1. Δείξτε για την γενική μορφή γραμμικής και ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $2^{ης}$ τάξης, $f''(x)+P(x)f'(x)+Q(x)f(x)=0$, ότι ισχύει η αρχή της επαλληλίας των λύσεων. Δηλαδή αν οι $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, τότε και η $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$, όπου c_1 και c_2 τυχούσες σταθερές, είναι επίσης λύση της διαφορικής εξίσωσης.

2. Μια χημική ή βιοχημική αντίδραση της μορφής: *A -> products* λέμε πως εμφανίζει **κινητική μηδενικής τάξης** (zero-order kinetics), όταν ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης [A] του αντιδρώντος συστατικού είναι σταθερός, δηλαδή **$d[A]/dt=-k$**, όπου $k>0$ η σταθερά ρυθμού της αντίδρασης.
(α) Λύστε την διαφορική εξίσωση με την μέθοδο των διαχωρίσιμων εξισώσεων και δείξτε ότι η μεταβολή της συγκέντρωσης [A] με τον χρόνο δίνεται από την σχέση $[A]_{(t)}=-kt+[A]_0$, όπου $[A]_0$ η αρχική συγκέντρωση του αντιδρώντος την χρονική στιγμή $t=0$ (δηλαδή $[A]_{(t=0)}=[A]_0$).
(β) Ο χρόνος ημιζωής (half-life), $t_{1/2}$, ορίζεται σαν τον χρόνο όπου η συγκέντρωση του αντιδρώντος πέφτει στο μισό της αρχικής του συγκέντρωσης (δηλαδή $[A]_{(t=t1/2)}=[A]_0/2$). Δείξτε ότι για αντιδράσεις μηδενικής τάξης είναι $t_{1/2}=[A]_0/(2k)$.

3. Μια χημική ή βιοχημική αντίδραση της μορφής: *A -> products* λέμε πως εμφανίζει **κινητική πρώτης τάξης** (first-order kinetics), όταν ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης [A] του αντιδρώντος συστατικού είναι ανάλογος της στιγμιαίας συγκέντρωσής του, δηλαδή **$d[A]/dt=-k[A]$**, όπου $k>0$ η σταθερά ρυθμού της αντίδρασης.
(α) Λύστε την διαφορική εξίσωση με την μέθοδο των διαχωρίσιμων εξισώσεων και δείξτε ότι η μεταβολή της συγκέντρωσης [A] με τον χρόνο δίνεται από την σχέση $[A]_{(t)}=[A]_0*e^{-kt}$, όπου $[A]_0$ η αρχική συγκέντρωση του αντιδρώντος την χρονική στιγμή $t=0$.
(β) Δείξτε ότι για αντιδράσεις πρώτης τάξης ο χρόνος ημιζωής $t_{1/2}$ ισούται με $t_{1/2}=\ln(2)/k$.
(γ) Ο μέσος χρόνος ζωής ορίζεται από την σχέση $\tau=\frac{1}{[A]_0}\int_0^\infty [A]_{(t)}\,dt$. Δείξτε ότι για αντιδράσεις πρώτης τάξης ο μέσος χρόνος ζωής ισούται με $\tau=1/k$.

4. Μια χημική ή βιοχημική αντίδραση της μορφής: *A -> products* λέμε πως εμφανίζει **κινητική *n*^στης^ τάξης** (*n*-order kinetics), όταν ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης [A] του αντιδρώντος συστατικού είναι ανάλογος της στιγμιαίας συγκέντρωσής του υψωμένης στην δύναμη n, δηλαδή **$d[A]/dt=-k[A]^n$**, όπου $k>0$ η σταθερά ρυθμού της αντίδρασης.
(α) Λύστε την διαφορική εξίσωση με την μέθοδο των διαχωρίσιμων εξισώσεων και δείξτε ότι η μεταβολή της συγκέντρωσης [A] με τον χρόνο δίνεται από την σχέση $\frac{1}{[A]_{(t)}^{n-1}}=(n-1)kt+\frac{1}{[A]_0^{n-1}}$ (ισχύει για $n\neq 1$), όπου $[A]_0$ η αρχική συγκέντρωση του αντιδρώντος την χρονική στιγμή $t=0$.
(β) Δείξτε ότι για αντιδράσεις $n^{στης}$ τάξης ο χρόνος ημιζωής $t_{1/2}$ ισούται με $t_{1/2}=\frac{2^{n-1}-1}{(n-1)k[A]_0^{n-1}}$
(γ) Εξειδικεύστε τα αποτελέσματα των (α) και (β) για $n=2$ και δείξτε ότι για αντιδράσεις με κινητική $2^{ης}$ τάξης ισχύει ότι $[A]_{(t)}=[A]_0/(1+kt[A]_0)$ και ο χρόνος ημιζωής ισούται με $t_{1/2}=1/(k[A]_0)$.

5. Βρείτε τις γενικές λύσεις των γραμμικών δ.ε. $2^{ης}$ τάξης: (α) $d^2f/dx^2-2df/dx+f=0$ (β) $d^2f/dx^2-3df/dx+2f=2x^2-3$

6. Θεωρείστε μια πρωτεΐνη που ι) δημιουργείται με σταθερό ρυθμό k_1S, όπου S η ένταση κάποιου σήματος παραγωγής της (π.χ. η συγκέντρωση του mRNA που την κωδικοποιεί) που υποθέτουμε ότι είναι σταθερό για το χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει, και ιι) αποδομείται στο κύτταρο με ρυθμό k_2R, όπου R η στιγμιαία συγκέντρωσή της. Η δ.ε. ρυθμών που περιγράφει την μεταβολή της συγκέντρωσής της είναι **$dR/dt=k_1S-k_2R$**, όπου k_1 και k_2 είναι οι αντίστοιχες σταθερές ρυθμών. (α) Λύστε αυτή την γραμμική και μη-ομογενή δ.ε. 1ης τάξης και δείξτε ότι η χρονική μεταβολή της συγκέντρωσης δίνεται από την σχέση $R(t)=c*\exp[-k_2t]+(k_1/k_2)S$, όπου c σταθερά που υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες $R_0=R(t=0)$ ως $c=R_0-(k_1/k_2)S$. (β) Βρείτε την οριακή τιμή της συγκέντρωσης της πρωτεΐνης για πολύ μεγάλους χρόνους και σχεδιάστε την γραφική παράσταση της συγκέντρωσης R(t) για τις περιπτώσεις $R_0>(k_1/k_2)S$ και $R_0<(k_1/k_2)S$. (γ) Θα μπορούσατε να είχατε βρει απ' ευθείας την χρονικά ανεξάρτητη οριακή τιμή της συγκέντρωσης χωρίς να λύσετε την δ.ε.;

7. Θεωρείστε την φωσφορυλίωση μιας πρωτεΐνης που επάγεται μέσω ενός σήματος σταθερής, για το χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει, έντασης S με σταθερά ρυθμού k_1. Η φωσφορυλιωμένη πρωτεΐνη αποφωσφορυλιώνεται στο κύτταρο με ρυθμό k_2R_P, όπου R_P η στιγμιαία συγκέντρωσή της. Η δ.ε. ρυθμών που περιγράφει την μεταβολή της συγκέντρωσής της είναι **$dR_P/dt=k_1S(R_T-R_P)-k_2R_P$**, όπου R_T είναι η συνολική συγκέντρωση της πρωτεΐνης (τόσο στην φωσφορυλιωμένη όσο και στην μη-φωσφορυλιωμένη μορφή) που υποθέτουμε ότι παραμένει σταθερή. (α) Λύστε αυτή την γραμμική και μη-ομογενή δ.ε. 1ης τάξης και δείξτε ότι η χρονική μεταβολή της συγκέντρωσης δίνεται από την σχέση $R_P(t)=c*\exp[-(k_1S+k_2)t]+SR_T/[(k_2/k_1)+S]$, όπου c σταθερά που υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες $R_{P0}=R_P(t=0)$ ως $c=R_{P0}-SR_T/[(k_2/k_1)+S]$. (β) Βρείτε την οριακή τιμή της συγκέντρωσης της φωσφορυλιωμένης πρωτεΐνης για πολύ μεγάλους χρόνους. (γ) Θα μπορούσατε να είχατε βρει απ' ευθείας την χρονικά ανεξάρτητη οριακή τιμή αυτής της συγκέντρωσης χωρίς να λύσετε την δ.ε.;