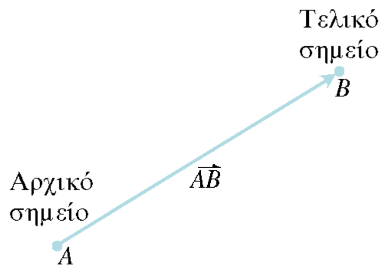
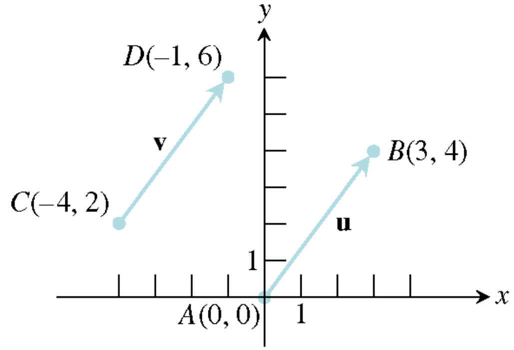
Διανύσματα στο επίπεδο





Ένα διάνυσμα $\vec{v}$ έχει αρχικό και τελικό σημείο.

Χαρακτηρίζεται από:

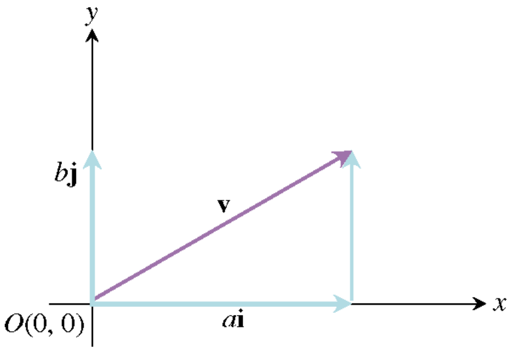
- διεύθυνση (ευθεία επί της οποίας κείται)
- φορά (προς ποια κατεύθυνση της ευθείας δείχνει)
- μέτρο (το μήκος του, $|\vec{v}|$ ή $\|\vec{v}\|$)

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν έχουν
ίσα μήκη και
ίδια κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά)

$$|\vec{u}| = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(-1-(-4)\right)^2 + (6-2)^2} = 5$$

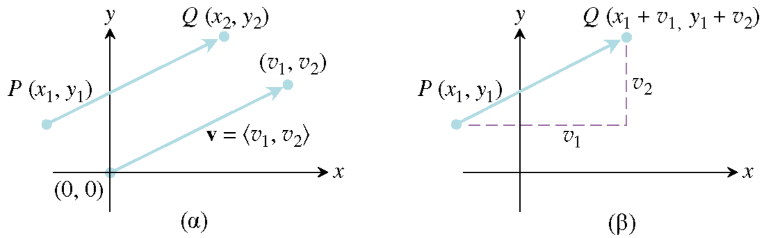
Συνιστώσες δανύσματος



$$\vec{v}\ (a,b)$$

$$\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



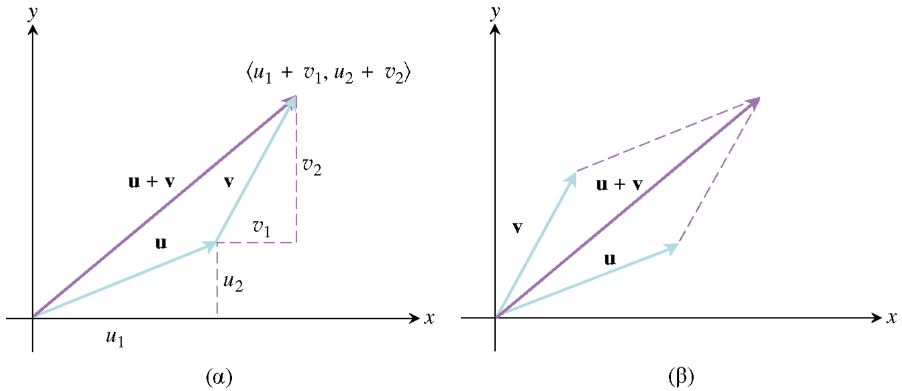
Σχημα 9.4 (α) Πρότυπη θέση διανύσματος έχουμε όταν το αρχικό του σημείο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. (β) Οι συντεταγμένες του Q ικανοποιούν τις σχέσεις $x_2 = x_1 + v_1$ και $y_2 = y_1 + v_2$.

Ένα διάνυσμα στο επίπεδο είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (a,b)

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Αλγεβρικές πράξεις μεταξύ διανυσμάτων

διανυσματική πρόσθεση



ΣΧΗΜΑ 9.8 (α) Γεωμετρική αναπαράσταση του αθροίσματος διανυσμάτων. (β) Ο κανόνας του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση διανυσμάτων.

$$\vec{u}\ (u_1, u_2)$$

$$\vec{v}\ (v_1, v_2)$$

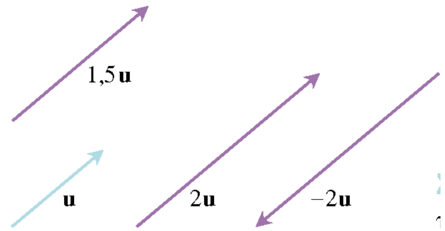
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{w}\ (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Μηδενικό διάνυσμα

$$\vec{0}\ (0,0)$$

έχει μέτρο μηδέν και είναι το μόνο που δεν έχει συγκεκριμένη κατεύθυνση

πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό



$$\vec{u}\ (u_1, u_2)$$

$$k\vec{u}\ (ku_1, ku_2)$$

$$|k\vec{u}| = \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2} = |k| \cdot |\vec{u}|$$

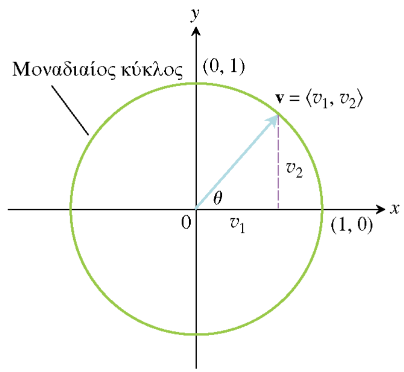
Μοναδιαίο διάνυσμα

$$|\vec{v}| = 1$$

$$\vec{v}\ (v_1, v_2)$$

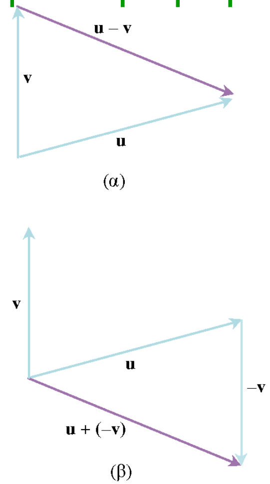
$$v_1^2 + v_2^2 = 1$$

Για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{u}$ το $\vec{u}/|\vec{u}|$ είναι μοναδιαίο και έχει την κατεύθυνση του $\vec{u}$



ΣΧΗΜΑ 9.7 Το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ έχει μήκος 1, οπότε $v_1 = \cos\theta$ και $v_2 = \sin\theta$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το $\mathbf{v}$ με τον

διανυσματική αφαίρεση



ΣΧΗΜΑ 9.10 (α) Το διάνυσμα $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, προστιθέμενο στο $\mathbf{v}$, μας δίνει το $\mathbf{u}$.
(β) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Ιδιότητες

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

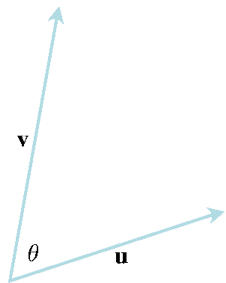
$$0\vec{u} = \vec{0} \qquad 1\vec{u} = \vec{u}$$

$$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

$$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων (αριθμός)



ΣΧΗΜΑ 9.15 Η γωνία μεταξύ των **u** και **v**.

$$\vec{u}\ (u_1, u_2)$$

$$\vec{v}\ (v_1, v_2)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$= |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\theta)$$

Η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων υπολογίζεται από το εσωτερικό γινόμενο:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Ιδιότητες

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

$$(c\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(c\vec{v}) = c(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$$

$$\vec{0}\cdot\vec{u} = 0$$

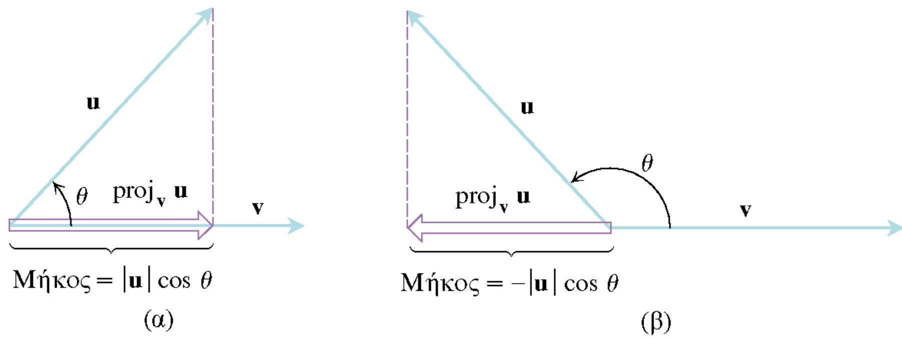
Ορθογώνια (κάθετα) διανύσματα

Δύο (μη μηδενικά) διανύσματα είναι κάθετα
αν και μόνο αν
το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν

Προβολή διανύσματος πάνω σε άλλο διάνυσμα

$$proj_{\vec{v}}\ \vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$$

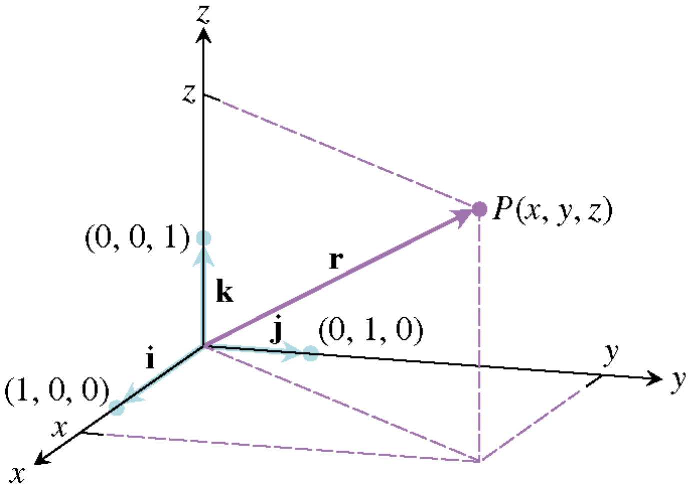
Η συνιστώσα του πρώτου διανύσματος (φέρνοντας κάθετη) στο δεύτερο διάνυσμα



ΣΧΗΜΑ 9.20 Το μήκος της proj$_{\mathbf{v}}$ **u** ισούται με (α) $|\mathbf{u}|\cos\theta$ αν $\cos\theta \geq 0$ και (β) $-|\mathbf{u}|\cos\theta$ αν $\cos\theta < 0$.

Διανύσματα στον χώρο (στις 3 διαστάσεις)

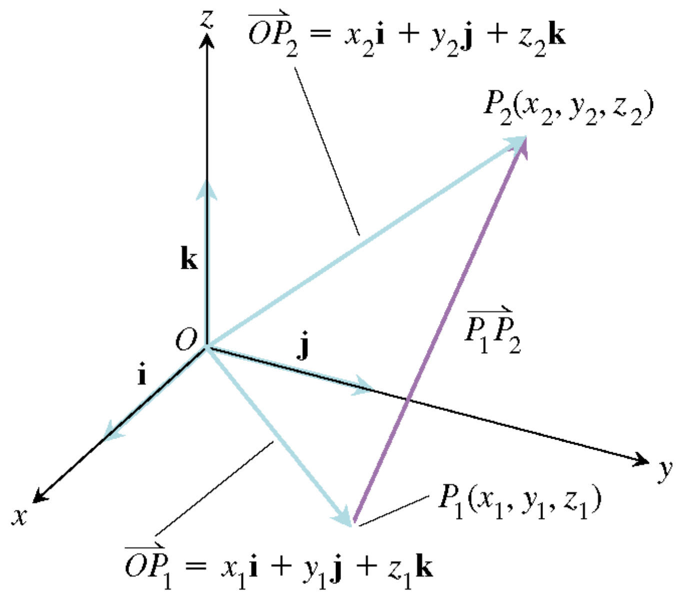
Άμεση γενίκευση όσων αναφέραμε για τα διανύσματα στο επίπεδο καθώς και των πράξεων και των ιδιοτήτων τους



$$\vec{P}\ (x, y, z)$$

$$\vec{P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\left|\vec{P}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



ΣΧΗΜΑ 10.5 Το διάνυσμα από το P_1 στο P_2 είναι $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$.

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων (διάνυσμα)

Εκτός από το *εσωτερικό γινόμενο* δύο διανυσμάτων στον χώρο, που είναι αριθμός, και ορίζεται όπως πριν

$$\vec{u}\ (u_1, u_2, u_3)$$
$$\vec{v}\ (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$
$$= |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\theta)$$

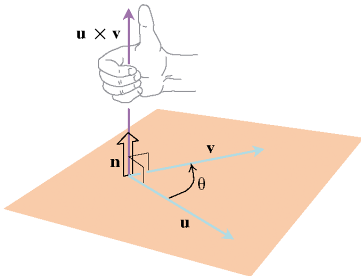
ορίζεται και ένα άλλο γινόμενο (*εξωτερικό γινόμενο*) που είναι διάνυσμα

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left(|\vec{u}||\vec{v}|\sin(\theta)\right)\hat{n}$$

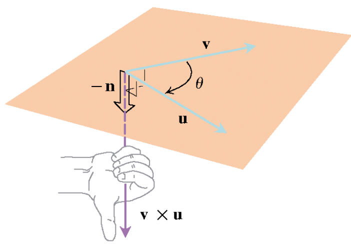
Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου είναι

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\,|\sin(\theta)|$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$
είναι κάθετο στο επίπεδο των $\vec{u},\vec{v}$
και η φορά του δίνεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου χεριού



ΣΧΗΜΑ 10.12 Γεωμετρική κατασκευή του **u** × **v**.



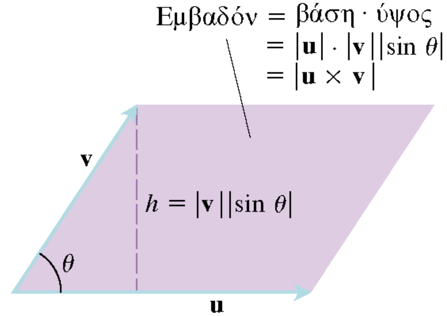
ΣΧΗΜΑ 10.13 Γεωμετρική κατασκευή του **v** × **u**.

Ιδιότητες

$$\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$$
$$(a\vec{u})\times(b\vec{v}) = ab\ (\vec{u}\times\vec{v})$$
$$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$$
$$(\vec{v}+\vec{w})\times\vec{u} = \vec{v}\times\vec{u}+\vec{w}\times\vec{u}$$
$$\vec{0}\times\vec{u} = \vec{0}$$

Παράλληλα διανύσματα

Δύο (μη μηδενικά) διανύσματα είναι παράλληλα
αν και μόνο αν
το εξωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν



Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δίνει το εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $\vec{u},\vec{v}$

Διανυσματικοί Χώροι

Διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο στοιχείων ('διανυσμάτων'), εφοδιασμένο με μια πράξη 'πρόσθεσης' μεταξύ τους (+) και μια πράξη 'πολλαπλασιασμού' τους με αριθμούς (•), έτσι ώστε αυτές οι πράξεις

i) να παράγουν στοιχεία εντός του συνόλου και

ii) να ικανοποιούν τις ιδιότητες:

$$x + y = y + x$$
$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
$$x + 0 = x, \quad \forall x$$
$$x + (-x) = 0$$
$$1 \cdot x = x$$
$$(ab) \cdot x = a \cdot (bx)$$
$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$$
$$(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$$

όπου x,y,z διανύσματα,
$1,a,b$ αριθμοί,
0 το μοναδικό *μηδενικό* διάνυσμα,
$(-x)$ το μοναδικό *αντίθετο* του x.

Παραδείγματα:

-- Τα διανύσματα $x(x_1,x_2,x_3)$ του πραγματικού τριδιάστατου χώρου σχηματίζουν τον διανυσματικό χώρο R^3

-- Τα διανύσματα $x(x_1,x_2)$ του διδιάστατου χώρου (επίπεδο) σχηματίζουν τον διανυσματικό χώρο R^2

-- Τα διανύσματα x μιας μονοδιάστατης ευθείας σχηματίζουν τον διανυσματικό χώρο R^1

-- Γενικά τα διανύσματα $x(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ενός n-διάστατου χώρου σχηματίζουν τον διανυσματικό χώρο R^n
(οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλ/μού γίνονται συνιστώσα προς συνιστώσα, όπως στα οικεία διανύσματα)

-- Οι συναρτήσεις $f(x)$ που ορίζονται σε ένα διάστημα $a<x<b$ σχηματίζουν έναν διανυσματικό χώρο

Υπόχωροι διανυσματικών χώρων

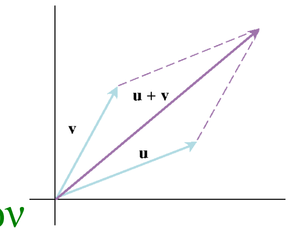
Υπόχωρος ενός διαν. χώρου είναι ένα μη κενό υποσύνολό του, που ικανοποιεί τις απαιτήσεις:
i) το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε διανυσμάτων του υποχώρου περιέχεται στον υπόχωρο και
ii) το πολλαπλάσιο κάθε διανύσματος του υποχώρου με οποιονδήποτε αριθμό περιέχεται στον υπόχωρο.

Δηλαδή ο υπόχωρος είναι ένα υποσύνολο, *'κλειστό' ως προς την πρόσθεση και τον πολλ/σμό με αριθμούς.*

Κάθε υπόχωρος πρέπει να περιέχει το μηδενικό διάνυσμα.

Παραδείγματα:

-- Όλα τα επίπεδα και οι ευθείες του πραγματικού τριδιάστατου χώρου που περνάνε από την αρχή των αξόνων είναι υπόχωροι του R^3



-- Όλες οι ευθείες του διδιάστατου επιπέδου που περνάνε από την αρχή των αξόνων είναι υπόχωροι του R^2

Γραμμικώς ανεξάρτητα/εξαρτημένα διανύσματα

Τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ενός διαν. χώρου είναι ***γραμμικώς ανεξάρτητα*** αν ο *μόνος* γραμμικός συνδυασμός τους που δίνει μηδέν, $c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_kv_k=0$ (1), ισχύει για $c_1=c_2=\ldots=c_k=0$.
Αλλιώς, αν υπάρχουν $c_i \neq 0$ που ικανοποιούν την (1), τα διανύσματα είναι ***γραμμικώς εξαρτημένα***.

Π.χ. 2 διανύσματα που περιέχονται στην ίδια ευθεία, ή 3 που περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, είναι γρ. εξαρτημένα.
Αντίθετα 2 μη-συγγραμικά (ή 3 μη-συνεπίπεδα) διανύσματα είναι γρ. ανεξάρτητα.
Τα διανύσματα ***u*** και ***v*** του παραπάνω σχήματος είναι γρ. ανεξάρτητα, ενώ τα ***u***, ***v*** και ***w***=***u***+***v*** είναι γρ. εξαρτημένα.

Βάση ενός διαν. χώρου είναι ένα σύνολο διανυσμάτων $v_1, v_2, \ldots, v_k$ που *i)* είναι γρ. ανεξάρτητα και *ii)* κάθε διάνυσμα *w* του χώρου μπορεί να γραφεί ως γραμμ. συνδυασμός τους $w=c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_kv_k$

Π.χ. τα διανύσματα (1,0) και (0,1) αποτελούν μια βάση του R^2. Το ίδιο και τα (2,0) και (1,1).

Υπάρχουν διαφορετικές βάσεις ενός διαν. χώρου, αλλά όλες έχουν το ίδιο πλήθος διανυσμάτων που ισούται με την **διάσταση** *του διαν. χώρου. Π.χ. ο R^2 έχει διάσταση 2, ενώ ο R^n έχει διάσταση n.*

Μητρώα

Ένα μητρώο *nxm* έχει *n*m* το πλήθος στοιχεία διατεταγμένα σε *n* γραμμές και *m* στήλες

$$A=\begin{pmatrix}2&5\\3&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\7&-1&1\\6&12&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&9&4\\-8&-2&5\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}7&-9&14\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}23\\-15\\0\\4\end{pmatrix}$$

μητρώο *2x2* *3x3* *2x3* *1x3* *4x1*

Με M_{ij} αναφέρεται το *i,j* στοιχείο ενός μητρώου *M* (π.χ. $A_{11}=2$, $A_{21}=3$, $B_{32}=12$, $C_{12}=9$, $D_{12}=-9$, $E_{41}=4$)

Ένα μητρώο *nx1* αναφέρεται και ως *διάνυσμα στήλη* και αντιπροσωπεύει ένα διάνυσμα του R^n

Πρόσθεση-αφαίρεση μητρώων *ίδιου μεγέθους* $(A \pm B)_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}$

Πολλαπλασιασμός μητρώου με σταθερά $(cA)_{ij} = cA_{ij}$

Παραδείγματα:

$$\begin{pmatrix}2&5\\3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\4&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5\\7&-4\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}7&-9&14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-3&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-6&6\end{pmatrix}\qquad (-2)\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\0\\-6\end{pmatrix}$$

Μηδενικό μητρώο 0, μεγέθους *nxm*: όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν

Το σύνολο των μητρώων *nxm* αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο διάστασης *n*m*

Πολλαπλασιασμός μητρώων *nxm* και *mxp* δίνει μητρώο *nxp* $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj} = A_{i1}B_{1j} + \ldots + A_{im}B_{mj}$

Παραδείγματα:

$$\begin{pmatrix}4&3\\0&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0&-1\\2&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26&3&2\\-4&-2&-4\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1&1\\4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\14&8\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}3&2\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&7\\1&1\end{pmatrix}$$

Εν γένει για *nxn* μητρώα: $AB \neq BA$

Δύο μητρώα (του ίδιου μεγέθους *nxm*) είναι ίσα, αν έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ένα προς ένα ίσα

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} = B_{ij}$$

Για *nxn* μητρώα (*τετραγωνικά* μητρώα) ισχύουν οι ακόλουθοι ορισμοί

Ανάστροφο μητρώο (ανταλλαγή γραμμών και στηλών)
(ο ορισμός ισχύει και για μη τετραγωνικά, *nxm* μητρώα)

$$A^T : \qquad (A^T)_{ij} = A_{ji}$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Αντίστροφο μητρώο $\qquad A^{-1} : \qquad AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

όπου *I* το ταυτοτικό μητρώο: $I_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Ένα μητρώο λέγεται *ορθογώνιο* αν $\quad A^T = A^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad AA^T = A^T A = I$

Ένα μητρώο λέγεται *συμμετρικό* αν $\quad A = A^T \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} = A_{ji}$ $\qquad \pi.\chi. \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ένα μητρώο λέγεται *αντισυμμετρικό* αν $\quad A = -A^T \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} = -A_{ji}$ $\qquad \pi.\chi. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

Ένα μητρώο λέγεται *διαγώνιο* αν $A_{ij}=0$ για $i \neq j$ $\qquad \pi.\chi. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Ένα μητρώο λέγεται *κάτω* (ή *άνω*) *τριγωνικό* αν $A_{ij}=0$ για $i<j$ (για $i>j$, αντίστοιχα), δηλαδή όλα τα στοιχεία πάνω (κάτω) από την διαγώνιο είναι μηδέν

$$\pi.\chi. \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Εσωτερικό γινόμενο και ορθογώνια διανύσματα στον R^n

Το ***εσωτερικό γινόμενο*** δύο διανυσμάτων $x(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ και $y(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ του R^n ισούται με τον αριθμό $x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$

Υπό μορφή μητρώων, αν τα *x* και *y* εκφραστούν σαν *nx1* διανύσματα στήλες

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

το εσωτερικό γινόμενο γράφεται σαν x^Ty $(=y^Tx)$, όπου x^T το *1xn διάνυσμα γραμμή* που είναι το ανάστροφο του *διανύσματος στήλης x.*

$$x^Ty=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2\cdots+x_ny_n=y^Tx$$

Δύο διανύσματα του R^n είναι *ορθογώνια* (*κάθετα*), αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν, $x^Ty=0$

Π.χ. τα διαν. (3,0,0) και (0,-1,2), ή τα (1,1,1) και (1,1,-2), του R^3. Το ίδιο και τα (2,-4,0,0) και (2,1,-3,7) του R^4.

Το *μήκος* $||x||$ ενός διανύσματος του R^n είναι η θετική τετραγωνική ρίζα του $\|x\|^2=x^Tx=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$

Δύο υπόχωροι V και W του R^n είναι ορθογώνιοι, αν κάθε διάνυσμα *v* του *V* είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα *w* του *W*, δηλ. $v^Tw=0$ για κάθε *v* και *w.*

Π.χ. στον R^3 η ευθεία κατά τον άξονα *x* είναι ορθογώνια στην ευθεία κατά τον άξονα *y*, ή στο επίπεδο *yz.*

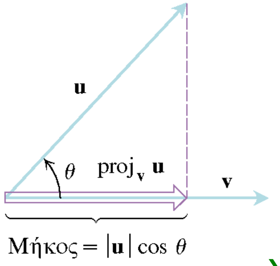
Ο χώρος *όλων* των διανυσμάτων του R^n που είναι ορθογώνια σε έναν υπόχωρο *V*, ονομάζεται *ορθογώνιο συμπλήρωμα* του *V.* Ισχύει $dim(V) + dim(V^{ορθ.συμπλ.}) = dim(R^n)$, όπου *dim* η διάσταση τους.

Μη μηδενικά διαν. $v_1,v_2,\ldots,v_k$ που είναι ορθογώνια μεταξύ τους, είναι και γρ. ανεξάρτητα.

Μια βάση ενός διαν. χώρου που αποτελείται από ορθογώνια διαν., λέγεται *ορθογώνια βάση*. Αν επιπλέον τα διανύσματα είναι και μοναδιαία (έχουν μήκος 1), η βάση λέγεται *ορθοκανονική*.

Π.χ. τα διαν. (1,1) και (1,-1) αποτελούν ορθογώνια βάση του R^2, σε αντίθεση με την βάση των (1,1) και (1,0). Τα 1/√2 (1,1) και 1/√2 (1,-1), όπως επίσης και τα (1,0) και (0,1), απότελούν μια ορθοκανονική βάση του R^2.

Προβολές και αντίστοιχα μητρώα



Έχουμε δει στον R^2 (ή στον R^3) την προβολή ενός διανύσματος u πάνω στην ευθεία του διανύσματος v, σαν το διάνυσμα της συνιστώσας του u (φέρνοντας κάθετη) στο v.

$$proj_{\vec{v}}\ \vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$$

Υπό μορφή μητρώων, το διάνυσμα της προβολής μπορεί να γραφεί ως (το vv^T είναι τετραγωνικό μητρώο 3x3)

$$\left(\frac{v^T u}{v^T v}\right)v = v\left(\frac{v^T u}{v^T v}\right) = \frac{vv^T}{v^T v}u$$

$$\frac{c}{c'}\cdot(3x1) = (3x1)\cdot\frac{c}{c'} = \frac{(3x3)}{c'}(3x1)$$

Η σχέση γενικεύεται άμεσα στον R^n, για την προβολή ενός διανύσματος u πάνω στην ευθεία του διανύσματος v, με τα u και v διανύσμ. στήλες $nx1$.

Το αποτέλεσμα της προβολής του u στο v μπορεί να γραφεί σαν την δράση στο διάν. u, ενός μητρώου προβολής P_v (προβολής στον υπόχωρο της ευθείας του v)

$$P_v u = \frac{vv^T}{v^T v}u$$

Το nxn μητρώο προβολής στον υπόχωρο της ευθείας του v είναι: $P_v = \dfrac{vv^T}{v^T v}$

Π.χ. το μητρώο προβολής στην ευθεία (2,0,0), δηλ. τον άξονα x, του R^3 είναι:
Δρώντας στο τυχόν διάνυσμα $u(u_1,u_2,u_3)$, δινει $P_x u = (u_1,0,0)$

$$P_x = \frac{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Τα παραπάνω που αφορούν προβολές σε ευθείες (μονοδιάστατους υπόχωρους), γενικεύονται για προβολές σε υπόχωρους οποιασδήποτε διάστασης.

Το μητρώο προβολής σε έναν υπόχωρο δίνεται από την σχέση: $P = A(A^T A)^{-1}A^T$

όπου A ένα μητρώο που έχει σαν στήλες ένα σύνολο διανυσμάτων βάσης του υποχώρου προβολής.

Π.χ. χρησιμοποιώντας για το επίπεδο xy του R^3 τα διανύσματα βάσης (1,0,0) και (0,1,0) έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad A^T A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad P_{xy} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Όλα τα μητρώα προβολής έχουν τις ιδιότητες

i) είναι συμμετρικά: $P^T = P$ και *ii)* ισούνται με το τετράγωνό τους: $P^2 = P$

Ορίζουσες *nxn* μητρώων

Η ορίζουσα ενός 2x2 μητρώου $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
είναι ένας αριθμός που υπολογίζεται ως εξής:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad - bc)$$

Η ορίζουσα ενός 3x3 (ή μεγαλύτερης διάστασης) μητρώου μπορεί να υπολογιστεί με ανάπτυγμα ως προς κάποια γραμμή ή στήλη:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = a(ei - fh) - d(bi - ch) + g(bf - ce)$$

Εξωτερικό γινόμενο και ορίζουσα

Το εξωτερικό γινομένο δύο διανυσμάτων
δίνεται από την ορίζουσα

$\vec{u}\ (u_1, u_2, u_3)$

$\vec{v}\ (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(|\vec{u}||\vec{v}|\sin(\theta)\right)\hat{n}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\hat{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\hat{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{k}$$

Γραμμικό Σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \cdots + a_{NN}x_N &= b_N \end{aligned}$$

Αναπαράσταση: $AX = B$

A: το *NxN* μητρώο των συντελεστών

X: το *Nx1* μητρώο των αγνώστων

B: το *Nx1* μητρώο των σταθερών του $2^{ου}$ μέλους

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

Ένας τρόπος επίλυσης του συστήματος δίνεται μέσω οριζουσών μητρώων (κανόνας του Cramer)

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

D=det(A) και D_i είναι η ορίζουσα του μητρώου που προκύπτει από τον *A*, αντικαθιστώντας τα στοιχεία της *i* στήλης με τα στοιχεία του διαν. στήλης *B*.

Το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν *D*≠0

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2$$

Για *ομογενές* σύστημα (*B=0*, δηλ. το σύστημα είναι *AX=0*) όλα τα D_i*=0*, επομένως για να υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις (εκτός των τετριμμένων *X=0*) θα πρέπει *D=0*

Απαλοιφή Gauss

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \cdots + a_{NN}x_N &= b_N
\end{aligned}
$$

Ένας απλός τρόπος επίλυσης του συστήματος *AX=B*, είναι με διαδοχική απαλοιφή των αγνώστων, αφαιρώντας κατάλληλα πολλαπλάσια διαδοχικών εξισώσεων από τις υπόλοιπες.

Π.χ. αφαιρώντας από την *i* εξίσωση (για $i = 2,..,N$) του διπλανού συστήματος, την πρώτη εξίσωση πολλαπλασιασμένη με $\alpha_{i,1}/\alpha_{1,1}$ απαλείφεται ο x_1 από όλες τις εξισώσεις πλην της πρώτης.

Παράδειγμα:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 && (1)\\
4x_1 - 6x_2 \qquad &= -2 && (2)\\
-2x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 9 && (3)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 && (1)\\
-8x_2 - 2x_3 &= -12 && (2)'\\
-2x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 9 && (3)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 && (1)\\
-8x_2 - 2x_3 &= -12 && (2)'\\
8x_2 + 3x_3 &= 14 && (3)'
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 && (1)\\
-8x_2 - 2x_3 &= -12 && (2)'\\
x_3 &= 2 && (3)''
\end{aligned}
$$

1ο βήμα: (2) - [2]*(1) 2ο βήμα: (3) - [-1]*(1) 3ο βήμα: (3)’ - [-1]*(2)’

Το τελευταίο σύστημα που είναι *ισοδύναμο* με το αρχικό (έχει τις ίδιες λύσεις), λύνεται εύκολα με *ανάδρομη αντικατάσταση* (δηλ. βρίσκοντας πρώτα το x_3 από την (3)’’, μετά αντικαθιστώντας το στην (2)’ και βρίσκοντας το x_2, κ.ο.κ.)

Στην απαλοιφή Gauss βασίζεται η παραγοντοποίηση LU, η οποία χρησιμοποιείται για την αριθμητική επίλυση μεγάλων συστημάτων εξισώσεων

Ιδιοτιμές και Ιδιοανύσματα *nxn* μητρώου

Έστω ένα μητρώο *A* μεγέθους *nxn*.

Ένα διάνυσμα *X* μεγέθους *nx1* λέγεται *ιδιοάνυσμα* του *A*, αν το γινόμενο *AX* ισούται με το ίδιο το *X* πολλαπλασιασμένο με μια σταθερά.

Η σταθερά είναι η αντίστοιχη *ιδιοτιμή*.

$$AX = \lambda X$$

X: ιδιοάνυσμα
λ: ιδιοτιμή

Αν το *X* είναι ιδιοάνυσμα του *A* , τότε και το *cX*, όπου *c* οποιαδήποτε σταθερά, είναι επίσης ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή.

Εύρεση ιδιοτιμών:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Για να έχουμε μη μηδενικές λύσεις (*X≠0*) θα πρέπει η αντίστοιχη ορίζουσα των συντελεστών να είναι μηδέν

Εξίσωση Ιδιοτιμών → οι ιδιοτιμές δίνονται από τις ρίζες πολυωνύμου βαθμού *n* ως προς *λ*

Εύρεση ιδιοανύσματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ: επίλυση του συστήματος $AX = \lambda X$

Το σύστημα οδηγεί σε *n-1* ανεξάρτητες εξισώσεις, απ' όπου προσδιορίζονται οι *n-1* συνιστώσες του *X* συναρτήσει της $n^{\text{στης}}$. Επομένως το *X* βρίσκεται με απροσδιοριστία μιας τουλάχιστον πολλαπλασιαστικής σταθεράς

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Εξίσωση Ιδιοτιμών $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(4-\lambda) - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2}$$

Ιδιοτιμή λ_1=7:

$$AX = 7X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 = 7x_1 \\ 5x_1 + 4x_2 = 7x_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -5x_1 + 3x_2 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 = 0 \end{matrix} \qquad \Rightarrow x_1 = \frac{3}{5}x_2$$

Επομένως το ιδιοάνυσμα X_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 =7 είναι το $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 3/5 \\ 1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 3/5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ιδιοτιμή λ_2=-1:

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 = -x_1 \\ 5x_1 + 4x_2 = -x_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 = 0 \end{matrix} \qquad \Rightarrow x_1 = -x_2$$

Επομένως το ιδιοάνυσμα X_2 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2 = -1 είναι το $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Άσκηση: Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι 0, √2 και -√2. Βρείτε τα ιδιοανύσματα του.