

1. Δείξτε ότι η παράγωγος της συνάρτησης Hill, για οποιαδήποτε τιμή του συντελεστή Hill n , είναι $nx^{n-1}/(1+x^n)^2$. Εξειδικεύστε την παράγωγο για $n=1$, $n=2$ και $n=4$.

2. Υπολογίστε τις παραγώγους των:

- | | | | |
|-------------------------|-----------------|------------------------------|---------------------|
| a) $\sin(5x)$ | b) $\cos^2(x)$ | c) $\tan(x)=\sin(x)/\cos(x)$ | d) $\ln(x)+1/x$ |
| e) $(4x^2+1)/(x^5-2)$ | f) $-6x^2e^x$ | g) $\sin(2x)/x$ | h) $\tan^3(x)$ |
| i) $(1/3)\cdot e^{x^2}$ | j) $\sqrt{e^x}$ | k) $\cos(\sqrt{x^4+3})$ | l) $1/\sqrt{4-x^2}$ |

3. Μία πρωτεΐνη αιμοσφαιρίνης έχει θέσεις δέσμησης για 4 μόρια οξυγόνου, ενώ μια πρωτεΐνη μυοσφαιρίνης περιέχει μόνο μία θέση δέσμησης για 1 μόριο οξυγόνου. Υπολογίστε το ποσοστό των αιμοσφαιρινών και μυοσφαιρινών που είναι κατά μέσο όρο κατειλημμένες στην ισορροπία, συναρτήσει της συγκέντρωσης του οξυγόνου. Ποιες συναρτήσεις Hill περιγράφουν την κάθε περίπτωση;

4. Χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη παράγωγο, βρείτε που είναι αύξουσες/φθίνουσες και που έχουν μέγιστα ή ελάχιστα (αν έχουν) οι συναρτήσεις:

- | | | | | | |
|--------------|--------------|-----------------|-------------------|----------------|---------------|
| a) $\cos(x)$ | b) $\tan(x)$ | c) $\sinh^2(x)$ | d) $1/\cosh^2(x)$ | e) $\sin^2(x)$ | f) e^{-x^2} |
|--------------|--------------|-----------------|-------------------|----------------|---------------|
- g) η συνάρτηση Hill (για οποιοδήποτε συντελεστή n)

5. Ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται για να περιγράψει την εξέλιξη ενός πληθυσμού (N) συναρτήσει του χρόνου είναι αυτό της λογιστικής ανάπτυξης (logistic growth, π.χ. δες J.D. Murray, *Mathematical Biology I. An Introduction*, 3rd edition, Springer, 2002, σελ. 3-4), σύμφωνα με το οποίο

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0 (e^{rt} - 1)},$$

όπου K και r είναι θετικές σταθερές, ενώ N_0 είναι ο

αρχικός πληθυσμός. Για ποιες τιμές του N_0 αυξάνει και για ποιες φθίνει ο πληθυσμός συναρτήσει του χρόνου; Εμφανίζει ο πληθυσμός μέγιστο ή ελάχιστο, και αν ναι σε ποιες χρονικές στιγμές (θεωρώντας θετικές τιμές του t);