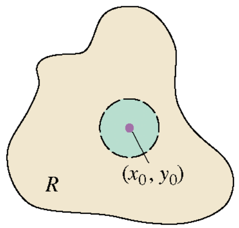
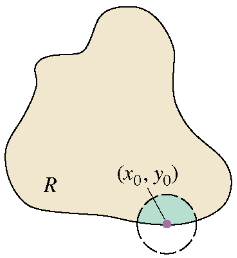
Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Πεδίο ορισμού συνάρτησης δύο μεταβλητών f(x,y)



(α) Εσωτερικό σημείο

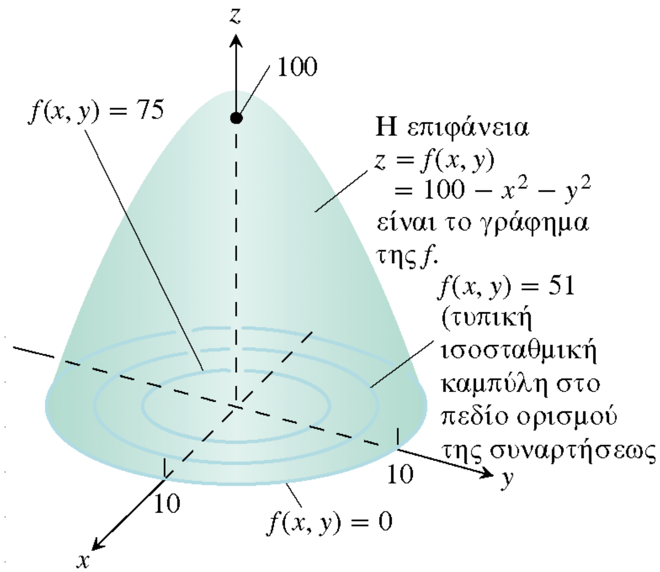


(β) Συνοριακό σημείο

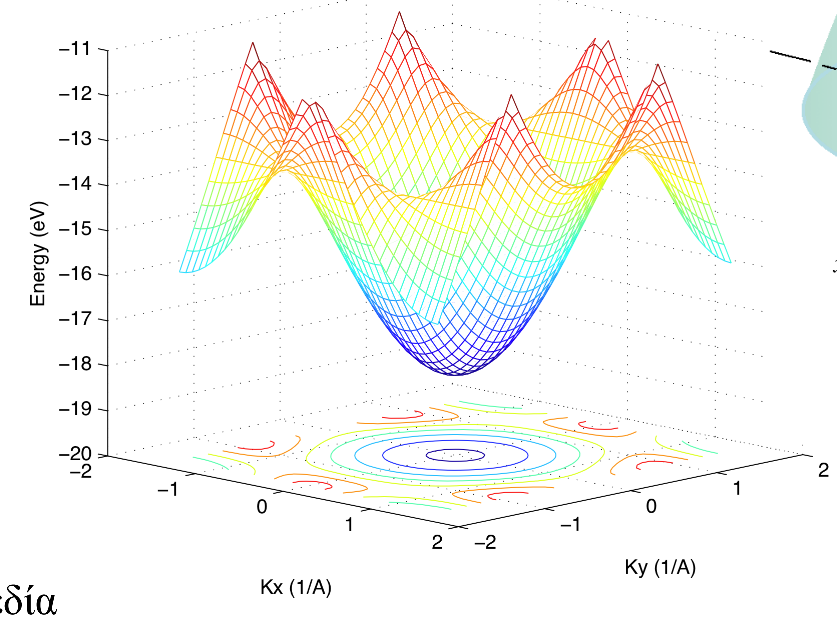
ΣΧΗΜΑ 11.1 Εσωτερικά σημεία και συνοριακά σημεία του επίπεδου χωρίου R. Κάθε εσωτερικό

Απεικόνιση συνάρτησης δύο μεταβλητών f(x,y):

- Γραφική παράσταση z = f(x,y)
- Ισοσταθμικές καμπύλες f(x,y) = c



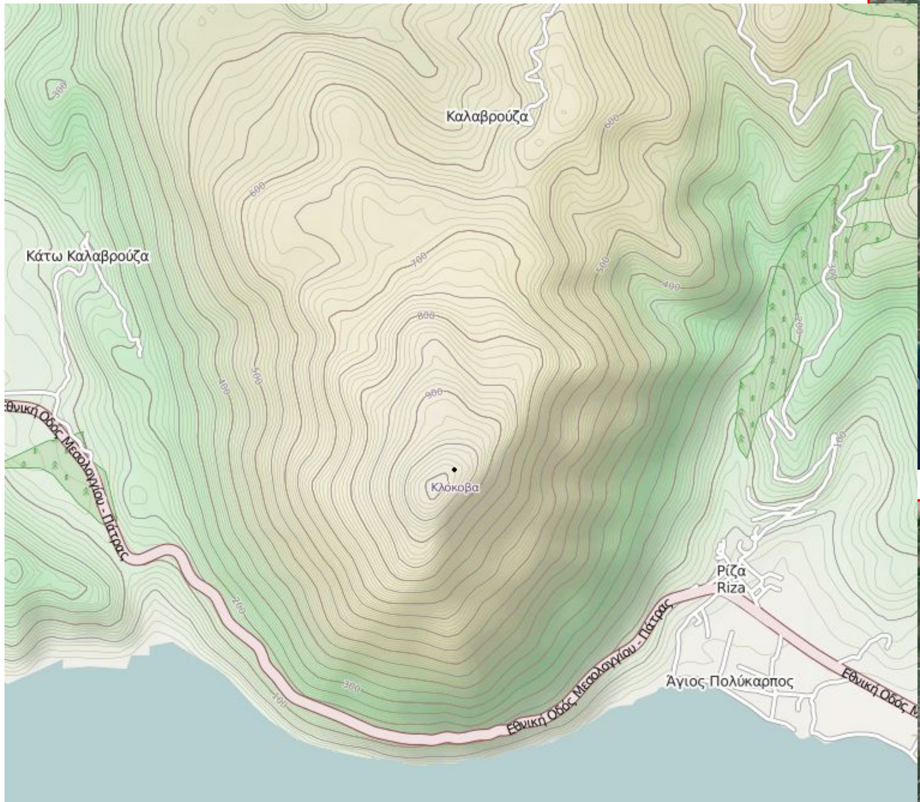
ΣΧΗΜΑ 11.4 Γραφική παράσταση της $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ και μερικές ισοσταθμικές καμπύλες



$$E(k_x, k_y) = -11 - 2.4\sqrt{3 + 4\cos(2.1k_x)\cos(1.2k_y) + 2\cos(2.5k_y)}$$

Παραδείγματα: βρείτε τα πεδία ορισμού και τα πεδία τιμών των f(x,y) = sin(xy), f(x,y)=1/(xy), f(x,y)=$\sqrt{(y-x^2)}$

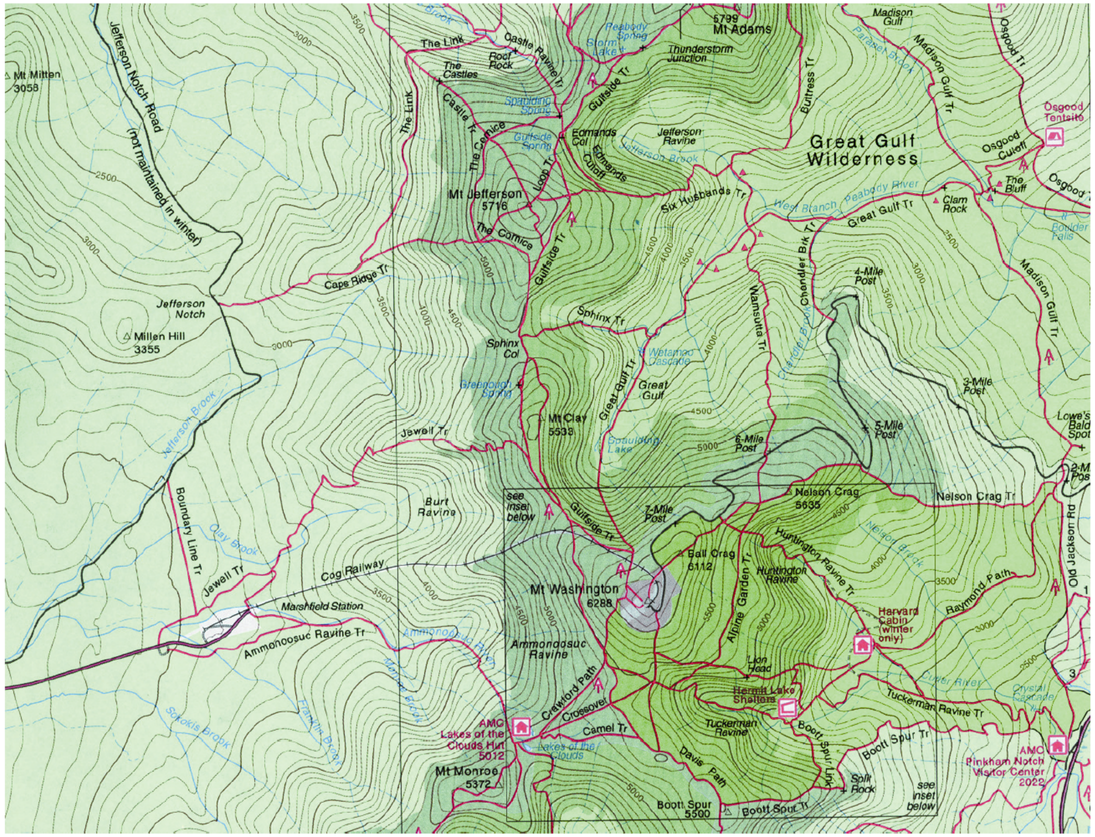
Παλαιοβούνα (απέναντι)



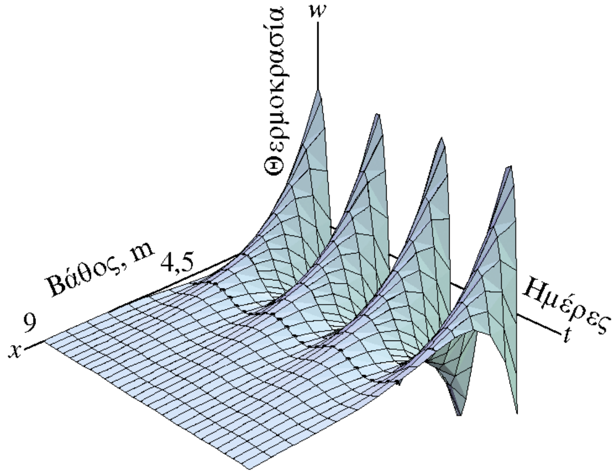
Όρος Σκολίδα (Ηλεία)

Αεροφωτογραφία $z = f(x,y)$

Ισοϋψείς $f(x,y) = c$



Σχημα 11.6 Ισοϋψείς του όρους Washington στο κεντρικό New Hampshire.



(Σχεδιάστηκε με Mathematica)

Σχημα 11.7 Γράφημα, σχεδιασμένο με υπολογιστή, της συνάρτησης

$$w = \cos(1{,}7 \times 10^{-2}t - 0{,}06x)e^{-0{,}06x}$$

που περιγράφει την εποχική διακύμανση της θερμοκρασίας του υπεδάφους συναρτήσει του βάθους από τη γήινη επιφάνεια. (Η συνάρτηση δίνει τη διακύμανση ως κλάσμα της επιφανειακής θερμοκρασίας). Η διακύμανση της θερμοκρασίας σε βάθος $x = 4{,}5$ m, είναι μόλις 5% της επιφανειακής διακυμάνσεως. Σε βάθος $x = 9$ m, το ποσοστό αυτό πέφτει κάτω 0,25%.
(Παράδειγμα 5) (Από γράφημα της εταιρείας Norton Starr.)

Απεικόνιση συνάρτησης τριών μεταβλητών f(x,y,z):

- Γραφική παράσταση σε τομές του πεδίου ορισμού
- Ισοσταθμικές επιφάνειες f(x,y,z) = c

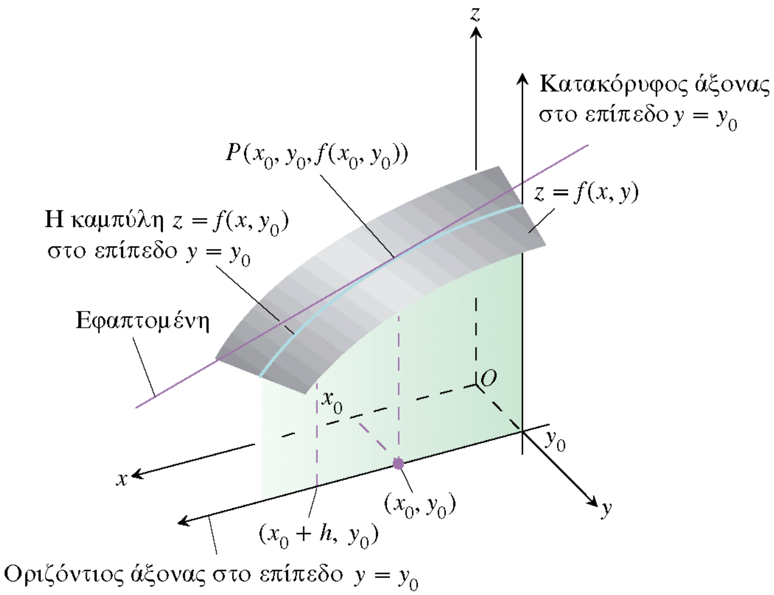
Μερικές Παράγωγοι συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Μερική παράγωγος ως προς x

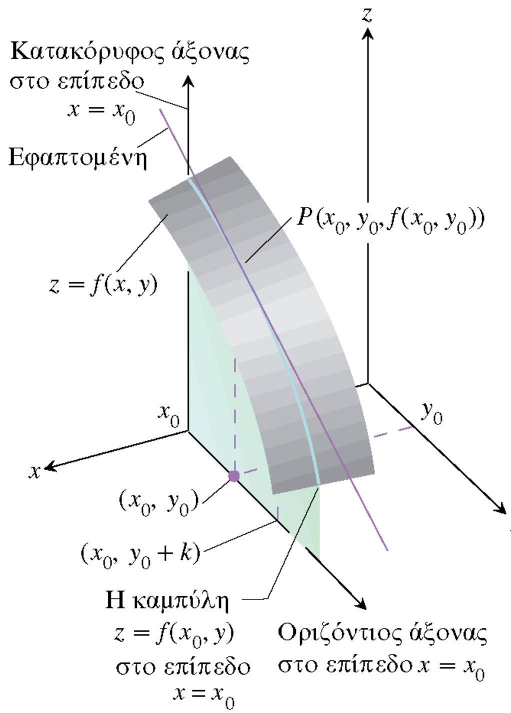
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Μερική παράγωγος ως προς y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$



ΣΧΗΜΑ 11.13 Τομή του επιπέδου $y = y_0$ με την επιφάνεια $z = f(x, y)$, όπως φαίνεται από σημείο πάνω από το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου xy.



ΣΧΗΜΑ 11.14 Η τομή του επιπέδου $x = x_0$ με την επιφάνεια $z = f(x, y)$, όπως φαίνεται από σημείο πάνω από το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου xy.

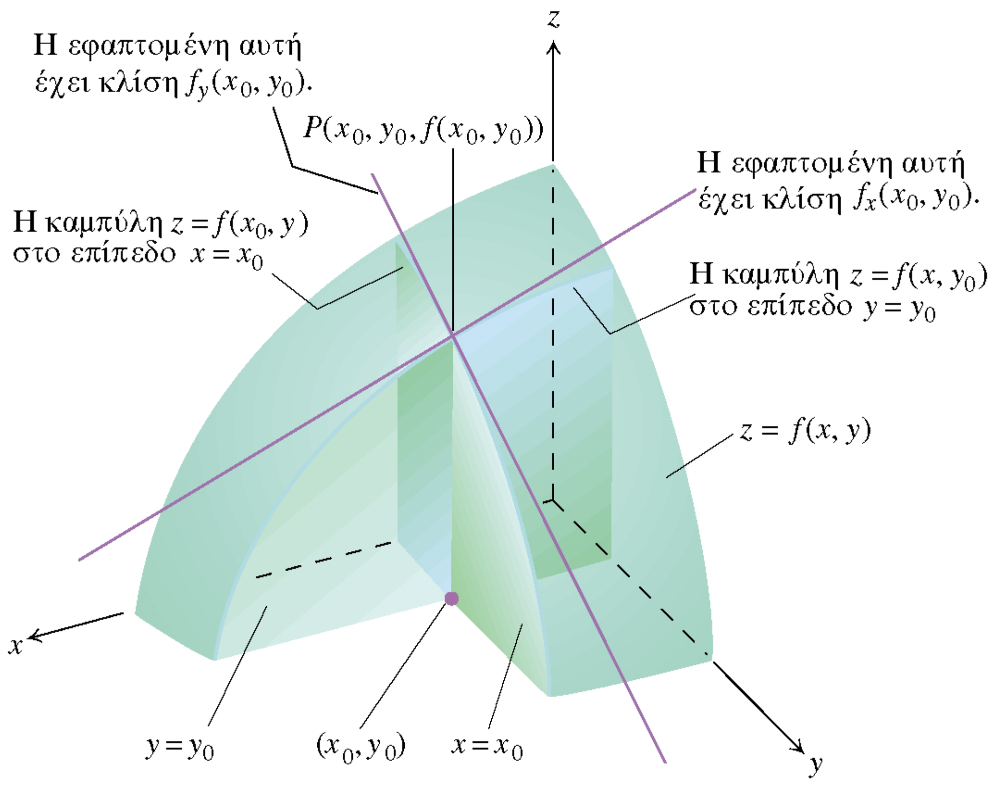
Για να υπολογιστεί η μερική παράγωγος ως προς x μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x,y)$, *θεωρούμε το y σαν σταθερά* και παραγωγίζουμε την συνάρτηση ως προς x *σα να ήταν συνάρτηση μιας μεταβλητής.*
Παρόμοια υπολογίζεται η μερική παράγωγος ως προς y.

Παράδειγμα: να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της $f(x,y) = x\cos(y) + y\,e^x$

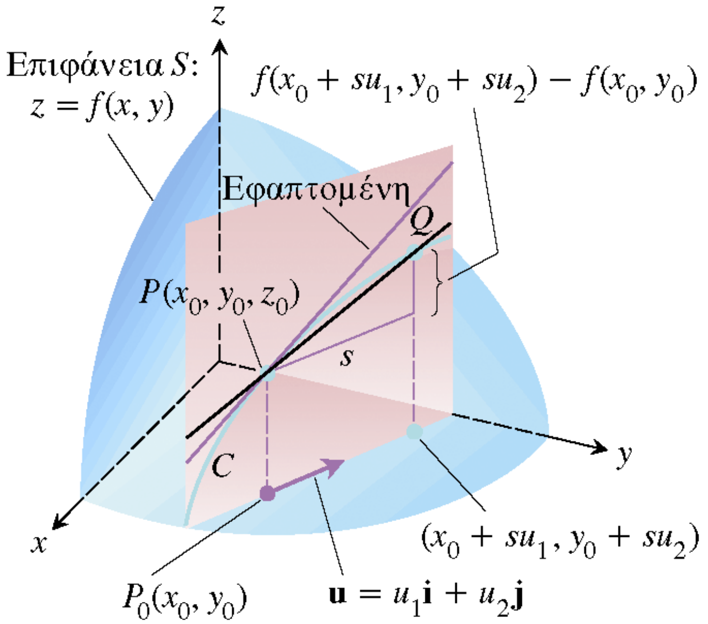
Αντίστοιχα υπολογίζονται ανώτερης τάξης μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y}$$

Όμως μπορούν να υπολογιστούν ρυθμοί μεταβολής σε οποιαδήποτε κατεύθυνση!
(κι όχι μόνο κατά μήκος του άξονα-x ή του άξονα-y)



Παράγωγος κατά κατεύθυνση
(ή κατευθυνόμενη παράγωγος)
συνάρτησης πολλών μεταβλητών



ΣΧΗΜΑ 11.27 Η κλίση της καμπύλης C στο P_0 είναι

$$\lim_{Q \to P} \text{κλίση } (PQ)$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

$$= \left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0} = (D_{\mathbf{u}} f)_{P_0}.$$

Τρόπος υπολογισμού:
μέσω του ***διανύσματος της κλίσης***

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$$

Η παράγωγος κατά την κατεύθυνση του *μοναδιαίου* διανύσματος $\hat{u} = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath}$ δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο:

$$D_{\hat{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u} = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2$$

για $\hat{u} = \hat{\imath}$: $\quad D_{\hat{i}} f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{i} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

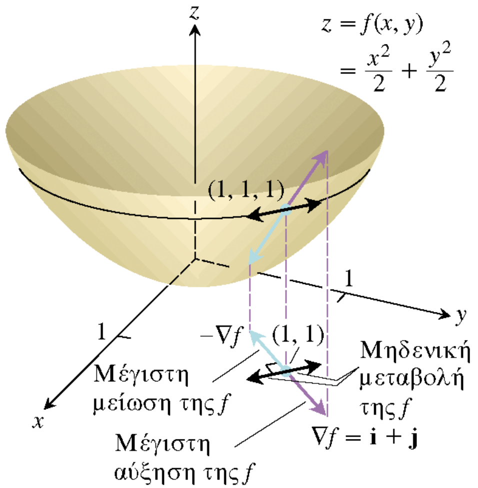
για $\hat{u} = \hat{\jmath}$: $\quad D_{\hat{j}} f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{j} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Ιδιότητες του διανύσματος της κλίσης

$$D_{\hat{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u} = \left|\vec{\nabla} f\right| \cos(\theta)$$

Για $\theta = 0 \;\Rightarrow\; D_{\hat{u}}\mathrm{f} = max$

Σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της η f παρουσιάζει την μέγιστη αύξηση κατά μήκος της κατεύθυνσης του διανύσματος της κλίσης



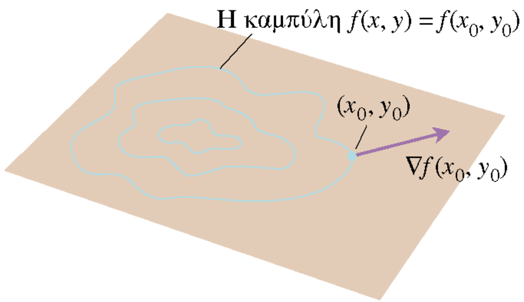
ΣΧΗΜΑ 11.29 Η κατεύθυνση μέγιστης αύξησης της $f(x, y) = (x^2/2) + (y^2/2)$ στο (1, 1) είναι $\nabla f|_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ και αντιστοιχεί στην κατεύθυνση της πλέον απότομης ανόδου επί της σχεδιασθείσας επιφάνειας στο (1, 1, 1).

Για $\theta = \pi \;\Rightarrow\; D_{\hat{u}}\mathrm{f} = min$

η f παρουσιάζει την μέγιστη μείωση

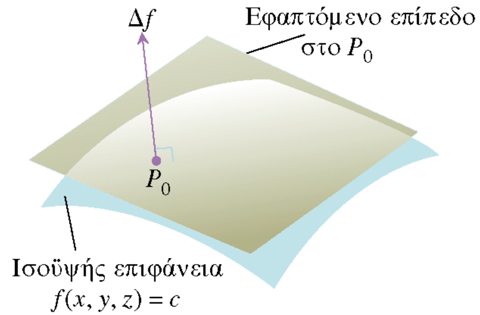
Για $\theta = \pi/2 \;\Rightarrow\; D_{\hat{u}}\mathrm{f} = 0$

η f δεν παρουσιάζει μεταβολή σε κατεύθυνση κάθετα στο διάνυσμα της κλίσης



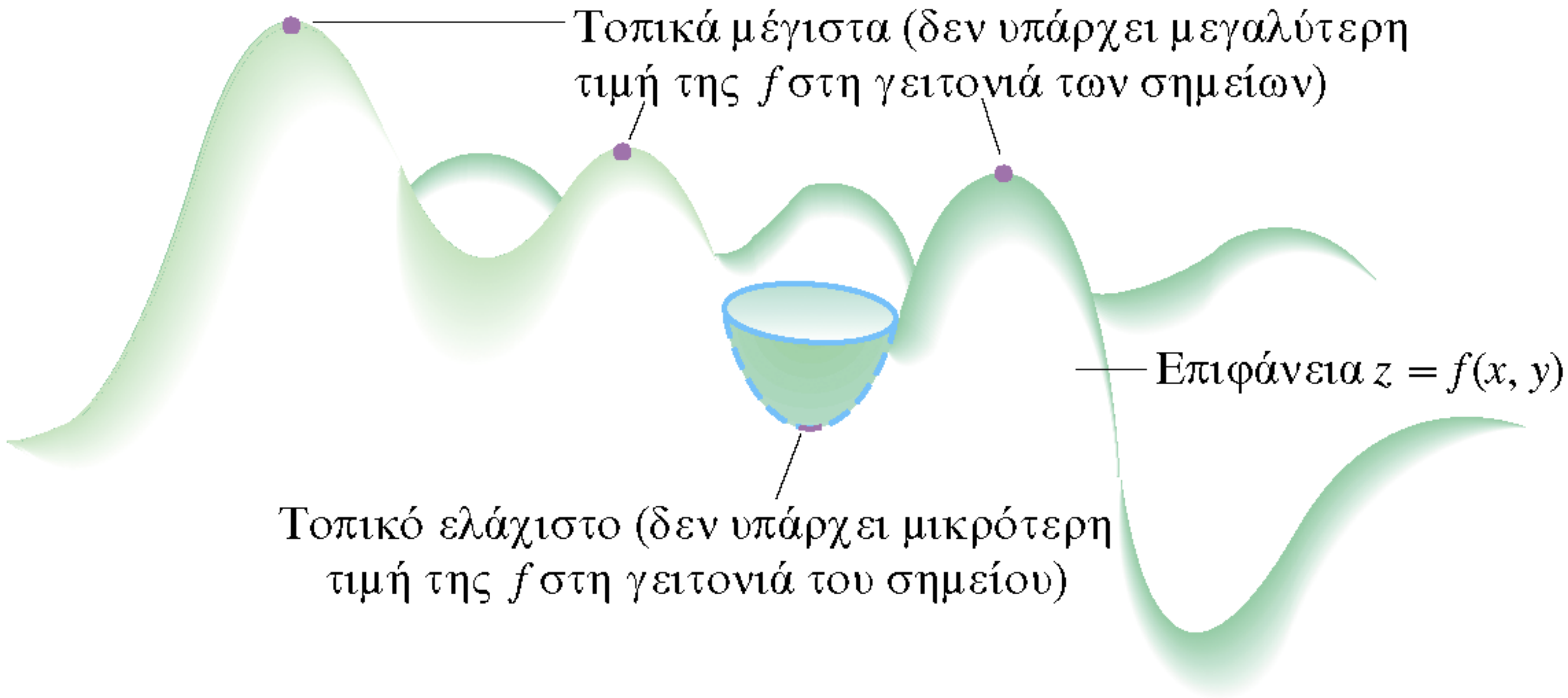
ΣΧΗΜΑ 11.30 Η κλίση μιας διαφορίσιμης καμπύλης δύο μεταβλητών σε τυχόν σημείο της είναι πάντα κάθετη στην ισοσταθμική καμπύλη που διέρχεται από το σημείο αυτό.

Σε οποιοδήποτε σημείο, το διάνυσμα της κλίσης είναι κάθετο στην ισοσταθμική καμπύλη (*ισοσταθμική επιφάνεια για συναρτήσεις τριών μεταβλητών*) που διέρχεται απ' αυτό το σημείο

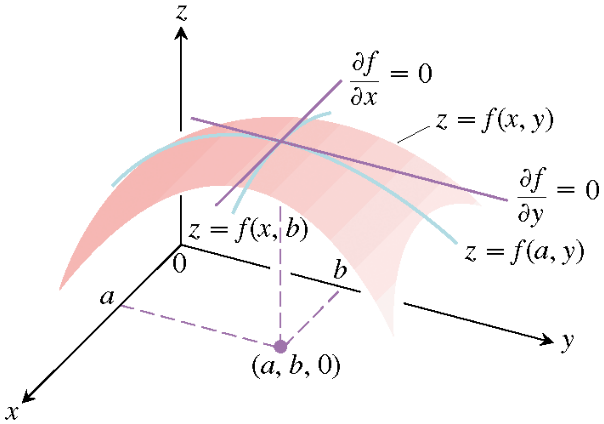


ΣΧΗΜΑ 11.32 Η κλίση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης τριών μεταβλητών σε σημείο P_0 είναι κάθετη στην ισοσταθμική επιφάνεια της συνάρτησης που διέρχεται από το εν λόγω σημείο. Με άλλα λόγια, η κλίση ορίζει την κάθετη διεύθυνση στο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο P_0.

Μέγιστα και ελάχιστα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

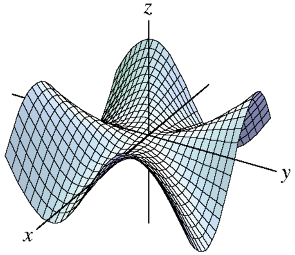


ΣΧΗΜΑ 11.46 Μιλώντας με ορολογία τοπίου, κάθε κορυφή βουνού είναι ένα τοπικό μέγιστο, ενώ το χαμηλότερο σημείο κάθε κοιλάδας είναι ένα τοπικό ελάχιστο.



Αν η $f(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή και έχει σε ένα εσωτερικό σημείο αυτής της περιοχής τοπικό ακρότατο, τότε σε αυτό το σημείο $f_x = 0$ <u>και</u> $f_y = 0$.

<u>Το αντίστροφο πάλι δεν ισχύει</u>: μπορεί οι μερικές παράγωγοι να μηδενίζονται σε κάποιο σημείο και να μην αντιστοιχεί σε ακρότατο (π.χ. σαγματικά σημεία)



$$z = \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}$$

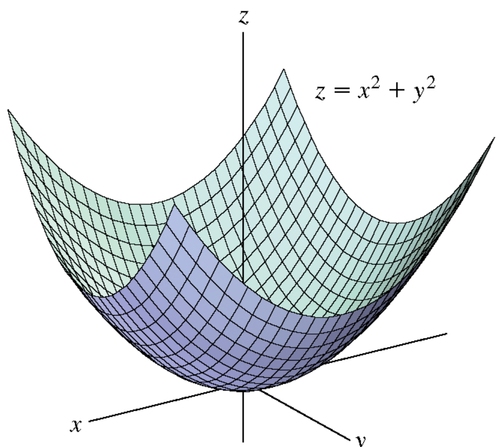
Για να βρούμε τοπικά ή ολικά ακρότατα ελέγχουμε εκείνα τα σημεία όπου:

(ι) <u>και οι δύο</u> μερικές παράγωγοι μηδενίζονται,

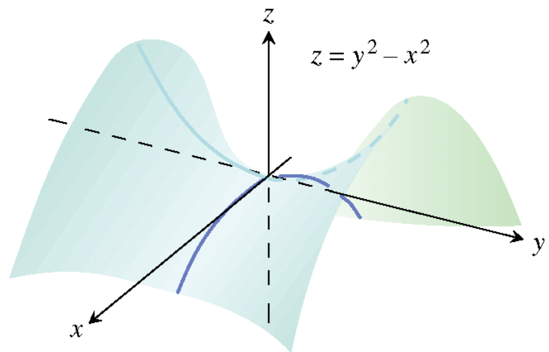
(ιι) έστω μία από τις δύο μερικές παραγώγους δεν ορίζονται,

(ιιι) τα συνοριακά σημεία του πεδίου ορισμού της,

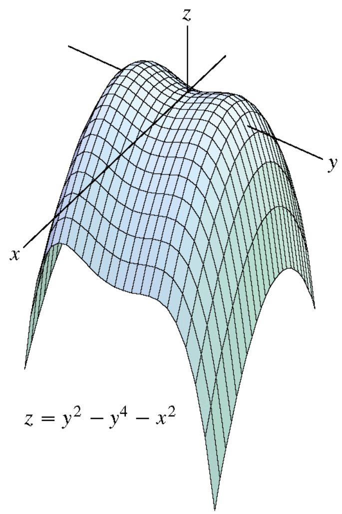
Δεν είναι υποχρεωτικό αυτά τα σημεία να αντιστοιχούν σε ακρότατα, <u>αλλά αν υπάρχουν ακρότατα μπορεί να υπάρχουν μόνο εκεί</u>!



(Σχεδιάστηκε με Mathematica)



ΣΧΗΜΑ 11.50 Η αρχή είναι σαγματικό σημείο της συνάρτησης $f(x, y) = y^2 - x^2$. Δεν υπάρχουν τοπικά ακρότατα. (Παράδειγμα 2)



(Σχεδιάστηκε με Mathematica)

ΣΧΗΜΑ 11.48 Σαγματικά σημεία στην αρχή των αξόνων.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Έστω ότι σε ένα σημείο $f_x = 0$ και $f_y = 0$

Ανάλογα με το πρόσημο της ορίζουσας του μητρώου καμπυλότητας $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

- αν $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ και $f_{xx} < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο

- αν $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ και $f_{xx} > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο

- αν $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ τότε η f έχει σαγματικό σημείο

- αν $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε

Ανάπτυγμα Taylor συνάρτησης δύο μεταβλητών f(x,y) γύρω από ένα σημείο (x_0,y_0)

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \;=\;& f(x_0,y_0)\\
&+\left[(x-x_0)f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0)\right]\\
&+\frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2(x-x_0)(y-y_0)f_{xy}(x_0,y_0)+(y-y_0)^2 f_{yy}(x_0,y_0)\right]\\
&+\frac{1}{3!}\left[(x-x_0)^3 f_{xxx}(x_0,y_0)+3(x-x_0)^2(y-y_0)f_{xxy}(x_0,y_0)+3(x-x_0)(y-y_0)^2 f_{xyy}(x_0,y_0)+(y-y_0)^3 f_{yyy}(x_0,y_0)\right]\\
&+\ldots\\
&+\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f\Big|_{(x_0,y_0)}\\
&+\ldots
\end{aligned}
$$

Διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k}y^k = x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}x^2y^{n-2}+nxy^{n-1}+y^n$$