

Μαθηματικά εργαλεία ανάλυσης βιοϊατρικών δεδομένων

Ά μέρος

Εργασία για το ακαδημαϊκό έτος 2019-2020

Άσκηση 1. Έστω n φυσικός αριθμός και έστω X_1, X_2, \dots, X_n στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ .

- (α) Να βρείτε την κατανομή της τυχαία μεταβλητής $Y = \max\{X_i : i = 1, 2, \dots, n\}$. Συγκεκριμένα, να βρείτε αναλυτικό τύπο για την πιθανότητα $\Pr(Y \leq y)$, για κάθε y .
- (β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των φορών που έχουμε $X_i > X_{i+1}$, για $i = 1, 2, \dots, n-1$, δηλαδή η αμέσως επόμενη τιμή είναι μικρότερη από την τρέχουσα.

Άσκηση 2. Υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας δυο πηγές παραγωγής τυχαίων δυαδικών ακολουθιών, στις οποίες αναφερόμαστε ως Α και Β αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, τα bits που παράγονται από την Α (αντίστοιχα από την Β) είναι στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli με παράμετρο p_A (αντίστοιχα p_B). Διαλέγουμε ισοπίθानα στην τύχη μια από τις δυο πηγές, χωρίς όμως να ξέρουμε ποια πηγή έχουμε διαλέξει, και στη συνέχεια κοιτάμε τα bits που παράγονται. Να βρείτε την πιθανότητα να έχουμε διαλέξει την πηγή Α στις επόμενες περιπτώσεις:

- (α) Δεδομένου ότι το πρώτο bit είναι 1.
- (β) Δεδομένου ότι τα πρώτα k bits είναι όλα 1, όπου k αυθαίρετος φυσικός αριθμός. Για ποιο k παίρνουμε τη μικρότερη δεσμευμένη πιθανότητα αν $p_A < p_B$;
- (γ) Δεδομένου ότι από τα πρώτα 100 bits ακριβώς 7 είναι 1 και τα υπόλοιπα είναι 0.

Άσκηση 3. (α) Έστω X_1, X_2, X_3 στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(10, 1)$. Να βρείτε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $2X_1 - 5X_2 + X_3 - 20$.

(β) Έστω n φυσικός αριθμός και έστω X_1, X_2, \dots, X_n στοχαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $Y = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Να συγκρίνετε τα άνω φράγματα που δίνει η ανισότητα Chebychev για τις πιθανότητες $\Pr(|Y| \geq k)$ και $\Pr(|X_1| \geq k)$, για κάθε $k \geq 0$.

Οι ασκήσεις αυτές μπορούν να γίνουν από ομάδες των 2 το πολύ ατόμων και παραδίνονται ηλεκτρονικά στο e-mail μου μέχρι τη Δευτέρα, 10 Φεβρουαρίου 2020. Ο βαθμός σε αυτό το σετ ασκήσεων αποτελεί το 50% του τελικού βαθμού για το Ά μέρος του μαθήματος.

Καλή επιτυχία!

Ο διδάσκοντας,
Χριστόφορος Ραπτόπουλος