Άσκηση Δευτέρας 11/12/2023

<u>ΘΕΜΑ</u>

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+asin\theta}$ όπου το $\alpha \in (0,1)$ σταθερά.

Λύση: Κάνουμε τον μετασχηματισμό προς μοναδιαίο κύκλο ακτίνας 1 όπως είπαμε στη θεωρία και έχουμε

$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+asin\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{dz/_{iz}}{1+a\left(-\frac{i(z-\bar{z})}{2}\right)}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(iz)\left(1-\frac{aiz}{2}+\frac{ai\bar{z}}{2}\right)}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz-\frac{ai^2z^2}{2}+\frac{ai^2z\bar{z}}{2}}=$
$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz-\frac{ai^2z^2}{2}+\frac{ai^2z\bar{z}}{2}}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz+\frac{az^2}{2}-\frac{az\bar{z}}{2}}$

Επειδή είμαστε στον μοναδιαίο κύκλο θα έχουμε $z\bar{z}=|z|^2=1^2=1$
Οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz+\frac{az^2}{2}-\frac{\alpha}{2}}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\frac{az^2}{2}+iz-\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\alpha}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+\frac{2i}{\alpha}z-1}$$

Οπότε θα υπολογίσουμε με την χρήση των ολοκληρωτικών υπολοίπων Cauchy το $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+\frac{2i}{\alpha}z-1}$.

Αρχικά βρίσκουμε του πόλους του παρονομαστή δηλαδή του τριωνύμου $z^2+\frac{2i}{\alpha}z-1$.

Η διακρίνουσα είναι $\Delta=\left(\frac{2i}{\alpha}\right)^2-4*1*(-1)=\frac{4i^2}{a^2}+4=-\frac{4}{a^2}+4=4\left(-\frac{1}{a^2}+1\right)$.

Επειδή $0<\alpha<1\Rightarrow\alpha^2<1\Rightarrow\frac{1}{a^2}>1\Rightarrow 0>-\frac{1}{a^2}+1$.

Συνεπώς στην διακρίνουσα η ποσότητα στην παρένθεση είναι αρνητική. Οπότε έχουμε $\Delta=-4\left(\frac{1}{a^2}-1\right)=i^2 4\left(\frac{1}{a^2}-1\right)$.

Οι ρίζες του τριωνύμου που θα είναι και οι πόλοι της υπο ολοκλήρωσης συνάρτησης θα είναι

$$\rho_{1,2}=\frac{-\frac{2i}{\alpha}\pm\sqrt{\Delta}}{2*1}=\frac{-\frac{2i}{\alpha}\pm\sqrt{i^2 4\left(\frac{1}{a^2}-1\right)}}{2*1}=\frac{-\frac{2i}{\alpha}\pm 2i\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}}{2*1}$$
$$=i\left(-\frac{1}{\alpha}\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}\right)$$

Πρέπει τώρα να βρούμε ποια ή ποιες από τις δύο ρίζες βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Για να γίνει αυτό ξεκινάνε από την ανισότητα ότι το μέτρο της είναι μικρότερο της μονάδας και καταλήγουμε είτε σε κάτι που ισχύει (άρα ισχύει και η αρχική ανισότητα) είτε σε κάτι αδύνατο (οπότε δεν ισχύει η αρχική ανισότητα και η ρίζα είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου).

Επειδή οι δύο πόλοι είναι φανταστικοί αριθμοί θα έχουμε

-

$$|\rho_1| < 1 \Rightarrow \left| i\left(-\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \right) \right| < 1 \Rightarrow \left| -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \left| -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \right|^2 < 1^2 \ \Rightarrow \frac{1}{a^2} - 2\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} + \left(\frac{1}{a^2} - 1\right) < 1$$

$$\Rightarrow 2\frac{1}{a^2} - 2\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} < 2 \ \Rightarrow \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} < -\frac{1}{a^2} + 1$$

Επειδή όμως και τα δύο μέλη είναι αρνητικά συνεπάγεται ότι

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} > \frac{1}{a^2} - 1 \ \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \right)^2 > \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - 1\right) > \frac{1}{a^4} - \frac{2}{a^2} + 1 \ \Rightarrow \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^2} > \frac{1}{a^4} - \frac{2}{a^2} + 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{a^2} > -\frac{2}{a^2} + 1 \ \Rightarrow -\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} > +1$$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2} > 1$ που ισχύει.

Συνεπώς ο πρώτος πόλος είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου.

- $$|\rho_2| < 1 \Rightarrow \left| i\left(-\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \right) \right| < 1 \Rightarrow \left| -\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \left| -\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \right|^2 < 1^2 \ \Rightarrow \frac{1}{a^2} + 2\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} + \left(\frac{1}{a^2} - 1\right) < 1$$

$$\Rightarrow 2\frac{1}{a^2} + 2\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} < 2 \ \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} < -\frac{1}{a^2} + 1$$

Το πρώτο μέλος της ανισότητας είναι θετικό. Το δεύτερο όμως είναι αρνητικό όπως δείξαμε όταν υπολογίζαμε τις ρίζες. Άρα η ανισότητα δεν ισχύει και ο δεύτερος πόλος είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Επειδή και οι δύο πόλοι είναι τάξης m=1 θα έχουμε για το ολοκληρωτικό υπόλοιπο του πρώτου πόλου που είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου

$$
\begin{aligned}
(\alpha_{-1})_1 &= \lim_{z\to\rho_1}\left[\frac{1}{z^2+\frac{2i}{\alpha}z-1}(z-\rho_1)\right] \\
&= \lim_{z\to\rho_1}\left[\frac{1}{(z-\rho_1)(z-\rho_2)}(z-\rho_1)\right] = \lim_{z\to\rho_1}\frac{1}{z-\rho_2} = \frac{1}{\rho_1-\rho_2} \\
&= \frac{1}{i\left(-\frac{1}{\alpha}+\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}\right)-i\left(-\frac{1}{\alpha}-\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}\right)} \\
&= \frac{1}{i2\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}}
\end{aligned}
$$

Οπότε

$$
\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+\frac{2i}{\alpha}z-1} = 2\pi i(\alpha_{-1})_1 = 2\pi i\frac{1}{i2\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}}
$$

Και το ολοκλήρωμα που ψάχνω

$$
I = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+asin\theta} = \frac{2}{\alpha}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+\frac{2i}{\alpha}z-1} = \frac{2}{\alpha}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2\left(\frac{1}{a^2}-1\right)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}
$$