



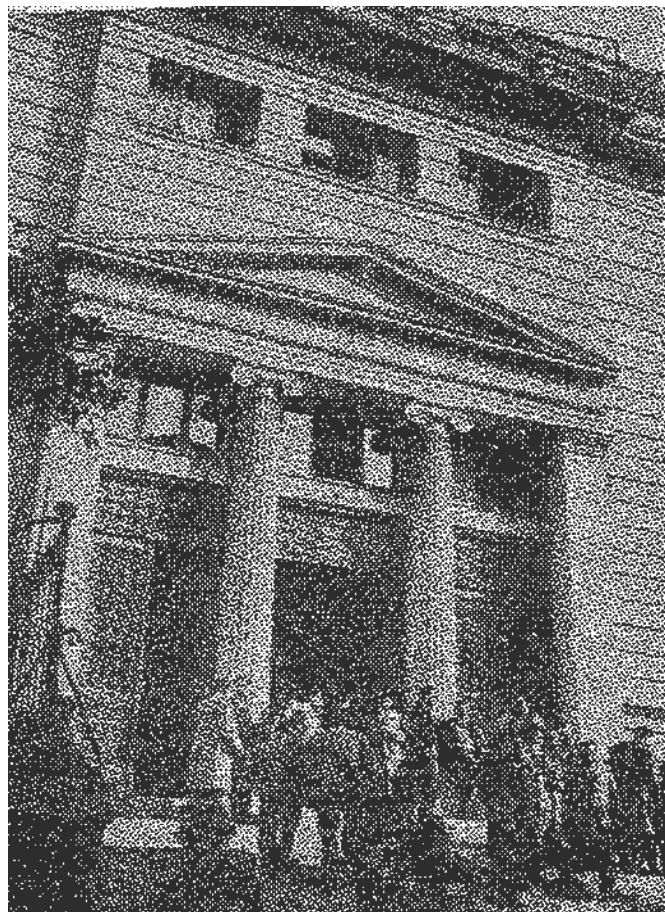
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ

<http://physlab.phys.uoa.gr>

Εισαγωγή στην Θεωρία σφαλμάτων



ΑΘΗΝΑ 2009

Συγγραφή του παρόντος φυλλαδίου: Αν. Καθηγητής Χρήστος Τρικαλινός

Διευθυντής Εργαστηρίου Φυσικής: Καθηγητής Παναγιώτης Βαρώτσος

Δικτυακός τόπος Εργαστηρίου Φυσικής: <http://physlab.phys.uoa.gr>

Σχεδιασμός, κατασκευή, διαχείριση δικτυακού τόπου, επιμέλεια παρόντος φυλλαδίου και cd διδακτικού υλικού Εργαστηρίου Φυσικής: Νεκτάριος Μαμαλούγκος

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	4
Έννοια του σφάλματος.....	5
Συστηματικά και τυχαία σφάλματα.....	8
Εκτίμηση του σφάλματος κατά την ανάγνωση κλίμακας.....	11
Πολλαπλές μετρήσεις.....	13
Περί του αριθμού των σημαντικών ψηφίων.....	15
Σχετικό σφάλμα.....	17
Διάδοση σφαλμάτων.....	17
Πώς χαράζουμε μία καμπύλη.....	19
Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.....	21
Γενικές οδηγίες.....	25
Ασκήσεις.....	32

Εισαγωγή

Το πείραμα ουσιαστικά αποτελεί την πηγή της γνώσης στη Φυσική. Όλη η δραστηριότητα του ανθρώπου στην ιστορία της Φυσικής, όλες οι επαναστάσεις στην επιστήμη ακολουθούν λίγο - πολύ την ίδια λογική, το ίδιο θα λέγαμε "σχήμα", ανεξάρτητα αν σ' αυτή την πορεία συμμετέχει ο ίδιος άνθρωπος ή ακόμη κι η ίδια γενιά επιστημόνων. Αυτή η πορεία θα μπορούσε σχηματικά να περιγραφεί ως εξής: πείραμα (παρατήρηση) που τα αποτελέσματά του ξεφεύγουν από τα όρια του θεωρητικά επιπέδου που έχει διαμορφωθεί τη δοσμένη χρονική στιγμή - γενίκευση των αποτελεσμάτων και διατύπωση της θεωρίας που από τη μια μεριά εξηγεί τα νέα φαινόμενα αλλά και αυτά που εξηγούνταν στα πλαίσια της "παλιάς" θεωρίας - πρόβλεψη νέων φαινομένων που είναι δυνατόν να παρατηρηθούν πειραματικά - νέα πειράματα για την μελέτη των καινούριων φαινομένων - βελτίωση της θεωρίας στη βάση των αποτελεσμάτων τους και προσδιορισμός των ορίων που αυτή ισχύει - πειράματα που τα αποτελέσματά τους βγαίνουν έξω από τα όρια της θεωρίας κλπ.

Βλέπουμε δηλαδή την τεράστια σημασία του πειράματος στη διαδικασία της γνώσης της φύσης.

Είναι λοιπόν φυσιολογικό και απαραίτητο η διδασκαλία του μαθήματος να συνοδεύεται από το εκπαιδευτικό εργαστήριο, το οποίο βέβαια εξαρτάται από το περιεχόμενο του μαθήματος και το επίπεδο γνώσεων του ασκούμενου σ' αυτό.

Συνήθως σήμερα όταν γίνεται λόγος για πειραματική φυσική στο μυαλό των ανθρώπων έρχονται σύγχρονες ηλεκτρονικές συσκευές, τεράστιοι επιταχυντές, ακτίνες λέιζερ κ.τ.λ.

Έτσι πολλές φορές ο φοιτητής που έρχεται σ' επαφή με το εκπαιδευτικό εργαστήριο νιώθει μια κάποια απογοήτευση, ακόμη κι όταν αυτό είναι τέλεια οργανωμένο. Αυτό συμβαίνει κύρια στα πρώτα εξάμηνα. Δεν είναι σπάνιο το φαινόμενο ο φοιτητής να νιώθει απογοήτευση γιατί θα πρέπει να μετρήσει με στοιχειώδη όργανα ποσότητες που η ανθρωπότητα τις έχει προσδιορίσει με τεράστια ακρίβεια δεκάδες ή και εκατοντάδες χρόνια πριν.

Όπως θα προσπαθήσουμε να δείξουμε πολύ σύντομα στις σελίδες που ακολουθούν, αλλά και όπως θα μπορέσει να καταλάβει όποιος ασχοληθεί λίγο πολύ σοβαρά με τη διεξαγωγή κάποιου πειράματος, αυτό κάθε άλλο παρά απλή υπόθεση είναι. Ο φυσικός, άσχετα αν θεωρεί τον εαυτό του πειραματικό ή θεωρητικό, ανεξάρτητα από το αν ασχολείται με την έρευνα ή την εκπαίδευση, αν θέλει να κατέχει το αντικείμενο της δουλειάς του πρέπει να κατανοεί σε βάθος τις διαδικασίες της φύσης. Όπως εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει «πλήρης» ή «απόλυτη» γνώση δεν υπάρχει ούτε μπορεί να υπάρξει. Κριτήριο πάντως της ορθότητάς της στη φυσική ήταν και είναι το πείραμα.

Επομένως πειραματική διαδικασία δεν είναι, ούτε μπορεί να είναι κάποιες συσκευές με πολύχρωμα λαμπάκια και πολλά κουμπιά, αλλά ότι κρύβεται πίσω απ' αυτές και η καλή γνώση των δυνατοτήτων όλων αυτών των συσκευών.

Με βάση αυτά, αλλά παίρνοντας υπόψη και την σημερινή πραγματικότητα της εκπαίδευσης στη χώρα μας, δηλαδή το γεγονός της μηδενικής εμπειρίας των μαθητών στο εργαστήριο, είναι οργανωμένο το εκπαιδευτικό εργαστήριο.

Πολλές φορές θα μπορούσαμε με μικρά σχετικά έξοδα να αυτοματοποιήσουμε κάποιες ασκήσεις, όμως πιστεύουμε ότι η χρήση απλών οργάνων και μεθόδων βοηθάει στην καλύτερη κατανόηση της ουσίας. Αυτό φυσικά δεν σημαίνει και πλήρη άρνηση των σύγχρονων συσκευών και μεθόδων.

Ποιοι είναι λοιπόν οι στόχοι του εκπαιδευτικού εργαστηρίου;

Αν προσπαθήσουμε ν' απαντήσουμε σ' αυτή την ερώτηση θα μπορούσαμε να πούμε τα εξής:

- α) Να μπορέσουν οι φοιτητές να δουν στην πράξη τους βασικότερους θεωρητικούς νόμους της φυσικής.
- β) Να αποκτήσουν πείρα στη διεξαγωγή του πειράματος και στην επεξεργασία των

αποτελεσμάτων του.

γ) Να γνωριστούν με τα διάφορα όργανα και τον τρόπο χρησιμοποίησής τους.

δ) Να κατανοήσουν πως σχεδιάζεται και πως «στήνεται» ένα πείραμα και με ποιες δυσκολίες έρχεται αντιμέτωπος ο φυσικός στη προσπάθεια που κάνει να μετρήσει τα μεγέθη που θέλει.

ε) Να γνωριστούν με φαινόμενα που δεν περιλαμβάνονται στην ύλη του μαθήματος και δεν μπορούν να διδαχτούν λόγω έλλειψης χρόνου.

Όπως θα προσπαθήσουμε να δείξουμε παρακάτω, ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα κατά την εκτέλεση ενός πειράματος είναι τα **ΣΦΑΛΜΑΤΑ** που υπεισέρχονται στις μετρήσεις. Η γνώση τους αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχία κάποιου πειράματος. Η δε προσπάθεια μείωσής τους μπορεί να οδηγήσει σε τεράστια αύξηση του κόστους ή ακόμη και σε αδιέξοδες καταστάσεις.

Σ' αυτό ακριβώς το πρόβλημα είναι αφιερωμένες οι σελίδες που ακολουθούν.

Οι σημειώσεις αυτές δεν έχουν σκοπό να παρουσιάσουν τη θεωρία των σφαλμάτων που είναι αρκετά εκτεταμένη και μερικές φορές πολύπλοκη ιδιαίτερα για το επίπεδο του φοιτητή που μόλις ξεκινά την πορεία του στο Φυσικό. Εξάλλου οι βάσεις της πρέπει να διδαχτούν στο αντίστοιχο μάθημα των Μαθηματικών.

Σαν σκοπό βάλαμε απλά να δώσουμε στους φοιτητές να καταλάβουν την έννοια των σφαλμάτων, τη σπουδαιότητά τους και την αναγκαιότητα υπολογισμού τους. Δίνονται επίσης οι βασικοί μαθηματικοί τύποι που επιτρέπουν στο φοιτητή να δουλεύει με τα σφάλματα τουλάχιστον στο επίπεδο των εργαστηρίων Φυσικής I-IV.

Παράλληλα παρουσιάζονται οι βάσεις της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και το κριτήριο του Chauvenet που κατά την γνώμη μας αποτελούν ένα χρήσιμο εφόδιο.

Στο τελευταίο μέρος του φυλλαδίου δίνονται και ορισμένες χρήσιμες πληροφορίες για τη χάραξη των γραφικών παραστάσεων, καθώς και ορισμένες συμβουλές τόσο για την πραγματοποίηση των μετρήσεων, όσο και για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων.

Δυστυχώς στην Ελληνική βιβλιογραφία δεν υπάρχει ολοκληρωμένο βιβλίο που να συνδυάζει τη θεωρία των σφαλμάτων με το πειραματικό εργαστήριο. Μόνο στα βιβλία των εργαστηρίων Φυσικής του Ε.Μ.Π. και του Πανεπιστημίου της Θεσσαλονίκης θα μπορούσε να βρει κανείς ορισμένα χρήσιμα πράγματα.

Για όσους Φοιτητές ενδιαφέρονται θα μπορούσαμε να συστήσουμε τα βιβλία:

An introduction to error analysis by J. R. Taylor, A series of Books in Physics Eugene D. Cummins, Editor University Science Books, Mill Valley, California

Practical Physics, by G.L.Squires, McGraw-Hill, London

Έννοια του σφάλματος

Η μέτρηση

Συστατικό στοιχείο και τελικός σκοπός του πειράματος είναι η μέτρηση, δηλαδή η σύγκριση κάποιου μεγέθους με κάποιο άλλο "πρότυπο" που διαθέτει η συσκευή που χρησιμοποιούμε στο πείραμά μας. Έτσι όταν μετρούμε το μήκος συγκρίνουμε το μήκος που μετράμε με ένα "πρότυπο" μέτρο, όταν μετρούμε την τάση ή την ένταση του ρεύματος τη συγκρίνουμε με γνωστές τάσεις ή εντάσεις που μας βοήθησαν να βαθμολογήσουμε το βολτόμετρο ή το αμπερόμετρο κ.τ.λ.

Έτσι λοιπόν σε κάθε πείραμα, σε κάθε μέτρηση, πρέπει πάντα να φροντίζουμε ώστε το "πρότυπο" μέγεθος να είναι σωστό και να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις που ο πειραματικός βάζει όταν ετοιμάζει το πείραμα. Τι σημαίνει αυτό θα το δούμε παρακάτω.

Τα σφάλματα

Ας δούμε τώρα πως στην πράξη γίνεται μια μέτρηση και μάλιστα σ' ένα πολύ απλό παράδειγμα, που από πρώτη άποψη λίγο μοιάζει με πείραμα φυσικής.

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να μετρήσουμε το ύψος ενός κουφώματος για να βάλουμε μια πόρτα. Αυτή η μέτρηση μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους.

α) Ένας έμπειρος ξυλουργός κοιτάζοντας το κούφωμα (χρησιμοποιώντας δηλαδή σαν όργανο μέτρησης το μάτι του σε συνδυασμό με την εμπειρία που έχει) λέει ότι το ύψος είναι περίπου 210 cm. Ύστερα όμως από λίγη σκέψη προσθέτει ότι το ύψος της βρίσκεται ανάμεσα στα 205 cm και τα 215 cm. Δηλαδή έχουμε :

$$205\text{ cm} \leq h_1 \leq 215\text{ cm} \quad \text{ή αλλιώς} \quad h_1 = (210 \pm 5)\text{ cm}.$$

β) Φυσικά ο ξυλουργός δεν είναι ικανοποιημένος μόνο απ' αυτό. Με το μέτρο του μετράει τώρα το κούφωμα και βρίσκει 211.3 cm. Εμείς όμως παίρνουμε υπ' όψη μας ότι στη μέτρηση αυτή μπορούν να επιδράσουν διάφοροι παράγοντες (π.χ. θερμική διαστολή, κατασκευή και τοποθέτηση του μέτρου, το γεγονός ότι ένα συνηθισμένο μέτρο δεν έχει υποδιαιρέσεις πιο συχνές από 0.1 cm κ.τ.λ.) και γι' αυτό για μεγαλύτερη σιγουριά γράφουμε:

$$211.25\text{ cm} \leq h_2 \leq 211.35\text{ cm} \quad \text{ή} \quad h_2 = (211.30 \pm 0.05)\text{ cm}.$$

γ) Ιδιοκτήτης όμως του διαμερίσματος είναι ένας φυσικός που θέλει να πάρει μια καλύτερη απάντηση στο ερώτημα πόσο είναι το ύψος του κουφώματος. Χρησιμοποιεί μια συσκευή ακριβείας (π.χ. ένα συμβολόμετρο) και κάνοντας μια μέτρηση βρίσκει ότι το ύψος είναι 211.300158 cm. Αλλά και πάλι δεν μπορεί να είναι σίγουρος τι συμβαίνει με τα επόμενα δεκαδικά ψηφία, γι' αυτό γράφει:

$$211.3001575\text{ cm} \leq h_3 \leq 211.3001585\text{ cm} \quad \text{ή} \quad h_3 = (211.3001580 \pm 0.0000005)\text{ cm}.$$

Ποια είναι λοιπόν η σωστή μέτρηση; Προφανώς σωστές είναι και οι τρεις. Μόνο που διαφέρουν ως προς την ακρίβειά τους, ή όπως αλλιώς λέμε ως προς το "σφάλμα" τους (δηλ. την ποσότητα που είναι μετά το \pm).

Αν τώρα το ερώτημα τεθεί διαφορετικά: **Ποιο είναι το ύψος του κουφώματος;** Εδώ και πάλι από μια άποψη θα μπορούσαμε ν' απαντήσουμε : Και το h_1 και το h_2 και το h_3 . Όμως η ερώτηση αυτή αποκτάει συγκεκριμένο νόημα αν ξέρουμε για ποιο λόγο μας χρειάζεται το ύψος αυτό. Έτσι π. χ. στη συγκεκριμένη περίπτωση, για την τοποθέτηση της πόρτας αρκεί να ξέρουμε το h_2 . Αν μας έχει δοθεί μόνο το h_1 πιθανόν η πόρτα που θα φτιάξουμε να μην ταιριάζει ενώ το h_3 περιέχει πολλές πληροφορίες που για τον ξυλουργό είναι περιττές πολυτέλειες πολύ δε περισσότερο επειδή είναι σίγουρο πως με τα εργαλεία που διαθέτει είναι αδύνατο να πετύχει τέτοια ακρίβεια στην κατασκευή της πόρτας.

Συνοψίζοντας λοιπόν μπορούμε να πούμε **ότι ο όρος "σφάλμα" στην επιστημονική γλώσσα σημαίνει την αναπόφευκτη, αριθμητικά εκφρασμένη, έλλειψη ακρίβειας που υπάρχει στη μέτρηση ενός μεγέθους σ' όλα τα πειράματα καθώς και τις τυχόν ατέλειες ή ελαττωματικότητας των οργάνων και των μεθόδων μας.**

Ορισμένα σφάλματα (τα λεγόμενα **συστηματικά**, τα οποία θα δούμε παρακάτω) μπορούν ν' αποφευχθούν. Είναι αδύνατον όμως να κάνουμε πείραμα χωρίς σφάλμα. Μπορούμε βέβαια να "ελαχιστοποιήσουμε" τα σφάλματα του συγκεκριμένου πειράματος. Κάτι τέτοιο έγινε στην περίπτωση γ) του παραδείγματός μας. Αυτό όμως δεν μας χρειαζόταν και θα μπορούσαμε να το είχαμε αποφύγει. Έτσι και στο πείραμα της φυσικής. Πάντα πρέπει να ξέρουμε :

* Τι ακρίβεια μπορούμε να πετύχουμε και

* Τι ακρίβεια εμείς επιθυμούμε.

Με αυτό τον τρόπο και ανεπιθύμητα προβλήματα μπορούμε ν' αποφύγουμε, και πολυδάπανες αλλά άχρηστες στην ουσία εγκαταστάσεις και περιπτώ κόππο να γλιτώσουμε.

Είναι πραγματικά αναπόφευκτα τα σφάλματα;

Παρακάτω θα μιλήσουμε για σφάλματα που οφείλονται κύρια στις ατέλειες των οργάνων μας που στο εκπαιδευτικό εργαστήριο είναι βασικά μέτρα, χρονόμετρα, ζυγοί, βολτόμετρα, αμπερόμετρα κ.τ.λ. Κάποιος μπορεί εδώ να πει ότι τα σύγχρονα όργανα που χρησιμοποιούνται σε πολλά πειράματα της φυσικής επιτρέπουν τεράστια ακρίβεια στις μετρήσεις μας και αυτό είναι σωστό.

Μπορούμε όμως ν' αυξάνουμε αυτή την ακρίβεια απεριόριστα; Αποδεικνύεται ότι όχι! Αιτία είναι η ίδια η ουσία της ύλης και ο στατιστικός χαρακτήρας των ίδιων των σωματιδίων. Χωρίς να θέλουμε να επεκταθούμε περισσότερο σ' αυτά τα ζητήματα θα πούμε ότι ο στατιστικός αυτός χαρακτήρας φαίνεται ξεκάθαρα από την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg, μια έκφραση της οποίας είναι η σχέση:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \quad (1.1)$$

όπου Δp το σφάλμα στον προσδιορισμό της ορμής, Δx το σφάλμα στον προσδιορισμό της θέσης του σωματιδίου και $h=6.626176 \cdot 10^{-27}$ erg-s, η σταθερά του Plank.

Όπως φαίνεται και από τη σχέση (1.1) είναι αδύνατον να προσδιορίσουμε π.χ. το x με απόλυτη ακρίβεια ($\Delta x \rightarrow 0$) γιατί τότε το p δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ($\Delta p \rightarrow \infty$).

Γιατί πρέπει να ξέρουμε τα σφάλματα;

Πολλές φορές (ιδιαίτερα όταν τα πειραματικά αποτελέσματα είναι πολύ κοντά σ' αυτά που προβλέπει η βιβλιογραφία) ο φοιτητής αρχίζει να σκέπτεται μήπως είναι άδικος κόππος ο υπολογισμός των σφαλμάτων, ή μήπως αποτελεί ένα «εργαλείο» συνεχούς ελέγχου των φοιτητών.

Δυστυχώς όμως, αν δεν ξέρουμε τα σφάλματα δεν μπορούμε να βγάλουμε ορισμένα συμπεράσματα για το φυσικό περιεχόμενο του πειράματος.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι θέλουμε να δούμε, αν εξαρτάται η αντίσταση ενός πηνίου από τη θερμοκρασία. Κάνουμε μετρήσεις για δυο διαφορετικές θερμοκρασίες και παίρνουμε:

200.025 Ohm για 10° C

200.034 Ohm για 20° C

Υπάρχει διαφορά σ' αυτές τις τιμές; Αν δεν ξέρουμε το σφάλμα δεν μπορούμε ν' απαντήσουμε.

Αν όμως ξέρουμε ότι το σφάλμα είναι 0.001 Ohm μπορούμε να πούμε ναι. Αν αντίθετα το σφάλμα είναι 0.01 Ohm δεν μπορούμε και πάλι ν' απαντήσουμε και χρειάζεται να βελτιώσουμε την ακρίβεια του πειράματός μας.

Ένα άλλο παράδειγμα. Πολλές φορές στο εργαστήριο θα χρειαστεί να ελέγξουμε αν δυο τιμές είναι ίσες. Για παράδειγμα οι τιμές $a_1=3.62$ και $a_2=3.38$ ή οι τιμές $b_1=2.82$ και $b_2=2.88$.

Σε ένα τέτοιο ερώτημα η συνηθισμένη απάντηση του φοιτητή είναι ότι οι τιμές b_1 και b_2 είναι περίπου ίσες, ενώ οι a_1 και a_2 όχι.

Ας γράψουμε τώρα πλήρως τις πιο πάνω τιμές με τα σφάλματά τους:

$$a_1 = 3.62 \pm 0.29, \quad a_2 = 3.38 \pm 0.26$$

$$b_1 = 2.820 \pm 0.006 \quad b_2 = 2.880 \pm 0.008$$

Από τις παραπάνω τιμές γίνεται σαφές πως τα συμπεράσματά μας αντιστρέφονται πλήρως και πρέπει να πούμε ότι τα a_1 και a_2 είναι περίπου ίσα, ενώ τα b_1 και b_2 όχι.

Πολλά είναι τα παραδείγματα στην τεχνική αλλά και στην επιστήμη που μας δείχνουν την αναγκαιότητα γνώσης του σφάλματος.

Συστηματικά και τυχαία σφάλματα

Τι είναι τα συστηματικά και τι τα τυχαία σφάλματα

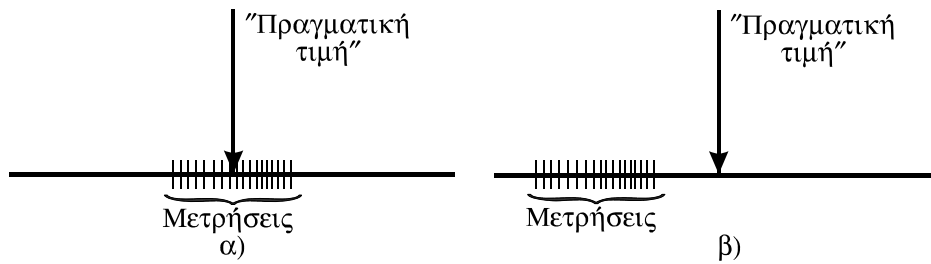
Ας υποθέσουμε ότι με ένα χρονόμετρο μετρούμε πολλές φορές το χρόνο που κάνει να διανύσει μια απόσταση ένα κινητό στο εργαστήριο. Είναι τότε σίγουρο, ότι, αν το χρονόμετρο που χρησιμοποιούμε μπορεί να μετρά π.χ. εκατοστά του δευτερολέπτου, σχεδόν όλες οι μετρήσεις μας θα είναι διαφορετικές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι είναι αντικειμενικά αδύνατο να έχουμε κάθε φορά **όλες** τις συνθήκες ίδιες κατά τη διεξαγωγή του πειράματος. Για παράδειγμα πάντα θα υπάρχουν μετακινήσεις αέρα, σκόνη που δημιουργεί πρόσθετες τριβές, η στιγμή που θέτουμε σε λειτουργία το χρονόμετρο, η στιγμή που το σταματούμε και πολλοί άλλοι παράγοντες, τους οποίους μάλιστα δεν είναι τόσο εύκολο να τους βρούμε.

Μπορεί όμως να έχουμε και άλλα προβλήματα, πολλά από τα οποία δύσκολα τα ανακαλύπτουμε. Για παράδειγμα το χρονόμετρο που χρησιμοποιούμε ίσως να μη λειτουργεί κανονικά και να τρέχει ή να πηγαίνει πιο αργά. Ίσως πάλι κατά τη διάρκεια του πειράματος να έχουμε διαρκή αύξηση της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος, η οποία αν και ανεπαίσθητη επίσης επιδρά στα αποτελέσματα που βρίσκουμε. Σε κάποια άλλη περίπτωση, όταν π.χ. θέλουμε να προσδιορίσουμε τη μάζα ενός ογκώδους, αλλά ελαφρού σώματος ζυγίζοντάς το, ίσως να ξεχνούμε να συνηπολογίσουμε την άνωση του ατμοσφαιρικού αέρα.

Τα αποτελέσματα που παίρνουμε και τα οποία οφείλονται σ' όσα είπαμε στις δυο προηγούμενες παραγράφους μας δείχνουν τα σφάλματα. Η πρώτη παράγραφος αναφέρεται στα **τυχαία** και η δεύτερη στα **συστηματικά** σφάλματα. Είναι εύκολο να καταλάβει κανείς από τα παραπάνω, ότι τα τυχαία σφάλματα υπάρχουν πάντα, ενώ τα συστηματικά όχι. Πάντως αν έχουμε τα δεύτερα αυτά συνυπάρχουν με τα τυχαία.

Σύμφωνα μ' όσα είπαμε γίνεται κατανοητό ότι το συστηματικό σφάλμα μένει σχεδόν πάντα σταθερό σ' όλη τη διάρκεια του πειράματος. Το τυχαίο σφάλμα μεταβάλλεται και μπορεί να είναι και θετικό και αρνητικό. Τα τυχαία σφάλματα πάντα υπάρχουν στο πείραμα. Αν δεν έχουμε συστηματικά σφάλματα οι μετρήσεις μας βρίσκονται γύρω από την πραγματική τιμή (Σχ. 1α). Ενώ αν υπάρχουν συστηματικά οι μετρήσεις μας είναι όλες μετατοπισμένες (και διασκορπισμένες) προς μια κατεύθυνση, θετική ή αρνητική σε σχέση με την "πραγματική τιμή" (Σχ. 1β).

* Αυτό βέβαια δεν συμβαίνει πάντα. Τα συστηματικά σφάλματα σε κάποιες περιπτώσεις μπορούν να οδηγούν π.χ. σε διαρκή μετατόπιση της «πραγματικής τιμής».



Σχήμα 1.

Ενώ όπως είδαμε παραπάνω τα τυχαία σφάλματα είναι αναπόφευκτα, οφείλονται κύρια σε αντικειμενικές αιτίες και σε τελευταία ανάλυση δεν επιδρούν στα αποτελέσματα των μετρήσεων μας παρά μόνο στην ακρίβειά τους, τα συστηματικά σφάλματα οφείλονται κύρια σε κακή λειτουργία και ρύθμιση των οργάνων μας ή της μεθόδου που χρησιμοποιούμε, κάνουν τα αποτελέσματά μας λαθεμένα, μπορούν και πρέπει να αποφεύγονται στο βαθμό που τα ανακαλύπτουμε.

Τα τυχαία σφάλματα φαίνονται αν μετρήσουμε πολλές φορές π.χ. την ίδια ποσότητα, αλλά και από τα όργανα που χρησιμοποιούμε και μπορούν να υπολογισθούν με την βοήθεια **στατιστικών μεθόδων**, που έχουν τη βάση τους στη θεωρία των πιθανοτήτων. Αυτό δεν μπορεί να γίνει για τα συστηματικά. Με τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των τυχαίων σφαλμάτων ασχολείται το φυλλάδιο που κρατάτε στα χέρια σας.

Λίγα λόγια ακόμη για τα συστηματικά σφάλματα

Εφόσον δεν υπάρχει άλλος τρόπος, πρέπει πάντα να προσπαθούμε να τα ανακαλύπτουμε και να απαλλασσόμαστε από αυτά.

Για την εξάλειψή τους χρειάζεται:

- α) Η σωστή μελέτη των πειραματικών συνθηκών και των απαιτήσεων της θεωρίας.
- β) Η βεβαιότητα ότι τα όργανά μας λειτουργούν σωστά. Αυτή μπορούμε να την αποκτήσουμε αν συγκρίνουμε τα όργανα του πειράματος με ακριβέστερα "πρότυπα" όργανα (πράγμα που στην πράξη είναι φυσικά πολύ δύσκολο, ιδιαίτερα στις συνθήκες του εκπαιδευτικού εργαστηρίου) και
- γ) η προσεκτική εκτέλεση του πειράματος.

Υπάρχουν φυσικά κι άλλοι πρακτικοί τρόποι για την ανακάλυψη και εξάλειψή τους αλλά δεν είναι ούτε αυστηροί ούτε γενικοί. Γενικά απαιτείται ιδιαίτερη εμπειρία και γνώση των νόμων της φυσικής.

Πάντως πρέπει να πούμε ότι τα συστηματικά σφάλματα είναι τα πιο "επικίνδυνα" στον προσδιορισμό ενός μεγέθους κατά τη διάρκεια ενός πειράματος.

👉 **Παρατήρηση.** Ένα πολύ συνηθισμένο συστηματικό σφάλμα είναι το αποκαλούμενο σφάλμα του μηδενός, δηλαδή το γεγονός, ότι το όργανο που χρησιμοποιούμε δεν δείχνει μηδέν όταν θα έπρεπε. Για παράδειγμα αυτό μπορούμε να το δούμε σ' ένα βολτόμετρο που ενώ στα άκρα του δεν εφαρμόζουμε τάση δείχνει π.χ. 0.2 V, ή σε ένα μικρόμετρο, το οποίο ενώ θα έπρεπε, όντας κλειστό, να δείχνει μηδέν, δείχνει - 0.04 mm. Σ' αυτή την περίπτωση αν, κάνοντας τη μέτρηση, διαβάσουμε απλώς την ένδειξη του οργάνου, θα έχουμε κάνει συστηματικό σφάλμα. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με δυο τρόπους:

- α) Διορθώνουμε, αν είναι δυνατόν, το πρόβλημα, ώστε το όργανο να δείχνει μηδέν όταν πρέπει.
- β) Διορθώνουμε το αποτέλεσμα αφού κάνουμε τη μέτρηση. Έτσι για παράδειγμα, αν το βολτόμετρό μας δείξει 7.8 V λέμε ότι το αποτέλεσμα είναι $7.8\text{ V} - 0.2\text{ V} = 7.6\text{ V}$, ενώ αν το στο

τύμπανο του μικρομέτρου διαβάσουμε μετά τη μέτρηση 2.49 mm λέμε ότι το αποτέλεσμα μας είναι $2.49 \text{ mm} + 0.04 \text{ mm} = 2.53 \text{ mm}$.

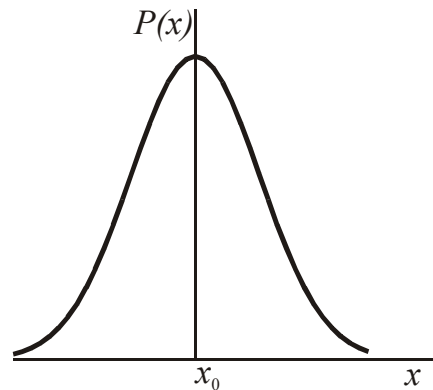
Οι βασικές αρχές της θεωρίας των τυχαίων σφαλμάτων

Θα δώσουμε εδώ τα βασικά σημεία της θεωρίας των τυχαίων σφαλμάτων, που αποτελεί μέρος της θεωρίας των πιθανοτήτων, χωρίς όμως να παρουσιάσουμε αποδείξεις και διάφορες άλλες λεπτομέρειες που αναλύονται στο αντίστοιχο μάθημα. Οι βασικοί τύποι που είναι απαραίτητοι για την επεξεργασία των μετρήσεων στο εργαστήριο περιλαμβάνονται στα επόμενα κεφάλαια.

Έστω λοιπόν ότι μετρούμε κάποιο μέγεθος η πραγματική τιμή του οποίου είναι x_0 . Όπως εξηγήσαμε και πιο πάνω η μέτρηση δεν θα μας δώσει την τιμή x_0 , αλλά κάποια άλλη, έστω x . Διάφορες μετρήσεις θα μας δίνουν διαφορετικά x , χωρίς βέβαια να αποκλείεται να πάρουμε και το x_0 , μόνο που ... δεν θα ξέρουμε ποιο είναι.

Μετρούμε λοιπόν το μέγεθος αυτό N φορές και σχεδιάζουμε την καμπύλη $P(x) = n(x)/N$, όπου $n(x)$ ο αριθμός των μετρήσεων που είχαν σαν αποτέλεσμα x .

Αποδεικνύεται πως όταν $N \rightarrow \infty$ η καμπύλη αυτή έχει τη μορφή του Σχ.2, δηλαδή είναι απόλυτα συμμετρική ως προς την πραγματική τιμή x_0 και τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν για $x \rightarrow \infty$.



Σχ.2.

Η συνάρτηση $P(x)$ είναι **πυκνότητα πιθανότητας**, αυτό σημαίνει πως το ολοκλήρωμα:

$$P(a,b) = \int_a^b P(x) dx \quad (2.1)$$

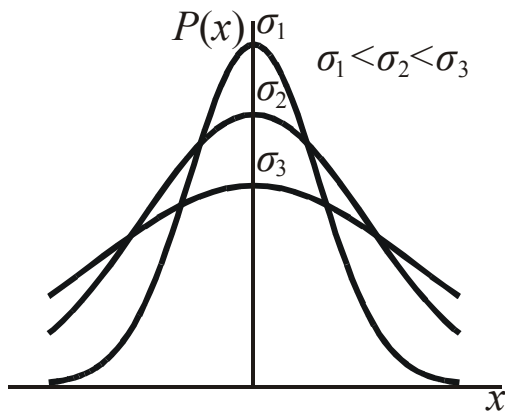
δίνει την πιθανότητα το αποτέλεσμα μιας μέτρησης να βρίσκεται στην περιοχή $a \leq x \leq b$.

Από τον ορισμό αυτό γίνεται προφανές πως θα ισχύει η σχέση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1, \quad (2.2)$$

η οποία ονομάζεται και **συνθήκη κανονικοποίησης** και υποδηλώνει πως το αποτέλεσμα της μέτρησης οπωσδήποτε βρίσκεται μέσα στην περιοχή $-\infty < x < \infty$. Μ' άλλα λόγια η σχέση (2.2) υποδηλώνει επίσης πως το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται ανάμεσα στην καμπύλη $P(x)$ και τον άξονα των x είναι **πάντα** ίσο με τη μονάδα.

Αποδεικνύεται επίσης πως η συνάρτηση, η μορφή της οποίας παριστάνεται στο Σχ. 2 είναι μια πολύ γνωστή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η αλλιώς **κατανομή**, που ονομάζεται **κανονική κατανομή** ή **κατανομή Gauss** και δίνεται από τη σχέση:



Σχ.3

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} \quad (2.3)$$

Στον τύπο (2.3) εμφανίζεται ένα μέγεθος, το σ , το οποίο ονομάζεται **τυπική απόκλιση** και είναι πολύ σημαντικό για το χαρακτηρισμό της κατανομής και της καμπύλης $P(x)$. Έτσι το σ καθορίζει τόσο το πλάτος, όσο και το ύψος της καμπύλης.

Αύξηση του σ σημαίνει αύξηση του πλάτους και, κατά συνέπεια (γιατί;) μείωση του ύψους (βλ. σχ. 3). Μ' άλλα λόγια το σ μας δείχνει πόση είναι η διασπορά των τιμών γύρω από την πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους.

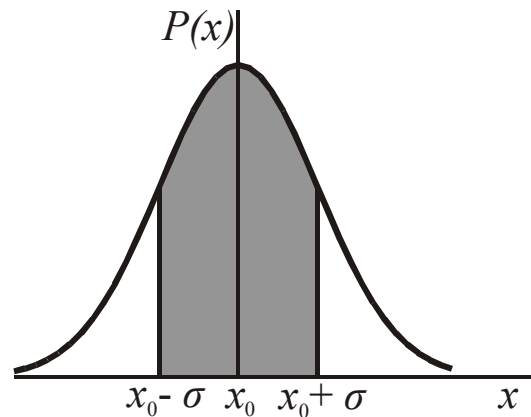
Ένα άλλο χαρακτηριστικό γνώρισμα της τυπικής απόκλισης είναι ότι το ολοκλήρωμα

$$P(-\sigma, \sigma) = \int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} P(x) dx \quad (2.4)$$

δηλαδή το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής στο Σχ.4 είναι ίσο περίπου με 0.68.

Βέβαια για το εργαστήριο πρέπει να παίρνουμε υπόψη μας πως δεν έχουμε, ούτε είναι δυνατόν να έχουμε, άπειρες μετρήσεις.

Άρα δεν μπορούμε να βρούμε την πραγματική τιμή απλά από καμπύλες, όπως αυτές που δείξαμε πιο πάνω.



Σχ.4

Σ' αυτό ακριβώς συνίσταται και η ουσία της θεωρίας των σφαλμάτων, η οποία μας δίνει σε τελική ανάλυση μια περιοχή, στην οποία με μεγάλη (συγκεκριμένη) πιθανότητα βρίσκεται η ζητούμενη τιμή.

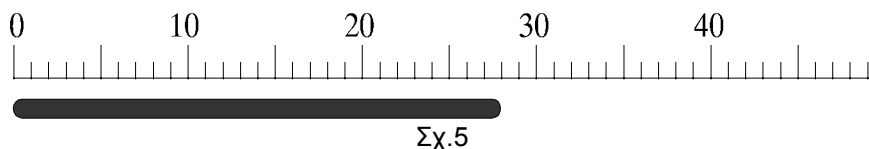
Εκτίμηση του σφάλματος κατά την ανάγνωση κλίμακας

Μια κατηγορία τυχαίων σφαλμάτων είναι τα λεγόμενα σφάλματα ανάγνωσης, που εκφράζουν το αναπόφευκτο σφάλμα που κάνουμε όταν διαβάζουμε κάποια ένδειξη του οργάνου μέτρησης που χρησιμοποιούμε*.

Συνήθως η μέτρησή μας στο εργαστήριο ανάγεται στην ανάγνωση κάποιων ενδείξεων από τα όργανα τα οποία χρησιμοποιούμε π.χ μέτρηση μήκους με υποδεκάμετρο, μέτρηση τάσης με βολτόμετρο κλίμακας κλπ. Αυτή η διαδικασία που είναι πολύ γνωστή εμπεριέχει τα σφάλματα.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι πρέπει να μετρήσουμε το μήκος ράβδου (Σχ.5).

* Αυτά τα σφάλματα αναφέρονται κύρια στα αναλογικά όργανα. Υπάρχουν όμως (όπως θα δούμε παρακάτω) και αντίστοιχα σφάλματα για τα ψηφιακά όργανα.

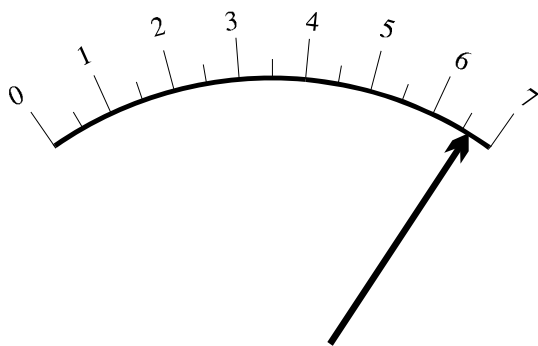


Αναμφισβήτητα το άκρο της ράβδου βρίσκεται πιο κοντά στα 28 cm. Έτσι λοιπόν μπορούμε να πούμε:

$$\ell = 28 \text{ cm} \quad (3.1)$$

Αλλά προφανώς πιο σωστά :

$$27.5 \text{ cm} \leq \ell \leq 28.5 \text{ cm} \quad (3.1\alpha)$$



Αντίστοιχα για την ένδειξη του βολτομέτρου (Σχ.6) μπορούμε να πούμε:

$$U = 6.7 \text{ V} \quad (3.2)$$

ή ορθότερα:

$$6.6 \text{ V} \leq U \leq 6.8 \text{ V} \quad (3.2\alpha)$$

Έτσι λοιπόν βλέπουμε ότι κάθε μέτρησή μας έχει μια σχετική ακρίβεια. Αυτή την ακρίβεια μπορούμε καλύτερα να την εκφράσουμε χρησιμοποιώντας την έννοια του **σφάλματος ανάγνωσης**.

Επομένως αντί να χρησιμοποιήσουμε τη γραφή (3.1) ή (3.1α) μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα

$$\ell = 28.0 \pm 0.5 \text{ cm} \quad (3.3)$$

και αντίστοιχα για τις (3.2) και (3.2α):

$$U = 6.7 \pm 0.1 \text{ V} \quad (3.4)$$

Ο προσδιορισμός του σφάλματος ανάγνωσης (ή μάλλον η εκτίμησή του) δεν είναι εύκολη υπόθεση και απαιτείται γι' αυτό αρκετή πείρα. Φυσικά εδώ παίζει πολλές φορές ρόλο και ο προσωπικός παράγοντας. Αυστηροί κανόνες γι' αυτό δεν υπάρχουν. Θα μπορούσαμε ενδεικτικά ν' αναφέρουμε τους εξής: α) Αν οι γειτονικές υποδιαίρεσεις απέχουν 1÷2 mm το σφάλμα το θεωρούμε μία ή μισή υποδιαίρεση. β) Αν οι γειτονικές υποδιαίρεσεις απέχουν 2÷5 mm το σφάλμα το εκτιμούμε περίπου από μισή υποδιαίρεση ως ένα δέκατο της υποδιαίρεσης κλπ.

Σημείωση 1. Το σφάλμα ανάγνωσης, δεν έχει να κάνει με το **σφάλμα παράλλαξης**, δηλαδή το σφάλμα που οφείλεται στο ότι δεν κοιτάμε σωστά τη βελόνα του αναλογικού μας οργάνου. Αυτό είναι βασικά σφάλμα ανεξάρτητο από τις συνθήκες και τα όργανα του πειράματος και το οποίο προσπαθούμε με κάθε τρόπο να το αποφύγουμε. Είναι χαρακτηριστικό ότι πολλά αναλογικά όργανα έχουν πίσω από τη βελόνα έναν μικρό καθρέφτη που μας βοηθάει να εκμηδενίσουμε ή να μειώσουμε στο ελάχιστο το σφάλμα παράλλαξης βλέποντας τη βελόνα να ταυτίζεται με το είδωλό της, κάνοντας έτσι την ανάγνωση της ένδειξης αντικειμενική.

Σημείωση 2. Το κάθε όργανο έχει πάντα μια ακρίβεια που οφείλεται στον κατασκευαστή και που κατά κανόνα αναγράφεται πάνω του. Συνήθως το σφάλμα που οφείλεται στην ακρίβεια του οργάνου είναι πιο μικρό από το σφάλμα ανάγνωσης κι έτσι δεν το παίρνουμε υπ. όψη μας (αυτός εξάλλου είναι και ο στόχος του κατασκευαστή). **Αν όμως τύχει το σφάλμα αυτό να είναι της τάξης ή μεγαλύτερο του σφάλματος ανάγνωσης πρέπει να αγνοήσουμε το δεύτερο.**

Σημείωση 3. Σήμερα αρκετά πλατιά χρησιμοποιούνται ψηφιακά όργανα. Εδώ διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) Η ένδειξη κατά τη μέτρηση δεν είναι σταθερή, αλλά το τελευταίο ψηφίο «παίζει» γύρω από μια τιμή. Τότε σαν μέτρηση παίρνουμε αυτή τη «μέση» τιμή, ενώ σαν σφάλμα το εύρος της μεταβολής

β) Η ένδειξη είναι σταθερή. Τότε (αν δεν υπάρχει άλλος περιορισμός από τον κατασκευαστή ή τον τρόπο χρήσης του οργάνου) το σφάλμα είναι 0.5 του τελευταίου ψηφίου. Το ίδιο φυσικά ισχύει και για τα κομπιουτεράκια. Μόνο που πρέπει να παρατηρήσουμε ότι πάντα χρειάζεται (ιδιαίτερα για τα κομπιουτεράκια) να σκεφτόμαστε ποιο θα πρέπει να είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μας που πρέπει να κρατήσουμε σύμφωνα και μ' όσα θα αναφέρουμε πιο κάτω.

Όσον αφορά την ακρίβεια του ψηφιακού οργάνου, αυτή σε τίποτα δεν διαφέρει από την ακρίβεια των μη ψηφιακών οργάνων που οφείλεται στον κατασκευαστή. Εδώ το μόνο που αλλάζει είναι το σφάλμα ανάγνωσης που είναι πια σαφές και το ίδιο για όλους.

Πολλαπλές μετρήσεις

Σε πολλές μετρήσεις είναι αδύνατον να εκτιμήσουμε το σφάλμα μόνο με βάση την ένδειξη του οργάνου. Για παράδειγμα όταν με τη βοήθεια χρονομέτρου μετράμε το χρόνο ανάμεσα σε δύο γεγονότα το σφάλμα μας οφείλεται (αν εξαιρέσουμε διάφορους άλλους παράγοντες) κύρια στην αντίδραση του χειριστή του χρονομέτρου, γιατί είναι σχεδόν αδύνατο να θεωρήσουμε ότι πάντα βάζει σε λειτουργία το χρονόμετρο "ταυτόχρονα" με το πρώτο γεγονός και το σταματάει "ταυτόχρονα" με το δεύτερο.

Σ' αυτή την περίπτωση επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση μερικές φορές και έτσι μπορούμε να βρούμε καλύτερα και την τιμή που είναι κοντά στην πραγματική, αλλά και το σφάλμα.

Μέση τιμή

Έστω λοιπόν ότι μετράμε την ίδια ποσότητα N φορές και βρίσκουμε τις τιμές $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Τότε σύμφωνα με τη θεωρία των πιθανοτήτων θεωρούμε ότι η τιμή που βρίσκεται πιο κοντά στην "πραγματική" είναι η μέση τιμή που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (4.1)$$

Και σ' αυτή την περίπτωση όμως δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το αποτέλεσμά μας συμπίπτει με την "πραγματική" τιμή. Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το σφάλμα, δηλαδή μια περιοχή τιμών του x μέσα στην οποία βρίσκεται αυτή η πραγματική τιμή. Δηλαδή

$$x = \bar{x} \pm \delta x \quad (4.2)$$

Από τη μαθηματική θεωρία σφαλμάτων προκύπτει ότι αν θέλουμε η πραγματική τιμή να βρίσκεται στο διάστημα (4.2) με πιθανότητα 68%*, τότε

$$\delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (4.3)$$

* Το νούμερο αυτό συμπίπτει με το 0.68 της σελ. 10 και αυτό βέβαια δεν είναι τυχαίο.

Το σφάλμα (4.3) λέγεται απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής.

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι κατά τη μέτρηση κάποιου μήκους ℓ πήραμε τις εξής τιμές (σε mm)

24.25	24.26	24.22	24.28	24.24	24.25	24.22	24.26	24.23	24.24
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Έτσι, σχεδιάζουμε τον πίνακα.

ℓ_i mm	$\ell_i - \bar{\ell}$ mm	$(\ell_i - \bar{\ell})^2$ $\text{mm}^2 \times 10^5$
24.25	-0.005	2.5
24.26	0.015	22.5
24.22	-0.025	62.5
24.28	0.035	122.5
24.24	-0.005	2.5
24.25	0.005	2.5
24.22	-0.025	62.5
24.26	0.015	22.5
24.23	-0.015	22.5
24.24	-0.005	2.5
$\sum_{i=1}^{10} \ell_i = 242.45 \text{ mm}$	$\sum_{i=1}^{10} (\ell_i - \bar{\ell}) = 0$	$\sum_{i=1}^{10} (\ell_i - \bar{\ell})^2 = 3.25 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2$

Με τη βοήθεια του πίνακα και των τύπων (4.1) και (4.3) βρίσκουμε

$$\bar{\ell} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ell_i = \frac{242.45 \text{ mm}}{10} = 24.245 \text{ mm}$$

$$\delta \ell = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (\ell_i - \bar{\ell})^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{3.25 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2}{10 \cdot 9}} = 0.00600925 \text{ mm}$$

Άρα τελικά (όπως θα δούμε και στην επόμενη παράγραφο):

$$\ell = (24.245 \pm 0.006) \text{ mm} \quad (4.4)$$

Αυτό το αποτέλεσμα σημαίνει ότι με πιθανότητα 68% η πραγματική μας τιμή βρίσκεται στο διάστημα από 24.239 mm έως 24.251 mm. Με βάση τα όσα είπαμε στην σελίδα 10 γίνεται κατανοητό πως το διάστημα αυτό αντιστοιχεί στην περιοχή από $x_0 - \sigma$ έως $x_0 + \sigma$.

Σημείωση. Προσοχή! Μέση τιμή μπορούμε να βρούμε μόνο αν μετράμε το ίδιο μέγεθος και σε κάθε μέτρηση περιμένουμε να βρούμε την ίδια τιμή. Αν για παράδειγμα μετράμε πολλές φορές το χρόνο πτώσης ενός σώματος από το ίδιο ύψος και βρίσκουμε τους χρόνους t_1, t_2, \dots, t_N τότε βρίσκουμε το \bar{t} και το $\delta \bar{t}$. Αν όμως μετράμε τους χρόνους πτώσης t_1, t_2, \dots, t_N από διαφορετικά ύψη h_1, h_2, \dots, h_N τότε ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ να υπολογίσουμε τα \bar{t} , $\delta \bar{t}$, \bar{h} , $\delta \bar{h}$ γιατί δεν έχουν κανένα νόημα.

Περί του αριθμού των σημαντικών ψηφίων

Πολλές φορές στη διάρκεια των πράξεων μας βρίσκουμε αριθμούς με μεγάλο αριθμό ψηφίων. Π.χ. έστω ότι βρίσκουμε για τη μέση τιμή μιας ποσότητας το αποτέλεσμα

$$\bar{x} = 7.3333\dots$$

Αμέσως γεννιέται το ερώτημα: πόσα δεκαδικά ψηφία πρέπει να αφήσουμε;

Αυτή τη στιγμή δεν μπορούμε να δώσουμε μια συγκεκριμένη απάντηση. Για να το κάνουμε πρέπει να ξέρουμε την ακρίβεια του πειράματός μας, δηλαδή το σφάλμα.

Έστω όμως ότι υπολογίζοντας το απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής. Βγάζοντας την τετραγωνική ρίζα βρίσκουμε

$$\delta x = 0.06273273\dots$$

Πως τώρα μπορούμε να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα;

Στο Εργαστήριο Φυσικής*, παίρνοντας υπόψη την ακρίβεια των χρησιμοποιούμενων μεθόδων και οργάνων εφαρμόζουμε τον εξής κανόνα:

Αν έχουμε βρει την πιθανότερη (μέση) τιμή και το σφάλμα, στρογγυλοποιούμε το σφάλμα μέχρι να μας μείνει ένα, το μεγαλύτερο, ψηφίο που είναι διάφορο του μηδενός. Ύστερα στην πιθανότερη (μέση) τιμή αφήνουμε τελευταίο το ψηφίο της ίδιας τάξης μεγέθους κάνοντας κι εδώ στρογγυλοποίηση.

Έτσι στο παράδειγμά μας παίρνουμε :

$$\delta x = 0.06 \text{ και } \bar{x} = 7.33$$

Άρα τελικά:

$$x = 7.33 \pm 0.06$$

Έτσι εξηγείται και το αποτέλεσμα (4.4).

Υπάρχει μια μικρή εξαίρεση από τον κανόνα αυτής της παραγράφου: αν το πρώτο σημαντικό ψηφίο του σφάλματος είναι μικρό (1 ή 2) πιο σωστό είναι να διατηρήσουμε ακόμη ένα ψηφίο στο τελικό αποτέλεσμα (τόσο στο σφάλμα όσο και στην πιθανότερη τιμή).

Εδώ κάποιος μπορεί να διαπιστώσει την ύπαρξη κάποιου προβλήματος. Για να βρούμε το σφάλμα από τη σχέση (4.3) πρέπει να ξέρουμε τη μέση τιμή από τη σχέση (4.1). Πόσα σημαντικά ψηφία θα πρέπει να κρατήσουμε στη μέση τιμή όταν χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.3);

Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι όσο περισσότερα τόσο το καλύτερο. Και πραγματικά, αν χρησιμοποιούμε κομπιουτεράκι ή ηλεκτρονικό υπολογιστή μπορούμε να το κάνουμε. Μπορούμε βέβαια να κρατήσουμε και λιγότερα. Πάντως έχει σημασία να μπορούμε από τα πριν να προβλέπουμε, ώστε στις πράξεις που κάνουμε για τον υπολογισμό του σφάλματος με τη χρήση της μέσης τιμής η τελευταία να έχει **τουλάχιστον ένα σημαντικό ψηφίο περισσότερο** από όσα θα μείνουν στο τέλος.

Όταν βέβαια βρούμε και το σφάλμα και καταλήξουμε οριστικά στον αριθμό των σημαντικών ψηφίων της μέσης τιμής στις κατοπινές πράξεις που ίσως χρειαστούν **χρησιμοποιούμε μόνο αυτό το αποτέλεσμα**.

* Συνήθως, στις επιστημονικές εργασίες αφήνουν δύο σημαντικά ψηφία για το σφάλμα και τα αντίστοιχα ψηφία της πιθανότερης τιμής. Αυτό όμως δεν θα το κάνουμε στα πλαίσια του εργαστηρίου Γενικής Φυσικής.

Κανόνες στρογγυλοποίησης

Πριν προχωρήσουμε σε συγκεκριμένα παραδείγματα ας πούμε δυο λόγια για τους κανόνες στρογγυλοποίησης.

Έστω ότι επιλέξαμε το ψηφίο στο οποίο θέλουμε να κάνουμε τη στρογγυλοποίηση (το υπογραμμισμένο στους αριθμούς του πίνακα):

A/A	1	2	3	4	5	6	7
Αριθμός	12.1 <u>3</u> 86	2 <u>5</u> 67	23. <u>6</u> 47	0.0 <u>3</u> 46	<u>2</u> .50001	6 <u>4</u> 54	0. <u>4</u> 5

Τότε ακολουθούμε τους εξής κανόνες:

α) Αν το αμέσως επόμενο ψηφίο είναι μεγαλύτερο του 5 ανεβάζουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μια μονάδα και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα. Με βάση τον κανόνα αυτό τα νούμερα 1 και 2 γράφονται 12.14 και 2600 αντίστοιχα.

β) Αν το αμέσως επόμενο ψηφίο είναι μικρότερο του 5 αφήνουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο όπως είναι και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα. Με βάση τον κανόνα αυτό τα νούμερα 3 και 4 γράφονται 23.6 και 0.03 αντίστοιχα.

γ) Αν το αμέσως επόμενο ψηφίο είναι ίσο με το 5 εξετάζουμε αν μετά από αυτό υπάρχει κάποιο άλλο ψηφίο διάφορο του μηδενός σε οποιαδήποτε θέση.

Αν υπάρχει τότε αυξάνουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μία μονάδα και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα. Με βάση τον κανόνα αυτό τα νούμερα 5 και 6 γράφονται 3 και 6500 αντίστοιχα.

Αν δεν υπάρχει τότε μπορούμε να κάνουμε ότι θέλουμε, είτε να αυξήσουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μία μονάδα μηδενίζοντας τα υπόλοιπα, είτε να το αφήσουμε όπως είναι μηδενίζοντας τα υπόλοιπα. Έτσι το νούμερο 7 μπορεί να γραφτεί είτε 0.5 είτε 0.4. Πάντως αν σε μια σειρά μετρήσεων έχουμε αυτή την περίπτωση μερικές φορές, συνίσταται στις μισές να αυξάνουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μία μονάδα, ενώ στις υπόλοιπες να το αφήνουμε ως έχει.

Παραδείγματα

A/A	Πριν από την επιλογή των σημαντικών ψηφίων		Μετά την επιλογή των σημαντικών ψηφίων		Τελικό Αποτέλεσμα
	\bar{x}	δx	δx	\bar{x}	x
1	263.2765	0.07813	0.08	263.28	263.28±0.08
2	12.2	0.03116	0.03	12.20	12.20±0.03
3	127.187	0.932	0.9	127.2	127.2±0.9
4	17.2362	0.232	0.23	17.24	17.24±0.23
5	1563	33.62	30	1560	1560±30
6	178936	589	600	178900	178900±600
7	11002380	9873	10000	11002000	11002000±10000
8	78654	2486	2500	78700	78700±2500
9	135067	1897	1900	135100	135100±1900

Σχετικό σφάλμα

Πολλές φορές ο φοιτητής αναρωτιέται αν το σφάλμα που έχει βρει είναι μεγάλο ή μικρό και μάλιστα ακούγεται για παράδειγμα ότι σφάλμα 2000 είναι πολύ μεγάλο. Μια τέτοια αντιμετώπιση προφανώς δεν είναι σωστή. Για να κρίνουμε αν ένα σφάλμα είναι μικρό ή μεγάλο πρέπει να εξετάσουμε δύο παράγοντες

1. Αν το σφάλμα ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις των πειραματικών στόχων. Δηλαδή αν έχουμε την ακρίβεια που απαιτείται στο συγκεκριμένο πείραμα.
2. Ένα καλό κριτήριο για το αν ένα σφάλμα είναι μικρό ή μεγάλο μας δίνει το σχετικό σφάλμα που ορίζεται ως εξής:

$$n = \frac{\delta x}{\bar{x}} \quad (6.1)$$

Το σχετικό σφάλμα είναι καθαρός αριθμός και δίνεται σε ποσοστά. Έτσι λοιπόν ένα σφάλμα θεωρείται μικρό αν $\eta \sim 5\%$, ενώ μεγάλο αν $\eta > 10\%$.

Φυσικά όλα αυτά με την προϋπόθεση ότι ισχύει το 1.

Συνήθως ο πειραματικός φυσικός, αν το σχετικό του σφάλμα είναι μεγάλο, προσπαθεί με τη βελτίωση τόσο των πειραματικών συσκευών, όσο και της μεθοδολογίας στη διεξαγωγή του πειράματος, να το μειώσει.

☛*Σκεφθείτε, υπάρχει περίπτωση το σχετικό σφάλμα να είναι της τάξης του 500% χωρίς αυτό να προκαλεί ανησυχία στον ερευνητή

Πάντως διευκρινίζουμε εδώ, πως στο εκπαιδευτικό εργαστήριο φυσικής το πρόβλημα δεν είναι να έχουμε μικρά σφάλματα, αλλά **να μπορούμε να εξηγήσουμε τις αιτίες των σφαλμάτων μας**.

Παραδείγματα Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία των παραδειγμάτων της προηγούμενης παραγράφου παίρνουμε:

A/A	\bar{x}	δx	η
1	263.28	0.08	0.03%
2	12.20	0.03	0.2%
3	127.2	0.9	0.7%
4	17.24	0.23	1.3%
5	1560	30	1.9%
6	178900	600	0.3%
7	11002000	10000	0.09%
8	78700	2500	3.2%
9	135100	1900	1.4%

Τονίζουμε εδώ πως στο σχετικό σφάλμα δεν υπάρχουν κάποιοι κανόνες στρογγυλοποίησης. Απλά το γράφουμε έτσι ώστε να «διαβάζεται».

Διάδοση σφαλμάτων

Τις περισσότερες φορές στις ασκήσεις του εργαστηρίου, αλλά και στα ερευνητικά πειράματα, η

Άμεση μέτρηση κάποιων μεγεθών μας χρησιμεύει για τον έμμεσο υπολογισμό κάποιων άλλων με τη χρήση γνωστών τύπων. Έτσι για παράδειγμα μετρώντας το ρεύμα I που διαρρέει κάποιον αγωγό και την τάση U στα άκρα του μπορούμε από τον τύπο του Ohm να υπολογίσουμε την αντίσταση $R=U/I$.

Έστω τώρα ότι έχουμε μετρήσει την τάση U με σφάλμα δU (ανεξάρτητα αν είναι σφάλμα ανάγνωσης ή απόλυτο σφάλμα μέσης τιμής) και την ένταση του ρεύματος I με σφάλμα δI . Άμεση μέτρηση της αντίστασης δεν έχουμε, άρα δεν μπορούμε να μιλήσουμε για σφάλμα του R με την έννοια που μέχρι τώρα μιλούσαμε. Είναι όμως προφανές ότι τα σφάλματα των U και I θα έχουν επίδραση και στο R . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε διάδοση σφαλμάτων.

Ισχύει ο εξής κανόνας (που αποδεικνύεται αυστηρά με βάση τη μαθηματική θεωρία των σφαλμάτων):

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $\lambda = f(x,y,z,...)$ όπου τα μεγέθη $x,y,z,...$ έχουν σφάλματα αντίστοιχα $\delta x, \delta y, \delta z, ...$. Τότε ισχύει:

$$\delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta z\right)^2 + \dots} \quad (7.1)$$

όπου $\partial\lambda/\partial x$ η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης λ ως προς x .

Έτσι λοιπόν για την περίπτωση που εξετάσαμε στην αρχή της παραγράφου θα ισχύει

$$\delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\delta I\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta U}{I}\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2}\delta I\right)^2}$$

↪ **Παρατήρηση 1.** Όταν κάνουμε τις παραγωγίσεις και χρειαστεί να αντικαταστήσουμε τα νούμερα, στη θέση των $x, y, z, ...$ πρέπει να βάλουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα, είτε αυτά είναι μέσες τιμές, είτε προϊόν μιας μέτρησης.

↪ **Παρατήρηση 2.** Αν η ποσότητα λ είναι **μόνο γινόμενο και πηλίκο** των μεγεθών $x,y,z, ...$ τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2 + \dots} \quad (7.2)$$

Παράδειγμα 7.1 Μελετώντας ένα απλό εκκρεμές βρίσκουμε ότι το μήκος του $\ell = (93.80 \pm 0.10)$ cm, ενώ η περίοδος του $T = (1.9440 \pm 0.0010)$ s. Να υπολογισθεί η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Από τον τύπο $g = 4\pi^2 \ell / T^2$ βρίσκουμε

$$g = 4\pi^2 \cdot 93.80 / (1.9440)^2 \text{ cm/s}^2 = 979.87 \text{ cm/s}^2.$$

Έχουμε $\partial g / \partial \ell = 4\pi^2 / T^2$, $\partial g / \partial T = -8\pi^2 \ell / T^3$ και από την (7.1):

$$\delta g = 4\pi^2 \sqrt{\left(\frac{\delta \ell}{T^2}\right)^2 + \left(\frac{2\ell \delta T}{T^3}\right)^2} \approx 1.451 \text{ cm/s}^2. \text{ Άρα } \boxed{g = (979.9 \pm 1.5) \text{ cm/s}^2}$$

Παράδειγμα 7. Φοιτητής έχει χρονόμετρο που το σφάλμα του είναι 0.1 s και θέλει να μετρήσει την περίοδο εκκρεμούς που είναι της τάξης των 2 s με σφάλμα μικρότερο του 0.1%.

Αν κάνει μια μέτρηση προφανώς το σφάλμα του θα είναι της τάξης του 5%. Αν τώρα θεωρήσει ότι το εκκρεμές του βρίσκεται σε τέτοιες ιδανικές συνθήκες που η περίοδος του για 100 ταλαντώσεις δεν μεταβάλλεται, μπορεί να μετρήσει το χρόνο των 100 ταλαντώσεων που έστω

ότι είναι $t = 213,55$ s. Γι' αυτή τη μέτρηση όμως έχει σφάλμα $\delta t = 0.1$ s. Άρα $T = t/100 = 2.135$ s. Τότε

$$\delta T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial t} \delta t\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta t}{100}\right)^2} = \frac{\delta t}{100} = 0.001 \text{ s.}$$

Επομένως $T = 2.135 \pm 0.001$ s και $\eta = \delta T/T \approx 0.0004\%$.

Παράδειγμα 7.3 Μετρώντας την ένταση του ρεύματος και την τάση στα άκρα αντίστασης παίρνουμε τις τιμές:

U (V)	5	7	9	11	13	15	18	20
I (mA)	26	35	43	51	58	65	75	79

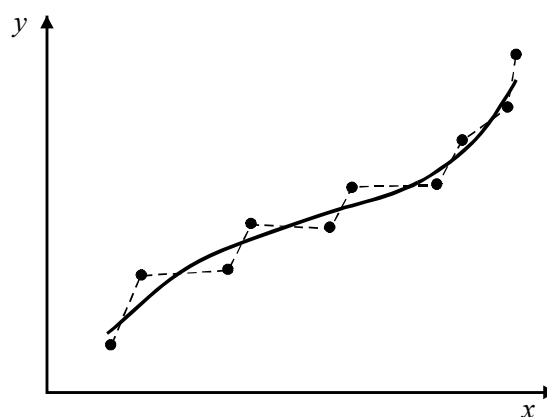
με $\delta U = 0.2$ V και $\delta I = 1$ mA. Από τον τύπο του Ohm υπολογίζουμε την αντίσταση R για διάφορες τιμές του U .

U (V)	I (mA)	R (Ω)	δR (Ω)	$R \pm \delta R$ (Ω)
5	25	192.31	11	192 ± 11
7	35	200	8	200 ± 8
9	43	209.30	7	209 ± 7
11	51	215.69	6	216 ± 6
13	58	224.14	5	224 ± 5
15	65	230.77	5	231 ± 5
18	75	240	4	240 ± 4
20	79	253.16	4	253 ± 4

Πώς χαράζουμε μία καμπύλη

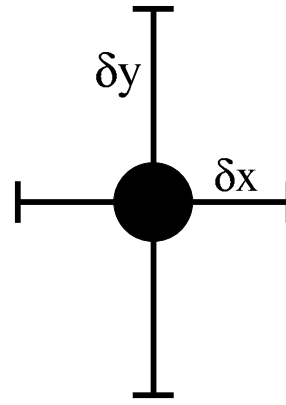
Συχνά τα αποτελέσματα των μετρήσεών μας τα δίνουμε με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων, είτε γιατί αυτές μας βοηθούν για τον υπολογισμό κάποιων μεγεθών, είτε για να τα δείξουμε καλύτερα και να βγάλουμε συγκεκριμένα φυσικά συμπεράσματα.

Συνήθως όμως τα πειραματικά μας αποτελέσματα δεν πέφτουν "ομαλά" στο διάγραμμά μας. Θα ήταν λάθος να τα ενώσουμε τότε μεταξύ τους όπως με τις διακεκομμένες γραμμές του σχήματος 7, γιατί αυτό θα σήμαινε ότι στα σημεία αυτά το μετρούμενο μέγεθος αλλάζει αλματωδώς κάποιες ιδιότητές του, πράγμα που δεν φαίνεται πιθανό. Έτσι το λογικό θα ήταν να φέρουμε μια ομαλή καμπύλη όπως στο σχ. 7.

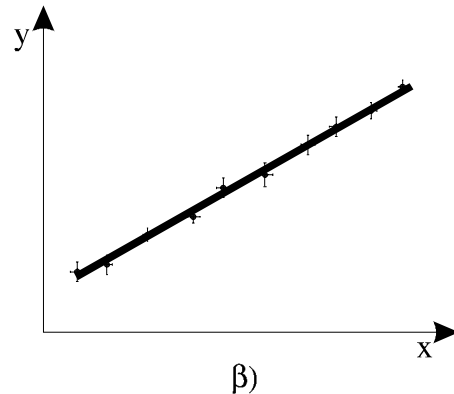
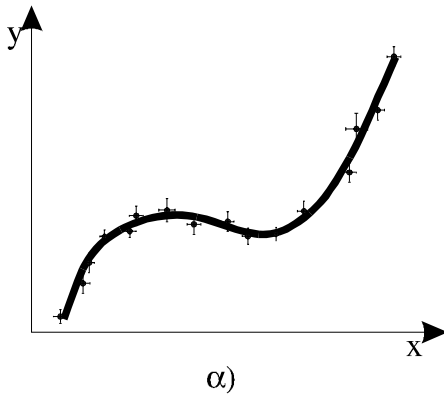


Σχ. 7.

Εξάλλου φέροντας τα σημεία στο Σχ.7 δεν αναφερθήκαμε καθόλου στα σφάλματα, που, όπως είπαμε, συνοδεύουν κάθε μέτρηση και κάθε πειραματικό αποτέλεσμα. Τα σφάλματα πρέπει πάντα να χαράσσονται στο διάγραμμα για κάθε σημείο όπως φαίνεται στο Σχ. 8, όπου τα δx και δy είναι τα σφάλματα (ανάγνωσης, μέσης τιμής ή σύνθετα), ενώ το μέγεθος των γραμμών ανταποκρίνεται στο μέγεθος των σφαλμάτων σύμφωνα με τις χρησιμοποιούμενες για τα x και y κλίμακες.

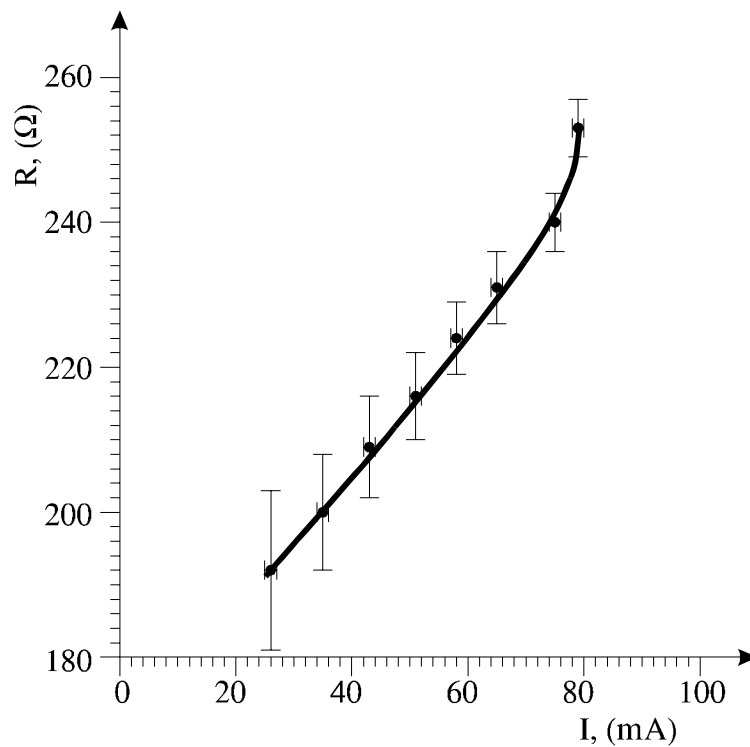


Έτσι λοιπόν οι καμπύλες χαράσσονται όπως φαίνονται στα σχ. 9(α) και 9(β).



Σχ.9

Παράδειγμα. Με βάση το παράδειγμα 7.3 χαράσσουμε την καμπύλη του σχήματος 10.



↪ **Παρατήρηση.** Στις γραφικές παραστάσεις δεν έχουμε το δικαίωμα να προεκτείνουμε την πειραματική καμπύλη δεξιά ή αριστερά των ακραίων σημείων, ακόμη κι αν ξέρουμε από τη θεωρία πως αυτή περίπου πρέπει να πηγαίνει, γιατί κανείς δεν μπορεί να μας διαβεβαιώσει πως στη συγκεκριμένη πειραματική συσκευή αυτό ισχύει. Μπορούμε όμως, αν (και όταν) απαιτείται από την άσκηση, να κάνουμε κάποιες προεκτάσεις, κατά κανόνα ευθύγραμμες.

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Υπάρχουν μερικές περιπτώσεις όμως, που για την χάραξη της καμπύλης δεν χρειάζεται να προσπαθήσουμε να το κάνουμε με το μάτι επιδιώκοντας να περάσουμε κοντά στα σημεία και μέσα από τα σφάλματα, αλλά μπορούμε να χαράξουμε την καλύτερη δυνατή καμπύλη χρησιμοποιώντας μαθηματικές μεθόδους*. Αυτό συμβαίνει όταν η αναμενόμενη καμπύλη είναι γνωστής μορφής (π.χ. ευθεία, υπερβολή, ημιτονοειδής, εκθετική κλπ.). Η μέθοδος που περιγράφουμε λέγεται **μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων**, γιατί κύρια απαίτηση για την καμπύλη που χαράσσουμε είναι το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων των πειραματικών μας σημείων από την καμπύλη να είναι ελάχιστο.

Θα περιγράψουμε τη μέθοδο για την περίπτωση της ευθείας.

Έστω ότι έχουμε σειρά N μετρήσεων με αποτελέσματα x_i και y_i και μάλιστα ξέρουμε ότι αν δx και δy είναι τα σφάλματα των x_i και y_i αντίστοιχα και ότι για όλα τα x_i και y_i ισχύει $\delta x/x_i < \delta y/y_i$ και ότι το δy είναι το ίδιο για όλα τα y_i **.

Τότε η αναμενόμενη ευθεία της μορφής

$$y = A + Bx \quad (9.1)$$

μπορεί να προσδιορισθεί από τους συντελεστές A και B που δίνονται από τις σχέσεις:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{D} \quad (9.2)$$

$$B = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{D} \quad (9.3)$$

όπου

$$D = N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \quad (9.4)$$

και τα σφάλματα στα A και B :

$$\delta A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{D}} \quad (9.5)$$

* Σήμερα υπάρχουν βέβαια ειδικά προγράμματα υπολογιστών που μπορούν να βρουν την καμπύλη που προσεγγίζει καλύτερα ένα σύνολο πειραματικών σημείων. Τέτοια προγράμματα είναι απλά στην περίπτωση απλών καμπυλών (ευθεία, εκθετική, παραβολή κ.τ.λ.) και γίνονται πολύπλοκα για άλλες πιο σύνθετες καμπύλες.

** Μερικές φορές στο εκπαιδευτικό εργαστήριο μπορούμε να αγνοήσουμε αυτούς τους όρους.

$$\delta B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{D}} \quad (9.6)$$

όπου

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2}{N-2}} \quad (9.7)$$

Προφανώς το B είναι η κλίση της ευθείας ενώ το A το σημείο στον άξονα των y από το οποίο περνάει η ευθεία μας.

Παράδειγμα. Για αέριο σταθερού όγκου μεταβάλλουμε την πίεση και μετρούμε τη θερμοκρασία. Παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:

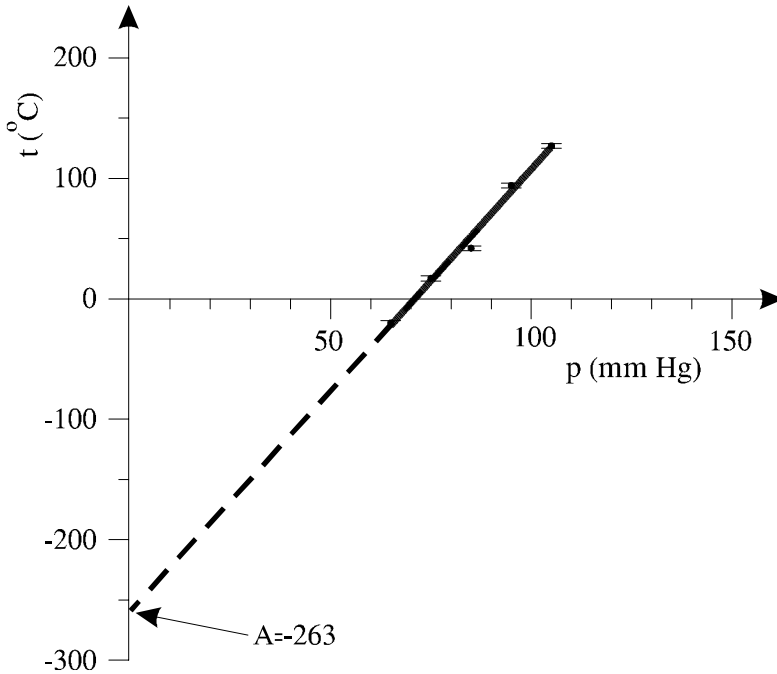
p (mm Hg)	65	75	85	95	105
t (°C)	-20	17	42	94	127

Οι μετρήσεις μας είναι τέτοιες ώστε $\delta p \approx 0$ ενώ $\delta t = 2$ °C. Θέλουμε να χαράξουμε σε διάγραμμα την $t=t(p)$. Από τους νόμους των ιδανικών αερίων ξέρουμε ότι $t=A+Bp$, όπου για $p=0$ $A=-273.15$ °C. Θα ελέγξουμε λοιπόν το αποτέλεσμα μας και ταυτόχρονα θα υπολογίσουμε το B .

Έχουμε:

$$N=5, \sum_{i=1}^5 t_i = 260, \sum_{i=1}^5 p_i t_i = 25810, \sum_{i=1}^5 p_i = 425, \sum_{i=1}^5 p_i^2 = 37125, D=5000.$$

Από τους τύπους (9.2) – (9.7) παίρνουμε: $A=-263.35$, $B=3.71$, $\sigma_t=6.7 \approx 7$, $\delta A=18$, $\delta B=0.22$.



Σχ.11

Άρα τελικά:

$$A = (-263 \pm 18) \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$B = (3.71 \pm 0.22) \text{ } ^\circ\text{C/mmHg}$$

Όπως βλέπουμε το πειραματικό A βρίσκεται σε καλή συμφωνία με το αναμενόμενο θεωρητικό.

Τώρα πια μπορούμε να χαράξουμε την ευθεία. Αφού βάλουμε στο μιλιμετρέ χαρτί τα σημεία φέρνουμε την ευθεία με βάση το A και την κλίση B (σχ. 11).

Απόρριψη ορισμένων αποτελεσμάτων

Μερικές φορές όταν μετρούμε επανειλημμένα την ίδια ποσότητα, κάποιο από τα αποτελέσματά μας διαφέρει απ' όλα τα άλλα. Όταν αυτό συμβαίνει ο πειραματικός πρέπει να αποφασίσει αν αυτό είναι συνέπεια κάποιων λαθών στη διαδικασία της μέτρησης, οπότε πρέπει να αγνοηθεί, ή είναι νομοτελειακό αποτέλεσμα που πρέπει να εξεταστεί μαζί μ' όλα τα άλλα. Για παράδειγμα κάνουμε 6 μετρήσεις της περιόδου ενός εκκρεμούς και βρίσκουμε (σε δευτερόλεπτα):

3.8	3.5	3.9	3.9	3.4	1.8
-----	-----	-----	-----	-----	-----

Σ' αυτό το παράδειγμα το 1.8 διαφέρει σημαντικά από τα υπόλοιπα αποτελέσματα και πρέπει να αποφασίσουμε τι θα το κάνουμε.

Θέλουμε να υπογραμμίσουμε εδώ ότι στη θεωρία των σφαλμάτων και των μετρήσεων αποδεικνύεται ότι ένα τέτοιο αποτέλεσμα (αν υποθέσουμε ότι δεν έχουμε κάνει λάθη στην πειραματική διαδικασία) **είναι πιθανό***, παρόλο που αυτή η πιθανότητα είναι μικρή.

Αφού λοιπόν πεισθούμε για την ορθότητα της πειραματικής μας διαδικασίας πρέπει να πάρουμε την τελική απόφαση, η οποία **δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη**, γιατί θα επιδράσει σημαντικά στο αποτέλεσμά μας.

Για παράδειγμα αν δεν αγνοήσουμε την 6η μέτρηση στα παραπάνω αποτελέσματα θα έχουμε:

$$T = (3.4 \pm 0.3) \text{ s},$$

ενώ αν την αγνοήσουμε:

$$T = (3.70 \pm 0.10) \text{ s}.$$

Ένας τρόπος για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα είναι να χρησιμοποιήσουμε το λεγόμενο κριτήριο Chauvenet. Ακολουθούμε λοιπόν τα εξής βήματα:

1. Χρησιμοποιώντας **όλες** τις τιμές (και την «ύποπτη» x_j) x_1, x_2, \dots, x_N υπολογίζουμε τη μέση τιμή \bar{x} .
2. Βρίσκουμε την τυπική απόκλιση** σ από τον τύπο:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(\bar{x} - x_i)^2}{N-1}}. \quad (11.1)$$

3. Βρίσκουμε το λόγο της απόλυτης τιμής της διαφοράς της μέσης τιμής από την «ύποπτη» τιμή προς την τυπική απόκλιση μ :

$$\mu = \frac{|\bar{x} - x_j|}{\sigma}. \quad (11.2)$$

4. Από τον πίνακα του παραρτήματος (σελίδα 33) βρίσκουμε την πιθανότητα $P(<\mu\sigma)$ να έχουμε μέτρηση που απέχει από τη μέση τιμή λιγότερο από την «ύποπτη» που εξετάζουμε.
5. Βρίσκουμε την πιθανότητα $P(\geq\mu\sigma)$ να έχουμε τιμή που να απέχει από τη μέση περισσότερο ή όσο η «ύποπτη» από τη σχέση:

$$P(\geq\mu\sigma) = 1 - P(<\mu\sigma) \quad (11.3)$$

6. Πολλαπλασιάζουμε το $P(\geq\mu\sigma)$ με τον αριθμό των μετρήσεων N και βρίσκουμε το αποτέλεσμα u . Τότε:

* Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2 η κανονική κατανομή δίνει πεπερασμένη (αν και μικρή) πιθανότητα να έχουμε αποτελέσματα πολύ μακριά από την πραγματική τιμή.

** Βλ. κεφάλαιο 2.

α) Αν $u < 0.5$ απορρίπτουμε την «ύποπτη» τιμή, βρίσκουμε νέα μέση τιμή (από $N-1$ μετρήσεις) και το σφάλμα της.

β) Αν $u \geq 0.5$ κρατάμε την ύποπτη τιμή και συνεχίζουμε με όλες τις μετρήσεις υπολογίζοντας το σφάλμα για τη μέση τιμή που ήδη έχουμε υπολογίσει.

Στο παράδειγμα λοιπόν που είχαμε στην αρχή του κεφαλαίου υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι όλες οι τιμές μας είναι λογικές. Υπολογίζουμε λοιπόν τη μέση τιμή και βρίσκουμε $\bar{T} = 3.383 \text{ s}$. Για την τυπική απόκλιση έχουμε: $\sigma_T = 0.7 \text{ s}$.

Τώρα βλέπουμε ότι η τιμή 1.8 s, για την οποία αμφιβάλλουμε, διαφέρει από τη μέση τιμή κατά 1.58 δηλαδή $u=2.3$. Μπορούμε τώρα να βρούμε τι πιθανότητα έχει ένα αποτέλεσμα μας να απέχει από τη μέση τιμή περισσότερο από 2 τυπικές αποκλίσεις:

Από το πίνακα του Παραρτήματος βρίσκουμε την $P(<2.3\sigma_T) \approx 0.98$.

Άρα:

$$P(\geq 2.3\sigma_T) = 1 - 0.98 = 0.02$$

Αυτό σημαίνει ότι αν κάναμε 100 μετρήσεις της περιόδου οι 2 τουλάχιστον θα ήταν το ίδιο "άσχημες" όπως το 1.8 s και δεν θα έπρεπε να τις απορρίψουμε. Εμείς όμως κάναμε 6. Άρα "άσχημες" θα πρέπει να είναι:

$$0.02 \times 6 = 0.12$$

Το κριτήριο του Chauvenet μας λέει ότι αν αυτός ο τελευταίος αριθμός είναι μικρότερος του 0.5 τότε πρέπει να απορρίψουμε την τιμή. Αν απορρίψουμε την τιμή πρέπει να προσδιορίσουμε ξανά την \bar{T} και την δT . Έτσι για το παράδειγμά μας βρίσκουμε:

$$T = (3.70 \pm 0.10) \text{ s}$$

Αν τώρα έχουμε και κάποια άλλη ύποπτη τιμή **δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δεύτερη φορά στην ίδια σειρά μετρήσεων** το κριτήριο του Chauvenet.

Παράδειγμα. Φοιτητής μετράει δέκα φορές την ίδια ταχύτητα v και βρίσκει (σε m/s)

46, 48, 44, 38, 45, 47, 58, 44, 45, 43.

Βλέπει τότε ότι το 58 φαίνεται υπερβολικά μεγάλο. Ελέγχει τη μεθοδολογία του πειράματος του αλλά δεν βρίσκει κάποιο προφανές λάθος. Τότε χρησιμοποιεί το κριτήριο του Chauvenet. Συνυπολογίζοντας προσωρινά και τις 10 μετρήσεις βρίσκει:

$$\bar{x} = 45.8 \text{ και } \sigma_x = 5.1.$$

Ύποπτη θεωρείται η τιμή $x_7 = 58$. Τότε βρίσκει:

$$\frac{|x_7 - \bar{x}|}{\sigma_x} = \frac{58 - 45.8}{5.1} = 2.4, P(\geq 2.4\sigma_x) = 1 - P(<2.4\sigma_x).$$

Από τον πίνακα του Παραρτήματος βρίσκει $P(<2.4\sigma_x) = 0.984$.

Επομένως, $P(\geq 2.4\sigma_x) = 1 - 0.984 = 0.016$.

Οπότε για 10 μετρήσεις παίρνει: $0.016 \times 10 = 0.16 < 0.5$

Άρα απορρίπτει την τιμή 58 και βρίσκει: $\bar{x} = 44.4 \text{ m/s}$ και $\delta x = 0.96 \text{ m/s}$.

Άρα τελικά: $x = (44.4 \pm 1.0) \text{ m/s}$

Γενικές οδηγίες

Η μεθοδολογία του πειράματος

Πριν αρχίσετε την εκτέλεση της άσκησης μελετήστε τα όργανα που θα χρησιμοποιήσετε και προσπαθήστε να βρείτε την πιστότητά τους (το σφάλμα του κατασκευαστή) καθώς και τα πιθανά σφάλματα ανάγνωσης. Σε κάθε βήμα σας στην εκτέλεση του πειράματος σκεφθείτε αν υπάρχουν συστηματικά σφάλματα και πως αυτά μπορούν να εξουδετερωθούν (πειραματικά ή θεωρητικά).

Όπως είπαμε και πιο πάνω τα σφάλματα σε κάθε πείραμα είναι αναπόφευκτα και πολλές φορές η μείωσή τους συνδέεται με τη χρήση πολύπλοκων και ακριβών οργάνων.

Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι κάθε πειραματικός χρησιμοποιώντας τις συσκευές που έχει στη διάθεσή του δεν προσπαθεί να μειώσει όσο το δυνατόν τα σφάλματά του χρησιμοποιώντας διάφορες εμπειρικές μεθόδους και αποφεύγοντας τα λάθη στην εκτέλεση του πειράματος.

Υπάρχουν επίσης ορισμένοι απλοί τρόποι για τη μείωση των σφαλμάτων.

Έτσι, για παράδειγμα, όταν μετρούμε κάποιο μήκος με τη βοήθεια του κανόνα πρέπει να φροντίζουμε ώστε η μια άκρη (συνήθως η αρχή) να συμπίπτει με κάποια ακριβή ένδειξη του κανόνα.

Όταν μεταβάλλουμε κάποιο μέγεθος (π.χ. την ένταση του ρεύματος) για να μετρήσουμε κάποιο άλλο (π.χ. την τάση) πρέπει να φροντίζουμε ώστε το αμπερόμετρό μας να δείχνει ακριβείς ενδείξεις κλπ.

Υπάρχουν κι άλλοι τρόποι που όμως καλύτερο θα είναι να συζητηθούν στα συγκεκριμένα πειράματα και να αφομοιωθούν με βάση την πείρα του κάθε φοιτητή.

Πολλαπλά σφάλματα

Συνήθως στη διαδικασία μιας μέτρησης δεν υπεισέρχεται μόνο ένα σφάλμα, αλλά πολλά. Για παράδειγμα αν μετρούμε πολλές φορές το ίδιο μέγεθος έχουμε, κυρίως, τριών ειδών σφάλματα:

- α) Σφάλμα κατασκευαστή.
- β) Σφάλμα ανάγνωσης.
- γ) Σφάλμα μέσης τιμής.

Σ' αυτή την περίπτωση γεννιέται το ερώτημα ποιο πρέπει εμείς να θεωρήσουμε σαν σφάλμα της μέτρησης; Πριν απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα ας δούμε ένα παράδειγμα.

Έστω ότι μετράμε με μέτρο ένα μήκος L πέντε φορές και βρίσκουμε τις τιμές (σε mm):

324 323 324 322 324 323 323 323 324 322 323 323

Για τη μέση τιμή έχουμε $\bar{L} = 323.166\dots$ mm, ενώ για το σφάλμα της μέσης τιμής $\delta L = 0.21$ mm.

Μπορούμε τώρα να πούμε ότι το αποτέλεσμά μας είναι $L = 323.17 \pm 0.21$ mm; Όμως δεν έχουμε λάβει ακόμη υπόψη τόσο το σφάλμα του κατασκευαστή, όσο και το σφάλμα ανάγνωσης. Ας υποθέσουμε ότι το σφάλμα του κατασκευαστή είναι της τάξης του 0.1 mm. Όσον αφορά στο σφάλμα ανάγνωσης ας υποθέσουμε ότι οι συνθήκες μέτρησης είναι τέτοιες που το σφάλμα ανάγνωσης είναι ίσο με την ακρίβεια του οργάνου μας, στη συγκεκριμένη περίπτωση του μέτρου. Συνήθως ένα καλό μέτρο έχει ακρίβεια 0.5 mm (αυτό οφείλεται στη χαραγή των υποδιαίρεσεων, στο πάχος και στην ευκρίνειά τους).

Επομένως τελικά έχουμε τρία σφάλματα: α) μέσης τιμής 0.21 mm, β) κατασκευαστή 0.1 mm και γ) ανάγνωσης (ακρίβεια) 0.5 mm.

Είναι κατανοητό πως το σφάλμα του κατασκευαστή δεν παίζει ρόλο γιατί είναι πολύ μικρό. Όσο για το σφάλμα της μέσης τιμής, νομίζουμε πως είναι προφανές, ότι αφού είναι μικρότερο από το σφάλμα ανάγνωσης (την ακρίβεια του οργάνου) δεν μπορούμε να το κρατήσουμε γιατί αυτό δεν μπορούμε με τίποτε να το βελτιώσουμε. Φαντασθείτε π.χ. τι θα λέγαμε αν όλες οι τιμές που βρήκαμε πιο πάνω ήταν 323 mm, αποτέλεσμα πολύ συχνό στη μέτρηση μήκους. Ήταν δυνατόν να πούμε ότι το σφάλμα είναι μηδέν;!!! Φυσικά όχι. Άρα και για το συγκεκριμένο παράδειγμά μας το αποτέλεσμα είναι να κρατήσουμε το μεγαλύτερο σφάλμα, στην προκειμένη περίπτωση το σφάλμα ανάγνωσης και να γράψουμε $L=323.2\pm 0.5$ mm.

Επομένως ο γενικός κανόνας είναι πως **στην περίπτωση που στην ίδια μέτρηση έχουμε πολλά σφάλματα κρατάμε πάντα το μεγαλύτερο**.

Επεξεργασία των αποτελεσμάτων

Πάντα βρείτε τα σφάλματα σε κάθε στιγμή χωρίς να ξεχνάτε την στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων σας. Μην ξεχνάτε ότι κάθε τελικό αποτέλεσμα πρέπει να συνοδεύεται από το σφάλμα του. Καλό είναι να υπολογίσετε και το σχετικό σφάλμα που σας δίνει τη δυνατότητα να εκτιμήσετε την ακρίβεια της μεθόδου σας.

Φτιάχνετε πάντα πίνακες. Βοηθούν καλύτερα και να δουλέψετε με τις μετρήσεις σας και να δείτε τις διάφορες νομοτέλειες που εμφανίζονται στα αποτελέσματά σας και να χαράξετε με βάση τα αποτελέσματα καμπύλες. Συνήθως

1	2	3	4	5	6	7
A	B	$f(A,B)$	x_i	\bar{x}	$(\bar{x} - x_i)^2$	δx

στους πίνακες στις πρώτες στήλες (π.χ. στην 1 και 2) βάζουμε τις ποσότητες που μετρούμε, μετά (π.χ. στην 3) κάποιες ενδιάμεσες συναρτήσεις των A και B που θα μας βοηθήσουν στον υπολογισμό της x (Αν π.χ. $x = A \ln B$ στη στήλη 3 γράφουμε τη $\ln B$) χωρίς αυτό βέβαια να είναι απαραίτητο. Στην επόμενη στήλη (π.χ. στην 4) γράφουν τις τιμές της ζητούμενης ποσότητας x που βρίσκουν από τους υπολογισμούς και αμέσως μετά (στη στήλη 6) τη μέση τιμή \bar{x} αν αυτή υπάρχει.

Στους πίνακες συνήθως γράφουμε και τα σφάλματα των τιμών που υπολογίζουμε. Έτσι στη στήλη 7 π.χ. έχουμε γράψει τις τιμές $(\bar{x} - x_i)^2$ που θα μας βοηθήσουν να υπολογίσουμε το σφάλμα της μέσης τιμής δx που το γράφουμε στη στήλη 8.

Φυσικά σε διαφορετικές περιπτώσεις αλλάζει και ο τρόπος που ταξινομούμε τις στήλες.

Σχεδιασμός γραφικών παραστάσεων

α) Όλες οι γραφικές παραστάσεις γίνονται **πάντα σε χαρτί μιλιμετρέ**.

β) Με την κατάλληλη επιλογή της αρχής και της κατάλληλης κλίμακας των αξόνων των συντεταγμένων φροντίζουμε ώστε η καμπύλη μας να πιάνει όλο το χώρο του διαγράμματος

γ) Βαθμολογώντας τους άξονες των συντεταγμένων δεν αναγράφουμε όλες τις υποδιαιρέσεις τους αλλά μόνο κάποιες βασικές υποδιαιρέσεις σε ίσα διαστήματα (βλ. σχ. 9).

δ) Στους άξονες πάντα γράφουμε τα μεγέθη και τις μονάδες τους.

* Γενικά πάντως αν στη μέτρηση μιας ποσότητας x υπεισέρχονται τα σφάλματα $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \dots$ το τελικό σφάλμα είναι

$$\delta x = \sqrt{(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2 + (\delta x_3)^2 + \dots}$$

Είναι όμως εύκολα κατανοητό πως αν π.χ. $\delta x_1 > \delta x_2$ και $\delta x_1 > \delta x_3$ και

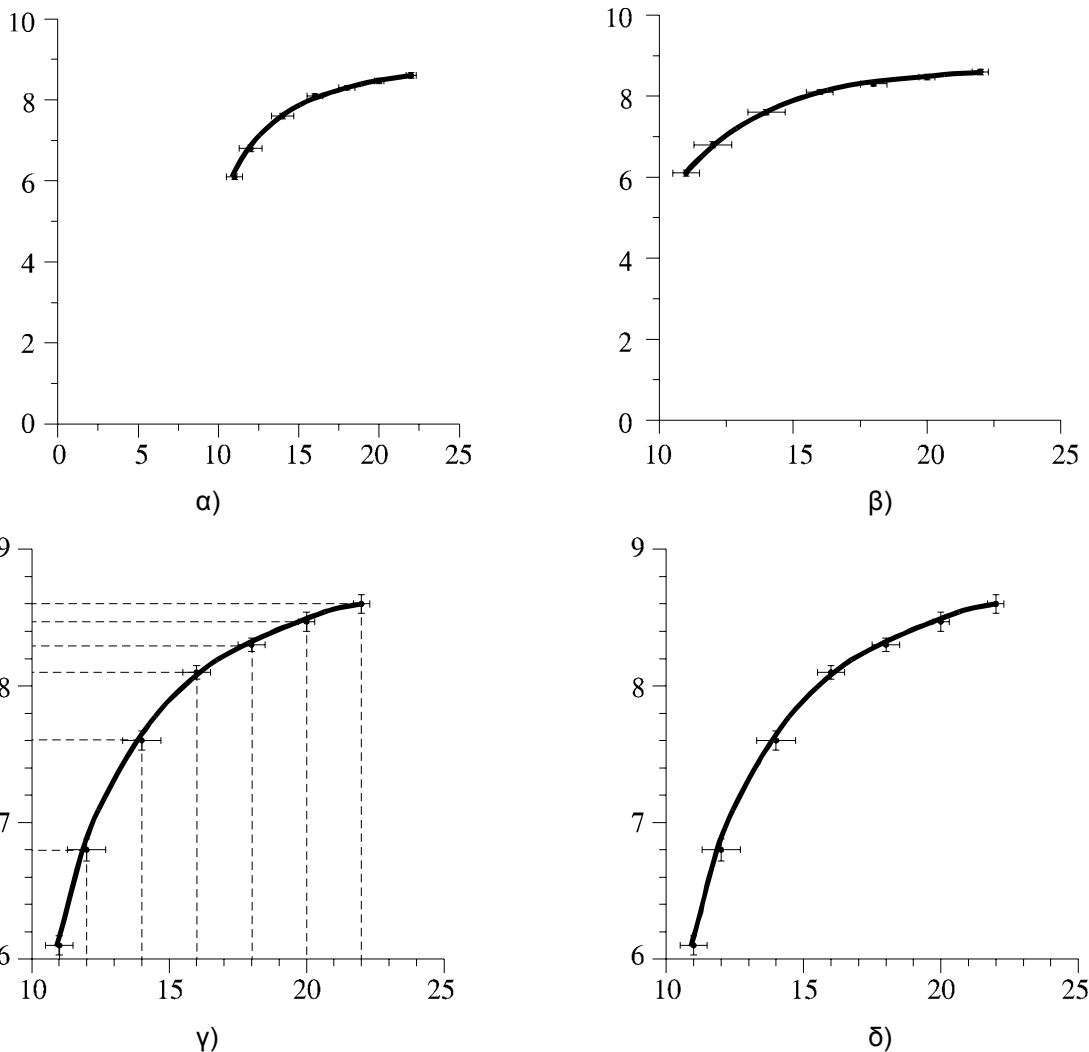
θυμηθούμε πως στο σφάλμα αφήνουμε σχεδόν πάντα ένα σημαντικό ψηφίο θα ισχύει $\delta x \approx \delta x_1$.

ε) Ποτέ δεν γράφουμε στους άξονες τις τιμές των πειραματικών σημείων ούτε ενώνουμε με γραμμές τα σημεία αυτά με τους άξονες.

στ) Σε κάθε καμπύλη και εφόσον σας το επιτρέπει η κλίμακα των αξόνων σας για κάθε πειραματικό σημείο χαράζετε τα σφάλματα.

Στο σχ. 12 σωστή είναι η καμπύλη δ) και όχι οι α), β) και γ) παρόλο που και οι 4 απεικονίζουν τα ίδια σημεία.

Τέλος πρέπει να πούμε, πως οι γραφικές παραστάσεις δεν πρέπει να είναι ούτε μικροσκοπικές, ούτε βέβαια «σεντόνια». Κάθε γραφική παράσταση πρέπει να έχει περίπου το μέγεθος μισής σελίδας Α4.



Σχ.12

Πρέπει επίσης να τονίσουμε πως αν σχεδιάσουμε μια γραφική παράσταση και πρέπει να εργαστούμε μ' αυτή (για παράδειγμα να υπολογίσουμε σε κάποια σημεία την κλίση της) θεωρούμε σαν δεδομένο την καμπύλη και όλα τα σημεία της και όχι τα πειραματικά σημεία με τη βοήθεια των οποίων χαράξαμε την καμπύλη.

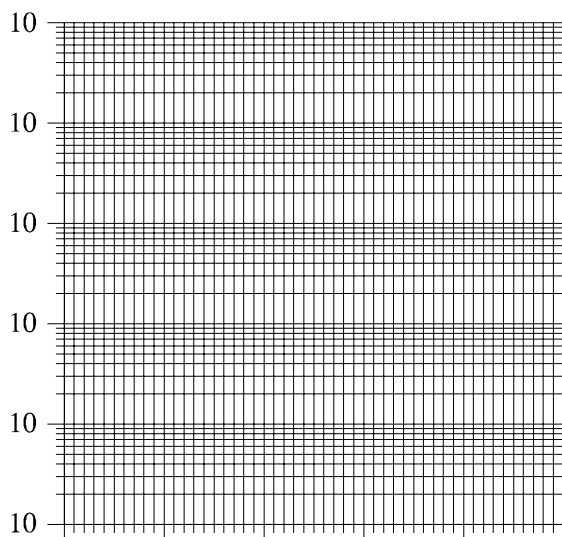
Το χιλιοστομετρικό χαρτί (μιλλιμετρέ)

Όπως αναφέραμε παραπάνω όλα τα σχήματα πρέπει να γίνονται σε χαρτί μιλλιμετρέ, το οποίο υποθέτουμε ότι ξέρει ο αναγνώστης.

Εκτός όμως από το συνηθισμένο χαρτί μιλιμετρέ υπάρχουν ακόμη δύο είδη: Το ημιλογαριθμικό και το λογαριθμικό. Στο πρώτο από τα δυο θα αναφερθούμε παρακάτω.

Το ημιλογαριθμικό χαρτί παριστάνεται στο Σχ.13. Όπως βλέπουμε σ' αυτό η οριζόντια κλίμακα του χαρτιού είναι κανονική, ενώ η κατακόρυφη όχι. Μια πιο προσεκτική μελέτη των αποστάσεων μας δείχνει ότι η κατακόρυφη κλίμακα αντιστοιχεί στους δεκαδικούς λογαρίθμους των αριθμών.

Όπως βλέπουμε και στο Σχ. 13 η κατακόρυφη κλίμακα παρουσιάζει μια περιοδικότητα και οι μεγάλες υποδιαιρέσεις της έχουν διπλά τον αριθμό 10^* .



Σχ.13

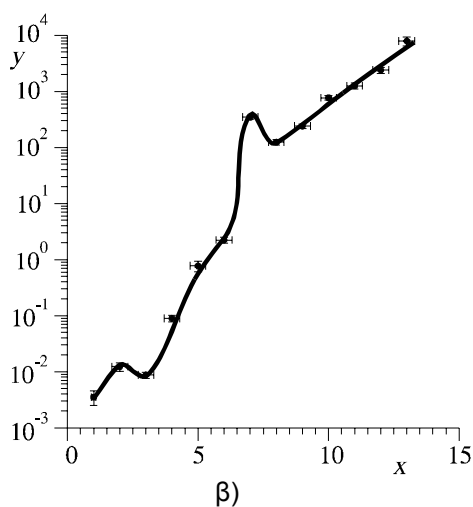
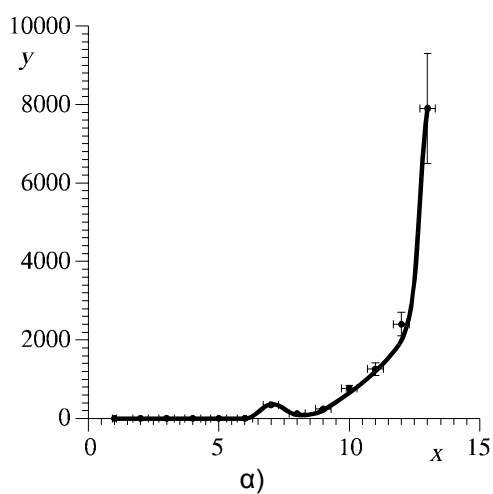
Οι μεγάλες υποδιαιρέσεις αντιστοιχούν σε δυνάμεις του 10, ενώ οι μικρές σε πολλαπλάσιά τους. Αυτό όμως θα γίνει σαφέστερο στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Χρησιμοποιούμε αυτό το χαρτί όταν οι μετρήσεις (τα αποτελέσματα) που αντιστοιχούν στον άξονα των y παρουσιάζουν μεγάλο εύρος, τέτοιο που η χρησιμοποίηση κανονικού μιλιμετρέ χαρτιού μας κάνει να χάνουμε λεπτομέρειες από τη γραφική παράσταση. Για παράδειγμα αν το εύρος των τιμών είναι μεταξύ 1 και 100000.

Σαν παράδειγμα, με βάση τον πίνακα που ακολουθεί για τις τιμές x , y , δx και δy σχεδιάσαμε τις γραφικές παραστάσεις σε κανονικό χαρτί (σχ. 14α) και σε ημιλογαριθμικό χαρτί (σχ. 14β).

x	1.00	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0
y	0.0035	0.0123	0.0087	0.089	0.77	2.23	34,6	124	240	770	1260	2400	7900
δx	0.08	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
δy	0.001	0.0021	0.0011	0.012	0.16	0.26	28	13	21	70	160	300	1400

Το μέγεθος της γραφικής μας παράστασης, όταν χρησιμοποιούμε ημιλογαριθμικό χαρτί δεν μπορούμε πλέον να το καθορίσουμε μόνοι μας, αλλά μας το καθορίζει το ίδιο το χαρτί.



Σχ.14

* Σε κάποιες μάρκες ημιλογαριθμικού χαρτιού αντί για 10 έχουμε το 1.

↪ **Παρατήρηση.** Πρέπει να έχουμε υπόψη μας πως στο ημιλογαριθμικό χαρτί ο σχεδιασμός των σφαλμάτων διαφέρει λίγο από τον σχεδιασμό τους στο κανονικό χαρτί, παρόλο που αυτό δεν φαίνεται καλά στο Σχ.14β. Επειδή όπως είπαμε οι γραμμούλες των σφαλμάτων αντιστοιχούν στο μέγεθός τους σύμφωνα με την κλίμακα των αξόνων και επειδή στο ημιλογαριθμικό χαρτί ο κατακόρυφος άξονας δεν έχει ισαπέχουσες μονάδες, προκύπτει εύκολα ότι η κατακόρυφη γραμμή του σφάλματος που είναι πάνω από το σημείο θα είναι πάντα μικρότερη από την κατακόρυφη γραμμή που είναι κάτω από το σημείο. Για το σφάλμα που αντιστοιχεί στην οριζόντια κλίμακα δεν αλλάζει τίποτε. Σαν παράδειγμα σας προτείνουμε να χαράξετε σε ημιλογαριθμικό χαρτί τα σημεία $x_1 = 1.0 \pm 0.3$, $y_1 = 4.3 \pm 2.1$ και $x_2 = 3.0 \pm 0.5$, $y_2 = 130 \pm 40$.

Η κλίση μιας καμπύλης

Πολλές φορές από μια καμπύλη χρειάζεται να προσδιορίσουμε κάποια μεγέθη και συνήθως την κλίση της. Εδώ αναφερόμαστε σε πειραματική καμπύλη, όταν την κλίση, δηλαδή την παράγωγο, δεν μπορούμε να την υπολογίσουμε αναλυτικά.

Σ' αυτή την περίπτωση όσον αφορά τον ορισμό ότι «κλίση είναι η εφαπτόμενη της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτόμενη στο σημείο στο οποίο αναζητούμε την κλίση, με τον οριζόντιο άξονα», δεν πρέπει να τον κατανοούμε με την έννοια, ότι πρέπει να μετρήσουμε με μοιρογνωμόνιο κάποια γωνία, αλλά με την έννοια του ορισμού της εφαπτομένης. Δηλαδή φέρουμε με το μάτι την ευθεία, η οποία εφάπτεται στο σημείο το οποίο μας ενδιαφέρει. Στη συνέχεια σχηματίζουμε ορθογώνιο τρίγωνο, υποτείνουσα του οποίου είναι η εφαπτόμενη ευθεία και οι κάθετες πλευρές του είναι παράλληλες προς τους αντίστοιχους άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Τότε η κλίση δίνεται από τον τύπο:

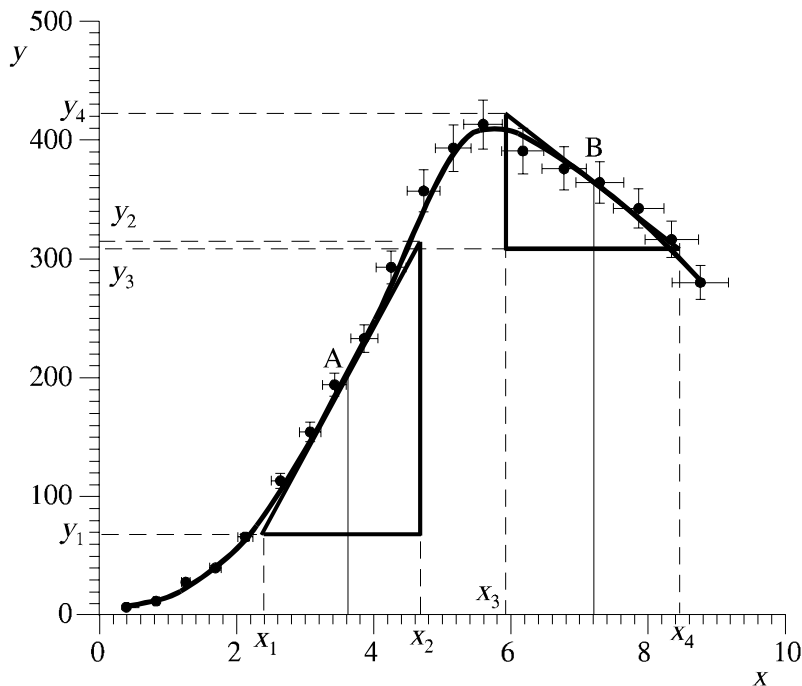
$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

όπου Δx το μήκος της πλευράς, που είναι παράλληλη στον άξονα x και Δy το μήκος της πλευράς που είναι παράλληλη στον άξονα y . Τα μήκη ορίζονται σύμφωνα με τις κλίμακες που χρησιμοποιούμε. Το πρόσημο της κλίσης ορίζεται κατά τα γνωστά, ή βγαίνει από τον τύπο αν θέσουμε $\Delta x = x_2 - x_1$ ($x_2 > x_1$) και $\Delta y = y_2 - y_1$.

Παράδειγμα. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την κλίση της καμπύλης του σχ. 15 στα σημεία A ($x=3.6$) και B ($x=7.2$).

Από το Σχ.15 έχουμε: $x_1 \approx 2.4$, $x_2 \approx 4.7$, $x_3 \approx 4.95$, $x_4 \approx 8.5$, $y_1 \approx 70$, $y_2 \approx 315$, $y_3 \approx 310$, $y_4 \approx 423$.

$$\text{Επομένως: } K_A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{245}{2.3} \approx 106.5 \text{ και } K_B = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{-113}{3.55} \approx -31.8$$



Σχ.15

↳ **Παρατήρηση.** Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι στη Φυσική η κλίση δεν είναι κάποια αφηρημένη γεωμετρική έννοια, αλλά φυσικό μέγεθος και, επομένως, έχει διαστάσεις και τις αντίστοιχες μονάδες. Π.χ. η κλίση της καμπύλης $s(t)$ (s διάστημα [m], t χρόνος [s]) μας δίνει τη στιγμιαία ταχύτητα [m/s].

Συνεκτίμηση σφαλμάτων διαφορετικών μετρήσεων

Σε μερικές περιπτώσεις μετρούμε το ίδιο μέγεθος με διαφορετική μεθοδολογία και σε κάθε μέτρηση καταλήγουμε σε διαφορετικό αποτέλεσμα με διαφορετικό σφάλμα. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε μια άσκηση του εργαστηρίου στη διάρκεια της οποίας υπολογίζετε με **διαφορετικές μεθόδους** την επιτάχυνση της βαρύτητας και καταλήγετε τόσο σε διαφορετικά g όσο και σε διαφορετικά δg . Αν υποθέσουμε ότι όλες οι μέθοδοι έχουν δώσει «σωστό» αποτέλεσμα, πιθανόν να θέλουμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα για την τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τους τύπους που αναφέρονται πιο κάτω.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε τα αποτελέσματα $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, με τα αντίστοιχα σφάλματα $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \dots, \delta x_N$. Τότε το αποτέλεσμα που συνδυάζει όλα τα παραπάνω δίνεται από τη σχέση:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad (11.1)$$

με σφάλμα:
$$\delta x = \sqrt{1 / \sum_{i=1}^N w_i} \quad (11.2)$$

όπου:
$$w_i = 1 / (\delta x_i)^2 \quad (11.3)$$

Παράδειγμα Έστω ότι για το μέγεθος που μετρήσαμε βρήκαμε τα εξής 5 αποτελέσματα με τα αντίστοιχα σφάλματά τους:

$$11 \pm 1 \quad 12 \pm 1 \quad 10 \pm 3 \quad 13 \pm 2 \quad 9 \pm 2$$

Από εδώ βρίσκουμε:

$$w_1=1, w_2=1, w_3=1/9, w_4=1/4, w_5=1/4, x=11.34, \delta x=0.62.$$

Επομένως τελικά:

$$x=11.3 \pm 0.6.$$

Ασκήσεις

1. Μετρώντας το μήκος L και το πλάτος d ορθογωνίου παραλληλογράμμου βρίσκουμε τις εξής τιμές (σε mm):

L	24.25	24.26	24.22	24.28	24.24	24.25	24.22	24.26	24.23	24.24
d	50.36	50.35	50.41	50.37	50.36	50.32	50.39	50.38	50.36	50.38

Υπολογίστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου και το σφάλμα με 2 τρόπους:

- α) Από τα L_i, d_i υπολογίστε τα \bar{L}, \bar{d} και $\delta L, \delta d$ και από εδώ το S και το δS .
- β) Από τα L_i και d_i υπολογίστε τα S_i και από εδώ το \bar{S} και το δS .
2. Στα παρακάτω παραδείγματα το Z είναι συνάρτηση των μεγεθών A, B κ.τ.λ. που έχουν μετρηθεί ανεξάρτητα. Υπολογίστε το Z και το δZ από τις γνωστές τιμές των $A \pm \delta A, B \pm \delta B, \dots$

α) $Z = A^2, A = 25 \pm 1$ β) $Z = A - 2B, A = 100 \pm 3, B = 45 \pm 2,$

γ) $Z = \frac{A(C^2 + D^{3/2})}{B}, A = 0.100 \pm 0.003, B = 1.00 \pm 0.05, C = 50.0 \pm 0.5, D = 100 \pm 8$

δ) $Z = A \ln B, A = 10.00 \pm 0.06, B = 100 \pm 2$ ε) $Z = 1 - \frac{1}{A}, A = 50 \pm 2$

3. Η μάζα παραλληλεπίπεδης μεταλλικής ομογενούς ράβδου με πλευρές a, b και c είναι M . Είναι γνωστό ότι η ροπή αδράνειας I ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο της έδρας ab και είναι κάθετος σ' αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

οι μετρήσεις μας έδωσαν τα εξής αποτελέσματα:

$$M = (135.00 \pm 0.10) \text{ gr}, a = (80.0 \pm 1.0) \text{ mm}, b = (10.0 \pm 1.0) \text{ mm}, c = (20.00 \pm 0.10) \text{ mm}.$$

Υπολογίστε το σχετικό σφάλμα (σε ποσοστά) α) της πυκνότητας του μετάλλου και β) της ροπής αδράνειας του παραλληλεπιπέδου.

4. Αν ξέρουμε ότι $y = a^2/b$ από τον πίνακα σχεδιάστε την καμπύλη $y = f(a)$ και υπολογίστε την κλίση της στα σημεία α) $a_1 = 7$ και β) $a_2 = 9$

a	δa	b	δb
4.30	0.05	1.730	0.010
5.20	0.07	2.030	0.010
5.80	0.08	2.040	0.010
6.40	0.10	2.160	0.020
7.10	0.10	2.23	0.03
7.60	0.10	2.38	0.03
8.20	0.10	2.62	0.04

9.30	0.10	3.51	0.05
9.60	0.10	3.88	0.08
10.10	0.20	4.70	0.10

5. Για να προσδιορίσει τη σταθερά ελατηρίου k φοιτητής κρεμάει στο άκρο του διάφορες μάζες m και μετράει το μήκος του L . Τα αποτελέσματά του είναι:

m (gr)	200	300	400	500	600	700	800	900
L (cm)	5.1	5.5	5.9	6.8	7.4	7.5	8.6	9.4

Επειδή ξέρει ότι $mg=k(L-L_0)$ όπου L_0 το μήκος του ελατηρίου χωρίς βάρος τότε τα αποτελέσματα του πρέπει να βρίσκονται στην ευθεία $L=L_0+(g/k)m$. Αν ξέρει ότι $\delta L \approx 0.10$ cm και ότι το δm είναι αμελητέο βρείτε την ευθεία με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και υπολογίστε τα L_0 , k , δL_0 , δk . Είναι γνωστό πως $g=9.81$ m/s².

6. Ένας φοιτητής μετράει μια διαφορά δυναμικού U δέκα φορές και βρίσκει (σε Volt):

0.86	0.83	0.87	0.84	0.82	0.95	0.83	0.85	0.89	0.88
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

α) Υπολογίστε το \bar{U} και το δU . β) Αν χρησιμοποιήσει το κριτήριο Chauvenet για την τιμή 0.95 V πρέπει να την απορρίψει ή όχι; Αν ναι ποια θα είναι τα καινούρια \bar{U} και δU ;

7. Ένας φοιτητής, κάνει 14 μετρήσεις της περιόδου μαθηματικού εκκρεμούς και βρίσκει (σε s)

7	3	9	3	6	9	8	7	8	12	5	9	9	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	---	---	---

Το αποτέλεσμα 12 του φαίνεται λαθεμένο. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Chauvenet πρέπει να το απορρίψει;

8. Με τέσσερις **διαφορετικούς τρόπους** υπολογίζουμε ένα μέγεθος x και βρίσκουμε:

1.4 ± 0.5	1.20 ± 0.20	1.00 ± 0.25	1.30 ± 0.20
---------------	-----------------	-----------------	-----------------

Υπολογίστε την τιμή του x και το σφάλμα της δx που συνδυάζει τα παραπάνω αποτελέσματα.

Παράρτημα

Πίνακας* των τιμών $P(<\mu\sigma)$ ** σε %.

μ	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.80	1.60	2.39	3.19	3.99	4.78	5.58	6.38	7.17
0.1	7.97	8.76	9.55	10.34	11.13	11.92	12.71	13.50	14.28	15.07
0.2	15.85	16.63	17.41	18.19	18.97	19.74	20.51	21.28	22.05	22.82
0.3	23.58	23.34	25.10	25.86	26.61	27.37	28.12	28.86	29.61	30.35
0.4	31.08	31.82	32.55	33.28	34.01	34.73	35.45	36.16	36.88	37.59
0.5	38.29	38.99	39.69	40.39	41.08	41.77	42.45	43.13	43.81	44.48
0.6	45.15	45.81	46.47	47.13	47.78	48.43	49.07	49.71	50.35	50.98
0.7	51.61	52.23	52.85	53.46	54.07	54.67	55.27	55.87	56.46	57.05
0.8	57.63	58.21	58.78	59.35	59.91	60.47	61.02	61.57	62.11	62.65
0.9	63.19	63.72	64.24	64.76	65.28	65.79	66.29	66.80	67.29	67.78
1.0	68.27	68.57	69.23	69.70	70.17	70.63	71.09	71.54	71.99	72.43
1.1	72.87	73.30	73.73	74.15	74.57	74.99	75.40	75.80	76.20	76.60
1.2	76.99	77.37	77.75	78.13	78.50	78.87	79.23	79.59	79.95	80.29
1.3	80.64	80.98	81.32	81.65	81.98	82.30	82.62	82.93	83.24	83.55
1.4	83.85	84.15	84.44	84.73	85.01	85.29	85.57	85.84	86.11	86.38
1.5	86.64	86.90	87.15	87.40	87.64	87.89	88.12	88.36	88.59	88.82
1.6	89.04	89.26	89.48	89.69	89.90	90.11	90.31	90.51	90.70	90.90
1.7	91.09	91.27	91.46	91.64	91.81	91.99	92.16	92.33	92.49	92.65
1.8	92.81	92.97	93.12	93.28	93.42	93.57	93.71	93.85	93.99	94.12
1.9	94.26	94.39	94.51	94.64	94.76	94.88	95.00	95.12	95.23	95.34
2.0	95.45	95.56	95.66	95.76	95.86	95.96	96.06	96.15	96.25	96.34
2.1	96.43	96.51	96.60	96.68	96.76	96.84	96.92	97.00	97.07	97.15
2.2	97.22	97.29	97.36	97.43	97.49	97.56	97.62	97.68	97.74	97.80
2.3	97.86	97.91	97.97	98.02	98.07	98.12	98.17	98.22	98.27	98.32
2.4	98.36	98.40	98.45	98.49	98.53	98.57	98.61	98.65	98.69	98.72
2.5	98.76	98.79	98.83	98.86	98.89	98.92	98.95	98.98	99.01	99.04
2.6	99.07	99.09	99.12	99.15	99.17	99.20	99.22	99.24	99.26	99.29
2.7	99.31	99.33	99.35	99.37	99.39	99.40	99.42	99.44	99.46	99.47
2.8	99.49	99.50	99.52	99.53	99.55	99.56	99.58	99.59	99.60	99.61
2.9	99.63	99.64	99.65	99.66	99.67	99.68	99.69	99.70	99.71	99.72
3.0	99.73									
3.5	99.95									
4.0	99.994									
4.5	99.9993									
5.0	99.99994									

Στον πίνακα η πρώτη στήλη και η πρώτη σειρά (έντονα σημειωμένες) χρησιμεύουν για να βρούμε το μ . Η πρώτη στήλη σας δίνει μονάδες και δέκατα, ενώ η πρώτη σειρά τα εκατοστά.

Οι υπόλοιπες τιμές (που είναι γραμμένες με κανονικά γράμματα) δίνουν τις τιμές του $P(<\mu\sigma)$.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι θέλετε να βρείτε την τιμή του $P(<\mu\sigma)$ για $\mu=1.64$. Κάνετε το εξής: Από την πρώτη στήλη βρίσκετε τη γραμμή που αντιστοιχεί στο 1.6. Από την πρώτη γραμμή βρίσκετε

* Δείτε στην επόμενη σελίδα πως χρησιμοποιείται ο Πίνακας αυτός.

** Οι τιμές του πίνακα είναι οι τιμές του ολοκληρώματος $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\mu\sigma}^{\mu\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$, το οποίο δεν μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά.

τη στήλη που αντιστοιχεί στο 0.04 ($1.6+0.04=1.64$). Η τομή των 2 που είναι ο αριθμός 89.90 σας δίνει $P(<1.64\sigma)=89.90\%=0.8990$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκετε π.χ., ότι για $\mu=2.18$ $P(<2.18\sigma)=97.07\%=0.9707$, ενώ για $\mu=1.00$ παίρνετε $P(<1.00\sigma)=68.27\%=0.6827$.

Αν τώρα θέλετε να βρείτε το $P(<\mu\sigma)$ π.χ. για $\mu=1.234$ εργάζεσθε ως εξής:

Βρίσκετε ότι για $\mu_1=1.23$, $P(<1.23\sigma)=78.13\%=0.7813$, ενώ για $\mu_2=1.24$, $P(<1.24\sigma)=78.50\%=0.7850$. Επομένως $\Delta P=P(<1.24\sigma) - P(<1.23\sigma)=0.0037$. Τότε από την απλή μέθοδο των τριών παίρνετε ότι:

$$P(<1.234\sigma)=P(<1.23\mu\sigma)+[(\mu-\mu_1)/(\mu_2-\mu_1)]\cdot\Delta P=0.7813+0.4\cdot 0.0037\approx 0.7828.$$

Για $\mu>3.0$ οι διαφορές στο $P(<\mu\sigma)$ είναι πολύ μικρές και έτσι δίνουμε τις τιμές αυξάνοντας το μ κατά 0.5. Αν μας ενδιαφέρει μια ενδιαμέση τιμή εργαζόμαστε ακριβώς κατά τον ίδιο τρόπο, όπως στο τελευταίο παράδειγμα.

Απαντήσεις ασκήσεων

1. α) $S=(1221.2\pm 0.4)\text{ mm}^2$, β) $S=(1221.18\pm 0.28)\text{ mm}^2$
2. α) $Z=630\pm 50$, β) $Z=10\pm 5$, γ) $Z=350\pm 30$, δ) $Z=46.1\pm 0.3$, ε) $Z=0.9800\pm 0.0008$
3. α) $\delta\rho/\rho=10.08\%$, β) $\delta L/L=2.5\%$
4. $a_1=7 \rightarrow K\approx 4.5$, $a_2=9 \rightarrow K\approx -1.55$, όπου K η κλίση
5. $L_0=(3.70\pm 0.20)\text{ cm}$, $k=(161\pm 11)\text{ N/m}$
6. α) $U=(0.862\pm 0.012)\text{ V}$, β) $U=(0.852\pm 0.008)\text{ V}$
7. ΟΧΙ
8. $x=1.20\pm 0.12$