1. Διανύσματα στο επίπεδο.

(α) Να βρεθούν οι συνιστώσες και το μέτρο του διανύσματος με αρχικό σημείο το P(-3,4) και τελικό το Q(-5,2).

(β) Αν **u** και **v** είναι τα διανύσματα **u**(-1,3) και **v**(4,7) (δηλαδή **u**=-**i**+3**j** και **v**=4**i**+7**j**, όπου **i** και **j** τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους θετικούς ημιάξονες των x και y, αντίστοιχα), να βρεθούν τα 2**u**+3**v**, **u**-**v**, |(1/2)**u**|, |**u**-**v**|, **u•v**, καθώς και η γωνία μεταξύ των **u** και **v**.

(γ) Αν **u** και **v** είναι τα διανύσματα **u**(-2,1) και **v**(-2,-3), να βρεθούν τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος του -**u** και κατά μήκος του **u**-2**v**.

(δ) Δείξτε ότι τα διανύσματα **u**(3,-2) και **v**(-4,-6) είναι ορθογώνια.

2. Διανύσματα στον χώρο.

(α) Να βρεθούν οι συνιστώσες και το μέτρο του διανύσματος με αρχικό σημείο το P(1,0,1) και τελικό το Q(3,2,0). Ποιο είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος αυτού του διανύσματος;

(β) Αν **u** και **v** τα διανύσματα **u**(2,1,1) και **v**(-4,3,1) (δηλαδή **u**=2**i**+**j**+**k** και **v**=-4**i**+3**j**+**k**, όπου **i**, **j** και **k** τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους θετικούς ημιάξονες των x, y και z, αντίστοιχα), να βρεθούν τα 2**u**+**v**, **u**-**v**, **u•v** και **u**x**v**.

(γ) Δείξτε ότι **i**x**j**=**k**, **j**x**k**=**i**, και **k**x**i**=**j**. (Οι συνιστώσες αυτών των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι **i**(1,0,0), **j**(0,1,0) και **k**(0,0,1)).

3. Παρακάτω δίνονται οι συντεταγμένες των ατόμων του πρώτου αμινοξέος (βαλίνη) της A αλυσίδας της ανθρώπινης αιμοσφαιρίνης, όπως μπορεί να τις βρει κανείς από την Protein Data Bank in Europe (http://www.ebi.ac.uk/pdbe/). Οι συντεταγμένες είναι σε μονάδες Angstrom (A).

```
ATOM      1  N   VAL A   1       5.287  16.725   4.830  1.00 77.31           N
ATOM      2  CA  VAL A   1       5.776  17.899   5.595  1.00 70.91           C
ATOM      3  C   VAL A   1       7.198  18.266   5.104  1.00 81.71           C
ATOM      4  O   VAL A   1       7.301  19.067   4.161  1.00 77.16           O
ATOM      5  CB  VAL A   1       5.498  17.697   7.118  1.00 51.33           C
ATOM      6  CG1 VAL A   1       6.457  16.822   7.917  1.00 78.39           C
ATOM      7  CG2 VAL A   1       5.211  18.976   7.922  1.00 48.23           C
```

'Οπως φαίνεται, οι συντεταγμένες του κεντρικού (CB) και των δύο ακριανών (CG1 και CG2) ατόμων άνθρακα της πλευρικής αλυσίδας της βαλίνης (CH_3-CH-CH_3) είναι CB (5.498, 17.697, 7.118), CG1 (6.457, 16.822, 7.917) και CG2 (5.211, 18.976, 7.922).

(α) Βρείτε τις συνιστώσες των δύο διανυσμάτων CB->CG1 και CB->CG2 που ενώνουν τον κεντρικό άνθρακα CB με τους δύο ακριανούς άνθρακες CG1 και CG2, αντίστοιχα, της βαλίνης.

(β) Από τα μήκη αυτών των διανυσμάτων δείξτε ότι οι αποστάσεις CB-CG1 και CB-CG2 είναι 1.524 A και 1.538 A, αντίστοιχα.

(γ) Μέσω του εσωτερικού γινομένου των διανυσμάτων, δείξτε ότι η γωνία που σχηματίζουν οι δεσμοί CB-CG1 και CB-CG2 είναι 108.7°.

4. Υποθέστε ότι στον R^2 ορίζουμε μια πράξη 'πρόσθεσης' (+) μεταξύ διανυσμάτων ως εξής: υπολογίζουμε το άθροισμα διανυσμάτων όπως το γνωρίζουμε και επιπλέον προσθέτουμε και μια μονάδα σε κάθε συνιστώσα, δηλαδή $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1+1,x_2+y_2+1)$. Για παράδειγμα (3,1)+(5,0)=(9,2). Τον πολλαπλασιασμό με αριθμούς τον αφήνουμε όπως τον γνωρίζουμε. Είναι ο R^2 με αυτές τις πράξεις διανυσματικός χώρος, ή καταπατούνται κάποιες από τις ιδιότητες του ορισμού των διανυσματικών χώρων;

5. Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του R^3 είναι υπόχωροι; Για όσα είναι υπόχωροι, βρείτε μια βάση τους.

α) Το επίπεδο των διανυσμάτων $x(x_1,x_2,x_3)$ με πρώτη συνιστώσα $x_1=0$.

β) Το επίπεδο των διανυσμάτων με πρώτη συνιστώσα $x_1=1$.

γ) Τα διανύσματα με $x_1x_2=0$ (δηλαδή η ένωση δύο υποχώρων, του επιπέδου $x_1=0$ και του επιπέδου $x_2=0$).

δ) Όλοι οι συνδυασμοί των δύο διανυσμάτων (1,1,0) και (2,0,1).

6. Δείξτε ότι τα διανύσματα $v_1(1,1,0,0)$, $v_2(1,0,1,0)$, $v_3(0,0,1,1)$, $v_4(0,1,0,1)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, λύνοντας το $c_1v_1+ c_2v_2+ c_3v_3+ c_4v_4=0$.