1. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial y^2$, και $\partial^2 f/\partial x\partial y$ για τις παρακάτω συναρτήσεις f(x,y) δύο μεταβλητών:
a) $(x^2-1)(y+2)$ b) $(xy-1)^2$ c) e^{x+y+1} d) $\ln(x+y)$ e) $e^{-x}\sin(x+y)$

2. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$, $\partial^2 f/\partial x^2$, και $\partial^2 f/\partial x\partial z$ για τις παρακάτω συναρτήσεις f(x,y,z) τριών μεταβλητών:
a) $1+xy^2-2z^2$ b) $x-\sqrt{y^2+z^2}$ c) e^{xyz} d) $\sinh(xy-z^2)$

3. Δείξτε ότι
α) η συνάρτηση $f=\sin(x-vt)$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}=v^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$,
β) η συνάρτηση $f=e^{-2y}\cos(2x)$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

4. Για τις καμπύλες που αναπαριστούν συναρτήσεις μίας μεταβλητής f(x), η καμπυλότητά τους δίνεται μέσω της δεύτερης παραγώγου d^2f/dx^2. Η γενίκευση της έννοιας της καμπυλότητας για την περίπτωση επιφανειών που αναπαριστούν συναρτήσεις δύο μεταβλητών f(x,y) περιγράφεται μέσω του μητρώου καμπυλότητας $\kappa=\begin{pmatrix}\kappa_{xx} & \kappa_{xy}\\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy}\end{pmatrix}$, όπου $\kappa_{xx}=\partial^2 f/\partial x^2$, $\kappa_{yy}=\partial^2 f/\partial y^2$, και $\kappa_{xy}=\kappa_{yx}=\partial^2 f/\partial x\partial y$. Η ποσότητα κ_{xx} (κ_{yy} αντίστοιχα) σε ένα σημείο εκφράζει την καμπυλότητα της καμπύλης που προκύπτει από την τομή της επιφάνειας f(x,y) με το επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα y (στον άξονα x, αντίστοιχα) και περνάει από το δεδομένο σημείο.
Θεωρείστε ότι η συνάρτηση $h(x,y)=x^2+xy-2y^2$ περιγράφει την μορφή μιας παραμορφωμένης τοπικά μεμβρανικής διπλοστοιβάδας λιπιδίων σε ένα κύτταρο. Σχεδιάστε την μορφή της συνάρτησης (με μια τρισδιάστατη γραφική παράσταση, ή εναλλακτικά, μέσω διδιάστατων γραφικών παραστάσεων κατά μήκος διαφόρων γραμμών –παράλληλων στον άξονα x ή στον άξονα y –του πεδίου ορισμού της) και υπολογίστε το μητρώο καμπυλότητάς της. Υπολογίστε τις δύο ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 του μητρώου καμπυλότητας και επιβεβαιώστε την σχέση $\lambda_1+\lambda_2=\kappa_{xx}+\kappa_{yy}$ καθώς επίσης και ότι $\lambda_1\lambda_2=\det(\kappa)$, όπου $\det(\kappa)$ η ορίζουσα του μητρώου καμπυλότητας

5. Βρείτε την κλίση $\vec{\nabla} f$ της $f(x,y)=xe^y+\cos(xy)$ σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της. Εξειδικεύστε το διάνυσμα της κλίσης στο σημείο Α(2,0). Σε αυτό το σημείο, προς ποια κατεύθυνση η συνάρτηση παρουσιάζει την μέγιστη αύξηση και προς ποια την μέγιστη μείωση; (προσδιορίστε τις κατευθύνσεις αυτές μέσω των αντίστοιχων μοναδιαίων διανυσμάτων). Υπολογίστε στο σημείο Α την παράγωγο της συνάρτησης κατά την κατεύθυνση του $\hat{u}=\frac{3}{5}\hat{i}-\frac{4}{5}\hat{j}$.

6. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου, βρείτε σε ποια σημεία έχουν μέγιστα, ελάχιστα, ή σαγματικά σημεία, οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών:
a) $f(x,y)=x^2+y^2$ b) $f(x,y)=y^2-x^2$ c) $f(x,y)=y^2-y^4-x^2$ και
d) η συνάρτηση $f(x,y)=x^2+xy-2y^2$ που περιγράφει τοπικά την μορφή της κυτταρικής μεμβράνης στην άσκηση 4.