Μαθηματικά εργαλεία ανάλυσης βιοϊατρικών δεδομένων
Ά μέρος

Εργασία για το ακαδημαϊκό έτος 2020-2021

11 Φεβρουαρίου 2021

Ερώτημα 1. **A.** Θεωρούμε διακριτές τυχαίες μεταβλητές N και T, με πεδία ορισμού $\mathcal{A}_N = \{0, 1, 2, 3\}$ και $\mathcal{A}_T = \{-1, 0, 1, 2\}$ αντίστοιχα. Επίσης, έστω ότι η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητάς τους $f_{N,T} : \mathcal{A}_N \times \mathcal{A}_T \to \mathbb{R}$ δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	$T = -1$	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$
$N = 0$	0.02	0.10	0.03	0.06
$N = 1$	0.04	0.02	0.09	0.10
$N = 2$	0.09	0.06	0.10	0.11
$N = 3$	0.06	0.02	0.09	0.01

ι. Να υπολογίσετε την περιθώρια συνάρτηση μάζας πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή T, καθώς και την πιθανότητα $\Pr(T > 0)$.

ιι. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $\Pr(N = i|T > 0)$, για κάθε $i \in \mathcal{A}_N$.

ιιι. Είναι στοχαστικά ανεξάρτητες οι τυχαίες μεταβλητές N και T;

B. Θεωρούμε διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y, με (πεπερασμένα) πεδία ορισμού $\mathcal{A}_X$ και $\mathcal{A}_Y$ αντίστοιχα.

ι. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της τυχαίας μεταβλητής $\mathbb{E}[X|Y]$;

ιι. Να αποδείξετε ότι $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$. (*Σημείωση: Οι X και Y δεν είναι αναγκαστικά στοχαστικά ανεξάρτητες.*)

Ερώτημα 2. **A.** Έστω E, F, G ενδεχόμενα ενός αυθαίρετου πιθανοτικού χώρου. Να δείξετε ότι

$$\Pr(E|F) = \Pr(E|F \cap G) \Pr(G|F) + \Pr(E|F \cap \overline{G}) \Pr(\overline{G}|F),$$

όπου $\overline{G}$ είναι το συμπλήρωμα του G, και $F \cap G, F \cap \overline{G} \neq \emptyset$.

B. Θεωρούμε ένα δοχείο που περιέχει r κόκκινες και w άσπρες μπάλες και έστω ότι αφαιρούμε μία προς μία τις μπάλες από το δοχείο μέχρι να αδειάσει. Υποθέτουμε ότι η μπάλα που αφαιρούμε κάθε φορά (χωρίς επανατοποθέτηση) επιλέγεται τυχαία και ομοιόμορφα από τις μπάλες που υπάρχουν στο δοχείο εκείνη τη στιγμή. Έστω R_i το γεγονός η i-οστή μπάλα που αφαιρούμε να είναι κόκκινη, όπου $i = 1, 2, \ldots, r + w$. Να εκφράσετε τις παρακάτω πιθανότητες ως συναρτήσεις των r και w:

ι. $\Pr(R_3|R_1 \cap R_2)$, υποθέτοντας ότι $r \geq 2$,

ιι. $\Pr(R_3|R_5)$, υποθέτοντας ότι $r > 0$.

Ερώτημα 3. Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(2,1)$, και έστω $W = X - Y + 3$.

A. Αν έχουμε $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.5$, να βρείτε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα $\Pr(|W - \mathbb{E}[W]| \geq 10)$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebychev.

B. Αν οι X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, να δώσετε ένα τύπο για την πιθανότητα $\Pr(|W - \mathbb{E}[W]| \leq 5)$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής, δηλαδή τη συνάρτηση $\Phi(a) = \Pr(Z \leq a), a \in \mathbb{R}$, όπου $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. (*Υπόδειξη: Βρείτε την κατανομή της W χρησιμοποιώντας ροπογεννήτριες συναρτήσεις και το ότι $-Y \sim \mathcal{N}(-2,1)$. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή $\frac{W-\mathbb{E}[W]}{\sqrt{\mathrm{Var}(W)}}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή.*)

Οι ασκήσεις αυτές μπορούν να γίνουν από ομάδες των 2 το πολύ ατόμων και παραδίνονται ηλεκτρονικά στο e-mail μου μέχρι 28 Φεβρουαρίου 2021. Ο βαθμός σε αυτό το σετ ασκήσεων αποτελεί το 50% του τελικού βαθμού για το μάθημα.

Καλή επιτυχία!

Ο διδάσκοντας,
Χριστόφορος Ραπτόπουλος