1. Βρείτε που έχουν τα κοίλα πάνω/κάτω και που έχουν σημεία καμπής (αν έχουν) οι συναρτήσεις:
a) e^x b) sin(x) c) tan(x) d) sinh(x) e) cosh(x) f) $\sinh^2(x)$

2. Δείξτε ότι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης Hill, για οποιαδήποτε τιμή του συντελεστή Hill n, είναι $nx^{n-2}[n-1-(n+1)x^n]/(1+x^n)^3$. Εξειδικεύστε την παράγωγο για n = 1, 2, 3 και 4. Βρείτε αν έχει σημεία καμπής και που έχει τα κοίλα πάνω ή κάτω.

3. Δείξτε ότι
α) το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης f(x)=cos(x) γύρω από το σημείο $x_0=0$ ισούται με $\cos(x)=\Sigma_{n=0,1,2,...}(-1)^n x^{2n}/(2n)!$
β) το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x)=e^x$ γύρω από το σημείο $x_0=0$ ισούται με $e^x=\Sigma_{n=0,1,2,...}x^n/n!$
Σε κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις, προσεγγίστε την αντίστοιχη συνάρτηση για πολύ μικρές τιμές του x (x<<1) κρατώντας τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος (λάβετε υπόψη ότι 0!=1).

4. Υποθέστε ένα ιοντικό κανάλι νατρίου που διαπερνάει την κυτταρική μεμβράνη σαν ένα κυλινδρικό άνοιγμα διαμέτρου d=0.5nm και μήκους l=5nm (όσο το πάχος της μεμβράνης). Από τον πρώτο νόμο διάχυσης του Fick, η ροή των ιόντων διαμέσω του καναλιού (δηλαδή ο αριθμός των ιόντων ανά μονάδα επιφάνειας που διαπερνούν την μεμβράνη στη μονάδα του χρόνου) είναι j=D(Δc)/l, όπου Δc η διαφορά συγκέντρωσης των ιόντων νατρίου εκτός και εντός κυττάρου και D=2000μm^2/sec ο συντελεστής διάχυσης των ιόντων. Υπολογίστε την ροή των ιόντων για Δc=100mM=0.06ιόντα/nm^3 και εν συνεχεία τον αριθμό των ιόντων που διαπερνούν το κανάλι ανά μονάδα χρόνου dN/dt=jA, όπου $A=\pi d^2/4$ το εμβαδό της κυκλικής διατομής του ιοντικού καναλιού. Από τον υπολογισμό του dN/dt βρείτε με απλή ολοκλήρωση τον συνολικό αριθμό ιόντων νατρίου στο εσωτερικό του κυττάρου συναρτήσει του χρόνου, N(t), αν ο αρχικός αριθμός ιόντων στο εσωτερικό του κυττάρου για t=0 ήταν $N(0)=6\text{x}10^6$ ιόντα νατρίου.

5. Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα των συναρτήσεων:
a) $4-3x^2-x/2$ b) $-5/x^3$ c) sin(5x)+2 d) $e^x-2\cos(x/3)$
e) 2cosh(x) f) -sinh(x/4) g) $3x+e^{-x/2}$ h) $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ i) $\sqrt{2x}$

6. Υποθέστε ένα κύτταρο σφαιρικής μορφής και ακτινας a, το οποίο έχει πολλούς υποδοχείς στην επιφάνειά του και μπορεί να απορροφάει αμέσως κάποιο είδος σηματοδοτικών μορίων (τα οποία αναγνωρίζονται από τους υποδοχείς, προσδένονται σε αυτούς, και υποθέτουμε ότι μεταφέρονται αμέσως στο εσωτερικό του κυττάρου με το που φτάνουν στην επιφάνειά του). Υπό κάποιες συνθήκες (σφαιρικής συμμετρίας και για στάσιμες καταστάσεις), η συγκέντρωση των σηματοδοτικών μορίων έξω από το κύτταρο, c(r), όπου r είναι η απόσταση από το κέντρο του κυττάρου, ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{dc(r)}{dr}=\frac{A}{r^2}$, όπου A σταθερά. Υπολογίζοντας το αόριστο ολοκλήρωμα ως προς r της συνάρτησης που είναι στο δεξί μέλος αυτής της εξίσωσης, βρείτε την συγκέντρωση c(r) των μορίων.

Προσδιορίστε την σταθερά της ολοκλήρωσης καθώς και την σταθερά A μέσω των συνθηκών: i) c(a)=0 (δηλαδή η συγκέντρωση των μορίων πάνω στην επιφάνεια του κυττάρου είναι μηδέν, επειδή απορροφούνται αμέσως στο εσωτερικό του κυττάρου) και ii) $c(\infty)=c_0$ (δηλαδή σε μεγάλη απόσταση από το κύτταρο η συγκέντρωση των μορίων είναι σταθερή και έχει την τιμή c_0), και δείξτε ότι η συγκέντρωση των σηματοδοτικών μορίων στον εξωτερικό χώρο του κυττάρου είναι $c(r)=c_0(1-a/r)$.

7. Σε ένα μονοδιάστατο μοντέλο πειράματος FRAP (Fluorescence Recovery After Photobleaching) εμφανίζεται ο υπολογισμός των παρακάτω ολοκληρωμάτων (δες R. Phillips et al. *Physical Biology of the Cell*, 2[st] Edition, 2013, § 13.2.3, σελ. 528, εξισώσεις 13.45): $\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} c(x,0)\,dx$ και $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} c(x,0)\cos(\frac{n\pi x}{L})\,dx$ για ακέραιους $n \geq 1$, όπου $c(x,0)=\begin{cases} c_0 & -L<x<-a \\ 0 & -a<x<a \\ c_0 & a<x<L \end{cases}$ είναι η αρχική συγκέντρωση των φθορίζοντων μορίων. 2L είναι η γραμμική διάσταση της συνολικής περιοχής που μπορούν να διαχέονται τα φθορίζοντα μόρια (από –L ως L) και 2α η αντίστοιχη της περιοχής που εκτέθηκε αρχικά σε έντονη δέσμη laser και απώλεσε τον φθορισμό της (από –α ως α). Δείξτε ότι τα δύο αυτά ολοκληρώματα δίνουν $c_0(L-a)/L$ και $-2c_0\sin(n\pi a/L)/(n\pi)$, αντίστοιχα (εξισώσεις 13.46).

8. Υπολογίστε με την μέθοδο της αντικατάστασης τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

a) $\int xe^{-x^2}\,dx = -(1/2)e^{-x^2}+C$ b) $\int \frac{2\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx = \frac{4}{3}[\ln(x)]^{3/2}+C$ c) $\int_0^{\pi^2/4} \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})\,dx = 2$

9. Υπολογίστε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

a) $\int x^2\ln(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\left(\ln(x)-\frac{1}{3}\right)+C$ b) $\int_0^1 x^2 e^x\,dx = e-2$ c) $2\int_0^{\pi}\sin(x)e^x\,dx = e^{\pi}+1$