ΜΕΤΡΗΣΗ

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΚΑΠΟΙΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΜΕ ΚΑΠΟΙΟ "ΠΡΟΤΥΠΟ" ΜΕΓΕΘΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΜΕΤΡΗΣΗ ΥΨΟΥΣ ΚΟΥΦΩΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΠΟΡΤΑΣ

ΞΥΛΟΥΡΓΟΣ (ΜΑΤΙ) $205\text{ cm} \le h_1 \le 215\text{ cm}$

$$h_1 = (210 \pm 5)\text{ cm}$$

(ΜΕΤΡΟ) $211{,}25\text{ cm} \le h_2 \le 211{,}35\text{ cm}$

$$h_2 = (211{,}30 \pm 0{,}05)\text{ cm}$$

ΦΥΣΙΚΟΣ (LASER) $211{,}3001575\text{ cm} \le h_3 \le 211{,}3001585\text{ cm}$

$$h_3 = (211{,}3001580 \pm 0{,}0000005)\text{ cm}$$

ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ Η ΣΩΣΤΗ ΜΕΤΡΗΣΗ;

ΔΙΑΦΟΡΑ ΣΤΗΝ ΑΚΡΙΒΕΙΑ

ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΥΨΟΣ ΤΟΥ ΚΟΥΦΩΜΑΤΟΣ;

ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΞΕΡΟΥΜΕ ΣΕ ΤΙ ΜΑΣ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΤΟ ΥΨΟΣ

ΣΦΑΛΜΑ: Η ΑΝΑΠΟΦΕΥΚΤΗ, ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΕΚΦΡΑΣΜΕΝΗ ΕΛΛΕΙΨΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ ΣΤΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΕΝΟΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΤΥΧΟΝ ΑΤΕΛΕΙΕΣ Κ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΩΝ ΜΑΣ

"ΑΝΑΠΟΦΕΥΚΤΗ" από ΑΡΧΗ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑΣ

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \quad \text{(Heisenberg)}$$

$$h = 6{,}626 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{sec}$$

τιμή ± σφάλμα

{ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ bias} ⇄ {ΠΙΣΤΟΤΗΤΑ ή ΟΡΘΟΤΗΤΑ accuracy}

{ΤΥΧΑΙΟ ΣΦΑΛΜΑ random error} ⇄ {ΑΚΡΙΒΕΙΑ precision}

Υψηλή πιστότητα (accuracy) ή μικρό συστηματικό σφάλμα:
Το κέντρο βάρους των μετρήσεων (κόκκινα σημεία) είναι κοντά στη θεωρητική τιμή (μπλε στόχος)

Υψηλή ακρίβεια (precision) ή μικρό τυχαίο σφάλμα:
Οι μετρήσεις (κόκκινα σημεία) παρουσιάζουν μικρή διασπορά μεταξύ τους

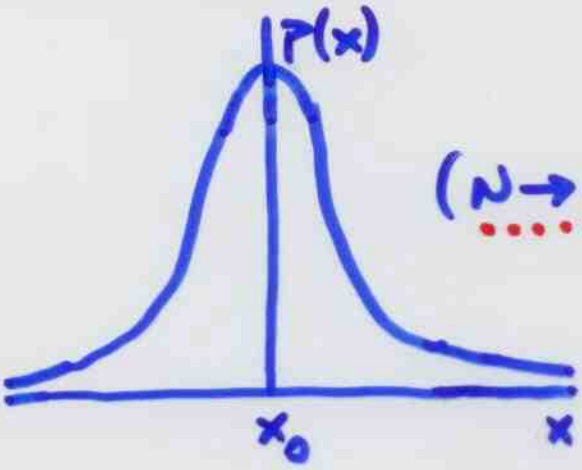
ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

"ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΤΙΜΗ" : x_0

ΜΕΤΡΟΥΜΕ N ΦΟΡΕΣ $x_1, x_2, \dots x_N$

$n(x)$: αριθμός μετρήσεων με αποτέλεσμα x

ΣΧΕΔΙΑΖΟΥΜΕ ΚΑΜΠΥΛΗ $P(x) = \frac{n(x)}{N}$



$(N \to \infty)$

$$P(a,b) = \int_a^b P(x)\,dx$$

πιθανότητα το αποτέλεσμα να βρίσκεται $a \le x \le b$

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

ΟΙ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΑΣ ΣΥΝΟΨΙΖΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗ :

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥΣ : $\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$

ΚΑΙ ΤΗΝ

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΟΥΣ

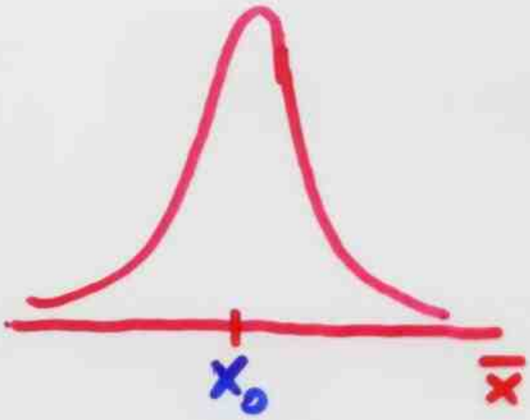
$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Η ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΑΠΟΤΕΛΕΙ ΤΟΝ ΚΑΛΥΤΕΡΟ ΕΚΤΙΜΗΤΗ ΤΗΣ "ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ" ΤΙΜΗΣ

ΕΚΤΙΜΗΤΗΣ (ΑΡΑ ΔΕΝ ΤΑΥΤΙΖΕΤΑΙ)

ΣΦΑΛΜΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ: $\delta\bar{x}$

$$x = \bar{x} \pm \delta\bar{x}$$



$$\delta\bar{x} \equiv S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

$\delta\bar{x}$: ΑΠΟΛΥΤΟ ΣΦΑΛΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

$\dfrac{\delta\bar{x}}{\bar{x}}$: ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ ΚΑΠΟΙΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΠΛΗΘΟΣ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΨΗΦΙΩΝ : ΜΕΤΡΟ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ

→ ΠΡΩΤΟ (ΚΑΙ ΠΛΕΟΝ) ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ :
ΤΟ ΑΡΙΣΤΕΡΟΤΕΡΟ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ

→ ΤΕΛΕΥΤΑΙΟ (ΚΑΙ ΛΙΓΟΤΕΡΟ) ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ:

(ΑΚΕΡΑΙΟΙ) ΤΟ ΔΕΞΙΟΤΕΡΟ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ

(ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ) ΤΟ ΔΕΞΙΟΤΕΡΟ

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	ΠΛΗΘΟΣ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΨΗΦΙΩΝ
874,63	5
1480	3
1480,00	6
0,0058	2
0,730	3
$5{,}020 \cdot 10^{4}$	4
$6{,}00 \cdot 10^{-5}$	3

ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΕΙΣ

ΣΤΟΧΟΣ : ΕΚΦΡΑΣΗ $\bar{x} \pm \delta\bar{x}$

- ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $\bar{x}$ ΜΕ ΜΕΓΙΣΤΟ ΑΡΙΘΜΟ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ
- ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ $\bar{x}$ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ $\delta\bar{x}$
- ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ ΠΛΗΘΟΣ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΨΗΦΙΩΝ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ

  ΓΙΑ ΜΙΚΡΑ Ν $(N<20)$: 1 ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ
  (ΕΚΤΟΣ ΑΝ =1 ή =2, ΟΠΟΤΕ 2 ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ

  ΓΙΑ ΜΕΓΑΛΑ Ν $(N>20)$: 2 ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ

- ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΟ ΣΦΑΛΜΑ Κ ΜΕΤΑ ΕΚΦΡΑΖΟΥΜΕ ΤΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΕ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΑΚΡΙΒΕΙΑ, ΔΗΛΑΔΗ ΤΟΝ ΙΔΙΟ ΑΡΙΘΜΟ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ : 2357,46 m/s → 2360 m/s

$\delta\bar{x}$: 58,432 m/s → 60 m/s

"2360 ± 60 m/s"

$(N<20)$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ: 43,0319 sec → 43,032 sec

$\delta\bar{x}$: 0,0129 sec → 0,013 sec

"43,032 ± 0,013 sec"

Παραδείγματα

	Πριν από την επιλογή των σημαντικών ψηφίων		Μετά την επιλογή των σημαντικών ψηφίων		Τελικό Αποτέλεσμα
Α/Α	$\bar{x}$	δx	δx	$\bar{x}$	x
1	263.2765	0.07813	0.08	263.28	263.28±0.08
2	12.2	0.03116	0.03	12.20	12.20±0.03
3	127.187	0.932	0.9	127.2	127.2±0.9
4	17.2362	0.232	0.23	17.24	17.24±0.23
5	1563	33.62	30	1560	1560±30
6	178936	589	600	178900	178900±600
7	11002380	9873	10000	11002000	11002000±10000
8	78654	2486	2500	78700	78700±2500
9	135067	1897	1900	135100	135100±1900

ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

ΕΣΤΩ λ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΩΝ x, y, z

$$\lambda = f(x,y,z)$$

ΤΑ ΜΕΓΕΘΗ x, y, z ΕΧΟΥΝ ΣΦΑΛΜΑΤΑ $\delta x, \delta y, \delta z$

$$\delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

$\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}$: ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΗΣ λ ΩΣ ΠΡΟΣ x

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΜΕΤΡΩ U, I ΣΕ ΑΓΩΓΟ ΚΑΙ ΘΕΛΩ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΩ ΤΟ R (Ohm's Law)

$$R = \frac{U}{I}$$

$$\delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\delta I\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta U}{I}\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2}\delta I\right)^2}$$

Παράδειγμα 7.3 Μετρώντας την ένταση του ρεύματος και την τάση στα άκρα αντίστασης παίρνουμε τις τιμές:

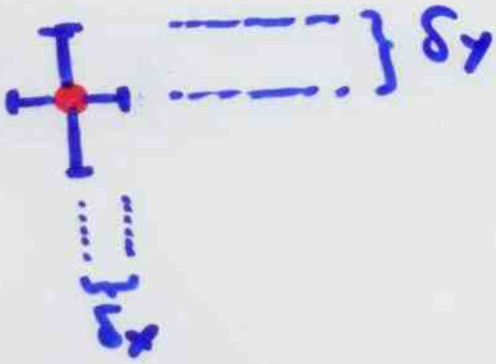
U (V)	5	7	9	11	13	15	18	20
I (mA)	26	35	43	51	58	65	75	79

με δU=0.2 V και δI=1 mA. Από τον τύπο του Ohm υπολογίζουμε την αντίσταση R για διάφορες τιμές του U.

U (V)	I (mA)	R (Ω)	δR (Ω)	$R \pm \delta R$ (Ω)
5	25	192.31	11	192±11
7	35	200	8	200±8
9	43	209.30	7	209±7
11	51	215.69	6	216±6
13	58	224.14	5	224±5
15	65	230.77	5	231±5
18	75	240	4	240±4
20	79	253.16	4	253±4

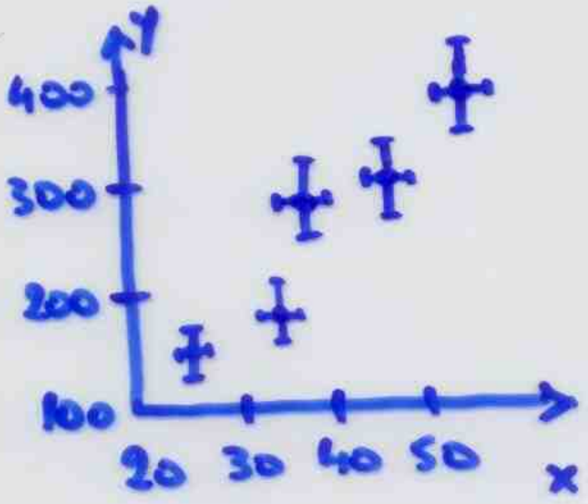
ΧΑΡΑΞΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

- ΛΗΨΗ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ
- ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΥΡΟΥΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ
- ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΡΧΗΣ ΑΞΟΝΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΕΥΡΟΣ ΤΙΜΩΝ
- ΥΠΟΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ
- ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΕ ΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΤΟΥΣ

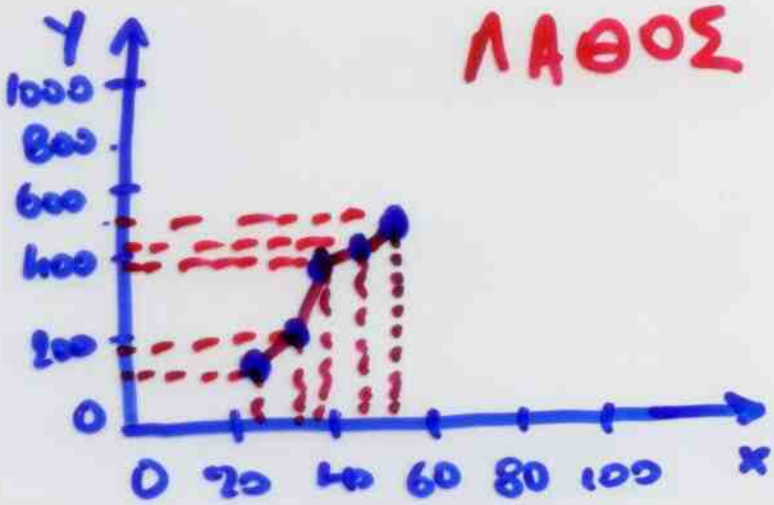


ΧΑΡΤΙ "ΜΙΛΙΜΕΤΡΕ"

- ΔΕΝ ΕΝΩΝΟΥΜΕ ΤΑ ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΜΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ
- ΔΕ ΣΗΜΕΙΩΝΟΥΜΕ ΤΙΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ



ΛΑΘΟΣ



• ΧΑΡΑΞΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΜΕ ΤΟ ΜΑΤΙ

ΕΠΙΔΙΩΚΟΥΜΕ ΝΑ ΠΕΡΑΣΟΥΜΕ ΚΟΝΤΑ ΣΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΙ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

ΕΠΙΔΙΩΚΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΙΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ "ΠΑΝΩ" ΚΑΙ "ΚΑΤΩ" ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΗ

• ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

$$\sum \left(y_{\text{ΠΕΙΡ}} - y_{\text{ΣΥΝΑΡΤ}}\right)^2 = \min$$

ΓΙΑ ΕΥΘΕΙΑ $y = A + B \cdot x$

$$A = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{D}$$

$$B = \frac{N \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{D}$$

$$D = N \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

$$\delta_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{D}} \qquad \delta_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{D}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\left(y_i - A - B \cdot x_i\right)^2}{N-2}}$$