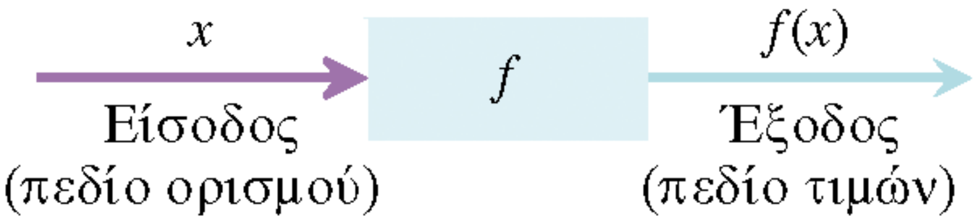
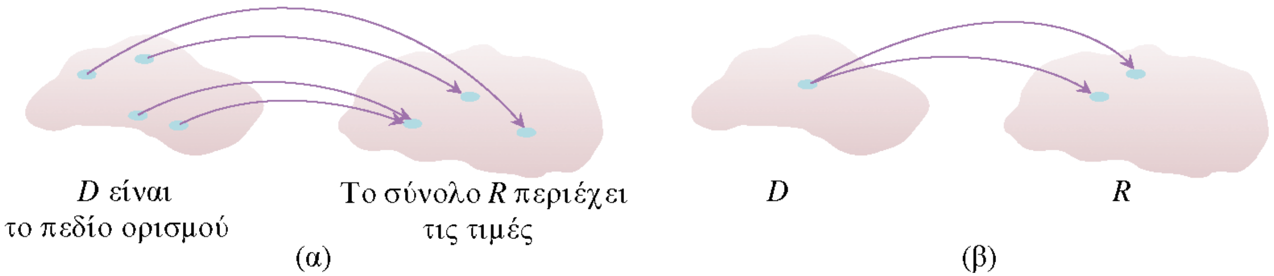
Συνάρτηση $y = f(x)$

Μια πραγματική συνάρτηση είναι ένας κανόνας που σε κάθε αριθμό x ενός συνόλου (πεδίο ορισμού) αντιστοιχεί μία τιμή y που λέγεται και εικόνα του x (και συμβολίζεται $f(x)$)

Ανεξάρτητη μεταβλητή x



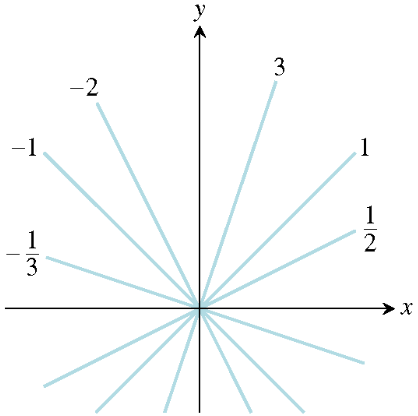
Εξαρτημένη μεταβλητή $y = f(x)$



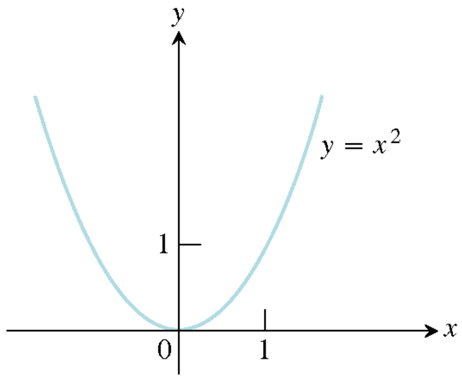
ΣΧΗΜΑ 9 (α) Μια συνάρτηση από το σύνολο D στο σύνολο R. (β) Μια *μη* συνάρτηση. Η αντιστοίχιση σε στοιχεία του R δεν είναι μοναδική.

Μια συνάρτηση αναπαρίσταται εύκολα μέσω της γραφικής της παράστασης στο επίπεδο x-y

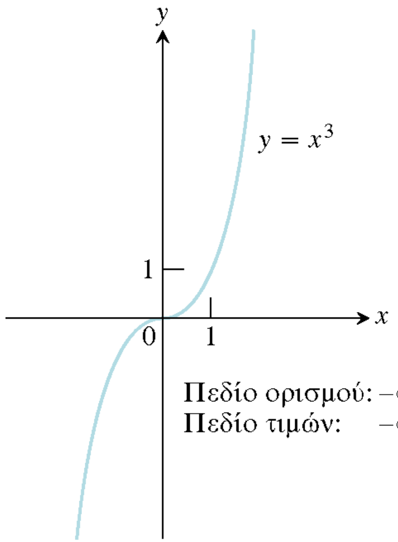
Παραδείγματα συναρτήσεων



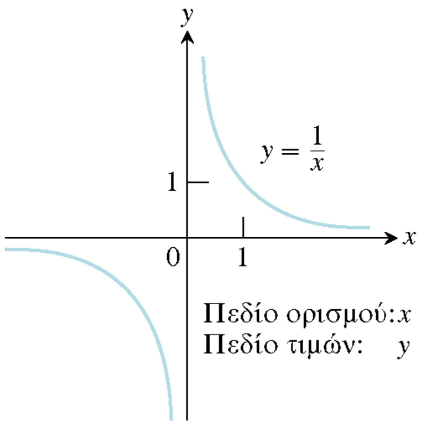
$y = mx$ για διάφορες τιμές του m
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
Πεδίο τιμών: $-\infty < y < \infty$



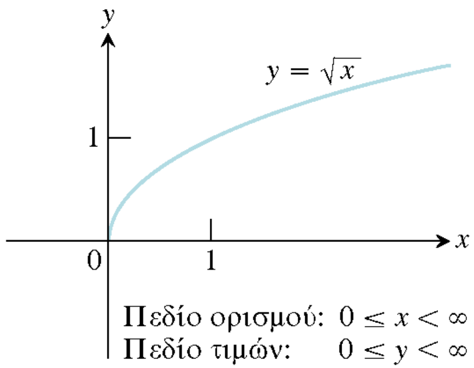
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
Πεδίο τιμών: $0 \le y < \infty$



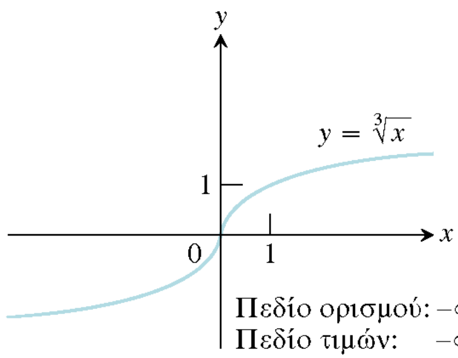
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
Πεδίο τιμών: $-\infty < y < \infty$



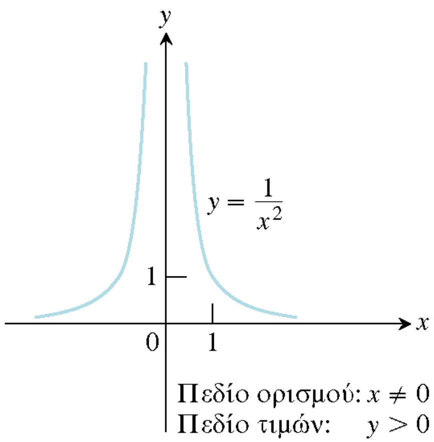
Πεδίο ορισμού: $x \neq 0$
Πεδίο τιμών: $y \neq 0$



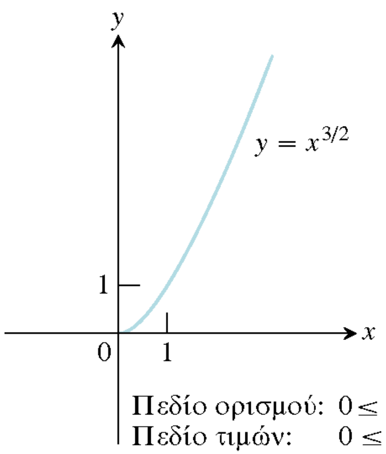
Πεδίο ορισμού: $0 \le x < \infty$
Πεδίο τιμών: $0 \le y < \infty$



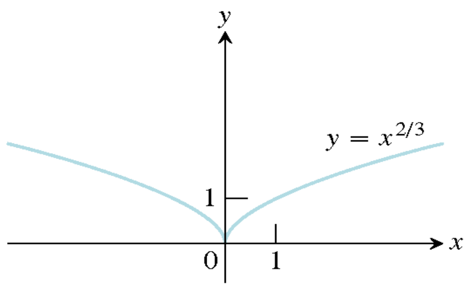
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
Πεδίο τιμών: $-\infty < y < \infty$



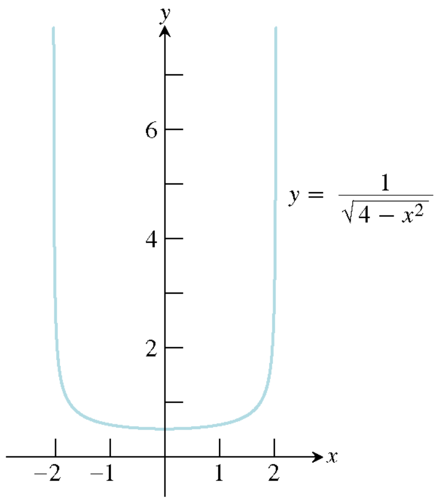
Πεδίο ορισμού: $x \neq 0$
Πεδίο τιμών: $y > 0$



Πεδίο ορισμού: $0 \le x < \infty$
Πεδίο τιμών: $0 \le y < \infty$



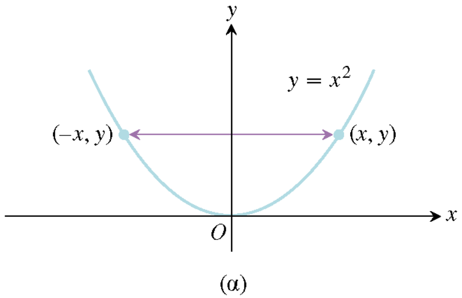
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
Πεδίο τιμών: $0 \le y < \infty$

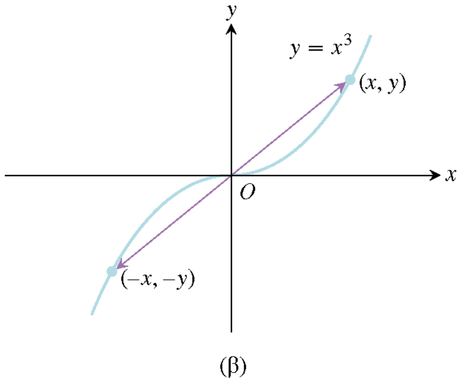


Άρτιες και Περιττές συναρτήσεις

άρτιες: $y(-x) = y(x)$

περιττές: $y(-x) = -y(x)$

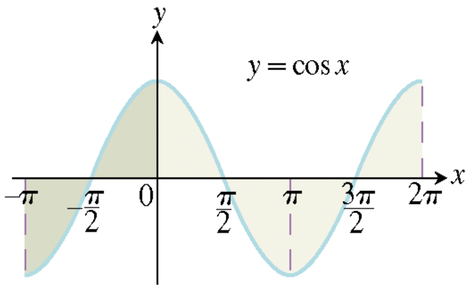




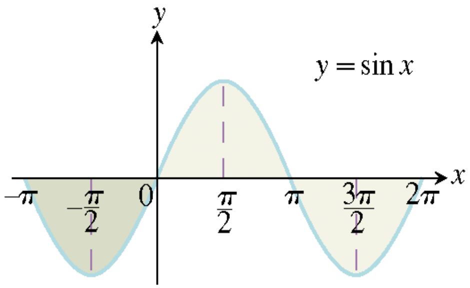
ΣΧΗΜΑ 15 (α) Η γραφική παράσταση της $y = x^2$ (άρτια συνάρτηση) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y. (β) Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = x^3$ (περιττή) είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο T:

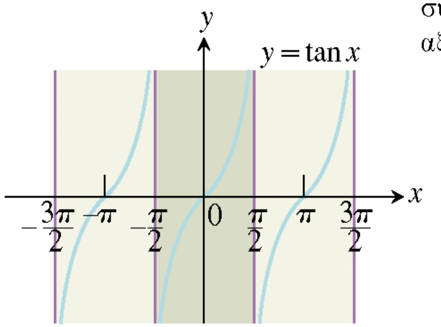
$$y(x+T) = y(x) \text{ για κάθε } x$$



Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
Πεδίο τιμών: $-1 \le y \le 1$
Περίοδος: 2π



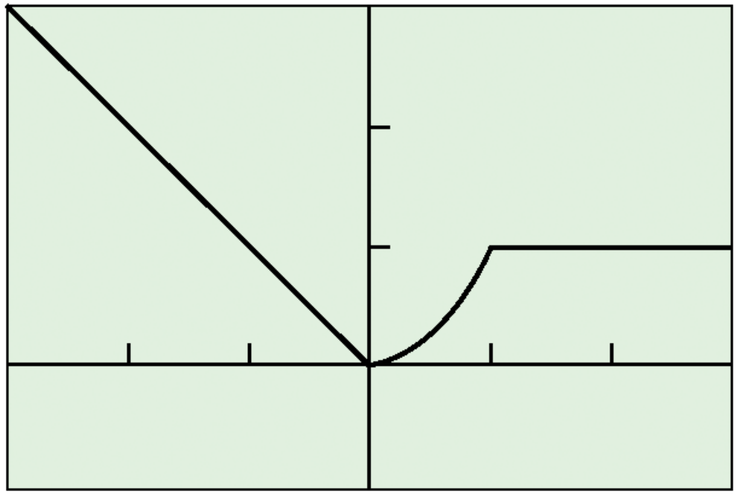
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
Πεδίο τιμών: $-1 \le y \le 1$
Περίοδος: 2π



Πεδίο ορισμού: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Πεδίο τιμών: $-\infty < y < \infty$
Περίοδος: π

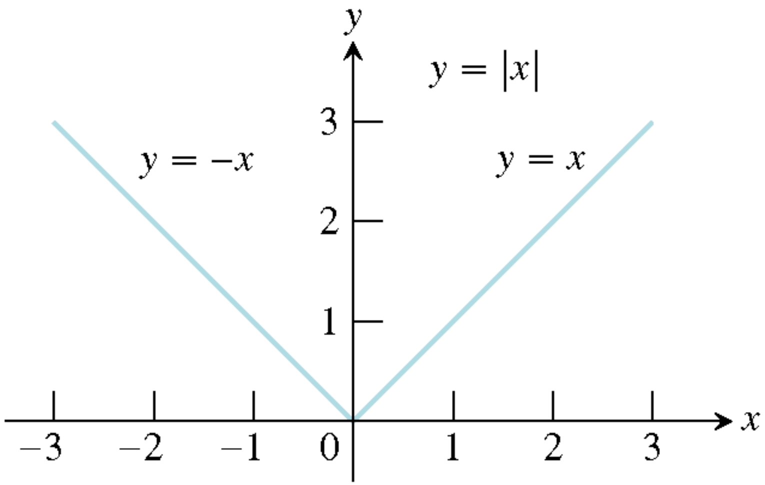
Τμηματικά οριζόμενες συναρτήσεις

$$y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



[–3, 3] επί [–1, 3]

ΣΧΗΜΑ 17 Η γραφική παράσταση μιας τμηματικά οριζόμενης συναρτήσεως. (Παράδειγμα 5)

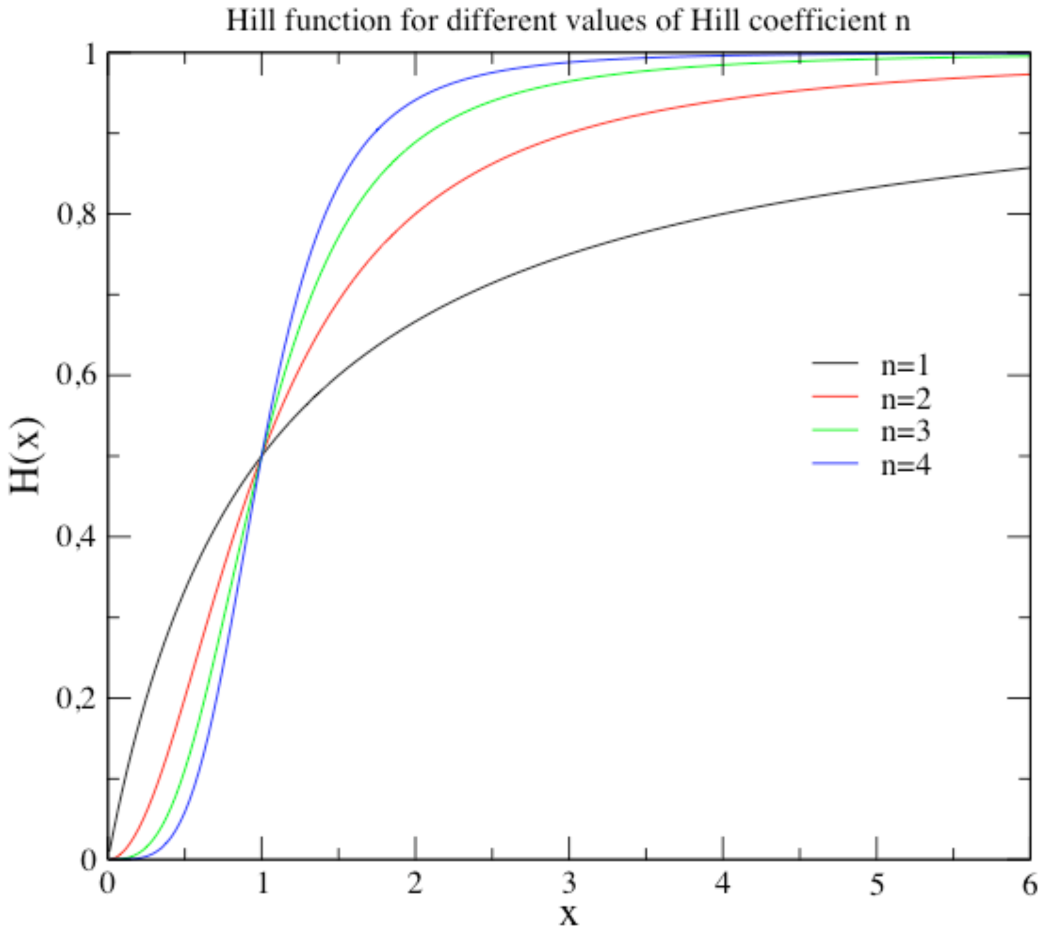


ΣΧΗΜΑ 19 Η συνάρτηση απόλυτης τιμής έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty\ , \infty)$ και πεδίο τιμών το $[0\ , \infty)$.

Συνάρτηση Hill

$$H(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

$$H(x=0)=0$$
$$H(x=1)=1/2$$
$$H(x)\xrightarrow{x\to\infty}1$$



Η οικογένεια αυτών των συναρτήσεων εμφανίζεται στο πρόβλημα της σύνδεσης υποδοχέα-προσδέτη (ligand-receptor binding):

$$L + R \leftrightarrow LR$$

Σταθερά διάστασης $K_d = \frac{[L][R]}{[LR]}$

Η πιθανότητα να είναι ο υποδοχέας κατειλημμένος:

$$p_{bound} = \frac{[LR]}{[R]+[LR]} = \frac{[L]/K_d}{1+[L]/K_d}$$

συνάρτηση Hill με n=1 και όρισμα $x=[L]/K_d$

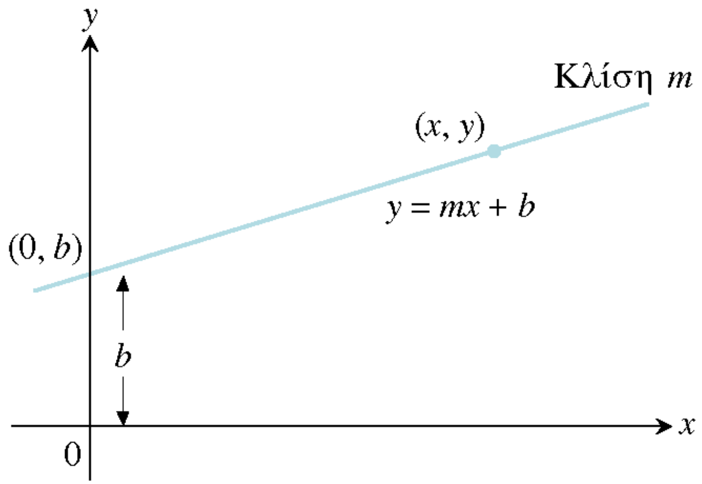
Στην περίπτωση συνεργατικής σύνδεσης (cooperative binding) 2 μορίων προσδέτη στον υποδοχέα:

$$L + L + R \leftrightarrow L_2R \qquad K_d^2 = \frac{[L]^2[R]}{[L_2R]}$$

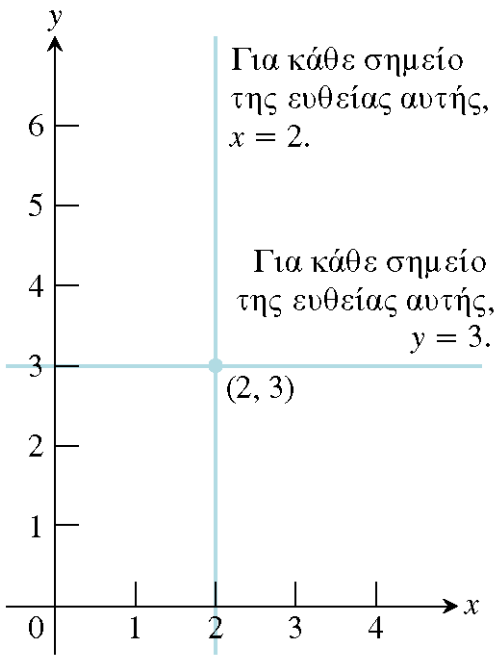
$$p_{bound} = \frac{[L_2R]}{[R]+[L_2R]} = \frac{([L]/K_d)^2}{1+([L]/K_d)^2}$$

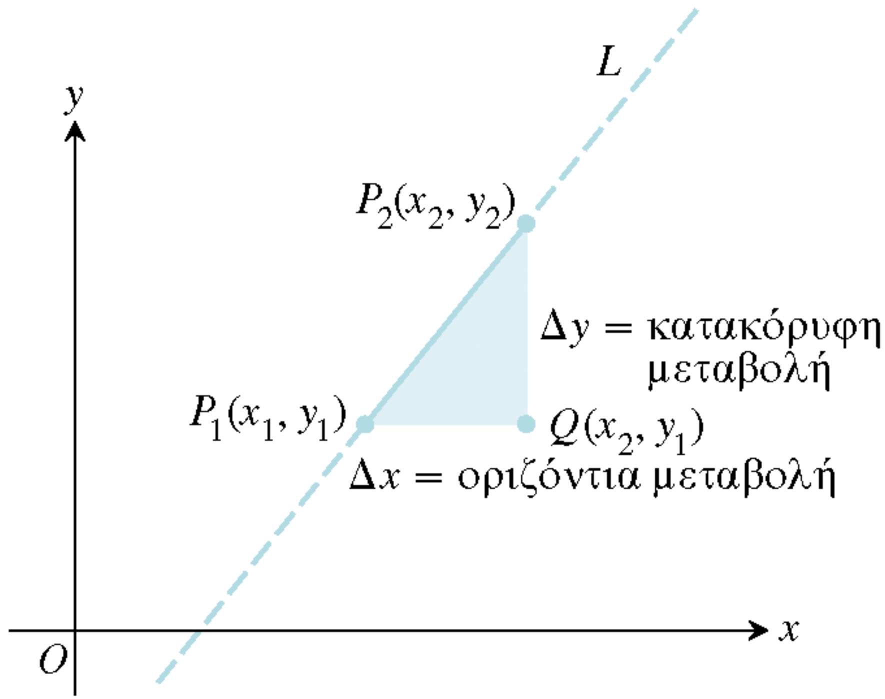
συνάρτηση Hill με n=2 και όρισμα $x=[L]/K_d$

Εξισώσεις ευθειών και κλίση ευθείας



ΣΧΗΜΑ 5 Μια ευθεία κλίσεως m και τεταγμένης b .

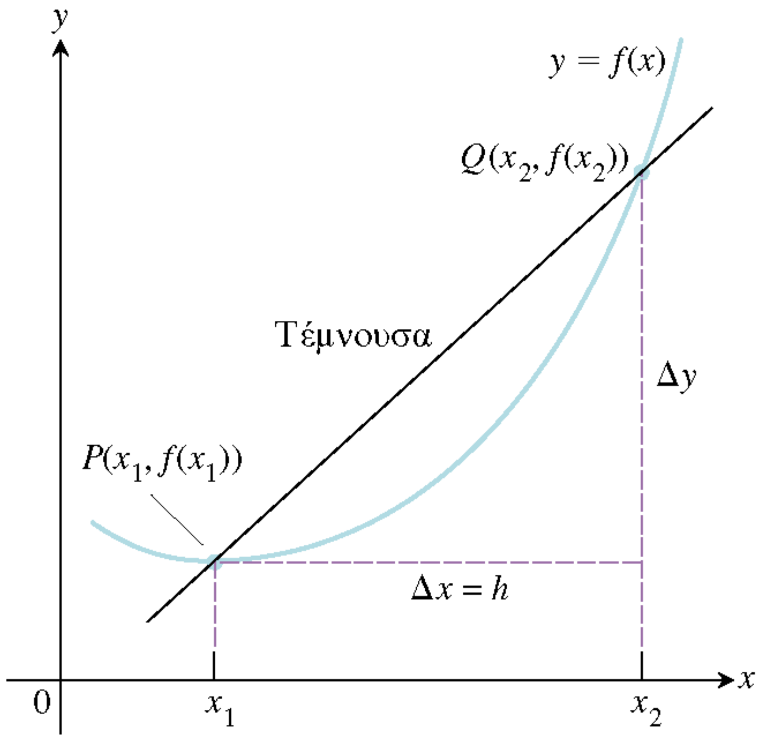




ΣΧΗΜΑ 1 Η κλίση της ευθείας L είναι

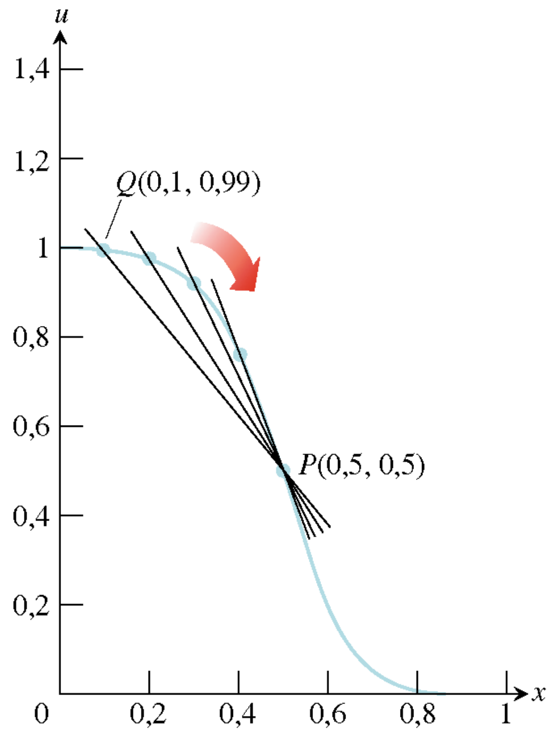
$$m = \frac{\text{κατακόρυφη μεταβολή}}{\text{οριζόντια μεταβολή}} = \Delta y / \Delta x.$$

Μέσος ρυθμός μεταβολής συνάρτησης $y = \mathrm{f}(x)$



Σχημα 1.1 Μια τέμνουσα της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$. Η κλίση της είναι $\Delta y / \Delta x$, ίση με τον μέσο ρυθμό μεταβολής τής f στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Q	Κλίση της $PQ = \Delta u/\Delta x$
(0,1, 0,99)	$\dfrac{0{,}99 - 0{,}5}{0{,}1 - 0{,}5} \approx -1{,}23$
(0,2, 0,98)	$\dfrac{0{,}98 - 0{,}5}{0{,}2 - 0{,}5} \approx -1{,}60$
(0,3, 0,92)	$\dfrac{0{,}92 - 0{,}5}{0{,}3 - 0{,}5} \approx -2{,}10$
(0,4, 0,76)	$\dfrac{0{,}76 - 0{,}5}{0{,}4 - 0{,}5} \approx -2{,}60$



ΣΧΗΜΑ 1.3 Οι θέσεις και οι κλίσεις τεσσάρων τεμνουσών που διέρχονται από το σημείο P του γραφήματος του Σχήματος 1.2.

Ρυθμός μεταβολής - Παράγωγος

Ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 δίνει την παράγωγό της σε αυτό το σημείο:

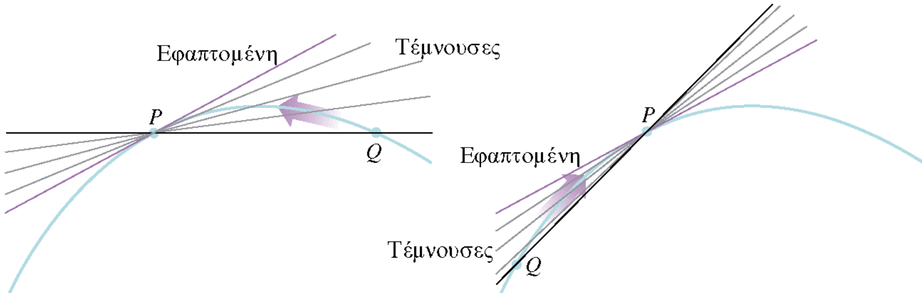
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Η *παράγωγος μιας συνάρτησης* f(x) είναι η *συνάρτηση* που η τιμή της σε κάθε x ορίζεται από το όριο (όταν αυτό υπάρχει)

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

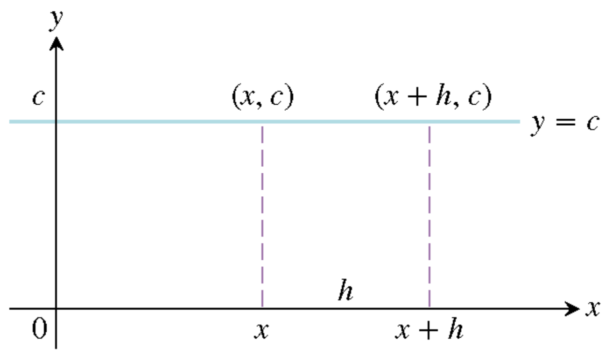
Το πεδίο ορισμού της παραγώγου είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού της f(x) όπου υπάρχει αυτό το όριο

Εφαπτομένη καμπύλης και Παράγωγος



ΣΧΗΜΑ 1.60 Δυναμική ερμηνεία της έννοιας της εφαπτομένης. Εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο P είναι η ευθεία που διέρχεται από το P με κλίση ίση με το όριο των κλίσεων των τεμνουσών ευθειών καθώς $Q \to P$ (από όποια πλευρά του P κι αν κινείται το Q).

Παράγωγος σταθερής συνάρτησης: $y = c$



ΣΧΗΜΑ 2.4 Ο κανόνας $(d/dx)(c) = 0$ μας λέει με άλλα λόγια ότι μια σταθερή συνάρτηση δεν μεταβάλλει τις τιμές της και ότι η κλίση μιας οριζόντιας ευθείας μηδενίζεται παντού.

Παράγωγος δύναμης του x: $y = x^n$

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n \cdot x^{n-1}$$

Παράγωγος πολλαπλάσιου συνάρτησης με μια σταθερά: $y(x) = c \cdot u(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(c \cdot u(x)\right) = c \cdot \frac{du}{dx}$$

Παράγωγος αθροίσματος συναρτήσεων: $y(\mathrm{x}) = u(x) + v(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(u(x) + v(x)\right) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Παράγωγος πολυωνύμων: $y(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + \mathrm{a}_0$

$$\frac{dy}{dx} = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1$$

$$\frac{d}{dx}\left(5x^3 + x^2 - 7x + 2\right) = 15x^2 + 2x - 7$$

Παράγωγος γινομένου συναρτήσεων: $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)\cdot v(x)\right) = \frac{du}{dx}\cdot v + u\cdot\frac{dv}{dx}$$

Παράγωγος πιλήκου συναρτήσεων: $y(x) = u(x)/v(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{\frac{du}{dx}\cdot v - u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης: $y(x) = y(z(x))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

Παράγωγος δυνάμεων συνάρτησης: $y(x) = [z(x)]^n$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dz}\left(z^n\right)\frac{dz}{dx} = nz^{n-1}\frac{dz}{dx}$$

Παράγωγοι γνωστών συναρτήσεων:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

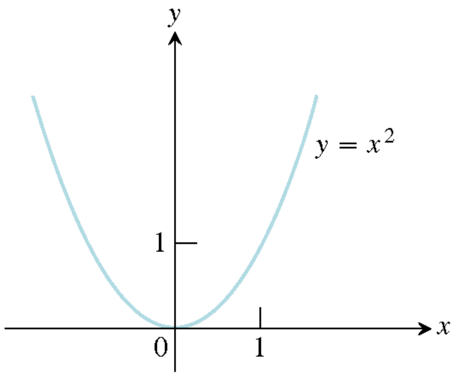
Παραδειγμα: υπολογίστε τις παραγώγους των συναρτήσεων $x \bullet \ln(x)$, $(x^2-1)/(x+2)$, e^{2x}

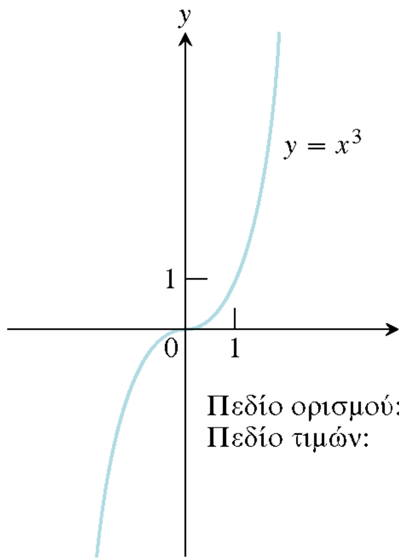
Αύξηση/ελάττωση συνάρτησης $y = \mathrm{f}(x)$ και το πρόσημο της πρώτης παραγώγου

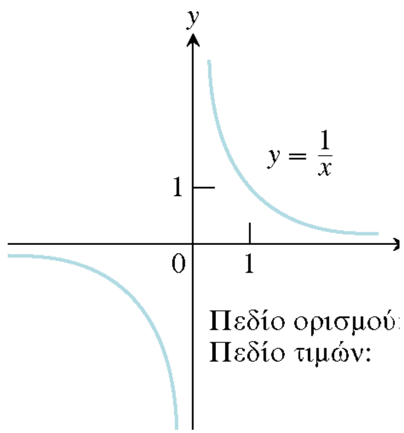
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \;\Rightarrow f(x)\uparrow \\ f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \;\Rightarrow f(x)\downarrow \end{cases}$$

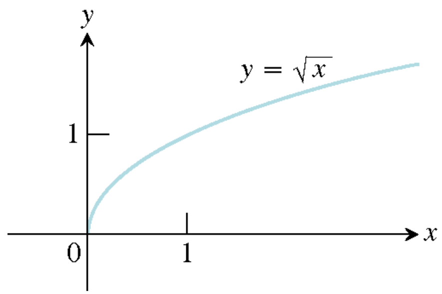
Η τιμή της πρώτης παραγώγου $\mathrm{f}'(x)$ μας λέει αν ανεβαίνει ή κατεβαίνει η γραφική παράσταση της $\mathrm{f}(x)$, και πόσο απότομα συμβαίνει αυτό

Παραδείγματα:

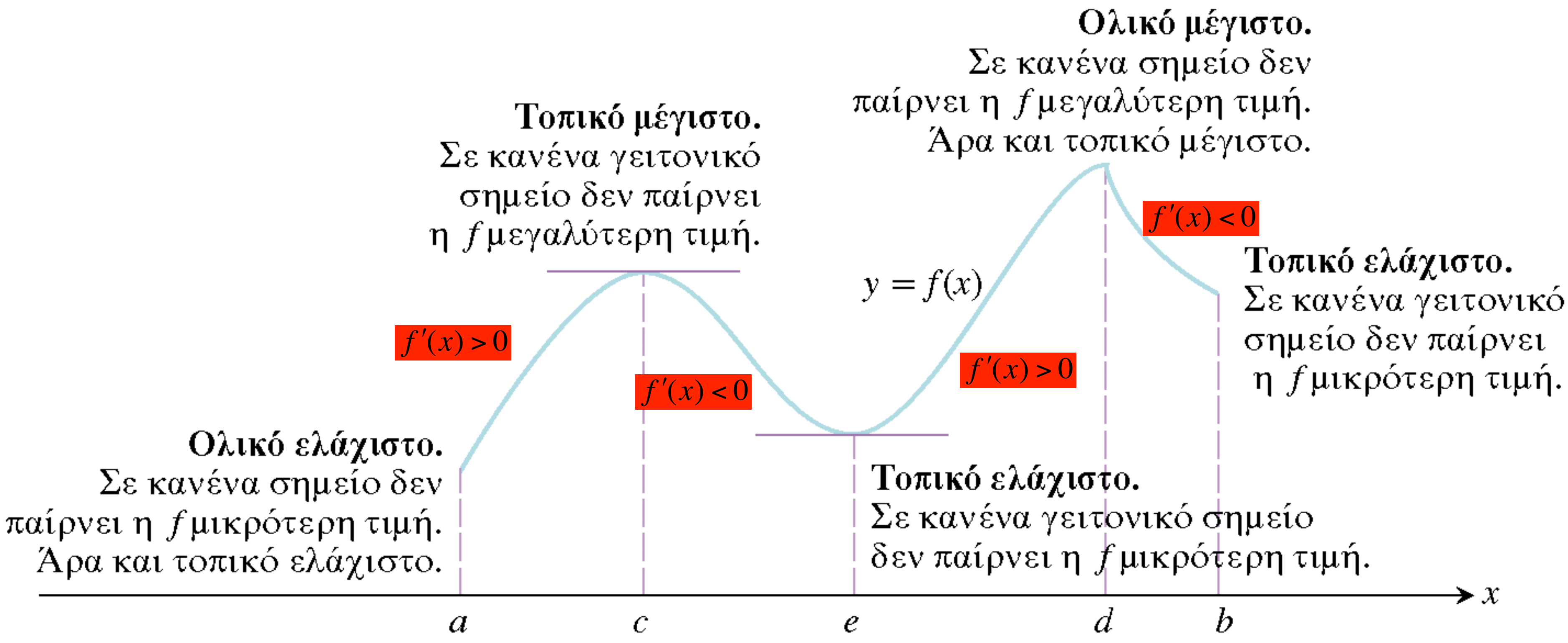




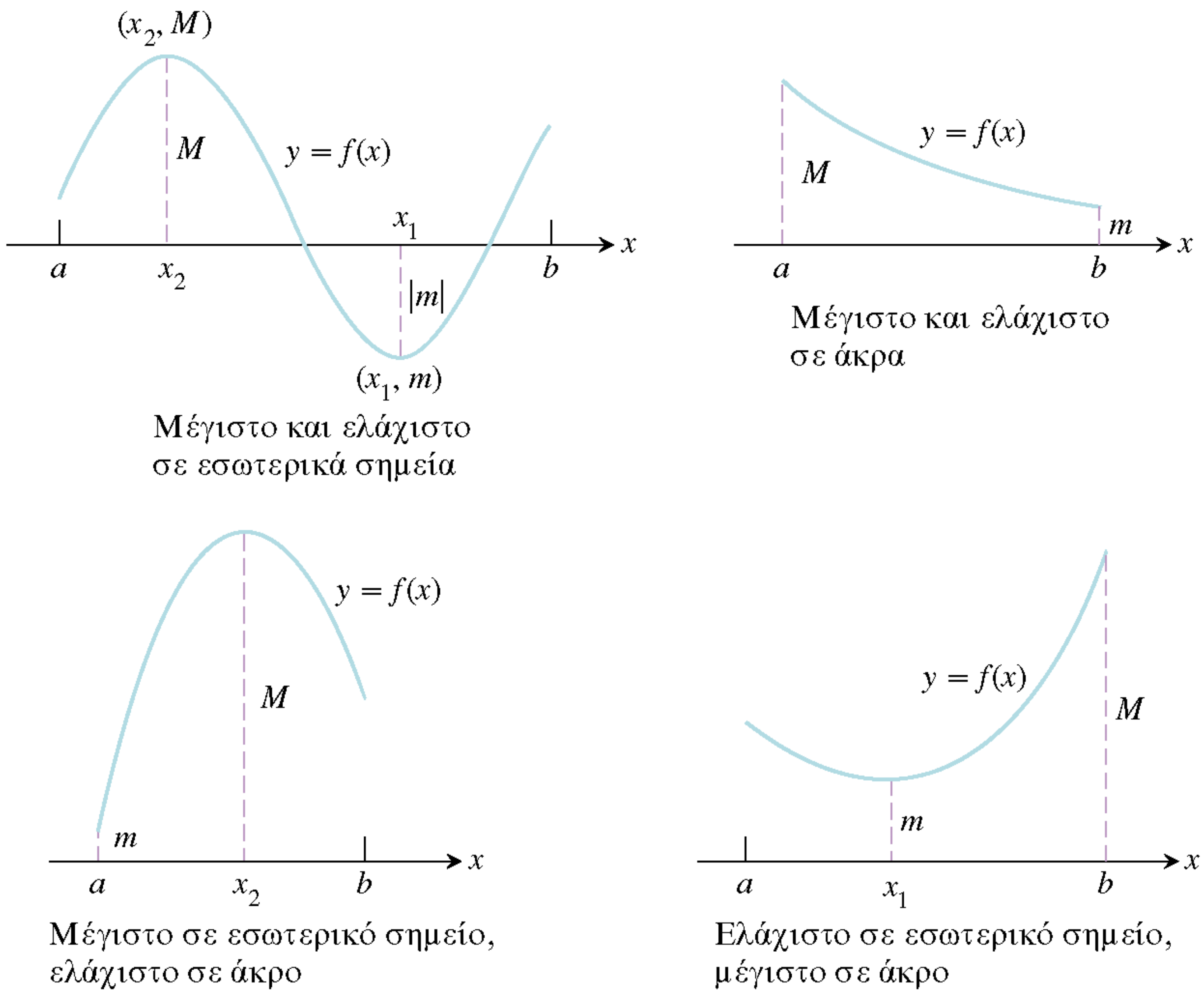




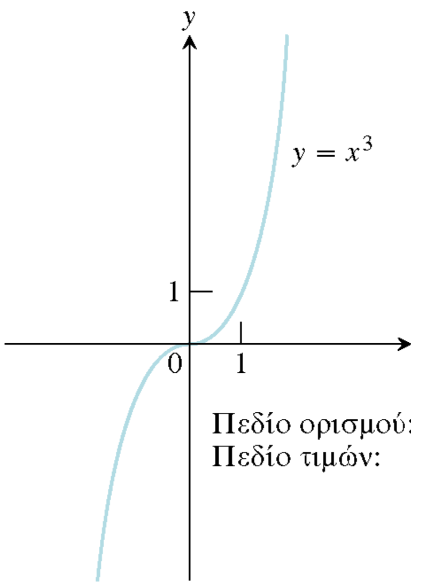
Μέγιστα και ελάχιστα συνάρτησης $y = f(x)$



ΣΧΗΜΑ 3.1 Ταξινόμηση μεγίστων και ελαχίστων.



ΣΧΗΜΑ 3.4 Τα ακρότατα συναρτήσεως που είναι συνεχής και ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[a\,,b]$ μπορεί να προκύπτουν σε εσωτερικά σημεία ή στα άκρα του διαστήματος.



Προσοχή (1): αν η f(x) είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή και έχει σε ένα εσωτερικό σημείο αυτής της περιοχής τοπικό ακρότατο, τότε σε αυτό το σημείο $df/dx = 0$

Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα (μπορεί η παράγωγος να μηδενίζεται σε κάποιο σημείο και να μην αντιστοιχεί σε ακρότατο!)

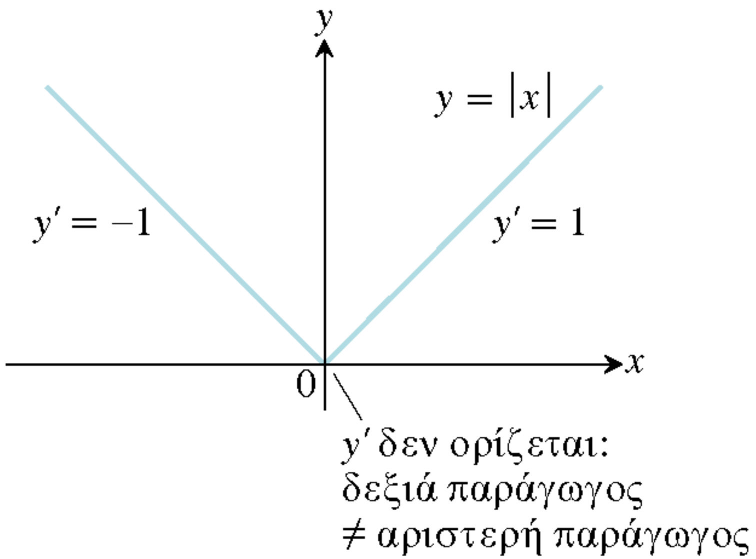
Όμως ο μηδενισμός της παραγώγου σε ένα σημείο *σε συνδυασμό με την εναλλαγή προσήμου* της παραγώγου εκατέρωθεν αυτού του σημείου, αντιστοιχεί σε ακρότατο

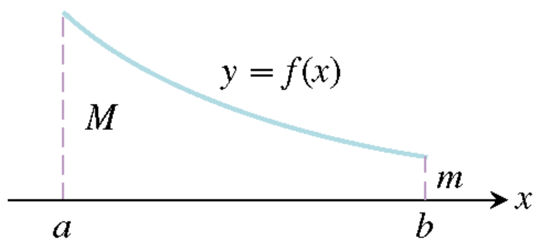
Προσοχή (2): η f(x) μπορεί να εμφανίζει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο χωρίς να μηδενίζεται η παράγωγός της αν:

(ι) είναι ακραίο σημείο του πεδίου ορισμού της

ή

(ιι) σε αυτό το σημείο η παραγωγος δεν ορίζεται.

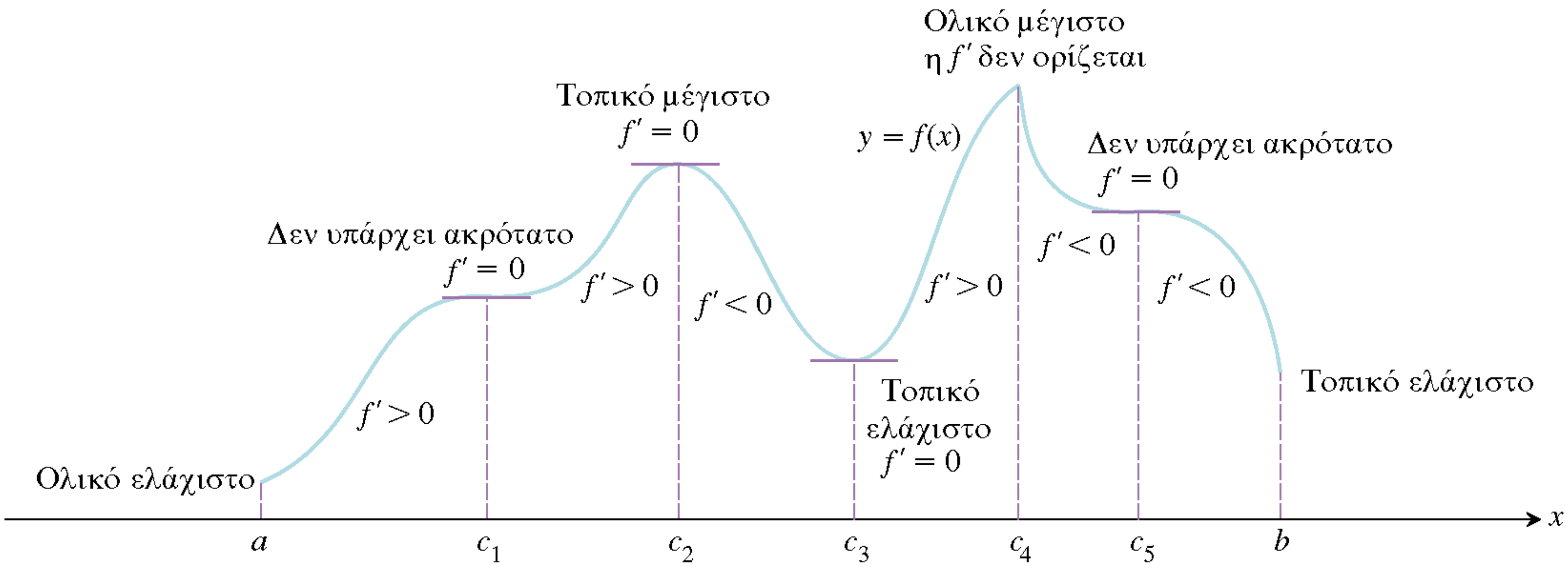




Συμπέρασμα: Για να βρούμε τοπικά ή ολικά ελάχιστα/μέγιστα μιας συνάρτησης *ελέγχουμε* εκείνα τα σημεία όπου:

(ι) η παράγωγός της μηδενίζεται,
(ιι) η παράγωγός της δεν ορίζεται,
(ιιι) τα ακραία σημεία του πεδίου ορισμού της,

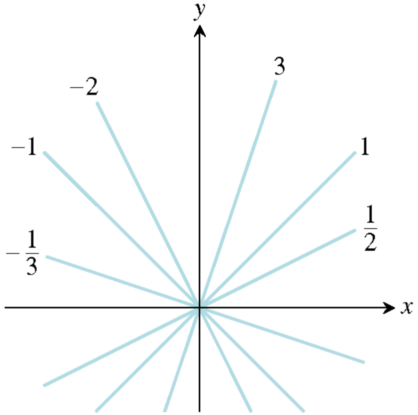
και *κοιτάμε αν εμφανίζουν ακρότατα*
(δεν είναι υποχρεωτικό όλα αυτά τα σημεία να αντιστοιχούν σε ακρότατα, αλλά αν υπάρχουν ακρότατα μπορεί να υπάρχουν μόνο εκεί!)



Παραδείγματα

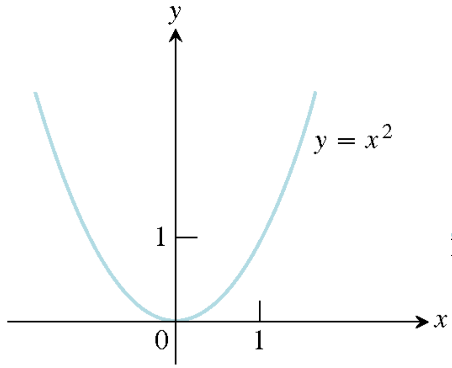
που είναι αύξουσες/φθίνουσες οι συναρτήσεις και που έχουν ακρότατα

Ευθεία $y = mx+b$

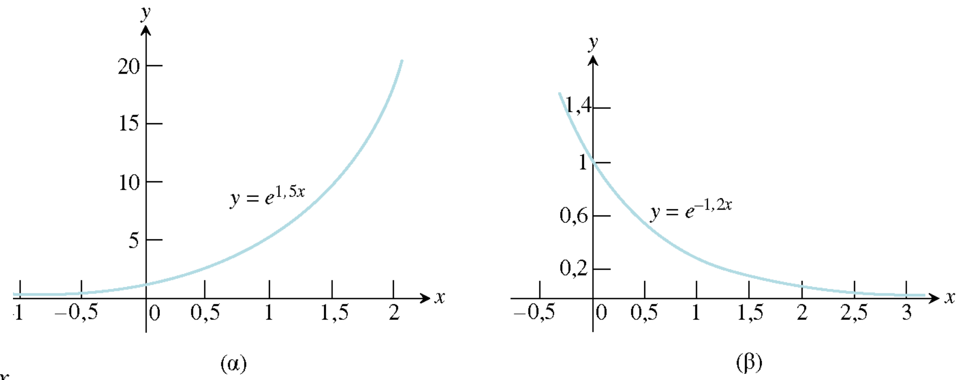


$y = mx$ για διάφορες τιμές του m

Παραβολή $y = ax^2$



Εκθετική συνάρτηση $y = e^{\kappa x}$

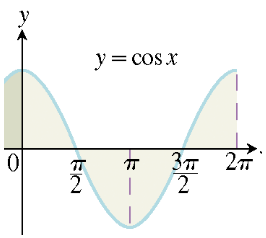


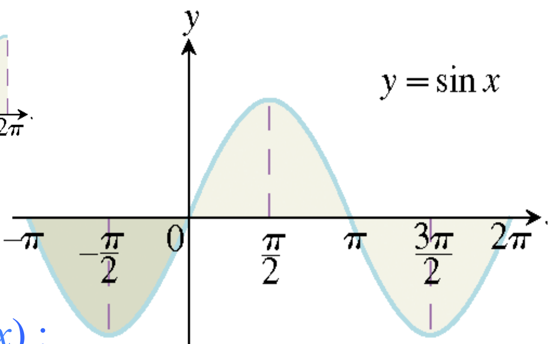
ΣΧΗΜΑ 28 Γραφήματα (α) εκθετικής αυξήσεως, $k = 1{,}5 > 0$ και (β) εκθετικής μειώσεως, $k = -1{,}2 < 0$.

Υπερβολικό ημίτονο: $\sinh(x) = (e^x - e^{-x}) / 2$

Υπερβολικό συνημίτονο: $\cosh(x) = (e^x + e^{-x}) / 2$

Ημίτονο $y = \sin(x)$



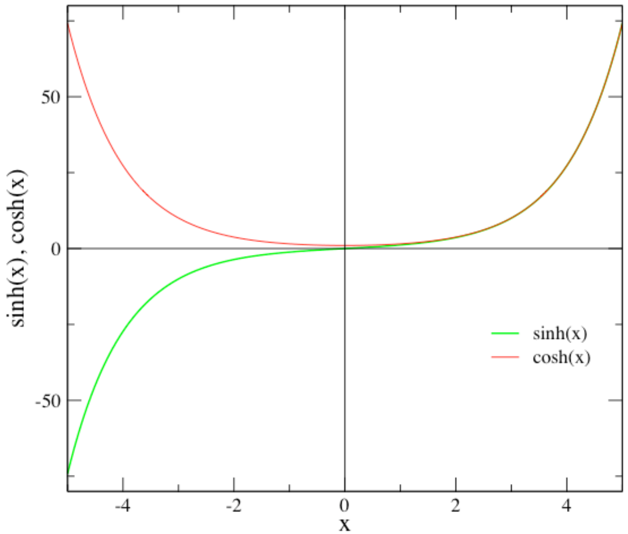


$[\sin(x)]' = \cos(x)$:

θετικό στο $[0,\pi/2),(3\pi/2,2\pi)$

αρνητικό στο $(\pi/2,3\pi/2)$

μηδενίζεται στα σημεία $\pi/2$ και $3\pi/2$



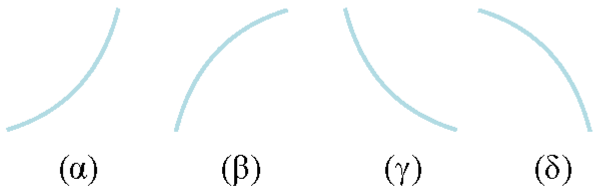
$[\sinh(x)]' = (e^x + e^{-x})/2 = \cosh(x)$

$[\cosh(x)]' = (e^x - e^{-x})/2 = \sinh(x)$

Καμπυλότητα συνάρτησης και δεύτερη παράγωγος

Μια συνάρτηση είναι:

- κοίλη προς τα πάνω (καμπυλώνεται προς τα πάνω) όταν η δεύτερη παράγωγος > 0
- κοίλη προς τα κάτω (καμπυλώνεται προς τα κάτω) όταν η δεύτερη παράγωγος < 0



ΣΧΗΜΑ 3.20 Στο (α) η γραφική παράσταση ανέρχεται και καμπυλώνεται προς τα πάνω. Στο (β) ανέρχεται και καμπυλώνεται προς τα κάτω. Στο (γ) κατέρχεται και καμπυλώνεται προς τα πάνω. Στο (δ) κατέρχεται και καμπυλώνεται προς τα κάτω.

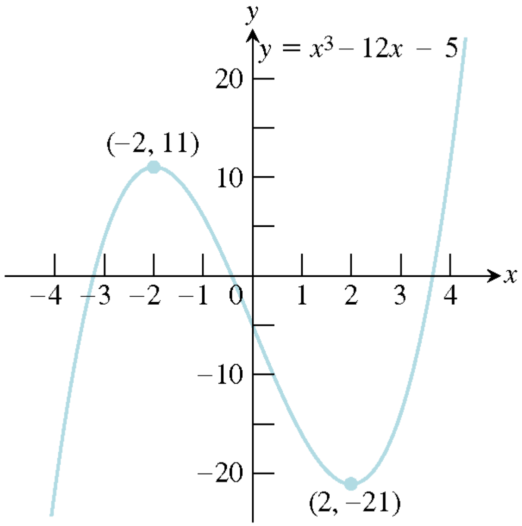
Όσο μεγαλύτερη είναι (κατά απόλυτη τιμή) η δεύτερη παράγωγος, τόσο περισσότερο καμπυλώνει η συνάρτηση στο αντίστοιχο σημείο.

Σημεία που μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος λέγονται σημεία καμπής.

Παραδείγματα:

Ευθεία $y = mx+b$

Παραβολή $y = ax^2$



ΣΧΗΜΑ 3.21 Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 12x - 5$.

Η δεύτερη παράγωγος παρέχει ένα κριτήριο για την εύρεση τοπικού ακροτάτου σε ένα σημείο x :

$(i)\ \ f'(x)=0,\ f''(x)>0 \ \ \Rightarrow$ minimum

$(ii)\ \ f'(x)=0,\ f''(x)<0 \ \ \Rightarrow$ maximum

Ανάπτυγμα Taylor συνάρτησης γύρω από ένα σημείο x_0

Αν γνωρίζουμε σε ένα σημείο x_0 την τιμή της συνάρτησης και όλων των παραγώγων της, μπορούμε να ‘βρούμε’ την τιμή της σε οποιοδήποτε άλλο σημείο, μέσω του αναπτύγματος Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Χρησιμεύει κυρίως για να *προσεγγίσουμε* μια συνάρτηση *γύρω από κάποιο σημείο*, στο οποίο γνωρίζουμε την τιμή της συνάρτησης και των πρώτων παραγώγων της (κρατώντας τους πρώτους όρους του αναπτύγματος).

Παράδειγμα (1): Ανάπτυγμα της συνάρτησης $\mathrm{f}(x) = \sin(x)$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$

$\mathrm{f}(x) = \sin x$, $d\mathrm{f}/dx = \cos x$, $d^2\mathrm{f}/dx^2 = -\sin x$, $d^3\mathrm{f}/dx^3 = -\cos x$, $d^4\mathrm{f}/dx^4 = \sin x$, … =>

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots = \Sigma_{n=0,1,2,\ldots} (-1)^n\, x^{2n+1}/(2n+1)!$$

Για σημεία x πολύ κοντά στο $x_0 = 0$ (οπότε $|x| \ll 1$) είναι: $\sin x \approx x - x^3/6$

Παράδειγμα (2): Ανάπτυγμα μιας συνάρτησης $\mathrm{f}(x)$ γύρω από ακρότατο στο σημείο x_0

$$\mathrm{f}(x) \approx \mathrm{f}(x_0) + (1/2)\,[d^2\mathrm{f}(x_0)/dx^2]\,(x-x_0)^2 + \ldots$$

αν $d^2\mathrm{f}(x_0)/dx^2 > 0$ => ελάχιστο

αν $d^2\mathrm{f}(x_0)/dx^2 < 0$ => μέγιστο

Αόριστο ολοκλήρωμα συνάρτησης f(x)

Το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f(x) είναι μια άλλη συνάρτηση $F(x)$ της οποίας η παράγωγος ισούται με f(x):

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Στην πράξη για τον υπολογισμό αόριστου ολοκληρώματος λύνουμε μια διαφορική εξίσωση

Αν η $F(x)$ ικανοποιεί την $dF/dx =$ f(x) τότε και η $F(x)+C$, όπου C σταθερά, ικανοποιεί την ίδια σχέση, οπότε και η $F(x)+C$ είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f(x)

Επομένως το αόριστο ολοκλήρωμα της f(x) υπολογίζεται με την απροσδιοριστιά μιας σταθεράς (όπως και η λύση της Διαφορικής Εξίσωσης $dF/dx =$ f(x) υπολογίζεται με την απροσδιοριστία μιας αυθαίρετης σταθεράς)

Παραδείγματα:

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C \qquad \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \int (x^5 - 2x + 3)\,dx = \frac{x^6}{6} - x^2 + 3x + C \qquad \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$\int (2x^3 - 5)\,dx = \frac{x^4}{2} - 5x + C \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C \qquad \int x^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C & n \neq -1 \\ \ln(x) + C & n = -1 \end{cases}$$

Ιδιότητες: $\int a\, f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ $\int \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Προσδιορισμός της σταθεράς της ολοκλήρωσης

Αν γνωρίζουμε την τιμή της ζητούμενης συνάρτησης σε ένα σημείο: $F(x_0) = y_0$

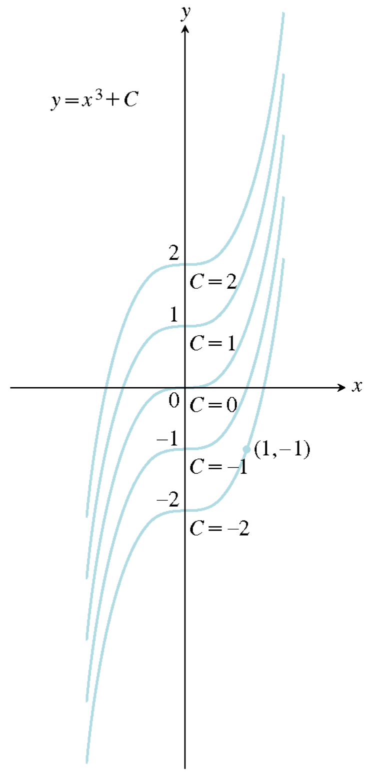
Υπάρχει μόνο μία συνάρτηση από την οικογένεια των συναρτήσεων $F(x)+C$, που να περνάει από το σημείο (x_0,y_0)

Παράδειγμα: Να βρεθεί η συνάρτηση που είναι το ολοκλήρωμα της $f(x) = 3x^2$ και περνάει από το σημείο (1,–1)

$$F(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$F(1) = 1 + C = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -2$$

$$F(x) = x^3 - 2$$



ΣΧΗΜΑ 4.1 Οι καμπύλες $y = x^3 + C$ γεμίζουν το επίπεδο χωρίς να επικαλύπτονται. Από αυτές επιλέγουμε στο Παράδειγμα 4 την καμπύλη $y = x^3 - 2$ ως τη μόνη που διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

Ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης

Το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f(x)
από το a ως το b είναι ο αριθμός $F(b)–F(a)$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Δεν έχει σημασία ποια από τις συναρτήσεις $F(x)+C$ θα επιλεγεί για τον υπολογισμό ορισμένου ολοκληρώματος (του δεύτερου μέλους), αφού αν $G(x) = F(x)+C$ τότε $G(b)–G(a) = F(b)–F(a)$

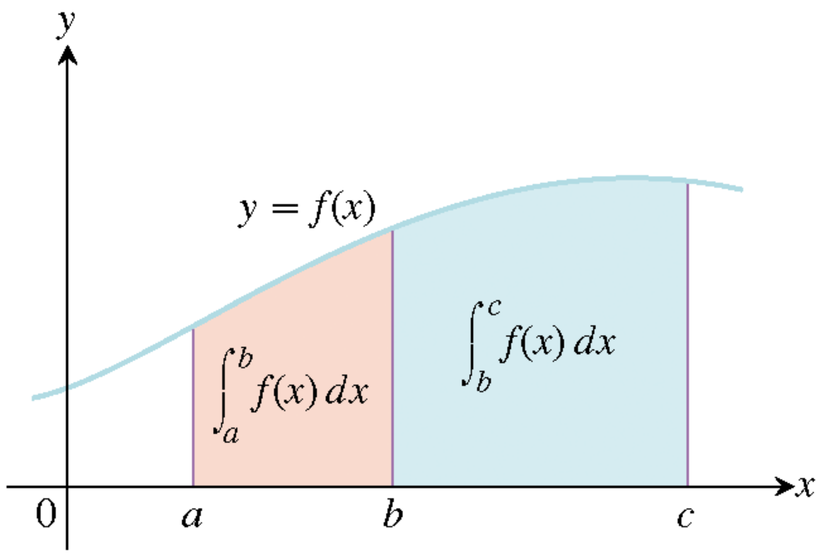
Το αόριστο ολοκλήρωμα συνάρτησης είναι συνάρτηση, ενώ το ορισμένο είναι αριθμός

Παράδειγμα:

Να βρεθεί το αόριστο ολοκλήρωμα της f(x) = 5 sin$x$ και
το ορισμένο της ολοκλήρωμα από το 0 ως το π

$$\int 5\sin(x)dx = -5\cos(x) + C$$

$$\int_0^{\pi} 5\sin(x)dx = -5\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -5\left[\cos(\pi) - \cos(0)\right] = -5(-1-1) = 10$$



Ορισμένο ολοκλήρωμα της f(x) και εμβαδό που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης f(x)

$$\int_a^c f(x)dx = \text{area under f(x) from a to c}$$

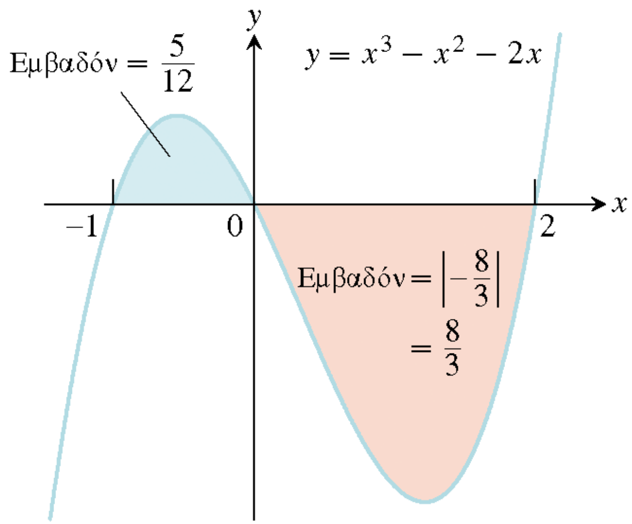
Ορισμένο ολοκλήρωμα συναρτήσεων που έχουν και αρνητικές τιμές

$$\int (x^3 - x^2 - 2x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + C$$

$$\int_{-1}^{0} \left(x^3 - x^2 - 2x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{2} \left(x^3 - x^2 - 2x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{0}^{2} = 4 - \frac{8}{3} - 4 = -\frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^{2} \left(x^3 - x^2 - 2x\right)dx = -\frac{8}{3} + \frac{5}{12} = -\frac{27}{12}$$

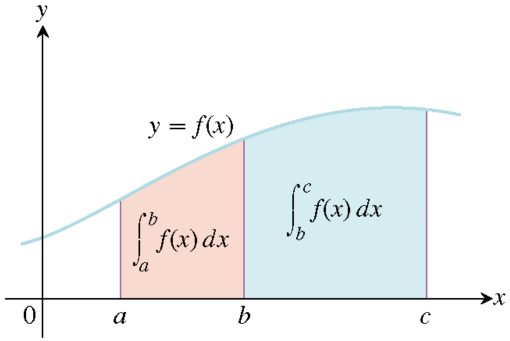


ΣΧΗΜΑ 4.17 Το χωρίο μεταξύ της καμπύλης $y = x^3 - x^2 - 2x$ και του άξονα x. (Παράδειγμα 8)

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

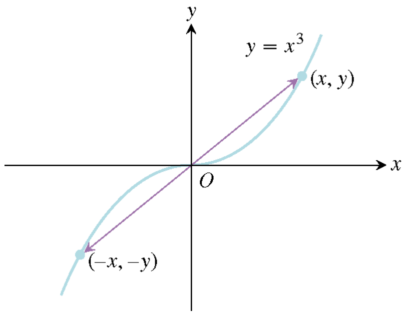
$$F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) \qquad F(a) - F(a) = 0$$



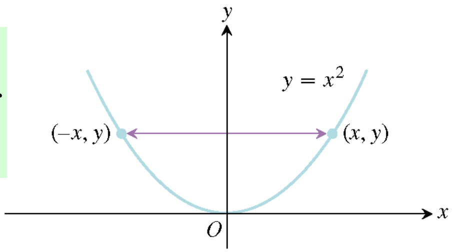
ΣΧΗΜΑ 4.12 Κανόνας 5:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

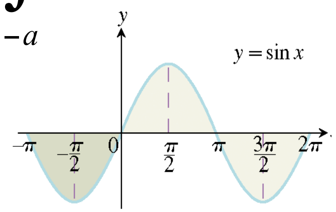
$$f(x)\ \text{odd} \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$



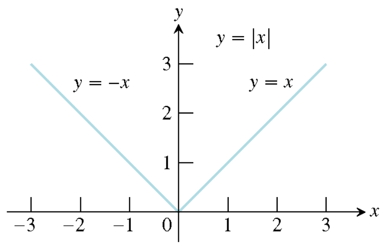
$$f(x)\ \text{even} \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$



π.χ.: $\int_{-a}^{a} \sin(x)dx = 0 \qquad \int_{-a}^{a} (x^3 - x)dx = 0$



$$\int_{-a}^{a} |x|dx = 2\int_0^a xdx = x^2\Big|_0^a = a^2$$



I. Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με αντικατάσταση

Παράδειγμα:

$$\int \sin^2(x)\cos(x)dx \qquad u(x)=\sin(x),\quad \frac{du}{dx}=\cos(x)$$

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3}+C = \frac{\sin^3(x)}{3}+C$$

Προσοχή στα όρια, για ορισμένα ολοκληρώματα

$$\int_a^b \sin^2(x)\cos(x)dx = \int_{\sin(a)}^{\sin(b)} u^2 du$$

Παραδείγματα:

$$u=4-x^2$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u}+C = -\sqrt{4-x^2}+C$$

$$\int 16x\sin^3(2x^2+1)\cos(2x^2+1)\,dx = \int 4\sin^3(u)\cos(u)\,du = \int 4w^3\,dw = \sin^4(2x^2+1)+C$$

$$u=2x^2+1$$
$$w=\sin(u)$$

$$u=2x^3+9$$

$$\int_0^2 \frac{6x^2}{\sqrt{2x^3+9}}dx = \int_{2\cdot 0+9}^{2\cdot 8+9} \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_9^{25}\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}\Big|_9^{25} = 4$$

II. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int \frac{du}{dx}v dx$$

αφού

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$$

για ορισμένα ολοκληρώματα:

$$\int_a^b u\frac{dv}{dx}dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b \frac{du}{dx}v dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b \frac{du}{dx}v dx$$

Παραδείγματα:

$$\int \ln(x)dx = \int \ln(x)(x)'\,dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}x\,dx = x\ln(x) - x + C$$

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x(e^x)'\,dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - 0 - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1$$