίρνουμε ότι

$$Y(z) = A \cos\left(\frac{\omega z}{v}\right) + B \sin\left(\frac{\omega z}{v}\right). \quad (3.12)$$

Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι η παραπάνω ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε μια σειρά από άλλα προβλήματα που περιγράφονται από την κυματική εξίσωση (3.6) μια και δεν έχουμε ακόμα χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η χορδή μας είναι στερεωμένη στα δύο άκρα της. Το γεγονός αυτό μας καθορίζει τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος και έτσι έχουμε

$$y(z=0,t) = y(z=L,t) = 0, \quad (3.13)$$

ή

$$Y(z=0) = Y(z=L) = 0. \quad (3.14)$$

Με χρήση της παραπάνω εξίσωσης παίρνουμε

$$A = 0 \text{ και } B \sin\left(\frac{\omega L}{v}\right) = 0, \quad (3.15)$$

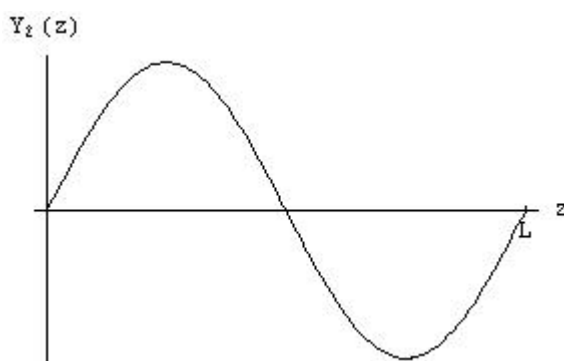
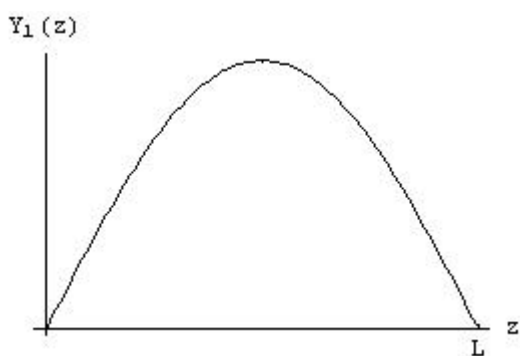
άρα

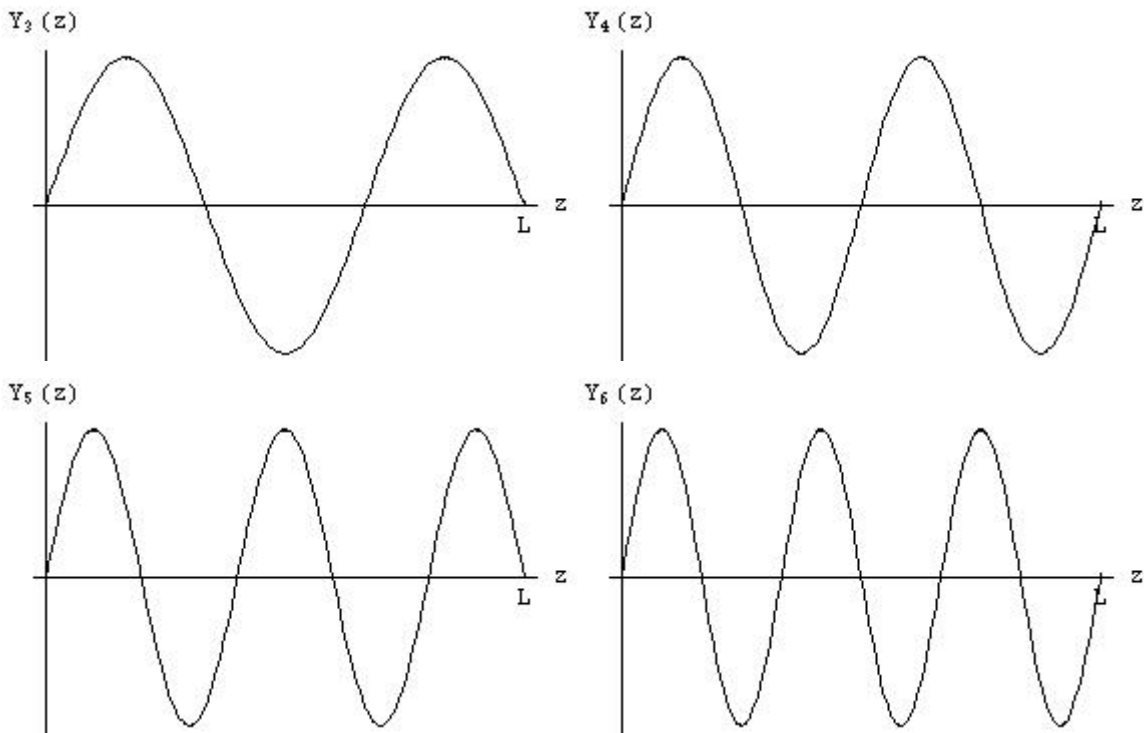
$$B \neq 0 \text{ και } \omega = \omega_n = \frac{n\pi v}{L}, \quad \text{με } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.16)$$

Έτσι παίρνουμε

$$Y_n(z) = B_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right). \quad (3.17)$$

για τη μορφή της χορδής μας.





Σχήμα 3.3

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.17) παίρνουμε τη λύση για τον κανονικό τρόπο ταλάντωσης n .

$$y_n(z, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos(\omega_n t + \phi_n). \quad (3.18)$$

Η μορφή των στάσιμων κυμάτων φαίνεται στο σχήμα 3.3. Η γενική λύση του προβλήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(z, t) = \sum_n B_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (3.19)$$

με τις σταθερές B_n, ϕ_n να καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Ορίζουμε τώρα ως συχνότητα ταλάντωσης τον αριθμό κύκλων ανά μονάδα χρόνου $\nu = \omega/2\pi$ και μήκος κύματος, λ , την απόσταση στην οποία μια πλήρη ταλάντωση έχει συμβεί. Δηλαδή για το n -οστό τρόπο ταλάντωσης θα έχουμε

$$\nu_n = \frac{n\nu}{2L} \quad \text{και} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (3.20)$$

Ορίζουμε επίσης τον κυματάριθμο, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, ο οποίος είναι η ποσότητα που είναι όμοια με τη γωνιακή συχνότητα, αλλά για ταλαντώσεις στο χώρο. Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες για τους

διάφορους τρόπους ταλάντωσης είναι απλώς ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας $v_1 = v/2L$, και θα τις ονομάζουμε αρμονικές n -οστής τάξης της βασικής συχνότητας v_1 .

Άσκηση 3.1: Θεωρούμε χορδή μήκους L η οποία βρίσκεται δεμένη στα δύο άκρα της. Να βρεθούν οι τρόποι ταλάντωσης της χορδής εάν $\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ για κάθε z και:

(α) δέχεται αρχική διέγερση της μορφής $y(z, t = 0) = \sin\left(\frac{3\pi z}{L}\right)$, με $0 \leq z \leq L$.

(β) δέχεται αρχική διέγερση της μορφής $y(z, t = 0) = \sin\left(\frac{3\pi z}{L}\right)$, με $\frac{L}{3} \leq z \leq \frac{2L}{3}$ και μηδέν για κάθε άλλο z .

3.3 Οδεύοντα κύματα.

Μια λύση της κυματικής εξίσωσης (3.6) είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής $f(z - vt)$ η οποία είναι διπλά παραγωγίσιμη. Μια συνάρτηση της μορφής αυτής περιγράφει ένα κύμα που διαδίδεται με αναλλοίωτο σχήμα με σταθερή ταχύτητα v κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα z , δηλαδή προς τα δεξιά. Βέβαια και μια συνάρτηση της μορφής $g(z + vt)$ η οποία είναι διπλά παραγωγίσιμη είναι λύση της εξίσωσης (3.6), και περιγράφει ένα κύμα που διαδίδεται με αναλλοίωτο σχήμα με σταθερή ταχύτητα v κατά την αρνητική διεύθυνση του άξονα z , δηλαδή προς τα αριστερά. Κύματα της μορφής αυτής ονομάζονται οδεύοντα κύματα. Η γενική λύση της εξίσωσης (3.6) είναι το άθροισμα των δύο λύσεων

$$y(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt), \quad (3.21)$$

η οποία πρέπει βέβαια να ικανοποιεί και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Άσκηση 3.2: Δείξτε ότι η $f(z \pm vt)$ είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης (3.6).

Επιστρέφοντας τώρα στη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο μπορούμε να γράψουμε τις λύσεις των εξισώσεων (3.9α) και (3.9β) ως

$$Y(z) = Ae^{i\frac{\omega}{v}z} + Be^{-i\frac{\omega}{v}z}, \quad (3.22\alpha)$$

$$T(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t}. \quad (3.22\beta)$$

Αντικαθιστώντας τον κυματάριθμο $k = \omega/v$ παίρνουμε για τη λύση $y(z, t) = Y(z)T(t)$ ένα συνδυασμό τεσσάρων κυματοσυναρτήσεων οι οποίες σε συνοπτική μορφή γράφονται ως $e^{\pm i(kz \pm \omega t)}$.

Θα μελετήσουμε μια από αυτές έστω την $e^{-i(kz - \omega t)}$. Μια κυματοσυνάρτηση της μορφής αυτής έχει

φυσικό νόημα για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της και έτσι μπορούμε να αναλύσουμε απλώς τις συναρτήσεις $\cos(kz - \omega t)$ ή $\sin(kz - \omega t)$ η οποίες περιγράφουν αρμονικά οδεύοντα κύματα. Σε πολλές περιπτώσεις η μιγαδική μορφή είναι βολική κατά την εκτέλεση πράξεων και το πραγματικό ή φανταστικό μέρος μπορεί να παίρνεται στο τέλος. Στις παραπάνω κύματοσυναρτήσεις ορίζουμε ως φάση του κύματος το

$$\varphi(z, t) = \omega t - kz . \quad (3.23)$$

Η κίνηση του κύματος περιγράφεται από τη μετατόπιση σημείων σταθερής φάσης (ή ισοφασικών γραμμών στις δύο διαστάσεις ή ισοφασικών επιφανειών στις τρεις διαστάσεις). Η απαίτηση σταθερής φάσης του κύματος εκφράζεται από την εξίσωση

$$d\varphi = 0 \quad \text{ή} \quad \omega dt - k dz = 0 , \quad (3.24)$$

δηλαδή

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} , \quad (3.25)$$

η οποία ονομάζεται ταχύτητα φάσης και αντιστοιχεί στην ταχύτητα που κινείται το κύμα. Γενικά η γωνιακή συχνότητα είναι συνάρτηση του κυματάριθμου $\omega = \omega(k)$. Η σχέση αυτή ονομάζεται σχέση διασποράς. Εάν τώρα η ταχύτητα φάσης είναι συνάρτηση του κυματάριθμου και όχι σταθερή τότε το υλικό μας εμφανίζει το φαινόμενο διασποράς. Το πιο γνωστό παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι ίσως το οπτικό πρίσμα στο οποίο η σχέση διασποράς είναι $\omega = \frac{c}{n(k)}k$, όπου c η ταχύτητα του φωτός και n ο δείκτης διάθλασης. Έτσι μια και ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται από τον κυματάριθμο του προσπίπτοντος φωτός το πρίσμα έχει τη ιδιότητα να διαχωρίζει το φως στα διάφορα μήκη κύματος του.

3.4 Κυματοπακέτα

Ας θεωρήσουμε δύο λύσεις της κυματικής εξίσωσης (3.6) της μορφής

$$y_1(z, t) = A e^{-i(kz - \omega t)} , \quad (3.26\alpha)$$

$$y_2(z, t) = A e^{-i(Kz - \Omega t)} \quad (3.27\beta)$$

των οποίων οι κυκλικές συχνότητες και κυματάριθμοι διαφέρουν κατά ένα μικρό ποσό

$$\Omega = \omega + \Delta\omega \quad , \quad K = k + \Delta k . \quad (3.28)$$

Το πραγματικό μέρος του αθροίσματος των δύο παραπάνω κυμάτων μας δίνει

$$y(z, t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) \cos\left[\left(\frac{\omega + \Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)z\right] . \quad (3.29)$$

Στην παραπάνω σχέση αναγνωρίζουμε δύο όρους ένα αργά μεταβαλλόμενο $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right)$ που είναι υπεύθυνος για τη διαμόρφωση του πλάτους του κύματος και ένα γρήγορα μεταβαλλόμενο όρο που καθορίζει τις εσωτερικές ταλαντώσεις. Έχουμε λοιπόν πάλι φαινόμενο διακροτήματος. Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα με την οποία η διαμόρφωση διαδίδεται από την συνθήκη ότι η φάση του όρου που καθορίζει το πλάτος διαμόρφωσης παραμένει σταθερή και έτσι παίρνουμε ότι

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} . \quad (3.30)$$

Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται ταχύτητα ομάδος και στο όριο μικρής μεταβολής προσεγγίζεται από

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} . \quad (3.31)$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε την ανάλυση μας για την περίπτωση υπέρθεσης N κυμάτων. Τότε θα έχουμε

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^N A_n e^{-i(k_n z - \omega_n t)} , \quad (3.32)$$

όπου A_n, k_n, ω_n τα πλάτη, οι κυματάρθρωμοι και οι κυκλικές συχνότητες του κάθε κύματος που συμμετέχει στην υπέρθεση. Στην περίπτωση που ο αριθμός των κυμάτων N γίνει μεγάλος, στο μαθηματικό όριο που $N \rightarrow \infty$, οι συχνότητες και τα πλάτη γίνονται συνεχής μεταβλητές και μπορούμε να αντικαταστήσουμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα έτσι ώστε

$$y(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-i(kz - \omega t)} dk . \quad (3.33)$$

Η παραπάνω κυματοσυνάρτηση είναι γνωστή ως κυματοπακέτο. Η συνάρτηση $A(k)$ είναι γνωστή ως συνάρτηση φασματικής κατανομής και περιγράφει την κατανομή των πλατών των διαφόρων κυμάτων με διαφορετικές συχνότητες που αποτελούν το κυματοπακέτο. Στην περίπτωση που $t = 0$ το κυματοπακέτο παίρνει τη μορφή

$$y(z, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-ikz} dk , \quad (3.34)$$

που δεν είναι τίποτα άλλο από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης φασματικής κατανομής. Έτσι εάν η αρχική παραμόρφωση του κυματοπακέτου είναι γνωστή η συνάρτηση φασματικής κατανομής δίνεται από τον αντιστροφο μετασχηματισμό

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(z, 0) e^{ikz} dz . \quad (3.35)$$

Έστω ότι έχουμε αρχική παραμόρφωση της μορφής

$$y(z,0) = B e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} e^{-ik_0 z} . \quad (3.36)$$

Στην περίπτωση αυτή το εύρος της παραμόρφωσης καθορίζεται από τη σταθερά σ , έτσι ώστε αυξάνοντας το σ να αυξάνει και το εύρος της αρχικής παραμόρφωσης και αντίστροφα. Η συνάρτηση φασματικής κατανομής υπολογίζεται από την εξίσωση (3.35) ως, (κάντε το ολοκλήρωμα ως άσκηση)

$$A(k) = \frac{B\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-k_0)^2 \sigma^2}{2}} . \quad (3.37)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση φασματικής κατανομής είναι της ίδιας συναρτησιακής μορφής με την αρχική παραμόρφωση (συνάρτηση Gauss). Αυτό είναι ένα ιδιότυπο αποτέλεσμα που συμβαίνει μόνο για τη συνάρτηση Gauss. Όμως αυξάνοντας τη σταθερά σ οδηγείται σε μείωση το εύρους της φασματικής κατανομής και αντίστροφα. Δηλαδή όταν αυξάνεται το εύρος της συνάρτησης φασματικής κατανομής μειώνεται το εύρος της αρχικής παραμόρφωσης και αντίστροφα. Αυτό είναι γενικότερο αποτέλεσμα και ισχύει για οποιασδήποτε μορφής αρχική παραμόρφωση και όχι μόνο για τη μορφή Gauss. Εάν τώρα ορίσουμε ως Δz το εύρος αρχικής παραμόρφωσης και Δk το εύρος φασματικής κατανομής θα έχουμε

$$\Delta z \Delta k = 1. \quad (3.38)$$

Ας δούμε τώρα πως διαδίδεται ένα κυματοπακέτο. Θεωρούμε αρχικά ότι η σχέση διασποράς είναι της μορφής $\omega = vk$. Τότε για την συνάρτηση φασματικής κατανομής (3.37) θα πάρουμε από την εξίσωση (3.33) ότι (κάντε το ολοκλήρωμα ως άσκηση)

$$y(z,t) = B e^{-\frac{(z-vt)^2}{2\sigma^2}} e^{-ik_0(z-vt)} . \quad (3.39)$$

Δηλαδή το κυματοπακέτο διαδίδεται χωρίς αλλαγή σχήματος κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα z . Αυτό το αποτέλεσμα είναι γενικό και ισχύει για οποιασδήποτε μορφής αρχική παραμόρφωση στην περίπτωση που η σχέση διασποράς είναι της μορφής $\omega/k = \text{σταθ}$. Αυτό δείχνεται εύκολα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. (Κάντε το ως άσκηση). Εάν διαλέξουμε τη σχέση διασποράς τώρα ως $\omega = a(k - k_0)^2$ τότε για την συνάρτηση φασματικής κατανομής (3.37) θα πάρουμε από την εξίσωση (3.33) ότι (κάντε το ολοκλήρωμα ως άσκηση)

$$y(z,t) = \frac{B\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 2iat}} e^{-ik_0 z} e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2 - 2iat)}} . \quad (3.40)$$

Λόγω της εμφάνισης μιγαδικών συντελεστών μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει στο $|y(z,t)|^2$ από όπου παίρνουμε ότι

$$|y(z,t)|^2 \propto \exp\left[-\frac{z^2}{2\left(\frac{\sigma^2}{2} + 2\frac{a^2 t^2}{\sigma^2}\right)}\right]. \quad (3.41)$$

Δηλαδή το εύρος του κυματοπακέτου δίνεται από το $\Delta z = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2} + 2\frac{a^2 t^2}{\sigma^2}}$. Άρα καθώς διαδίδεται το κυματοπακέτο το εύρος του αυξάνει, άρα το κυματοπακέτο αλλάζει σχήμα και στο συγκεκριμένο παράδειγμα “απλώνει”. Βλέπουμε λοιπόν ότι αν η σχέση διασποράς δεν είναι γραμμική το κυματοπακέτο θα αλλάζει το σχήμα του καθώς διαδίδεται, πράγμα που ισχύει γενικά. Μπορούμε να γενικεύσουμε και τη σχέση (3.38) ως

$$\Delta z \Delta k \geq 1. \quad (3.42)$$

Το οποίο σημαίνει ότι για κάθε κυματοπακέτο η ελάχιστη τιμή του παραπάνω γινομένου είναι μονάδα, όμως είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε κυματοπακέτα έτσι ώστε το γινόμενο αυτό να γίνει οσοδήποτε μεγάλο.

Άσκηση 3.3: Θεωρήστε κυματοπακέτο με αρχική διέγερση της μορφής $y(z, t = 0) = 2\frac{\sin(z \Delta k)}{z} e^{-ik_0 z}$.

(α) Δείξτε ότι η κατανομή πλατών του κυματοπακέτου είναι της μορφής

$$A(k) = \begin{cases} 1, & |k - k_0| < \Delta k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

(β) Εάν η σχέση διασποράς είναι της μορφής $\omega(k) = \omega_0 + v_1(k - k_0) + v_2(k - k_0)^2$, να υπολογισθεί η μορφή του κυματοπακέτου για κάθε z, t όταν $v_1 \neq 0, v_2 = 0$, και όταν $v_1 = 0, v_2 \neq 0$. Σχολιάστε τη μορφή του κυματοπακέτου και στις δύο περιπτώσεις.

3.5 Κυματικές εξισώσεις στη φύση

Κυματική εξίσωση	Φυσική σημασία y	Σχέση διασποράς
$\bar{\nabla}^2 y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y = 0$ <p>Εξίσωση διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό</p>	$y(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ή $y(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$: Ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$: Μαγνητικό πεδίο	$\omega = ck$ c : ταχύτητα φωτός στο κενό
$\bar{\nabla}^2 y - \frac{n(\omega)^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y = 0$ <p>Εξίσωση διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε ομογενές διηλεκτρικό υλικό</p>	$y(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ή $y(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$: Ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$: Μαγνητικό πεδίο	$\omega = \frac{c}{n} k$ c : ταχύτητα φωτός στο κενό n : δείκτης διάθλασης του διηλεκτρικού υλικού
$\frac{\partial^2}{\partial z^2} y - \kappa\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} y = 0$ <p>Εξίσωση ακουστικών κυμάτων (διαμήκη κύματα)</p>	y : Ακουστική πίεση	$\omega = \frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} k$ κ : Συμπιεστότητα ρ : Πυκνότητα

ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

Στο πρώτο μέρος των σημειώσεων ασχοληθήκαμε με την μελέτη της κίνησης ενός σώματος υπό την επίδραση μίας δύναμης θεωρώντας το σώμα ως σημειακό. Το ερώτημα που τίθεται είναι "τι συμβαίνει όταν η δύναμη ασκείται κατά τέτοιο τρόπο ώστε αντί να κινείται το σώμα να υπόκειται σε παραμορφώσεις;". Π.χ. αν θεωρήσουμε μία ράβδο της οποίας το ένα άκρο είναι σταθερά προσκολλημένο σε ένα τοίχο και ασκήσουμε δύναμη στο ελεύθερο άκρο της το αποτέλεσμα θα είναι να την παραμορφώσουμε ή ακόμα και να προκαλέσουμε τη θραύση της. Ο κλάδος της Μηχανικής που ασχολείται με την παραμόρφωση των σωμάτων υπό την επίδραση δυνάμεων ονομάζεται "Μηχανική του Συνεχούς Μέσου" και καλύπτει τόσο τα στερεά σώματα όσο και τα ρευστά. Κυρίαρχο ρόλο δεν παίζουν οι δυνάμεις όπως στην κλασική μηχανική αλλά οι τάσεις (δύναμη που ασκείται ανά μονάδα επιφάνειας), που ασκούνται σε ένα δοκίμιο. Αν η τάση είναι μικρή το σώμα θα υποστεί ελαστική παραμόρφωση και όταν σταματήσει να ασκείται η δύναμη θα επανέρθει στο αρχικό του σχήμα. Για πιο ισχυρές τάσεις το σώμα υπόκειται σε πλαστική παραμόρφωση, δηλαδή αν αφαιρεθεί η τάση που ασκείται το σώμα δεν επανέρχεται στο αρχικό του σχήμα αλλά υπάρχει παραμένουσα παραμόρφωση. Πέρα από κάποια τιμή τάσης, οι δυνάμεις είναι αρκετά ισχυρές ώστε να προκαλέσουν θραύση του σώματος. Η εισαγωγή στη θεωρία την συμπεριφορά των Συνεχών Μέσων θα είναι το θέμα αυτού του μέρους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΤΑΝΥΣΤΕΣ

Θα ξεκινήσουμε με μία σύντομη εισαγωγή στους τανυστές που αποτελούν απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία στη Θεωρία Συνεχούς Μέσου. Ο τανυστικός λογισμός είναι ουσιαστικά μία προέκταση της Άλγεβρας των Πινάκων και τους εισήγαγε ο Einstein στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας για να περιγράψει φαινόμενα στον χωρόχρονο χρησιμοποιώντας χώρους Riemann. Στην συνέχεια οι τανυστές βρήκαν χρήση σε διάφορα προβλήματα όπως αυτά που θα αντιμετωπίσουμε. Εμείς θα επικεντρωθούμε στην θεωρία που τους περιγράφει στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο (E^3). Οι τανυστές συμβολίζονται όπως και οι πίνακες είτε χρησιμοποιώντας κεφαλαία γράμματα για να εκφράσουμε το σύνολο των στοιχείων ενός τανυστή (π.χ. T, A, L, X, ...) είτε χρησιμοποιούμε δείκτες-εκθέτες για να χαρακτηρίσουμε τα στοιχεία ενός τανυστή, π.χ. έστω τανυστής X με τρία στοιχεία τότε οι ακόλουθες αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες

$$x^1, x^2, x^3 \quad x_1, x_2, x_3 \quad x^k (k=1, 2, 3) \quad x_k (k=1, 2, 3)$$

Ορισμός και τάξη τανυστή

Ένας μη αυστηρός-μαθηματικά ορισμός ενός τανυστή T είναι:

Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο N^m στοιχείων που θέλουμε να τα διατάξουμε. Μία τέτοια αναπαράσταση μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω ενός τανυστή T με στοιχεία τα $t_{ijkl\dots}$ όπου χρησιμοποιούμε m-το πλήθος δείκτες (i, j, k, l, \dots) για να καταμετρήσουμε τα στοιχεία και κάθε δείκτης παίρνει N-τιμές (π.χ. $i = 1, 2, 3, \dots, N$).

Το πλήθος των δεικτών (m) ονομάζεται τάξη του τανυστή και το πλήθος των δυνατών τιμών (N) που παίρνει κάθε δείκτης διάσταση. Το σύνολο των στοιχείων ονομάζεται μητρώο του τανυστή.

Τανυστής μηδενικής τάξης: ουσιαστικά ένας τανυστής μηδενικής τάξης εξορισμού περιλαμβάνει ένα μόνο στοιχείο, συνεπώς αντιπροσωπεύει ένα βαθμωτό μέγεθος.

Τανυστής πρώτης τάξης: ένας τανυστής πρώτης τάξης περιέχει τόσο στοιχεία όσα και η διάσταση του. Συνεπώς οι τανυστές πρώτης τάξης αντιπροσωπεύουν τα διανύσματα. π.χ. στις 3 διαστάσεις ένας τανυστής πρώτης τάξης μπορεί να εκφραστεί ως $t = t_1\hat{u}_1 + t_2\hat{u}_2 + t_3\hat{u}_3$ όπου $\hat{u}_{1,2,3}$ τα μοναδιαία διανύσματα στον χώρο ή σε μορφή

$$\text{πίνακα } t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \text{ ή ακόμα πιο απλά } t_i, (i=1, 2, 3).$$

Τανυστής δεύτερης τάξης: οι τανυστές 2ης τάξης είναι ουσιαστικά οι πίνακες. Στις 3 διαστάσεις ένας τέτοιος τανυστής έχει $3^2=9$ στοιχεία και μπορεί να εκφραστεί είτε ως πίνακας είτε με την βοήθεια δύο δεικτών π.χ.

$$t = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \text{ ή } t_{ij}, (i, j=1, 2, 3)$$

Σύμβαση αθροίσματος (σύμβαση Einstein)

Προκειμένου να απλοποιηθούν οι εκφράσεις που περιέχουν τανυστές ο Einstein εισήγαγε την λεγόμενη "σύμβαση αθροίσματος" σύμφωνα με την οποία αν σε μία έκφραση που περιέχει τανυστές εμφανίζεται ακριβώς δύο φορές ο ίδιος δείκτης σε δύο διαφορετικού τανυστές τότε υπονοείται άθροιση ως προς αυτό τον δείκτη

π.χ. έστω δύο τανυστές a και b πρώτης τάξης στις 3 διαστάσεις. Τότε η έκφραση $a_i b_i$

ισοδυναμεί με το άθροισμα $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$. Στο συγκεκριμένο

παράδειγμα το κέρδος είναι πολύ μικρό αλλά ας πάρουμε τώρα το παράδειγμα ενός συστήματος m -εξισώσεων με N -αγνώστους. Κανονικά για να το αναπαραστήσουμε πρέπει να γράψουμε

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mN}x_N = b_m \end{cases} \quad \text{ή } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iN}x_N = b_i, (i=1, 2, \dots, m)$$

ή ακόμα πιο απλά σε τανυστική μορφή χρησιμοποιώντας τη σύμβαση του αθροίσματος

$a_{ik}x_k = b_i (i=1, 2, 3, \dots, m)$ όπου υπονοείται το άθροισμα πάνω στα k .

Ο δείκτης i που δεν συμμετέχει στο άθροισμα και εμφανίζεται και στα δύο μέλη της εξίσωσης ονομάζεται ελεύθερος δείκτης.

Δέλτα του Kronecker

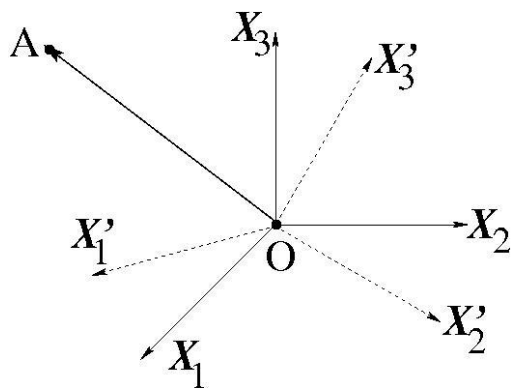
Το δέλτα του Kronecker είναι ένας τανυστής δεύτερης τάξης σε N διαστάσεις όπου τα στοιχεία του μητρώου του μπορούν να πάρουν μόνο δύο τιμές και ορίζεται

$$\text{ως εξής } \delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Χρησιμεύει για να διαλέξουμε ένα στοιχείο από ένα τανυστή. Π.χ. έστω τανυστής A πρώτης τάξης στις τρεις διαστάσεις και θέλουμε να απομονώσουμε το πρώτο του στοιχείο τότε αρκεί να γράψουμε

$$a_j \delta_{1j} = a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} = a_1$$

Στροφή συστήματος συντεταγμένων



Έστω ότι βρισκόμαστε στις τρεις διαστάσεις και θέλουμε να μετασχηματίσουμε τις συντεταγμένες ενός διανύσματος \overline{OA} από ένα σύστημα συντεταγμένων x_1, x_2, x_3 σε ένα καινούριο σύστημα συντεταγμένων x'_1, x'_2, x'_3 . Ο μετασχηματισμός γίνεται μέσω ενός πίνακα στροφής που συμβολίζεται με R και είναι χαρακτηριστικός για τα δύο συστήματα συντεταγμένων. Ουσιαστικά είναι ένας πίνακας 3×3 και ισχύει

$$X' = RX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ή σε τανυστική μορφή } x'_i = R_{ij}x_j.$$

Οι πίνακες στροφείς είναι ορθοκανονικοί δηλαδή ο ανάστροφος ισούται με τον αντίστροφο και ισχύει $R^T = R^{-1} \Rightarrow RR^T = R^T R = RR^{-1} = R^{-1}R = I$, όπου I ο μοναδιαίος.

$$\text{Συνεπώς } X' = RX \Rightarrow R^T X' = R^T RX = IX = X, \text{ όπου } R^T = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα του πίνακα στροφής ισούται με $+1$ αν και τα δύο συστήματα συντεταγμένων (παλιό και καινούριο) είναι δεξιόστροφα ενώ ισούται με -1 αν το ένα είναι δεξιόστροφο και το άλλο αριστερόστροφο.

Στη συνέχεια θα δείξουμε πως προκύπτει ο πίνακας στροφής. Έστω $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ τα μοναδιαία διανύσματα στο παλιό σύστημα συντεταγμένων και $\hat{u}'_1, \hat{u}'_2, \hat{u}'_3$ στο καινούριο τότε ισχύει η ισότητα

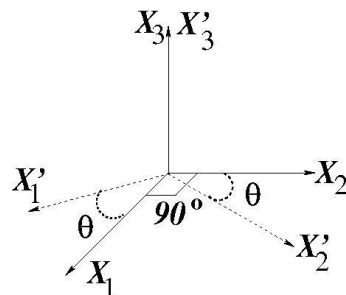
$\overline{OA} = x_1\hat{u}_1 + x_2\hat{u}_2 + x_3\hat{u}_3 = x'_1\hat{u}'_1 + x'_2\hat{u}'_2 + x'_3\hat{u}'_3$. Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά το 2ο και 3ο μέλος της ισότητας διαδοχικά με τα $\hat{u}'_1, \hat{u}'_2, \hat{u}'_3$ και γνωρίζοντας ότι τα μοναδιαία διανύσματα είναι ορθοκανονικά ($\hat{u}_i\hat{u}_j = \hat{u}'_i\hat{u}'_j = \delta_{ij}$) έχουμε

$$\begin{cases} x_1\hat{u}'_1\hat{u}'_1 + x_2\hat{u}'_2\hat{u}'_2 + x_3\hat{u}'_3\hat{u}'_3 = x'_1\hat{u}'_1\hat{u}'_1 + x'_2\hat{u}'_2\hat{u}'_2 + x'_3\hat{u}'_3\hat{u}'_3 = x'_1 \\ x_1\hat{u}'_2\hat{u}'_1 + x_2\hat{u}'_2\hat{u}'_2 + x_3\hat{u}'_2\hat{u}'_3 = x'_1\hat{u}'_2\hat{u}'_1 + x'_2\hat{u}'_2\hat{u}'_2 + x'_3\hat{u}'_2\hat{u}'_3 = x'_2 \\ x_1\hat{u}'_3\hat{u}'_1 + x_2\hat{u}'_3\hat{u}'_2 + x_3\hat{u}'_3\hat{u}'_3 = x'_1\hat{u}'_3\hat{u}'_1 + x'_2\hat{u}'_3\hat{u}'_2 + x'_3\hat{u}'_3\hat{u}'_3 = x'_3 \end{cases}$$

και αν συγκρίνουμε με τη σχέση $X' = RX$ θα έχουμε $R_{ij} = \hat{u}'_i\hat{u}_j$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν αφήσουμε ίδιο τον άξονα x_3 και περιστρέψουμε το επίπεδο (x_1, x_2) κατά γωνία θ τότε τα στοιχεία του πίνακα στροφής είναι



$$R_{11} = \hat{u}'_1 \hat{u}_1 = \cos \theta, R_{12} = \hat{u}'_1 \hat{u}_2 = \cos(90 + \theta) = -\sin \theta, R_{13} = \hat{u}'_1 \hat{u}_3 = 0$$

$$R_{21} = \hat{u}'_2 \hat{u}_1 = \cos(90 - \theta) = \sin \theta, R_{22} = \hat{u}'_2 \hat{u}_2 = \cos \theta, R_{23} = \hat{u}'_2 \hat{u}_3 = 0,$$

$$R_{31} = \hat{u}'_3 \hat{u}_1 = 0, R_{32} = \hat{u}'_3 \hat{u}_2 = 0, R_{33} = \hat{u}'_3 \hat{u}_3 = 1$$

και ο πίνακας στροφής και ο ανάστροφος του είναι

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!! Η σχέση $X' = RX$ ισχύει μόνο για διανύσματα. Αν θέλουμε να μετασχηματίσουμε ένα τανυστή ανώτερης τάξης η σχέση είναι διαφορετική. Π.χ. για ένα πίνακα A (τανυστής 2ης τάξης) ισχύει $A' = RAR^T$.

Αναλλοίωτες ποσότητες

Οι τανυστές έχουν ιδιότητες αντίστοιχες των πινάκων και όπως οι τελευταίοι μπορούμε να ορίσουμε τότε ένας τανυστής είναι συμμετρικός, αντισυμμετρικός ή ορθογώνιος. Σημαντική ιδιότητα είναι η ύπαρξη τριών ποσοτήτων που μένουν αναλλοίωτες κάτω από οποιοδήποτε μετασχηματισμό του συστήματος συντεταγμένων. Οι τρεις αυτές ποσότητες είναι

- Το ίχνος ενός τανυστή.

$$\text{Π.χ για τανυστή } A \text{ 2ης τάξης είναι η ποσότητα } I_A = \text{Tr}(A) = a_{ii} = \sum_i a_{ii}$$

- Το άθροισμα των υπο-οριζουσών :

$$II_A = \frac{1}{2} (a_{ii} a_{jj} - a_{ij} a_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (a_{ii} a_{jj} - a_{ij} a_{ji})$$

- Η ορίζουσα του τανυστή

$$III_A = \det(A) = \frac{1}{2} (a_{ii} a_{jj} a_{kk} - 2a_{ik} a_{kj} a_{ji} - 3a_{ik} a_{ki} a_{jj}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} (a_{ii} a_{jj} a_{kk} - 2a_{ik} a_{kj} a_{ji} - 3a_{ik} a_{ki} a_{jj})$$

Η τελευταία ποσότητα μπορεί να οριστεί και με τη βοήθεια του Μεταθετικού Τανυστή γνωστού και ως 2ου τανυστή Kronecker ϵ_{ijk} ο οποίος παίρνει την τιμή 1 αν οι δείκτες είναι κυκλική μετάθεση των 123, -1 αν είναι κυκλική μετάθεση των 321 και 0 αν τουλάχιστον δύο δείκτες είναι ίδιοι.

Π.χ. $\epsilon_{113}=\epsilon_{222}=\epsilon_{232}=0$, $\epsilon_{123}=\epsilon_{312}=\epsilon_{231}=1$, $\epsilon_{321}=\epsilon_{132}=\epsilon_{213}=-1$.

Η τελευταία ποσότητα μπορεί να γραφτεί τότε σε ποιο απλή μορφή ως

$$III_A = \det(A) = \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα

Αποδεικνύεται ότι για οποιοδήποτε συμμετρικό τανυστή υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο είναι διαγώνιος (όλα τα στοιχεία είναι μηδέν εκτός από αυτά που όλοι οι δείκτες είναι ίδιοι). Π.χ. για ένα τανυστή T 2ης τάξη στις 3 διαστάσεις, όπως οι τανυστές τάσης και παραμόρφωσης που θα ασχοληθούμε στην συνέχεια, στο σύστημα συντεταγμένων που είναι διαγώνιος θα έχει τη μορφή

$$T' = \begin{pmatrix} t_I & 0 & 0 \\ 0 & t_{II} & 0 \\ 0 & 0 & t_{III} \end{pmatrix}, \text{ όπου οι τιμές } t_I, t_{II}, t_{III} \text{ ονομάζονται κύριες τιμές του τανυστή T}$$

και το αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων κύριο σύστημα συντεταγμένων.

Έστω R ο πίνακας στροφής που μετασχηματίζει το αρχικό στο κύριο σύστημα συντεταγμένων τότε θα ισχύει $T' = RTR^T \Rightarrow R^T T' = R^T RTR^T = TR^T$.

Θα έχουμε

$$R^T T' = TR^T \Rightarrow \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_I & 0 & 0 \\ 0 & t_{II} & 0 \\ 0 & 0 & t_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} t_I R_{11} & t_{II} R_{21} & t_{III} R_{31} \\ t_I R_{12} & t_{II} R_{22} & t_{III} R_{32} \\ t_I R_{13} & t_{II} R_{23} & t_{III} R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix}$$

η οποία μπορεί να σπάσει σε τρεις εξισώσεις

$$t_I \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix}, \quad t_{II} \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \end{pmatrix}, \quad t_{III} \begin{pmatrix} R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix}$$

και οι τρεις αυτές εξισώσεις έχουν την μορφή $tX = TX \Rightarrow (T - tI)X = 0$, όπου X ένας από τους τρεις πίνακες στήλη και I ο μοναδιαίος.

Αυτό είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών και για να έχει το σύστημα αυτό λύση πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών του πίνακα X να ισούται με το μηδέν $\det(T - tI) = 0$.

Από τη τελευταία αυτή σχέση βρίσκουμε τις κύριες τιμές του τανυστή (ιδιοτιμές) και για κάθε μία από τις τρεις ιδιοτιμές βρίσκουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα X, όπου

$$X_I = \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix}, X_{II} = \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \end{pmatrix}, X_{III} = \begin{pmatrix} R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix} \text{ οι στήλες του ανάστροφου του πίνακα στροφής.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ο τανυστής $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Για να βρούμε τις κύριες τιμές του λύνουμε την

χαρακτηριστική εξίσωση

$$\det(T - tI) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 4-t & 3 \\ 0 & 3 & -4-t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-t) \begin{vmatrix} 4-t & 3 \\ 3 & -4-t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-t)[(4-t)(-4-t)-9] = 0 \Rightarrow (1-t)(t^2 - 16 - 9) = 0 \Rightarrow (1-t)(t^2 - 25) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1-t = 0 \\ t^2 - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_I = -5 \\ t_{II} = 1 \\ t_{III} = 5 \end{cases}$$

Για την κύρια τιμή $t_I = -5$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα βρίσκεται από την εξίσωση

$$(T - t_I I) X_I = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-t_I & 0 & 0 \\ 0 & 4-t_I & 3 \\ 0 & 3 & -4-t_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6R_{11} \\ 9R_{12} + 3R_{13} \\ 3R_{12} + 1R_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R_{11} = 0 \\ R_{13} = -3R_{12} \end{cases}$$

Συνεπώς έχουμε 2 εξισώσεις με 3 αγνώστους. Για να υπολογίσουμε το 2 και το 3 στοιχείο του ιδιοδιανύσματος θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ένα ιδιοδιάνυσμα έχει μέτρο 1 και συνεπώς πρέπει

$$(R_{11})^2 + (R_{12})^2 + (R_{13})^2 = 1 \Rightarrow 0^2 + (R_{12})^2 + (-3R_{12})^2 = 1 \Rightarrow 10(R_{12})^2 = 1$$

$$\Rightarrow R_{12} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}},$$

Διαλέγουμε την θετική τιμή (αν διαλέγαμε την αρνητική θα παίρναμε το ίδιο διάνυσμα πολλαπλασιασμένο με το -1). Συνεπώς

$$R_{12} = + \frac{1}{\sqrt{10}}, R_{13} = -3R_{12} = - \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

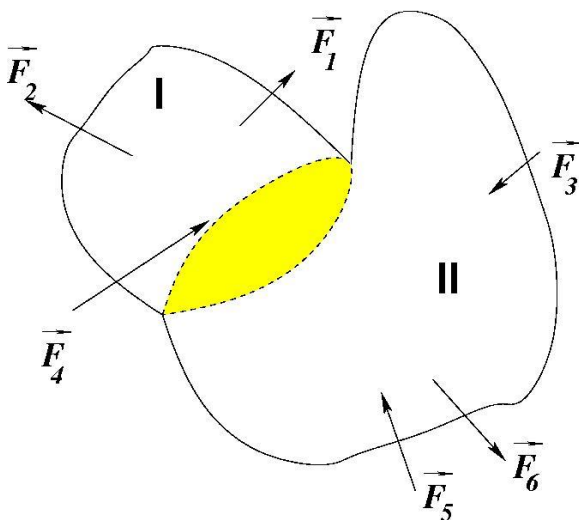
$$\text{Οπότε το πρώτο ιδιοδιάνυσμα είναι } \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

και ομοίως βρίσκουμε και τα υπόλοιπα δύο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Στόχος της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου είναι η μελέτη της συμπεριφοράς σωμάτων υπό την επίδραση εξωτερικών παραγόντων όπως τα μηχανικά φορτία με την έννοια των εξωτερικών δυνάμεων. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις ανάλογα με την ισχύ των μηχανικών αυτών φορτίων και την παραμόρφωση που αυτά προκαλούν στο υπό μελέτη σώμα. Όταν η παραμόρφωση που προκαλούν τα εξωτερικά φορτία είναι τέτοια ώστε το σώμα να επανέρχεται στο αρχικό του σχήμα και τις αρχικές διαστάσεις όταν αυτά παύουν να υφίστανται, λέμε ότι το σώμα είναι ελαστικό. Όταν μάλιστα η σχέση της παραμόρφωσης με την ισχύ του εξωτερικού φορτίου είναι γραμμική τότε το σώμα ονομάζεται "γραμμικά ελαστικό". Όταν τα εξωτερικά μηχανικά φορτία (δυνάμεις) είναι τόσο ισχυρά ώστε να προκαλούν παραμένουσα παραμόρφωση του σώματος όταν παύουν να ασκούνται τότε μιλάμε για "πλαστική παραμόρφωση" και το σώμα ονομάζεται πλαστικό. Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη των γραμμικά ελαστικών σωμάτων και η αντίστοιχη θεωρία ονομάζεται Θεωρία της Ελαστικότητας. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι μόνο μία περιορισμένη κατηγορία κεραμικών υλικών είναι γραμμικά ελαστικά για όλο το εύρος των ασκούμενων εξωτερικών παραγόντων. Τα περισσότερα υλικά μεταβάλλουν τον χαρακτήρα τους ανάλογα με την ισχύ των ασκούμενων δυνάμεων από γραμμικά ελαστικό σε ελαστικό και στη συνέχεια σε πλαστικό ενώ για μεγάλη ισχύ των εξωτερικών δυνάμεων πριν τη θραύση παρουσιάζουν βισκοελαστική συμπεριφορά. Με τη βοήθεια όμως της Θεωρίας της Ελαστικότητας μπορούμε να μελετήσουμε ολόκληρες κατασκευές και μέσω της ανάλυσης της κατανομής των φορτίων να εντοπίσουμε κρίσιμα σημεία όπου η συγκέντρωση των φορτίων να επιφέρει αστοχία της κατασκευής και να επιδιώξουμε ώστε όλα τα τμήματα της κατασκευής να επιδεικνύουν γραμμικά ελαστική συμπεριφορά. Τέλος πρέπει να επισημανθεί ότι στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση των στατικών εξωτερικών μηχανικών φορτίων, δηλαδή θα θεωρήσουμε ότι το μέτρο της ισχύς τους είναι ανεξάρτητο του χρόνου.

Έννοια της Τάσης

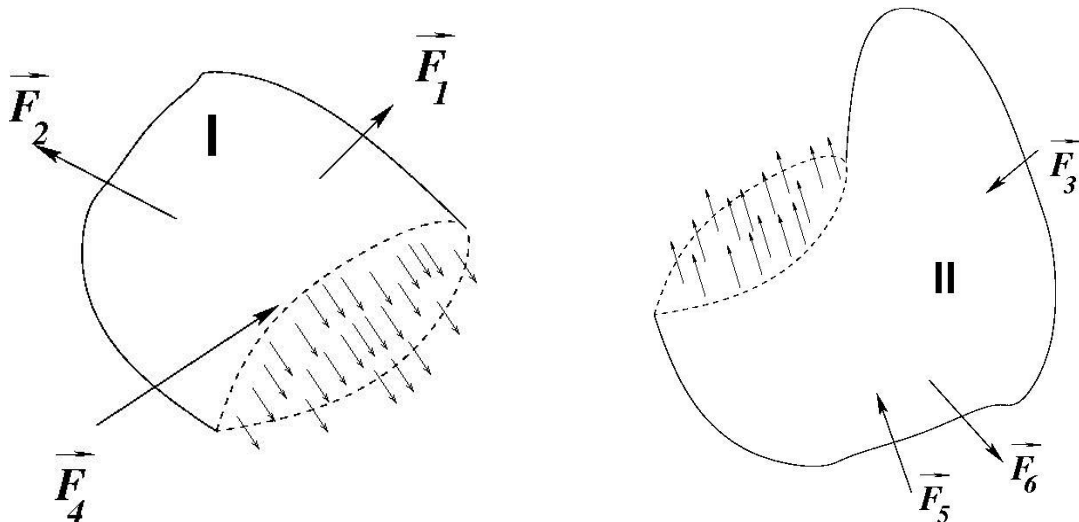


Το σχήμα που δείχνει την κατανομή των εξωτερικών φορτίων ονομάζεται Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος.

Έστω ότι θεωρούμε ένα τυχαίο σώμα όπως στο διπλανό σχήμα το οποίο υπόκειται σε εξωτερικές δυνάμεις.

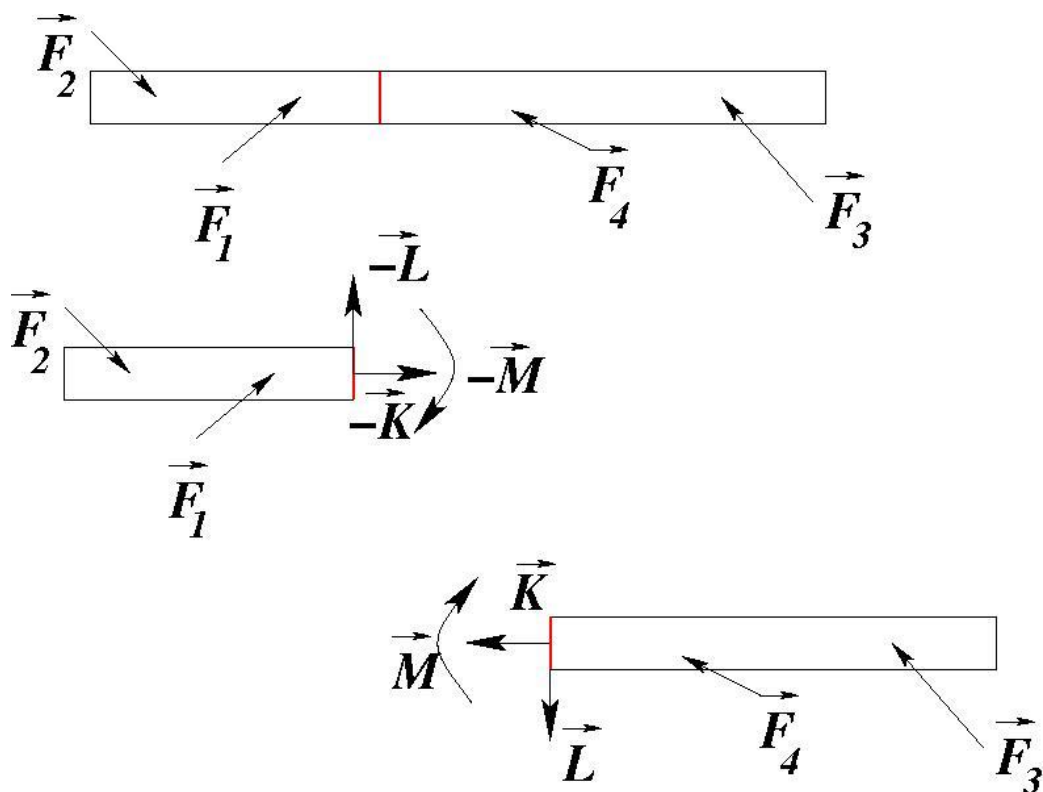
Οι βασικές θεωρήσεις που κάνουμε είναι ότι:

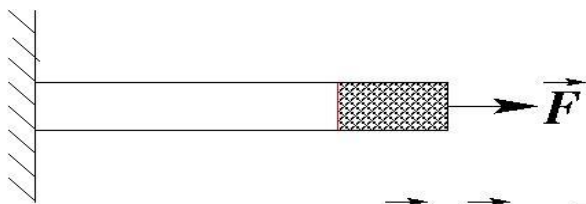
1. Το σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και το άθροισμα των δυνάμεων και των ροπών ισούται με μηδέν ώστε το σώμα ούτε να μετακινείται ούτε να περιστρέφεται.
2. Το μέτρο των εξωτερικών δυνάμεων είναι τέτοιο ώστε το σώμα να βρίσκεται στη κατάσταση της γραμμικής ελαστικότητας.



Έστω τώρα ότι φέρνουμε μία τυχαία νοητή τομή που χωρίζει το σώμα σε δύο τμήματα. Τότε και καθένα από τα δύο τμήματα ξεχωριστά πρέπει να βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και συνεπώς οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο συγκεκριμένο τμήμα πρέπει να αντισταθμίζονται από τις εσωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στην διατομή.

Αυτό μπορεί να γίνει πιο εύκολα κατανοητό στην περίπτωση ελεύθερης ράβδου που υπόκειται σε εξωτερικά φορτία. Εστω τώρα ότι φέρνουμε μία νοητή κάθετη τομή στη ράβδο. Τότε σε κάθε διατομή που προκύπτει για καθένα από τα δύο τμήματα ασκείται η αξονική δύναμη \vec{K} που είναι κάθετη στη διατομή και ονομάζεται ορθή δύναμη, η δύναμη που είναι παράλληλη στη διατομή \vec{L} και ονομάζεται διατμητική δύναμη και η ροπή κάμψης \vec{M} . Οι δυνάμεις στις δύο διατομές είναι ίδιου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς.

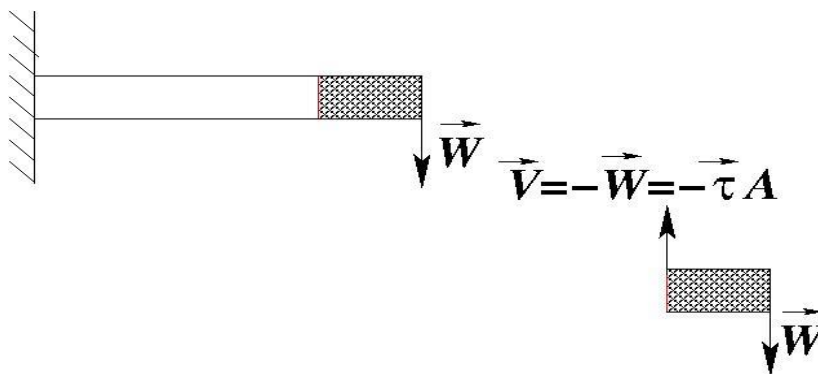




$$\vec{S} = -\vec{F} = -\vec{\sigma} A \quad \text{[Diagram of a bar element with force F and internal force S]$$

Ορθή τάση

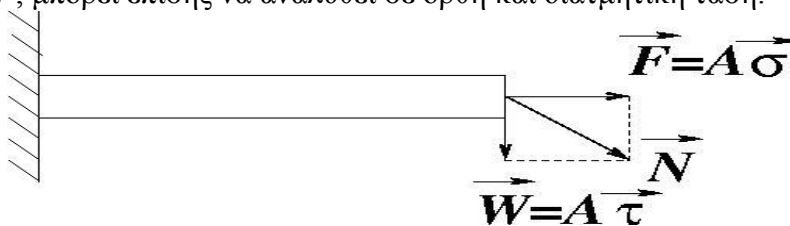
Έστω πάλι πακτωμένη ράβδος (ένα άκρο της σταθερό) στην οποία στο ελεύθερο άκρο της ασκείται αξονική δύναμη \vec{F} . Αν φέρουμε οποιαδήποτε κάθετη τομή τότε στη διατομή που προκύπτει ασκείται λόγω στατικής ισορροπίας εσωτερική δύναμη $-\vec{F}$ η οποία μοιράζεται σε όλο το εμβαδόν της διατομής. Αν θεωρήσουμε ότι η εξωτερική δύναμη \vec{F} ασκείται σε όλο το εμβαδό A της εξωτερικής δεξιάς διατομής της ράβδου τότε ως ορθή τάση ορίζουμε ένα διάνυσμα με τα χαρακτηριστικά δύναμης που ισούται με δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας, $\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{A}$, παρόμοια με τον ορισμό της πίεσης. Στο σύστημα μονάδων S.I. η μονάδα μέτρησης είναι το Pascal και ισχύει $1Pa = 1 \frac{N}{m^2}$.

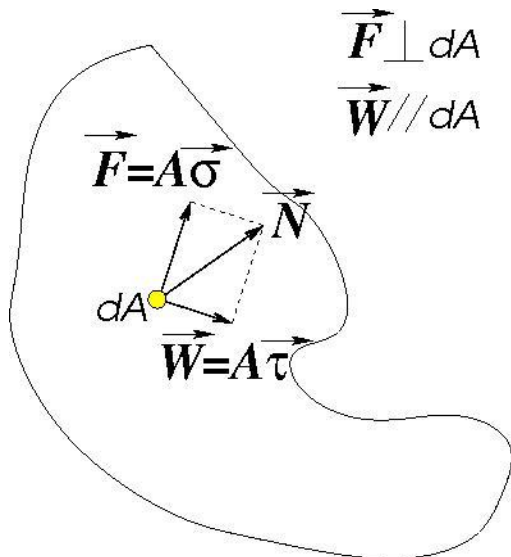


Διατμητική τάση

Εκτός από την αξονική δύναμη \vec{F} έστω ότι ασκείται στο ελεύθερο άκρο της ράβδου και η παράλληλη στην διατομή (κάθετη στην \vec{F}) δύναμη \vec{W} . Η τελευταία έχει ως αποτέλεσμα την κάμψη της δοκού και όχι τον εφελκυσμό της όπως η \vec{F} . Ομοίως με την ορθή τάση ορίζεται και η διατμητική τάση $\vec{\tau} = \frac{\vec{W}}{A}$.

Οποιαδήποτε δύναμη \vec{N} με τυχαία κατεύθυνση στο χώρο που ασκείται στο ελεύθερο άκρο της ράβδου μπορεί να αναλυθεί σε δύο κάθετες συνιστώσες μία ορθή ως προς τη ράβδο και μία διατμητική ως προς τη ράβδο και συνεπώς η τάση, που συνεπάγεται η δύναμη \vec{N} , μπορεί επίσης να αναλυθεί σε ορθή και διατμητική τάση.





Εν γένει έστω τυχαίο στερεό σώμα και μία στοιχειώδη επιφάνεια dA στην οποία θεωρούμε ότι ασκείται δύναμη \vec{N} . Τότε αυτή μπορεί πάντα να αναλυθεί σε μία δύναμη κάθετη στην επιφάνεια dA (ορθή δύναμη \vec{F}) και μία δύναμη παράλληλη στην επιφάνεια dA (διατμητική δύναμη \vec{W}). Οπότε όπως και στην περίπτωση της ράβδου μπορούμε να ορίσουμε την ορθή και την διατμητική τάση που ασκείται στο υπό μελέτη σώμα. Η Θεωρία της Ελαστικότητας ασχολείται με την κατανομή αυτών των τάσεων σε όλο τον όγκο του σώματος και την παραμόρφωση που αυτά προκαλούν.

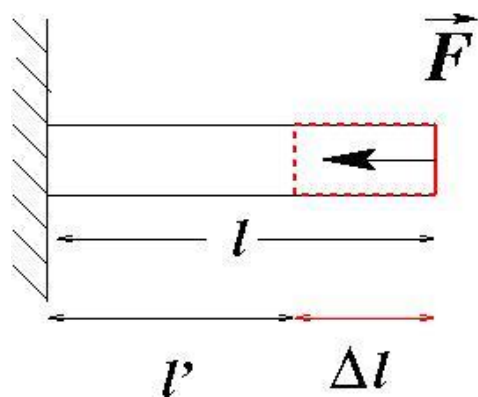
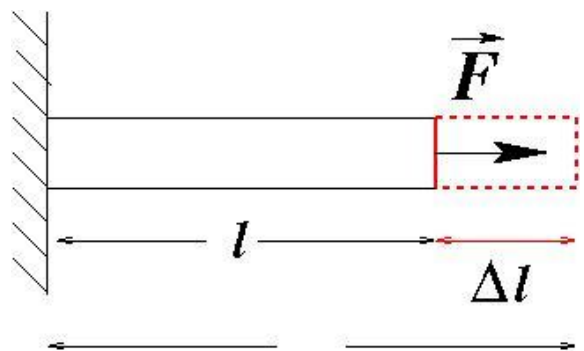
Παραμόρφωση

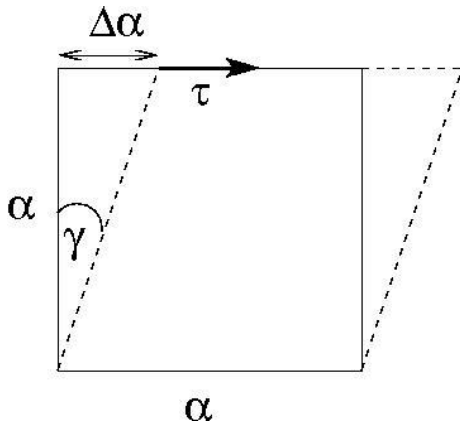
Η παραμόρφωση είναι η μεταβολή του σχήματος ενός σώματος υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων και ισούται ποσοτικά με την μεταβολή των διαστάσεων. Έστω και πάλι το παράδειγμα της ράβδου η οποία υπόκειται σε μία ορθή δύναμη \vec{F} . Τότε αυτή ανάλογα με την φορά της θα είναι είτε θλιπτική μειώνοντας το μήκος της ράβδου είτε εφελκυστική αυξάνοντας το. Αν l το αρχικό μήκος της ράβδου και $l' = l + \Delta l$ το τελικό της ως ορθή παραμόρφωση ορίζεται το αδιάστατο μέγεθος

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l' - l}{l} = \frac{l'}{l} - 1, \text{ το οποίο μετριέται είτε}$$

ως κλάσμα του 1 είτε ως %.

Για τα γραμμικά ελαστικά σώματα συνδέεται με το μέτρο της ορθής τάσης μέσω του νόμου του Hooke σε μία διάσταση $\sigma = E\varepsilon$, όπου η σταθερά αναλογίας E ονομάζεται μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young και έχει μονάδες τάσης



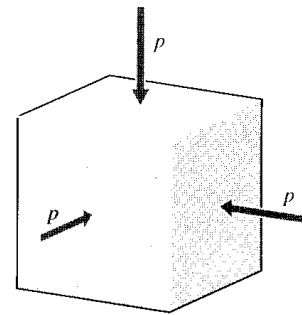


Όπως αναφέραμε και παραπάνω εκτός της ορθής τάσης υπάρχει και η διατμητική τάση τ που έχει ως αποτέλεσμα την κάμψη μίας δοκού. Για να ορίσουμε το αποτέλεσμα της ασ θεωρήσουμε τετράγωνο πλευράς α και σε μία από τις πλευρές ασκείται διατμητική τάση $\bar{\tau}$ η οποία αλλάζει το σχήμα σε παραλληλόγραμμο. Αν $\Delta\alpha$ η μετακίνηση του πάνω δεξιά άκρου του τετραγώνου και γ η γωνία που σχηματίζει η αρχική θέση της πλευράς με την τελική τότε για μικρές γωνίες η διατμητική παραμόρφωση ορίζεται ως η ίδια η γωνία $\gamma = \tan \gamma = \frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ και

συνδέεται με την διατμητική τάση μέσω του νόμου του Hooke για τη διάτμηση $\tau = G\gamma$, όπου G το μέτρο διάτμησης.

Μέτρο ελαστικότητας όγκου

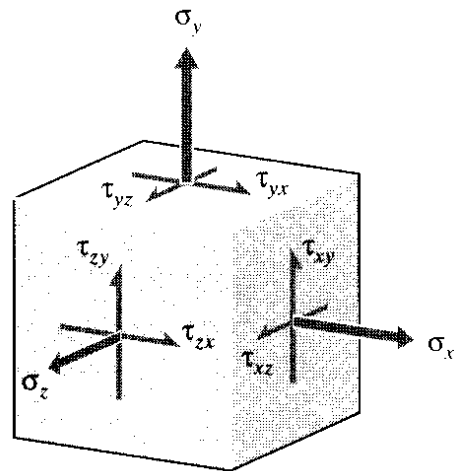
Μία ειδική περίπτωση που την αναφέρουμε εδώ για λόγους συμπληρωματικότητας είναι το μέτρο ελαστικότητας όγκου B που εκφράζει την αντίσταση ενός υλικού σε μεταβολή του όγκου του υπό συνθήκες ομοιόμορφης συμπίεσης χωρίς την μεταβολή του σχήματος του, π.χ. η περίπτωση της υδροστατικής πίεσης όπου ένα σώμα βυθίζεται στο νερό. Τότε σε όλες τις επιφάνειες ασκείται η ίδια πίεση P και αν ΔV η μεταβολή του όγκου του σώματος (η οποία είναι αρνητική ποσότητα εφόσον ο όγκος μειώνεται) το μέτρο ελαστικότητας όγκου ορίζεται ως



$$B = \frac{-P}{\Delta V/V}, \text{ και είναι πάντα θετικό. Η συμπιεστότητα ορίζεται ως } K = \frac{1}{B}.$$

Γενικευμένη Εντατική Κατάσταση

Έως τώρα ασχοληθήκαμε μόνο με την περίπτωση μονοαξονικής φόρτισης σε ένα υλικό. Στην γενική περίπτωση μπορούμε να έχουμε περισσότερες της μία ορθές και διατμητικές τάσεις που ασκούνται σε ένα υλικό και τότε το σώμα λέμε ότι βρίσκεται σε γενικευμένη εντατική κατάσταση. Για να την ορίσουμε ασ θεωρήσουμε ένα κύβο. Έστω $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ οι ορθές τάσεις που ασκούνται σε κάθε πλευρά του κύβου και έστω ότι ορίζουμε τις διατμητικές τάσεις έτσι ώστε οι δείκτες να υποδηλώνουν την κατεύθυνση τους. Π.χ. η τάση τ_{xy} βρίσκεται στο επίπεδο (x,y) και είναι κάθετη στο άξονα Ox ενώ είναι παράλληλη στον άξονα Oy .



Συνολικά για την περιγραφή των τάσεων χρειαζόμαστε ανά πλευρά δύο διατμητικές και μία ορθή τάση. Συνολικά είναι ενεργές 6 διατμητικές και 3 ορθές τάσεις θεωρώντας τις τρεις από τις έξι πλευρές του κύβου όπως αυτές φαίνονται στο σχήμα.

Για να τις αναπαραστήσουμε ορίζουμε τον τανυστή 2ης τάξης στις 3 διαστάσεις σ_{ij} , ($i, j = x, y, z$) γνωστό και ως τανυστή των τάσεων ο οποίο συνδέεται με τους ορισμούς που ήδη έχουμε δώσει μέσω της σχέσης

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \text{ Ο τανυστής } \sigma \text{ περιγράφει πλήρως την}$$

εντατική κατάσταση και έχει ως διαγώνια στοιχεία τις ορθές τάσεις ενώ ως μη-διαγώνια στοιχεία τις διατμητικές τάσεις.

Για τις διατμητικές τάσεις ισχύει ο κανόνας της αμοιβαιότητας, δηλαδή

1. Διατμητικές τάσεις σε παράλληλες πλευρές είναι ίσες σε μέτρο και αντίθετες σε φορά (και για αυτό το λόγο θεωρήσαμε 3 μόνο πλευρές του κύβου και όχι και τις 6 πλευρές του).
2. Διατμητικές τάσεις σε πλευρές κάθετες μεταξύ τους έχουν φορά προς την κοινή ακμή των πλευρών (θετική φορά) ή απομακρύνονται από αυτήν (αρνητική φορά) και είναι ίσες σε μέτρο, δηλαδή ισχύει $\tau_{ij} = \tau_{ji} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ($i \neq j$) και ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός.

Το 1 ισχύει και για τις ορθές τάσεις δεδομένου ότι η συνολική δύναμη που ασκείται στον κύβο πρέπει να ισούται με το μηδέν ώστε να έχουμε στατική ισορροπία. Το 2 είναι απόρροια του γεγονότος ότι η συνολική ροπή πρέπει να είναι μηδέν ώστε ο κύβος να μην εκτελεί περιστροφή και να βρίσκεται σε στατική ισορροπία.

Συνεπώς ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός και έχει την μορφή

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \text{ και έχει μόνο 6 ανεξάρτητα στοιχεία, τα 3 διαγώνια που είναι}$$

οι ορθές τάσεις και 3 διατμητικές τάσεις.

Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για ένα συμμετρικό τανυστή υπάρχει πάντα σύστημα συντεταγμένων (γνωστό ως κύριο), που αποτελείται από τρία επίπεδα κάθετα μεταξύ τους, στο οποίο είναι διαγώνιος. Στο κύριο σύστημα συντεταγμένων οι διατμητικές τάσεις μηδενίζονται και μένουν μόνο τα διαγώνια στοιχεία που είναι γνωστά ως κύριες τάσεις. Συνεπώς στο καινούριο σύστημα συντεταγμένων ο

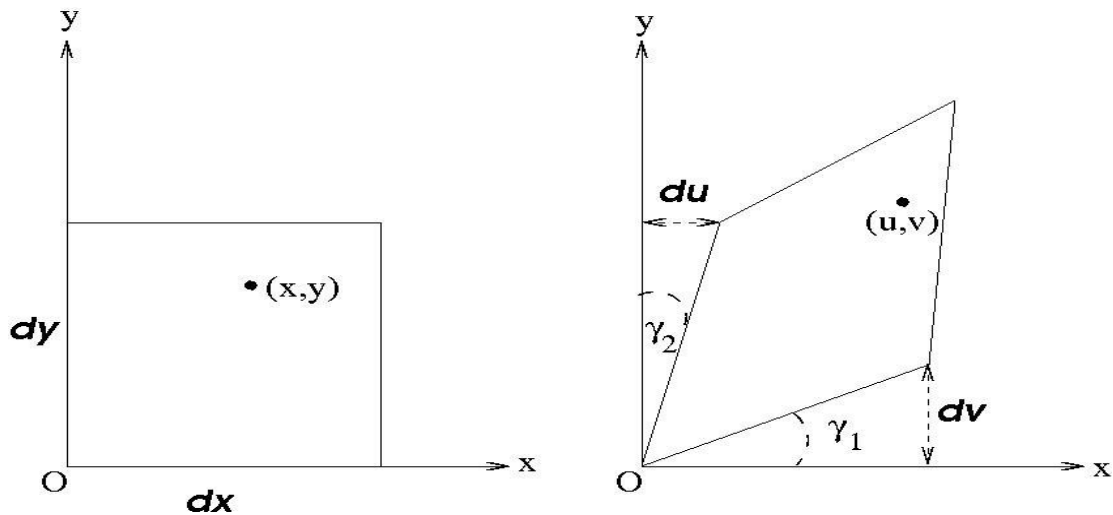
$$\text{τανυστής παίρνει τη μορφή } \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}.$$

Οι αναλλοίωτες ποσότητες σύμφωνα με αυτά που είπαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και παίρνοντας υπόψη τη συμμετρικότητα του τανυστή τάσεων είναι

- το ίχνος του τανυστή $J_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$
- το άθροισμα των υπο-οριζουσών $J_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2$
- η ορίζουσα $J_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{xz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2$

και στο κύριο σύστημα συντεταγμένων είναι απλώς:

$$J_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}, \quad J_2 = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_I\sigma_{III} + \sigma_{II}\sigma_{III} \text{ και } J_3 = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}.$$



Τανυστής Παραμόρφωσης

Αναλογικά με τον τανυστή τάσης μπορούμε να ορίσουμε και τον τανυστή παραμόρφωσης. Έστω στο επίπεδο xy τετράγωνο πλευρών dx και dy που παραμορφώνεται σε ρόμβο υπό την επίδραση στατικών τάσεων. Έστω $u(x,y)$ η συνάρτηση μετατόπισης των σημείων κατά των άξονα Ox και $v(x,y)$ η συνάρτηση μετατόπισης κατά τον άξονα Oy . Δηλαδή αν ένα σημείο του σώματος είχε αρχικά συντεταγμένες (x,y) μετά την παραμόρφωση έχει συντεταγμένες (u,v) . Για το τετράγωνο μπορώ να ορίσω όπως φαίνεται στο σχήμα δύο διατμητικές παραμορφώσεις $\gamma_1 \approx \tan \gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$ και $\gamma_2 \approx \tan \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Η συνολική διατμητική παραμόρφωση θα είναι $\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

Στις τρεις διαστάσεις τα u και v θα είναι πλέον συναρτήσεις και του z , ενώ πρέπει να ορίσουμε και το $w(x,y,z)$ που εκφράζει την μετατόπιση ενός σημείου του σώματος κατά μήκος του άξονα Oz . Οι διατμητικές τάσεις θα είναι τώρα

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Οι διατμητικές παραμορφώσεις εκφράζουν την αλλαγή του σχήματος του σώματος που υπόκειται σε διατμητικές τάσεις ενώ αν υπάρχουν και ορθές τάσεις αυτές θα έχουν εκτατικό αποτέλεσμα. Συνεπώς από τον ορισμό για την ορθή παραμόρφωση σε μία ράβδο μπορώ να ορίσω στις 3-διαστάσεις τις ορθές παραμορφώσεις

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ο τανυστής των παραμορφώσεων θα είναι συμμετρικός και θα έχει μορφή ανάλογη με αυτή του τανυστή των τάσεων

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Γενικευμένος νόμος του Hooke

Οι τανυστές τάσης και παραμόρφωσης συνδέονται γιατί κάθε τάση προκαλεί πολλαπλές παραμορφώσεις και μπορεί να γραφεί (σε επέκταση του νόμου του Hooke στη μία διάσταση) ως ένα ανάπτυγμα των παραμορφώσεων όπου οι σταθερές αναλογίας ονομάζονται ελαστικές σταθερές ή σταθερές δυσκαμψίας. Ομοίως κάθε παραμόρφωση μπορεί να γραφτεί ως ένα άθροισμα στα στοιχεία του τανυστή τάσης και τότε οι σταθερές αναλογίας ονομάζονται σταθερές ενδοτικότητας. Δηλαδή, λαμβάνοντας υπόψη και τη συμμετρικότητα των δύο τανυστών (μόνο 6 στοιχεία του τανυστή τάσης ή παραμόρφωσης είναι γραμμικά ανεξάρτητα), θα έχουμε

$$\begin{aligned}\sigma_x &= A_1 \varepsilon_{xx} + B_1 \varepsilon_{yy} + C_1 \varepsilon_{zz} + D_1 \gamma_{xy} + E_1 \gamma_{xz} + F_1 \gamma_{yz} \\ \sigma_y &= A_2 \varepsilon_{xx} + B_2 \varepsilon_{yy} + C_2 \varepsilon_{zz} + D_2 \gamma_{xy} + E_2 \gamma_{xz} + F_2 \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= A_3 \varepsilon_{xx} + B_3 \varepsilon_{yy} + C_3 \varepsilon_{zz} + D_3 \gamma_{xy} + E_3 \gamma_{xz} + F_3 \gamma_{yz} \\ \tau_{xy} &= A_4 \varepsilon_{xx} + B_4 \varepsilon_{yy} + C_4 \varepsilon_{zz} + D_4 \gamma_{xy} + E_4 \gamma_{xz} + F_4 \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} &= A_5 \varepsilon_{xx} + B_5 \varepsilon_{yy} + C_5 \varepsilon_{zz} + D_5 \gamma_{xy} + E_5 \gamma_{xz} + F_5 \gamma_{yz} \\ \tau_{yz} &= A_6 \varepsilon_{xx} + B_6 \varepsilon_{yy} + C_6 \varepsilon_{zz} + D_6 \gamma_{xy} + E_6 \gamma_{xz} + F_6 \gamma_{yz}\end{aligned}$$

όπου οι σταθερές $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i$ είναι οι σταθερές ελαστικότητας.

Σε τανυστική μορφή μπορούμε να γράψουμε απλώς

$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ ($i, j, k, l = x, y, z$), όπου ο τανυστής αναλογίας c_{ijkl} ονομάζεται τανυστής δυσκαμψίας με στοιχεία τις ελαστικές σταθερές και είναι ένας τανυστής 4ης τάξης στις 3 διαστάσεις δηλαδή το μητρώο του περιλαμβάνει $3^4 = 81$ στοιχεία.

Ομοίως μπορούμε να γράψουμε χρησιμοποιώντας τον τανυστή ενδοτικότητας (s_{ijkl}):

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (i, j, k, l = x, y, z).$$

Ο τανυστής δυσκαμψίας, όπως αναφέρθηκε περιέχει 81 στοιχεία αλλά αν λάβουμε υπόψη μας ότι οι τανυστές τάσης και παραμόρφωσης είναι συμμετρικοί και έχουν μόνο 6 ανεξάρτητα στοιχεία τότε από τα 81 στοιχεία του τανυστή δυσκαμψίας μόνο τα $6 \times 6 = 36$ από αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ελαστικές σταθερές).

Για ένα σώμα που δεν έχει καμία συμμετρία στο χώρο (τρικλινές μέσο) μπορούμε να γράψουμε εν συντομία τη σχέση που συνδέει τα 6 ανεξάρτητα στοιχεία του τανυστή τάσης με τα 6 ανεξάρτητα στοιχεία του τανυστή παραμόρφωσης μέσω των 36 ελαστικών σταθερών ως

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τον ορισμό

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}.$$

Επειδή όπως αποδεικνύεται ο πίνακας των ελαστικών σταθερών c_{ij} είναι συμμετρικός τελικά υπάρχουν μόλις 21 και όχι 36 γραμμικά ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές (6 διαγώνια στοιχεία και 15 μη-διαγώνια). Η συμμετρία που έχει ένα σώμα στο χώρο μειώνει ακόμα περισσότερο το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητα ελαστικών σταθερών δεδομένου ότι οι τελευταίες πρέπει να υπακούουν στην συμμετρία του σώματος. Χαρακτηριστικά παραδείγματα πινάκων ελαστικών σταθερών ακολουθούν

- Μονοκλινές σώμα (γνωστό και ως αελοτροπικό μέσο) που έχει ένα επίπεδο συμμετρίας. Υπάρχουν 13 γραμμικά ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές και ο

πίνακας των ελαστικών σταθερών είναι

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix}.$$

- Ορθότροπο μέσο με 3 επίπεδα συμμετρία κάθετα μεταξύ τους (9 γραμμικά

ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}$$

- Εγκαρσίως ισότροπο μέσο όπου υπάρχει άξονας ως προς τον οποίον όλες οι κάθετες διευθύνσεις είναι συμμετρικές. Υπάρχουν συνολικά 6 ανεξάρτητες

ελαστικές σταθερές:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}.$$

- Πλήρες ισότροπο μέσο όπου υπάρχει σφαιρική συμμετρία. Συνολικά υπάρχουν μόνο 2 γραμμικά ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \text{ όπου } 2c_{44} = c_{11} - c_{12}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω τρικλινές μέσο. Είναι ο τανυστής παραμόρφωσης διαγώνιος στο κύριο σύστημα συντεταγμένων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Στο κυρίως σύστημα συντεταγμένων ξέρουμε ότι ο τανυστής τάσεων

σ είναι διαγώνιος και έχει τη μορφή $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$. Επιπλέον ξέρουμε ότι ο

τανυστής τάσεων και ο τανυστής παραμόρφωσης συνδέονται μέσω του πίνακα των ελαστικών σταθερών σύμφωνα με το νόμο του Hooke

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma = CE,$$

όπου τα Σ , C , E αναπαριστούν τους αντίστοιχους πίνακες και μπορώ να εκτελέσω από την άλγεβρα πινάκων τις ακόλουθες πράξεις:

$$\Sigma = CE \Rightarrow C^{-1}\Sigma = C^{-1}CE = IE = E$$

Επειδή είμαστε στο κυρίως σύστημα συντεταγμένων θα ισχύει για το πίνακα Σ ότι

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{αλλά ο πίνακας των ελαστικών σταθερών για ένα τρικλινές μέσο θα έχει}$$

όλα τα στοιχεία του μη-μηδενικά και το ίδιο θα ισχύει και τον αντίστροφο του. Συνεπώς ο αντίστροφος του πίνακα των ελαστικών σταθερών θα είναι

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{pmatrix} \quad \text{και θα έχουμε}$$

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = C^{-1}\Sigma = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}\sigma_I + s_{12}\sigma_{II} + s_{13}\sigma_{III} \\ s_{21}\sigma_I + s_{22}\sigma_{II} + s_{23}\sigma_{III} \\ s_{31}\sigma_I + s_{32}\sigma_{II} + s_{33}\sigma_{III} \\ s_{41}\sigma_I + s_{42}\sigma_{II} + s_{43}\sigma_{III} \\ s_{51}\sigma_I + s_{52}\sigma_{II} + s_{53}\sigma_{III} \\ s_{61}\sigma_I + s_{62}\sigma_{II} + s_{63}\sigma_{III} \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς τα μη διαγώνια στοιχεία του τανυστή παραμόρφωσης $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ στην γενική περίπτωση του τρικλινούς σώματος δεν είναι μηδενικά και ο τανυστής παραμόρφωσης στο κύριο σύστημα συντεταγμένων δεν είναι διαγώνιος. Αυτό εκφράζει την αρχή ότι στη γενική περίπτωση ακόμα και αν σε ένα σώμα ασκούνται αποκλειστικά ορθές τάσεις η συντελούμενη παραμόρφωση είναι και διαμητική.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να βρεθούν οι κύριες τιμές του τανυστή τάσεων $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Ποιος ο πίνακας

στροφής που εκφράζει το μετασχηματισμό στο καινούριο σύστημα συντεταγμένων; Ποιες οι τιμές των αναλλοίωτων ποσοτήτων του τανυστή τάσεων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Για να βρούμε τις κύριες τιμές του λύνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\det(\sigma - \sigma_i I) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \sigma_i & 0 & 0 \\ 0 & 4 - \sigma_i & 3 \\ 0 & 3 & -4 - \sigma_i \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \sigma_i) \begin{vmatrix} 4 - \sigma_i & 3 \\ 3 & -4 - \sigma_i \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(1 - \sigma_i)[(4 - \sigma_i)(-4 - \sigma_i) - 9] = 0 \Rightarrow (1 - \sigma_i)(\sigma_i^2 - 16 - 9) = 0 \Rightarrow (1 - \sigma_i)(\sigma_i^2 - 25) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 - \sigma_i = 0 \\ \sigma_i^2 - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_I = 1 \\ \sigma_{II} = -5 \\ \sigma_{III} = 5 \end{cases}$$

Για την κύρια τιμή $\sigma_{II} = -5$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα βρίσκεται από την εξίσωση

$$(\sigma - \sigma_{II} I) X_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{II} & 0 & 0 \\ 0 & 4 - \sigma_{II} & 3 \\ 0 & 3 & -4 - \sigma_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6R_{21} \\ 9R_{22} + 3R_{23} \\ 3R_{22} + 1R_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R_{21} = 0 \\ R_{23} = -3R_{22} \end{cases}$$

Συνεπώς έχουμε 2 εξισώσεις με 3 αγνώστους. Για να υπολογίσουμε το 2 και το 3 στοιχείο του ιδιοδιανύσματος θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ένα ιδιοδιάνυσμα έχει μέτρο 1 και συνεπώς πρέπει

$$(R_{21})^2 + (R_{22})^2 + (R_{23})^2 = 1 \Rightarrow 0^2 + (R_{22})^2 + (-3R_{22})^2 = 1 \Rightarrow 10(R_{22})^2 = 1$$

$$\Rightarrow R_{22} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}},$$

Διαλέγουμε την θετική τιμή (αν διαλέγαμε την αρνητική θα παίρναμε το ίδιο διάνυσμα πολλαπλασιασμένο με το -1). Συνεπώς

$$R_{22} = + \frac{1}{\sqrt{10}}, R_{23} = -3R_{22} = - \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Οπότε το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

Για την κύρια τιμή $\sigma_{III} = 5$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα βρίσκεται από την εξίσωση

$$(\sigma - \sigma_{III}I)X_{III} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{III} & 0 & 0 \\ 0 & 4 - \sigma_{III} & 3 \\ 0 & 3 & -4 - \sigma_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4R_{31} \\ -1R_{32} + 3R_{33} \\ 3R_{32} - 9R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R_{31} = 0 \\ R_{32} = 3R_{33} \end{cases}$$

Συνεπώς έχουμε 2 εξισώσεις με 3 αγνώστους. Για να υπολογίσουμε το 2 και το 3 στοιχείο του ιδιοδιανύσματος θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ένα ιδιοδιάνυσμα έχει μέτρο 1 και συνεπώς πρέπει

$$(R_{31})^2 + (R_{32})^2 + (R_{33})^2 = 1 \Rightarrow 0^2 + (3R_{33})^2 + (R_{33})^2 = 1 \Rightarrow 10(R_{33})^2 = 1$$

$$\Rightarrow R_{33} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}},$$

Διαλέγουμε την θετική τιμή (αν διαλέγαμε την αρνητική θα παίρναμε το ίδιο διάνυσμα πολλαπλασιασμένο με το -1). Συνεπώς

$$R_{33} = + \frac{1}{\sqrt{10}}, R_{32} = 3R_{33} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Οπότε το τρίτο ιδιοδιάνυσμα είναι
$$\begin{pmatrix} R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Για την κύρια τιμή $\sigma_I = 1$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα βρίσκεται από την εξίσωση

$$(\sigma - \sigma_I I)X_I = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & 4 - \sigma_I & 3 \\ 0 & 3 & -4 - \sigma_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0R_{11} \\ 3R_{12} + 3R_{13} \\ 3R_{12} - 5R_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 3R_{12} = -3R_{13} \\ 3R_{12} = 5R_{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ R_{12} = R_{13} = 0 \end{cases}$$

Το R_{11} μπορεί να έχει οποιαδήποτε πραγματική τιμή και δεδομένου ότι το ιδιοδιάνυσμα πρέπει να έχει μέτρο 1 :

ένα ιδιοδιάνυσμα έχει μέτρο 1 και συνεπώς πρέπει

$$(R_{11})^2 + (R_{12})^2 + (R_{13})^2 = 1 \Rightarrow (R_{11})^2 + (0)^2 + (0)^2 = 1 \Rightarrow (R_{11})^2 = 1$$

$$\Rightarrow R_{11} = \pm 1$$

Διαλέγω την θετική τιμή +1.

Οπότε το πρώτο ιδιοδιάνυσμα είναι το
$$\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι πράγματι ιδιοδιάνυσμα γιατί

$$\sigma X_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_I X_I$$

Επίσης προσέξτε ότι τα τρία ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους δηλαδή $R_{11}R_{21} + R_{12}R_{22} + R_{13}R_{23} = R_{11}R_{31} + R_{12}R_{32} + R_{13}R_{33} = R_{21}R_{31} + R_{22}R_{32} + R_{23}R_{33} = 0$.

Τα τρία ιδιοδιανύσματα είναι οι στήλες του αναστρέφου του πίνακα στροφής και συνεπώς

$$R^T = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 0 & -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 0 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

Οι αναλλοίωτες του τανυστή τάσεων παίρνουν τιμές που δεν εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Συνεπώς χρησιμοποιώντας το κύριο σύστημα συντεταγμένων όπου ο τανυστής τάσεων είναι διαγώνιος και έχει την πιο απλή δυνατή μορφή, οι αναλλοίωτες θα είναι

$$J_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 1 - 5 + 5 = 1$$

$$J_2 = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_I \sigma_{III} + \sigma_{II} \sigma_{III} = 1 \times (-5) + 1 \times 5 + (-5) \times 5 = -25$$

$$J_3 = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} = 1 \times (-5) \times 5 = -25.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 - ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ

Χαρακτηριστική περίπτωση σώματος στο οποίο εξασκούνται εξωτερικά φορτία αποτελούν οι δοκοί. Ως δοκός χαρακτηρίζεται οποιοδήποτε κατασκευαστικό στοιχείο με μεγάλο διαμήκη άξονα ως προς το πάχος του. Τα φορτία συνήθως ασκούνται κάθετα στο διαμήκη άξονα και συνεπώς δημιουργούν διατμητικές τάσεις.

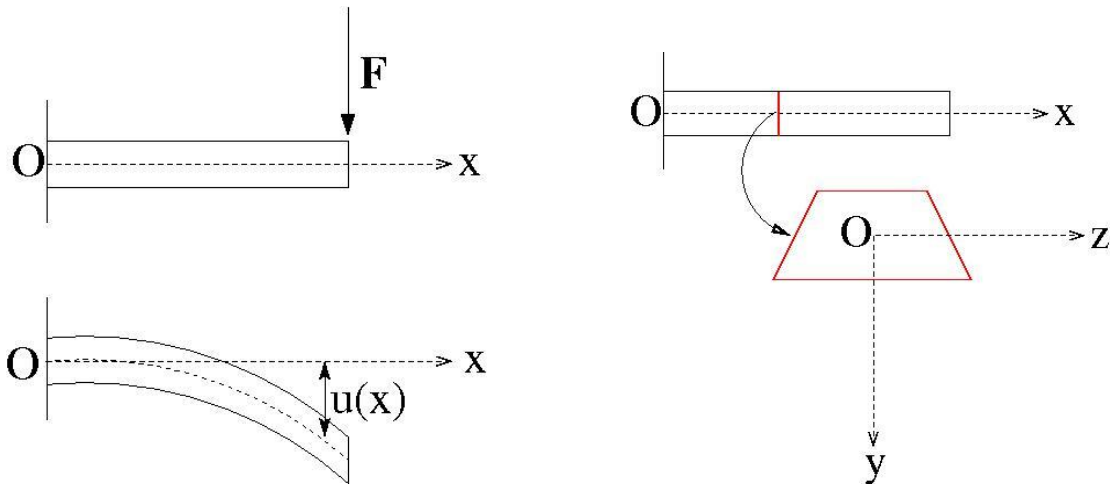
Αν τα φορτία ασκούνται κατά μήκος του διαμήκη άξονα της δοκού τότε έχουμε την εμφάνιση ορθών τάσεων που έχουν ως αποτέλεσμα την θλίψη ή τον εφελκυσμό της δοκού ενώ ταυτόχρονα μειώνεται ή αυξάνεται, αντίστοιχα, το πάχος της. Στην

περίπτωση ορθής τάσης ορίζεται ο λόγος Poisson $= \frac{|\varepsilon_y|}{|\varepsilon_x|} = \frac{|\varepsilon_z|}{|\varepsilon_x|}$ όπου είναι ο λόγος της

διατμητική παραμόρφωσης προς την ορθή παραμόρφωση (θεωρήσαμε τον διαμήκη άξονα παράλληλο στον άξονα Ox).

Μία δοκός ορίζεται ως μονόπακτη όταν είναι στερεωμένο μόνο το ένα άκρο της ενώ ως αμφίπακτη όταν και τα δύο άκρα της είναι στερεωμένα.

Έστω τώρα μονόπακτη ράβδος (δοκός με ευθύγραμμο διαμήκη άξονα) και έστω ότι ασκείται διατμητική δύναμη \vec{F} στο ελεύθερο άκρο της. Τότε η ράβδος κάμπτεται κι ο διαμήκης άξονας από ευθύγραμμος γίνεται καμπυλόγραμμος. Για την μελέτη του φαινομένου ορίζουμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα όπου ο άξονας Ox είναι παράλληλο στον διαμήκη άξονα της αρχικής θέσης της δοκού, ο άξονας Oy είναι παράλληλος της δύναμης \vec{F} με την ίδια φορά και ο άξονας Oz είναι κάθετος στο επίπεδο xy και έχει φορά προς το εσωτερικό μέρος της σελίδας ώστε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων που ορίζουμε να είναι δεξιόστροφο.



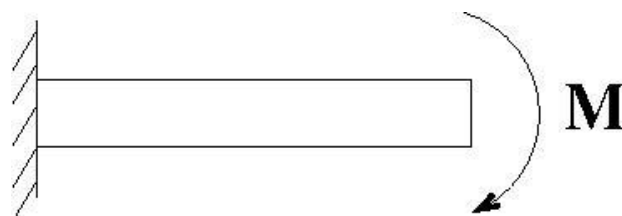
Στο κεφάλαιο αυτό, οι περιπτώσεις που θα ασχοληθούμε θα αφορούν συμμετρικές ως προς το επίπεδο xy δοκούς, δηλαδή αν φέρω μία τομή στη δοκό τότε αυτή θα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy.

Επίσης θα θεωρούμε φορτία που δρουν στο επίπεδο xy και θα προκαλούν κάμψη της δοκού εντός του επιπέδου xy. Χαρακτηριστικό μέγεθος που χαρακτηρίζει τη κάμψη

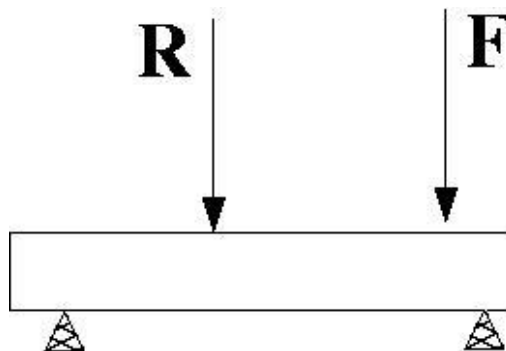
της δοκού είναι η συνάρτηση $u(x)$ που είναι η κάθετη απόκλιση κάθε σημείου της ράβδου από τη αρχική του θέση κατά μήκος του άξονα Oy .

Πριν προχωρήσουμε θα πρέπει επίσης να διαχωρίσουμε

(i) την καθαρή κάμψη που είναι αποτέλεσμα μόνο ροπής (η οποία προκαλείται από άσκηση διατμητικής δύναμης) όπως στο παράδειγμα για μονόπακτη ράβδο που φαίνεται στο κάτωθι σχήμα



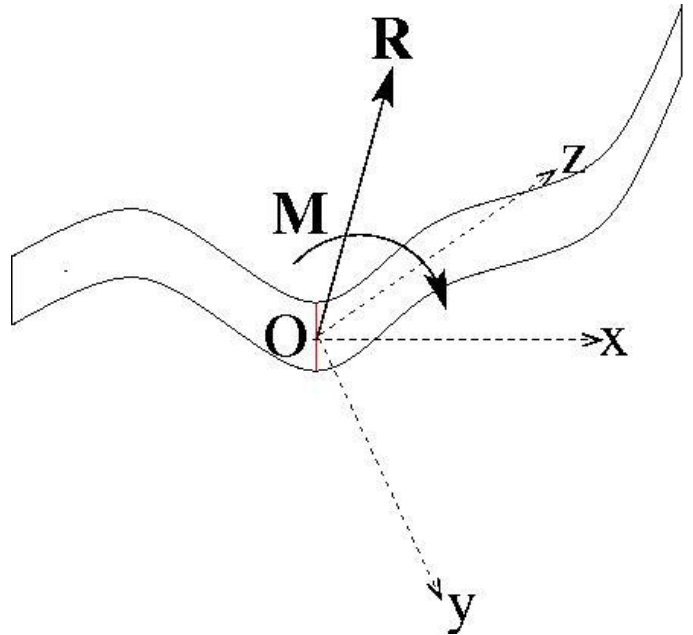
και (ii) την μη-ομοιόμορφη κάμψη που είναι αποτέλεσμα μη ομοιόμορφα ασκούμενων διατμητικών τάσεων όπως στο παράδειγμα με την αμφίπακτη δοκό που ακολουθεί.



Συσχετισμός εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων και τάσεων

Έστω δοκός που ασκούνται δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ και το σύστημα δοκός-δυνάμεις βρίσκεται σε στατική ισορροπία, δηλ. η δοκός δεν εκτελεί ούτε μεταφορική ούτε περιστροφική κίνηση. Αν φέρουμε μία κάθετη τομή σε ένα τυχαίο σημείο της δοκού τότε καθένα από τα δύο τμήματα της που προκύπτουν πρέπει να βρίσκεται σε στατική ισορροπία και οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό το τμήμα πρέπει να εξισορροπούνται από τις εσωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στη διατομή που δημιουργήσαμε. Συνεπώς στη διατομή πρέπει να ασκείται εσωτερική δύναμη \vec{R} που έχει ως προέλευση της την παραμόρφωση της ράβδου και η οποία μπορεί να αναλυθεί σε τρεις κάθετες συνιστώσες R_x, R_y, R_z όπου τους άξονες τους ορίζουμε ώστε ο Ox να είναι κάθετος στη διατομή και οι Oy, Oz να σχηματίζουν δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Η δύναμη \vec{R} δημιουργεί ροπή M που ασκείται στη ράβδο. Η ροπή αυτή μπορεί με τη σειρά της να αναλυθεί σε τρία κοχλιοδιανύσματα M_x, M_y, M_z , όπου π.χ. το M_x εκφράζει στρέψη της ράβδου γύρω από τον άξονα Ox . Οι συνιστώσες M_y και M_z που εκφράζουν στρέψη της ράβδου γύρω από τους άξονες Oy και Oz , αντίστοιχα, έχουν ως αποτέλεσμα τη κάμψη της δοκού και όπως θα δείξουμε στη συνέχεια σχετίζονται με την ορθή τάση $\sigma_{xx} = \sigma_x$ που ασκείται κατά

μήκος του διαμήκη άξονα της δοκού. Οι διατμητικές τάσεις $\sigma_{xy} = \tau_{xy}$ και $\sigma_{xz} = \tau_{xz}$ σχετίζονται με την στρέψη της ράβδου γύρω από τον άξονα Ox και συνεπώς την ροπή M_x . Συνεπώς κύριο χαρακτηριστικό για την καταπόνηση μίας δοκού σε κάμψη είναι η εμφάνιση ορθών τάσεων.



Αποδεικνύεται ότι αν φέρουμε σε μία δοκό κάθετη διατομή εμβαδού A τότε για τις εσωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στη διατομή ισχύει

$$R_x = \int_A \sigma_{xx} dA, \quad R_y = \int_A \sigma_{xy} dA,$$

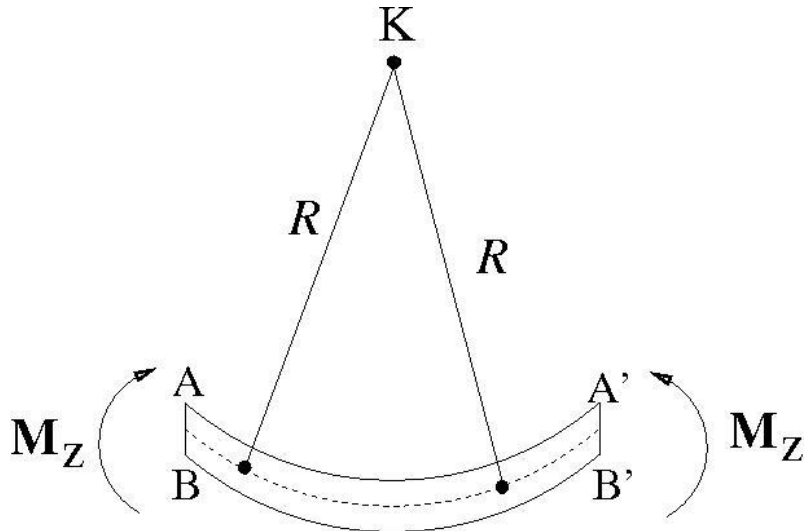
$$R_z = \int_A \sigma_{xz} dA$$

και για τις συνιστώσες της ροπής

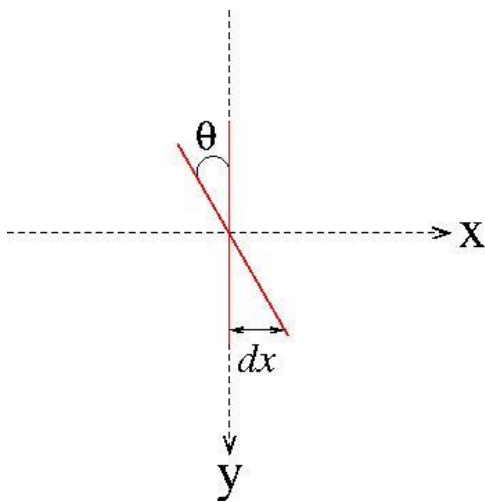
$$M_x = \int_A (\sigma_{xy}z - \sigma_{xz}y) dA, \quad M_y = -\int_A \sigma_{xx}z dA, \quad M_z = \int_A \sigma_{xx}y dA$$

Παραμόρφωση συμμετρική δοκού σε κάμψη

Έστω πρισματική ευθύγραμμη δοκός (η κάθετη διατομή είναι τραπέζιο) στα δύο άκρα της οποίας ασκούνται ροπές M_z εντός του επιπέδου xy αντίθετης φοράς. Οι ροπές αυτές δημιουργούν στρέψη της ράβδου γύρω από τον άξονα Oz και συνεπώς έχουν ως αποτέλεσμα την ταυτόχρονη κάμψη των δύο άκρων της ράβδου εντός του επιπέδου xy. Ορίζουμε ως ουδέτερο άξονα της ράβδου τον διαμήκη άξονα που περνάει από το κέντρο βάρους κάθε κάθετης διατομής (για ομοιογενή ράβδο συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο). Για την ευθύγραμμη ράβδο πριν ασκήσουμε τις εξωτερικές ροπές ο ουδέτερος άξονας της ορίζει τον καρτεσιανό άξονα Ox. Επειδή η ράβδος πρέπει να έχει ως επίπεδο συμμετρίας το xy και η καμπτική ροπή έχει την ίδια τιμή σε όλη την διατομή της ράβδου, τότε κατά μήκος του ουδέτερου άξονα πρέπει όλα τα σημεία με το ίδιο y να έχουν την ίδια καμπυλότητα. Συνεπώς κάθε διατομή της ράβδου περιστρέφεται αλλά παραμένει κάθετη στον διαμήκη άξονα της ράβδου. Αυτή η παραδοχή είναι γνωστή ως παραδοχή Bernoulli και αποτελεί τη βάση και για την επίλυση των προβλημάτων κάμψης σε μη-συμμετρικές δοκούς.



Προ κάμψης τόσο η ευθεία AA' και BB' που ενώνουν τα πάνω και κάτω άκρα της ράβδου (για $z=0$) έχουν μήκος ℓ ίσο με το μήκος της ράβδου. Αν προκαλέσουμε κάμψη όπως συζητήσαμε παραπάνω τότε τόσο το AA' όσο και το BB' θα μετατραπούν σε τόξα κύκλων με το ίδιο κέντρο K . Το μήκος του τόξου AA' θα είναι μικρότερο του ℓ και η άνω πλευρά της ράβδου θα υποστεί θλίψη ενώ το μήκος του BB' θα είναι μεγαλύτερο του ℓ και η κάτω πλευρά θα υποστεί εφελκυσμό. Ο ουδέτερος άξονας (διαμήκης άξονας) θα έχει μήκος ℓ και συνεπώς ορίζει τα όρια μεταξύ των δύο τμημάτων της ράβδου που υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό. Επίσης ο ουδέτερος άξονα θα είναι και αυτός τόξο κύκλου με κέντρο το K και αν R η απόσταση του ουδέτερου άξονα από το K , το R είναι γνωστό σαν ακτίνα καμπυλότητας ενώ το $k=1/R$ είναι γνωστό απλώς ως καμπυλότητα.



Συνεπώς, σύμφωνα με αυτά που μόλις αναφέραμε, αν θεωρήσουμε μία κάθετη διατομή στη δοκό (κάθετη στον άξονα Ox) αυτή θα περιστραφεί χωρίς παραμόρφωση γύρω από τον άξονα Oz . Αν προβάλλουμε την διατομή στο επίπεδο xy τότε η θέση της διατομής πριν και μετά την κάμψη θα σχηματίζουν γωνία θ και έστω dx η μετατόπιση του πάνω άκρου της διατομής.

Για μικρές γωνίες θα ισχύει $\theta = \tan \theta = \frac{dx}{y} \Rightarrow dx = y\theta$.

Αποδεικνύεται ότι η ορθή παραμόρφωση κατά μήκος του διαμήκη άξονα θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{y}{R} = yk.$$

Η σχέση αυτή είναι συμβατή με το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε γιατί τα σημεία με $y > 0$ υπόκεινται σε εφελκυσμό ενώ αυτά με $y < 0$ σε θλίψη το οποίο είναι αληθές δεδομένου του ορισμού του άξονα Oy και δεδομένου ότι τα ο ουδέτερος άξονας ορίζει το όριο μεταξύ θλίψης και εφελκυσμού. Επιπλέον την μέγιστη παραμόρφωση την έχουμε για την μέγιστη τιμή του y το οποίο είναι επίσης αληθές δεδομένου ότι κατά μήκος της ευθείας AA' έχουμε την μέγιστη θλίψη και κατά μήκος της BB' τον μέγιστο εφελκυσμό.

Τέλος πρέπει να σημειώσουμε ότι λόγω στατικής ισορροπίας αναγκαστικά τόσο οι διατμητικές τάσεις όσο και οι διατμητικές παραμορφώσεις πρέπει να είναι μηδενικές διαφορετικά η ράβδος θα εκτελούσε περιστροφική κίνηση γύρω από τον ουδέτερο άξονα. Δηλαδή $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = 0$.

Σχέση τάσεων-παραμορφώσεων

Έστω δοκός που κάμπτεται κάτω από την επίδραση ροπής M_z . Και έστω ότι αυτή προκαλεί ορθή τάση σ_{xx} τέτοιας τιμής ώστε να μην κινδυνεύει η δοκός με αστοχία. Στην περίπτωση ισότροπης και ομοιογενούς δοκού θα ισχύει ο νόμος του Hooke $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$ (στην γενική περίπτωση αυτό δεν συνεπάγεται από τον γενικευμένο νόμο του Hooke). Δεδομένου ότι όπως δείξαμε $\varepsilon_{xx} = \frac{y}{R} = yk$ θα έχουμε

$$\text{για την ορθή τάση } \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E \frac{y}{R} = Eyk.$$

Επειδή $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$, η συνιστώσα της ροπής M_x θα μηδενίζεται :

$$M_x = \int_A (\sigma_{xy}z - \sigma_{xz}y) dA = 0.$$

Λόγω της συμμετρίας της διατομής ως προς τον άξονα Oy και Oz επίσης η συνιστώσα της ροπής M_y θα μηδενίζεται όπως αναμένεται και από την διατύπωση του προβλήματος που θέσαμε :

$$M_y = -\int_A \sigma_{xx}z dA = -\int_A \frac{Ey}{R} z dy dz = -\frac{E}{R} \int_A yz dy dz = 0.$$

Οπότε για την M_z που ασκείται στη ράβδο θα έχω

$$M_z = \int_A \sigma_{xx}y dA = \int_A \frac{Ey}{R} y dA = \frac{E}{R} \int_A y^2 dA = \frac{E}{R} I_{zz},$$

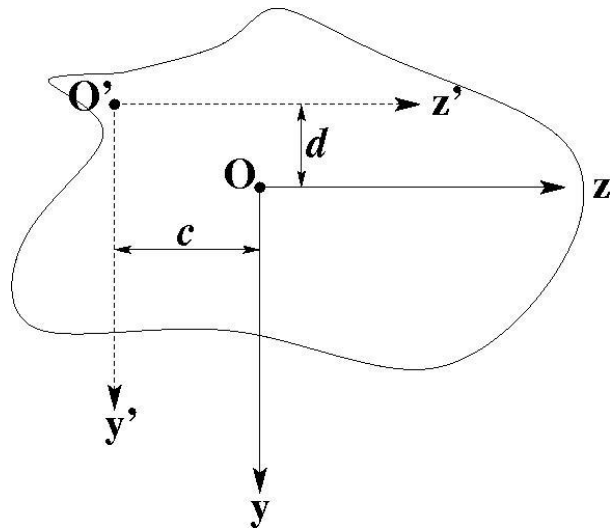
όπου I_{zz} η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Oz. Συνεπώς

$$M_z = \frac{E}{R} I_{zz} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} = E \frac{y}{R} = y \frac{E}{R} = y \frac{M_z}{I_{zz}} \\ \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = y \frac{M_z}{EI_{zz}} \end{cases}.$$

Οπότε η ορθή τάση είναι ανάλογη της εφαρμοζόμενης ροπής (όσο μεγαλύτερο το εξωτερικό φορτίο που ασκείται τόσο μεγαλύτερη η τάση) και αντιστρόφως ανάλογη της ροπής αδράνειας (όσο μεγαλύτερη η ροπή αδράνειας τόσο πιο δύσκολο να καμφθεί η ράβδος) που είναι γεωμετρικό χαρακτηριστικό της διατομής.

Αν ασκείται και καμπτική δύναμη ως προς τον y άξονα (δηλαδή υπάρχει και συνιστώσα M_y) τότε η σχέση που δίνει την ορθή τάση γίνεται

$$\sigma_{xx} = y \frac{M_z}{I_{zz}} - z \frac{M_y}{I_{yy}}, \text{ όπου } I_{yy} = \int_A z^2 dA \text{ η ροπή αδράνειας ως προς τον Oy άξονα.}$$



Εύρεση ροπής αδράνειας επιφανειών

Έστω η διατομή εμβαδού A που φαίνεται στο σχήμα και έστω ότι ξέρουμε τις ροπές αδράνειας I_{yy}, I_{zz} ως προς τους άξονες Oy και Oz όπου το σημείο O αντιστοιχεί στο κέντρο βάρους της διατομής. Έστω τώρα ένα καινούριο σύστημα συντεταγμένων όπου c η κάθετη απόσταση του άξονα Oy' από τον άξονα Oy και d η κάθετη απόσταση του άξονα Oz' από τον άξονα Oz . Τότε ισχύει το θεώρημα Steiner που μας δίνει τις ροπές αδράνειας ως προς τους καινούριου άξονες

$$\begin{cases} I_{y'y'} = I_{yy} + c^2 A \\ I_{z'z'} = I_{zz} + d^2 A \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Εύρεση Τάσεων

Έστω καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ κα έστω στοιχειώδη επιφάνεια dA_x κάθετη στον άξονα Ox ($dA_x \perp Ox$), τότε στην επιφάνεια αυτή ασκείται τάση $\vec{S}_x = \sigma_{xx}\hat{u}_x + \sigma_{xy}\hat{u}_y + \sigma_{xz}\hat{u}_z$ ($\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ μοναδιαία διανύσματα) όπου η πρώτη συνιστώσα είναι η ορθή τάση και οι άλλες δύο οι διατμητικές. Προφανώς η \vec{S}_x έχει τυχαίο προσανατολισμό στο χώρο.

Ομοίως για μία στοιχειώδη επιφάνεια $dA_y \perp Oy$ η τάση που ασκείται θα είναι $\vec{S}_y = \sigma_{yx}\hat{u}_x + \sigma_{yy}\hat{u}_y + \sigma_{yz}\hat{u}_z$ και για μία στοιχειώδη επιφάνεια $dA_z \perp Oz$ θα είναι $\vec{S}_z = \sigma_{zx}\hat{u}_x + \sigma_{zy}\hat{u}_y + \sigma_{zz}\hat{u}_z$. Προφανώς και τα \vec{S}_y, \vec{S}_z θα έχουν τυχαία κατεύθυνση στο χώρο.

Έστω τώρα ότι θεωρούμαι τυχαία στοιχειώδη επιφάνεια dA με κάθετο διάνυσμα το μοναδιαίο $\hat{n} = n_x\hat{u}_x + n_y\hat{u}_y + n_z\hat{u}_z$. Η τάση που ασκείται σε αυτή $\vec{S}_{\hat{n}}$ μπορεί να γραφτεί ως ανάπτυγμα των διανυσμάτων $\vec{S}_x, \vec{S}_y, \vec{S}_z$ ή των μοναδιαίων $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$:

$$\vec{S}_{\hat{n}} = s_1\hat{u}_x + s_2\hat{u}_y + s_3\hat{u}_z = n_x\vec{S}_x + n_y\vec{S}_y + n_z\vec{S}_z.$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά το 2ο και 3ο μέλος της εξίσωσης με το \hat{u}_x και παίρνοντας υπόψη τις σχέσεις που μας δίνουν τα $\vec{S}_x, \vec{S}_y, \vec{S}_z$ και το γεγονός ότι $\hat{u}_i\hat{u}_j = \delta_{ij}$ λόγω ορθοκανονικότητας, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} s_1\hat{u}_x\hat{u}_x + s_2\hat{u}_x\hat{u}_y + s_3\hat{u}_x\hat{u}_z &= n_x\hat{u}_x\vec{S}_x + n_y\hat{u}_x\vec{S}_y + n_z\hat{u}_x\vec{S}_z \Rightarrow \\ s_1\hat{u}_x\hat{u}_x + s_2\hat{u}_x\hat{u}_y + s_3\hat{u}_x\hat{u}_z &= \\ n_x\hat{u}_x(\sigma_{xx}\hat{u}_x + \sigma_{xy}\hat{u}_y + \sigma_{xz}\hat{u}_z) + n_y\hat{u}_x(\sigma_{yx}\hat{u}_x + \sigma_{yy}\hat{u}_y + \sigma_{yz}\hat{u}_z) + n_z\hat{u}_x(\sigma_{zx}\hat{u}_x + \sigma_{zy}\hat{u}_y + \sigma_{zz}\hat{u}_z) &= \\ \Rightarrow s_1 &= n_x\sigma_{xx} + n_y\sigma_{yx} + n_z\sigma_{zx} \end{aligned}$$

Ομοίως αν πολλαπλασιάσουμε με τα άλλα δύο μοναδιαία διανύσματα \hat{u}_y, \hat{u}_z θα πάρουμε τις σχέσεις

$$s_2 = n_x\sigma_{xy} + n_y\sigma_{yy} + n_z\sigma_{zy}$$

$$s_3 = n_x\sigma_{xz} + n_y\sigma_{yz} + n_z\sigma_{zz}$$

Συνεπώς παίρνοντας υπόψη την συμμετρικότητα του ταυυστή των τάσεων μπορώ να γράψω για τις συνιστώσες του $\vec{S}_{\hat{n}} = s_1\hat{u}_x + s_2\hat{u}_y + s_3\hat{u}_z$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix},$$

όπου $\hat{n} = n_x\hat{u}_x + n_y\hat{u}_y + n_z\hat{u}_z$ το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια dA

Η ορθή τάση θα έχει μέτρο $|\vec{\sigma}_{\hat{n}}| = \vec{S}_{\hat{n}}\hat{n}$ και η διατμητική $|\vec{\tau}_{\hat{n}}| = \sqrt{|\vec{S}_{\hat{n}}|^2 - |\vec{\sigma}_{\hat{n}}|^2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω τανυστής τάσεων $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ σε τυχαίο σημείο Γ .

(i) ποια η τάση που ασκείται σε στοιχειώδη επιφάνεια στο σημείο Γ που είναι παράλληλη στην επιφάνεια $x + 2y - 3z = 1$;

(ii) ποιο το μέτρο της ορθής και διατμητικής τάσης και ποια η γωνία που σχηματίζει η τάση με την ορθή τάση;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

(i) Το διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια είναι το $\vec{d} = 1\hat{u}_x + 2\hat{u}_y - 3\hat{u}_z$. Το

μοναδιαίο θα είναι το $\hat{n} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \frac{1\hat{u}_x + 2\hat{u}_y - 3\hat{u}_z}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{u}_x + \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{u}_y - \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{u}_z$.

Το διάνυσμα τάσης που ασκείται σε αυτή την στοιχειώδη επιφάνεια θα έχει συνιστώσες

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{14} \end{pmatrix} \text{ και θα είναι το}$$

$$\vec{S}_{\hat{n}} = \frac{5}{\sqrt{14}}\hat{u}_x + \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{u}_y - \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{u}_z.$$

(ii) Από τη σχέση

$$|\vec{\sigma}_{\hat{n}}| = \vec{S}_{\hat{n}}\hat{n} = \left(\frac{5}{\sqrt{14}}\hat{u}_x + \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{u}_y - \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{u}_z \right) \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\hat{u}_x + \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{u}_y - \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{u}_z \right) = \frac{12}{14}$$

$$|\vec{S}_{\hat{n}}| = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{14}} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{14}} \right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{14}} \right)^2} = \sqrt{\frac{30}{14}}$$

$$|\vec{t}_{\hat{n}}| = \sqrt{|\vec{S}_{\hat{n}}|^2 - |\vec{\sigma}_{\hat{n}}|^2} = \sqrt{\frac{30}{14} - \left(\frac{12}{14} \right)^2} = \sqrt{\frac{276}{14^2}}$$

Η γωνία που σχηματίζει η τάση με την ορθή τάση θα είναι

$$\cos \theta = \frac{\vec{S}_{\hat{n}}\hat{n}}{|\vec{S}_{\hat{n}}||\hat{n}|} = \frac{\vec{S}_{\hat{n}}\hat{n}}{|\vec{S}_{\hat{n}}|} = \frac{|\vec{\sigma}_{\hat{n}}|}{|\vec{S}_{\hat{n}}|} = \frac{12/\sqrt{14}}{\sqrt{\frac{30}{14}}} = \frac{12}{\sqrt{30}\sqrt{14}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Έστω τανυστής τάσεων $\sigma(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy & y & 0 \\ y & -2 & -y \\ 0 & -y & z^2 \end{pmatrix}$. Ποια η τάση σε στοιχειώδη

επιφάνεια στο σημείο $\Gamma(1,1,1)$ για επιφάνεια παράλληλη με την $x^2 = y - zx$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η επιφάνεια περιγράφεται από την συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 - y + zx = 0$.

Το κάθετο διάνυσμα θα είναι το

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{u}_z = (2x+z)\hat{u}_x - \hat{u}_y + x\hat{u}_z$$

Στο σημείο $\Gamma(1,1,1)$ θα έχουμε

$$\vec{\nabla}f(1,1,1) = 3\hat{u}_x - \hat{u}_y + \hat{u}_z$$

Το κάθετο μοναδιαίο στην επιφάνεια θα είναι το

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}f(1,1,1)}{|\vec{\nabla}f(1,1,1)|} = \frac{3\hat{u}_x - \hat{u}_y + \hat{u}_z}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3\hat{u}_x - \hat{u}_y + \hat{u}_z}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}\hat{u}_x - \frac{1}{\sqrt{11}}\hat{u}_y + \frac{1}{\sqrt{11}}\hat{u}_z.$$

Ο τανυστής τάσεων στο σημείο αυτό θα είναι επίσης

$$\sigma(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ και συνεπώς για το διάνυσμα τάσης θα έχω}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{11}} \\ \frac{4}{\sqrt{11}} \\ \frac{2}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

και θα είναι το

$$\vec{S}_{mi} = \frac{2}{\sqrt{11}}\hat{u}_x + \frac{4}{\sqrt{11}}\hat{u}_y + \frac{2}{\sqrt{11}}\hat{u}_z.$$

Άσκηση στις παραμορφώσεις

Έστω παραμόρφωση τέτοια ώστε κάθε σημείο (x, y, z) να μετασχηματίζεται στο (u, v, w) , όπου $u = x - 2z, v = 2z^2 - y^2, w = xyz - z^2$.

(i) Ποιος ο τανυστής παραμόρφωσης;

(ii) Ποια η ορθή παραμόρφωση στο σημείο $(0,0,0)$ κατά μήκος του διανύσματος

$\vec{d} = \hat{u}_x + 2\hat{u}_y - 3\hat{u}_z$; Ποια η μεταβολή του μήκους στοιχειώδους τόξου και του στοιχειώδους όγκου στο σημείο αυτό;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

(i) Ο τανυστής παραμόρφωσης δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \text{ όπου}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (-2 + yz) = -1 + \frac{yz}{2}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = xy - 2z \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (4z - xz) = 2z - \frac{xz}{2}$$

(ii) Στο σημείο $(0,0,0)$ ο τανυστής της παραμόρφωσης γίνεται βάσει του (i)

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του } \vec{d} = \hat{u}_x + 2\hat{u}_y - 3\hat{u}_z$$

$$\text{είναι το } \hat{n} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \frac{\hat{u}_x + 2\hat{u}_y - 3\hat{u}_z}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \hat{u}_x + \frac{2}{\sqrt{14}} \hat{u}_y - \frac{3}{\sqrt{14}} \hat{u}_z.$$

Η ορθή παραμόρφωση κατά μήκος του διανύσματος αυτού δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{\hat{n}} = \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} \varepsilon_{ij} n_i n_j = \varepsilon_{xx} n_x n_x + \varepsilon_{zz} n_z n_z + \varepsilon_{zx} n_z n_x = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

Από ορισμό ορθής παραμόρφωσης αυτή σχετίζεται με την μεταβολή του μήκους ενός στοιχειώδους τόξου. Αν δs το μήκος του μετά την παραμόρφωση και δs_0 το αρχικό

μήκος πριν την παραμόρφωση, θα ισχύει $\varepsilon_{\hat{n}} = \frac{\delta s - \delta s_0}{\delta s_0}$. Συνεπώς στο σημείο $(0,0,0)$

θα έχουμε $\frac{\delta s - \delta s_0}{\delta s_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta s - \delta s_0 = \frac{1}{2} \delta s_0 \Rightarrow \delta s = \frac{3}{2} \delta s_0$ και το μήκος του

στοιχειώδους τόξου αυξάνει κατά 50%.

Η μεταβολή του στοιχειώδους όγκου δίνεται από το ίχνος του τανυστή παραμόρφωσης $Tr(\varepsilon) = \frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0}$. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα το ίχνος του τανυστή είναι

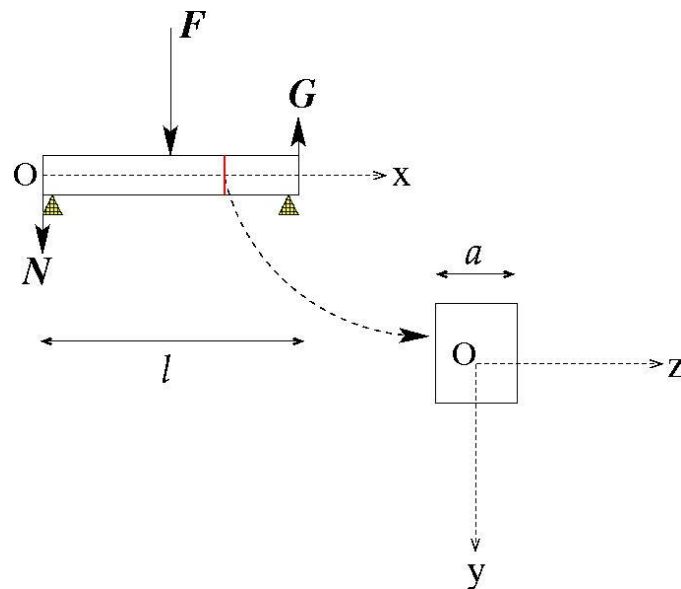
$$Tr(\varepsilon) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 1 = \frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0} \Rightarrow$$

$$\delta V - \delta V_0 = \delta V_0 \Rightarrow \delta V = 2\delta V_0$$

και συνεπώς ο όγκος διπλασιάζεται στο σημείο $(0,0,0)$.

ΑΣΚΗΣΗ ΣΕ ΔΟΚΟ

Έστω τετράγωνη συμπαγής αμφίπακτη δοκός πλευράς a και μήκους l και έστω ότι ασκείται δύναμη \vec{F} στο μέσο της. Βρείτε τις δυνάμεις που ασκούνται. Σε ποιο σημείο έχουμε την μέγιστη τάση;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Στη δοκό θα ασκούνται εκτός της δύναμης \vec{F} και δύο δυνάμεις \vec{N}, \vec{G} στα δύο άκρα της που είναι πακτωμένα και έστω ότι η \vec{N} έχει ίδια φορά με την \vec{F} και η \vec{G} αντίθετη.

Λόγω στατικής ισορροπίας πρέπει το άθροισμα των δυνάμεων να ισούται με μηδέν και συνεπώς

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} = 0 \Rightarrow F + N - G = 0 \Rightarrow G - N = F.$$

Επίσης το άθροισμα των ροπών σε κάθε σημείο πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν λόγω στατικής ισορροπίας. Στο αριστερό πακτωμένο άκρο θα έχω

$$F \frac{l}{2} + N \times 0 - G l = 0 \Rightarrow G = \frac{F}{2}.$$

Συνεπώς $G - N = F \Rightarrow N = -\frac{F}{2}$ και η δύναμη \vec{N} έχει αντίθετη φορά από αυτήν που υποθέσαμε.

Για να βρούμε που έχουμε την μέγιστη τάση πρέπει να βρούμε την κατανομή καταρχάς των ροπών. Αν πάρω μία κάθετη τομή πριν το μέσο της δοκού ($x < \frac{\ell}{2}$) στο ελεύθερο αριστερό κομμάτι θα ασκείται μόνο η δύναμη \vec{N} και συνεπώς η ροπή που ασκείται στη διατομή θα είναι $M_z = Nx = \frac{Fx}{2}$ και αυξάνεται με το x .

Αν τώρα η διατομή είναι μετά το μέσο της δοκού ($x > \frac{\ell}{2}$) στο ελεύθερο αριστερό κομμάτι θα ασκείται η δύναμη \vec{N} και η δύναμη \vec{F} , που εξασκούν ροπές αντίθετης κατεύθυνσης, και συνεπώς η ροπή που ασκείται στη διατομή θα είναι

$$M_z = Nx - F(x - \frac{\ell}{2}) = \frac{Fx}{2} - Fx + F = F \frac{(\ell - x)}{2} \text{ και μειώνεται με το } x.$$

Την μέγιστη τιμή της συνεπώς η ροπή την παίρνει όταν η διατομή βρίσκεται στο μέσο της δοκού ($x = \frac{\ell}{2}$) όπου και οι δύο σχέσεις δίνουν $M_z = \frac{F\ell}{4}$.

Εφόσον έχω τετραγωνική διατομή η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z θα είναι

$$I_{zz} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dy dz = \frac{a^4}{12}.$$

Η ορθή τάση στο μέσο της δοκού ($x = \frac{\ell}{2}$) δίνεται από την σχέση

$$\sigma_{xx} = y \frac{M_z}{I_{zz}} = y \frac{F\ell/4}{a^4/12} = y \frac{3F\ell}{a^4}.$$

Η μέγιστη ορθή τάση δίνεται στο πάνω και κάτω άκρο όπου $y = \pm \frac{a}{2}$ και η τάση γίνεται

$$\sigma_{xx} = \pm \frac{a}{2} \frac{3F\ell}{a^4} = \pm \frac{3F\ell}{2a^3}$$