**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ**

**ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΣΤΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

**Τύπος de Moivre**

Έστω ένας μιγαδικός αριθμός: $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{i\theta}$, τότε $z^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) = r^n e^{in\theta}$

**N-οστή ρίζα μιγαδικού**

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)\right] = r^{1/n}\mathrm{e}^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}}, \text{ όπου } k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

**Συνθήκες Cauchy - Riemann**

Έστω μια μιγαδική συνάρτηση $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$. Η $f(z)$ είναι αναλυτική,

αν και μόνο αν ισχύουν οι: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$

Αν η συνάρτηση ορίζεται σε πολικές συντεταγμένες $f(z) = f(r,\vartheta) = u(r,\vartheta) + iv(r,\vartheta)$.

τότε οι παραπάνω συνθήκες γράφονται: $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \vartheta}$ και $\dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \vartheta}$

**Αρμονικές συναρτήσεις**

Μια πραγματική συνάρτηση $f(x,y)$ λέγεται αρμονική, αν ικανοποιεί την εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Δύο πραγματικές συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ λέγονται συζυγείς αρμονικές **αν και μόνο αν** η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι αναλυτική.

Αν γνωρίζουμε μία από τις δύο συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις, π. χ. την $u(x,y)$, τότε η συζυγής της $v(x,y)$, διαμέσου των συνθηκών Cauchy – Riemann, θα δίνεται από:

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right)$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής ανάμεσα στα σημεία $(x,y)$ και $(x_0,y_0)$.

**Μιγαδική ολοκλήρωση**

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C f(z)dz$ μιας μιγαδικής συνάρτησης $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ κατά μήκος της διαδρομής $C$ του μιγαδικού επιπέδου γράφεται:

$$\int_C f(z)dz \equiv \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

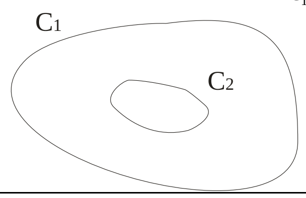
**Ολοκληρωτικό θεώρημα Cauchy σε απλά συνεκτική περιοχή**

Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι συνεχής σε μια κλειστή απλά συνεκτική περιοχή $R+C$,

και αναλυτική εντός της απλής κλειστής καμπύλης $C$, τότε: $\oint_C f(z)dz = 0$

**Ολοκληρωτικό θεώρημα Cauchy σε διπλά συνεκτική περιοχή**

Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική εντός της καμπύλης $C_1$ και εκτός της $C_2$ καθώς και πάνω στις καμπύλες $C_1$ και $C_2$, τότε: $\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$

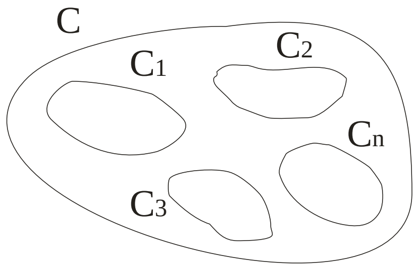



**Αρχή της παραμόρφωσης των κλειστών διαδρομών**

Το ολοκλήρωμα μιας αναλυτικής συνάρτησης $f(z)$ πάνω σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη $C_1$ έχει την ίδια τιμή πάνω σε οποιαδήποτε άλλη τέτοια καμπύλη $C_2$, στην οποία η $C_1$ μπορεί να παραμορφωθεί με συνεχή τρόπο χωρίς να περάσει από ιδιάζοντα σημεία της $f(z)$.

**Ολοκληρωτικό θεώρημα Cauchy σε πολλαπλά συνεκτική περιοχή**

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στην παρακάτω πολλαπλά συνεκτική περιοχή που ορίζεται από την εξωτερική απλή κλειστή καμπύλη $C$ και τις εσωτερικές απλές κλειστές καμπύλες $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n$.




Τότε θα ισχύει:

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz + \cdots \oint_{C_n} f(z)dz$$

**Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού**

Έστω ότι μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σε μια απλά συνεκτική περιοχή $R$. Η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος της $f(z)$ ισούται με τη διαφορά τιμών οποιασδήποτε παράγουσας $F(z)$ στα άκρα της διαδρομής ολοκλήρωσης: $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$

**Μελέτη ολοκληρώματος $\int (z-a)^m$**

Έστω το ολοκλήρωμα $\oint_C (z-a)^m dz$, όπου $m$ ακέραιος και $a$ μια σταθερά. Τότε:

$$\oint_C (z-a)^m dz = \begin{cases} 0, \text{ αν } m \neq -1 \\ 2\pi i, \text{ αν } m = -1 \end{cases}$$

**Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για απλά συνεκτική περιοχή**

Θεωρούμε μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ η οποία είναι αναλυτική εντός μιας απλά συνεκτικής περιοχής $R$. Έστω το σημείο $z=a$, το οποίο βρίσκεται εντός της περιοχής $R$. Για μια κλειστή καμπύλη $C$ εντός της περιοχής $R$, η οποία περικλείει το σημείο $z=a$, θα ισχύει:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

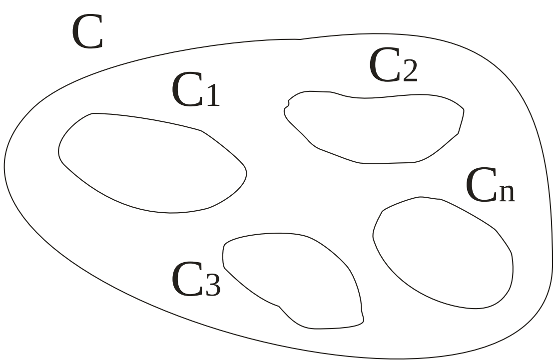
και εν γένει:

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \quad n=0,1,2,\ldots$$

όπου $f^{(n)}(z)$ είναι η $n$-οστή παράγωγος της $f(z)$.

**Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για πολλαπλά συνεκτική περιοχή**

Έστω μια πολλαπλά συνεκτική περιοχή που ορίζεται από την εξωτερική απλή κλειστή καμπύλη $C$ και τις εσωτερικές απλές κλειστές καμπύλες $C_1, C_2, C_3, \cdots C_n$.




Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy γίνεται:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-a}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_3} \frac{f(z)}{z-a}+\ldots+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} \frac{f(z)}{z-a}$$

και εν γένει:

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}+\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}+\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}+\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_3} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}+\ldots+\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_n} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$$

όπου $f^{(n)}(z)$ είναι η $n$-οστή παράγωγος της $f(z)$.

(Σημ. : Η φορά διαγραφής κατά μήκος της $C$ είναι αντίθετη από τη φορά διαγραφής στις $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n$)

**Γεωμετρική Σειρά**

Αν ο μιγαδικός w έχει μέτρο μικρότερο του 1 ($|w|<1$) τότε $\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty} w^n$

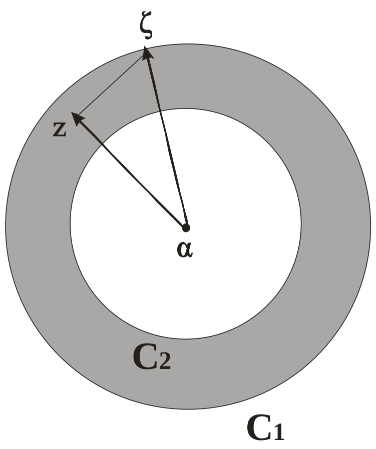
**Σειρά Taylor**

Έστω μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ η οποία είναι αναλυτική σε κάποια περιοχή $R$. Αν $z=z_0$ είναι ένα σημείο εσωτερικό της $R$, τότε η συνάρτηση $f(z)$ μπορεί να γραφεί ως δυναμοσειρά γύρω από το σημείο $z_0$:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\ldots$$

Η ακτίνα σύγκλισης της παραπάνω σειράς ισούται με την απόσταση από το $z=z_0$ μέχρι το πλησιέστερο ιδιάζον σημείο της $f(z)$.

**Σειρά Laurent**




Έστω μια συνάρτηση $f(z)$ η οποία είναι αναλυτική στο εσωτερικό σύνορο και στο σύνορο του κυκλικού δακτυλίου που καθορίζεται από τις $|z-z_0|=R_1$ και $|z-z_0|=R_2$ με $z_0=a$ και $R_2<R_1$. Η $f(z)$ μπορεί να αναπαρασταθεί σε κάθε εσωτερικό σημείο του δακτυλίου στη μορφή:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

όπου

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \text{ }, n=0,1,2,\ldots$$

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}d\zeta \text{ }, n=1,2,\ldots$$

και $C_1, C_2$ τα σύνορα του δακτυλίου.

**Ολοκληρωτικά υπόλοιπα**

Η σταθερά $a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(\zeta)d\zeta$ ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** της $f$ στο $z=z_0$.

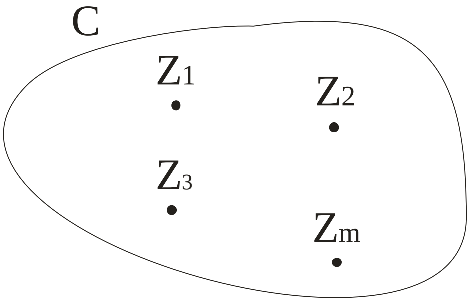
Αν η συνάρτηση $f(z)$ παρουσιάζει πόλο τάξης $m$ στο σημείο $z=z_0$, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο δίνεται από τη σχέση:

$$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\left.\frac{d^{m-1}[(z-z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}\right|_{z=z_0}$$

Στην περίπτωση που έχουμε απλό πόλο ($m=1$) η παραπάνω σχέση απλοποιείται στη μορφή:

$$a_{-1}=\lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)]$$

**Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων**




Έστω μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ η οποία είναι αναλυτική εντός της καμπύλης *C* εκτός από ορισμένους μεμονωμένους πόλους

$$z = z_1, z = z_2, z = z_3, \ldots, z = z_m$$

Τότε θα έχουμε: $\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} (a_{-1})_k$

όπου $(a_{-1})_i$ είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο που αντιστοιχεί στον πόλο $z = z_i$.

**Υπολογισμός πραγματικών ολοκληρωμάτων μέσω του θεωρήματος ολοκληρωτικών υπολοίπων**

**** Ολοκληρώματα του τύπου** $\int_0^{2\pi} F(\sin\vartheta, \cos\vartheta)d\vartheta$

Θέτοντας $z = e^{i\vartheta} \Rightarrow dz = e^{i\vartheta} i d\vartheta$ το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_0^{2\pi} F(\sin\vartheta, \cos\vartheta)d\vartheta = \oint\limits_C R(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} (a_{-1})_k$$

όπου $(a_{-1})_i$ είναι τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $R(z)$ εντός του *μοναδιαίου* κύκλου $C :| z |= 1$.

**** Ολοκληρώματα του τύπου** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Θεωρούμε ότι:

α) Η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο με την εξαίρεση πεπερασμένου αριθμού πόλων οι οποίοι *δεν* βρίσκονται στον πραγματικό άξονα.
β) Το όριο $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ τουλάχιστον ως $1/z^2$, $0 \le \arg z \le \pi$.

Τότε θα ισχύει: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} (a_{-1})_k$

όπου $(a_{-1})_k$ τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z)$ στο άνω ημιεπίπεδο.

**** Ολοκληρώματα του τύπου** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx, a > 0$ **- Λήμμα του Jordan**

α) Η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο με την εξαίρεση πεπερασμένου αριθμού πόλων οι οποίοι *δεν* βρίσκονται στον πραγματικό άξονα.
β) Υπάρχει το όριο $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ με $0 \le \arg z \le \pi$.
Τότε θα ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} (a_{-1})_k$$

όπου $(a_{-1})_k$ τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $R(z) = f(z)e^{iaz}$ στο άνω ημιεπίπεδο.