

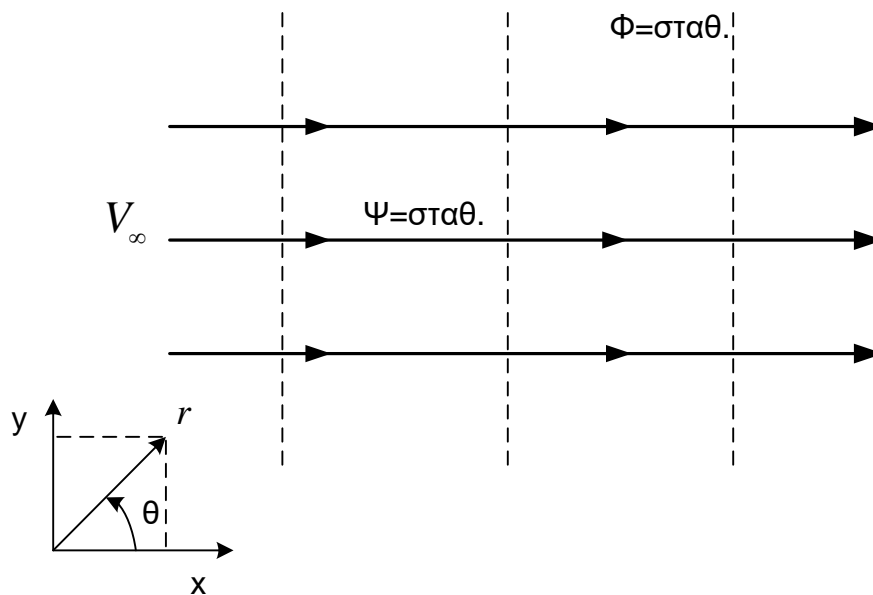
Πίνακας Περιεχομένων

2.1	Ομοιόμορφη Ροή.....	2-2
2.2	Σημειακή Πηγή.....	2-4
2.3	Στρόβιλος σε Δυο Διαστάσεις.....	2-6
2.3.1	Επίδραση του Εδάφους σε Στρόβιλο - Μέθοδος των Ειδώλων	2-7
2.3.2	Αλληλεπίδραση Στροβίλων	2-9
2.4	Επαλληλία Στοιχειωδών Ροών	2-10
2.4.1	Ομοιόμορφη Ροή με Πηγή.....	2-10
2.4.2	Ομοιόμορφη Ροή με Πηγή και Απαγωγή (Σώμα <i>Rankine</i>)	2-12
2.4.3	Ροή Διπόλου	2-13
2.4.4	Δίπολο σε Τρεις Διαστάσεις.....	2-16
2.5	Ροή Δυναμικού γύρω από Κύλινδρο.....	2-17
2.5.1	Ροή γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο.....	2-21
2.6	Ροή Δυναμικού γύρω από Σφαίρα	2-27
2.7	Παραδείγματα - Ασκήσεις	2-32
2.7.1	Συμπιεστότητα, στροβιλότητα και ροϊκή συνάρτηση	2-32
2.7.2	Κατανομή πίεσης σε ροή σημειακής πηγής	2-37
2.7.3	Έκταση διασποράς καυσίμου σε διαρροή από βάρκα.....	2-39
2.7.4	Επαλληλία ομοιόμορφης ροής, πηγής και στροβίλου	2-41
2.7.5	Διαφορά πίεσης σε δυναμική ροή γύρω από κύλινδρο	2-43

2 Θεμελιώδεις Ροές

Σημαντικά πεδία ροής μπορούν να "κτιστούν" θεωρώντας επαλληλία απλών πεδίων για τα οποία γνωρίζουμε την κατανομή της ταχύτητας. Τέτοιες θεμελιώδεις ροές είναι το πεδίο ομοιόμορφης ταχύτητας, η σημειακή πηγή, ο σημειακός στρόβιλος, και το δίπολο. Επαλληλία των βασικών αυτών ροών θα μας δώσει ροή γύρω από κύλινδρο και σφαίρα. Η ροή θεωρείται ασυμπίεστη, μη-συνεκτική, καθώς και χρονικά αμετάβλητη.

2.1 Ομοιόμορφη Ροή



Σχήμα 2.1: Γραμμές ροϊκής συνάρτησης και του δυναμικού ταχύτητας στην περίπτωση ομοιόμορφης ροής.

Στην ομοιόμορφη ροή ταχύτητας V_∞ (Σχήμα 2.1) ισχύει ότι $\nabla \times \vec{V} = 0$, δηλαδή η ροή είναι αστρόβιλη. Επομένως, μπορεί να οριστεί δυναμικό ταχύτητας έτσι ώστε:

$$V_{\infty} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Rightarrow \Phi = V_{\infty} \cdot x + \text{σταθερά}$$

και θεωρώντας $\Phi = 0$ για $x = 0$, η συνάρτηση του δυναμικού είναι:

$$\Phi = V_{\infty} \cdot x \quad (2.1)$$

Οι γραμμές δυναμικού είναι δηλαδή, ευθείες και κατακόρυφες. Μπορούμε ακόμα να ορίσουμε ροϊκή συνάρτηση Ψ , έτσι ώστε:

$$V_{\infty} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Rightarrow \Psi = V_{\infty} \cdot y + \text{σταθερά}$$

και θεωρώντας $\Psi = 0$ για $y = 0$, προκύπτει ότι στην ομοιόμορφη ροή η ροϊκή συνάρτηση είναι:

$$\Psi = V_{\infty} \cdot y \quad (2.2)$$

Οι ροϊκές γραμμές είναι ευθείες και οριζόντιες.

Αντίστοιχα, σε πολικές συντεταγμένες το δυναμικό και η ροϊκή συνάρτηση εκφράζονται ως εξής:

$$\Phi = V_{\infty} r \cos \theta \quad (2.3)$$

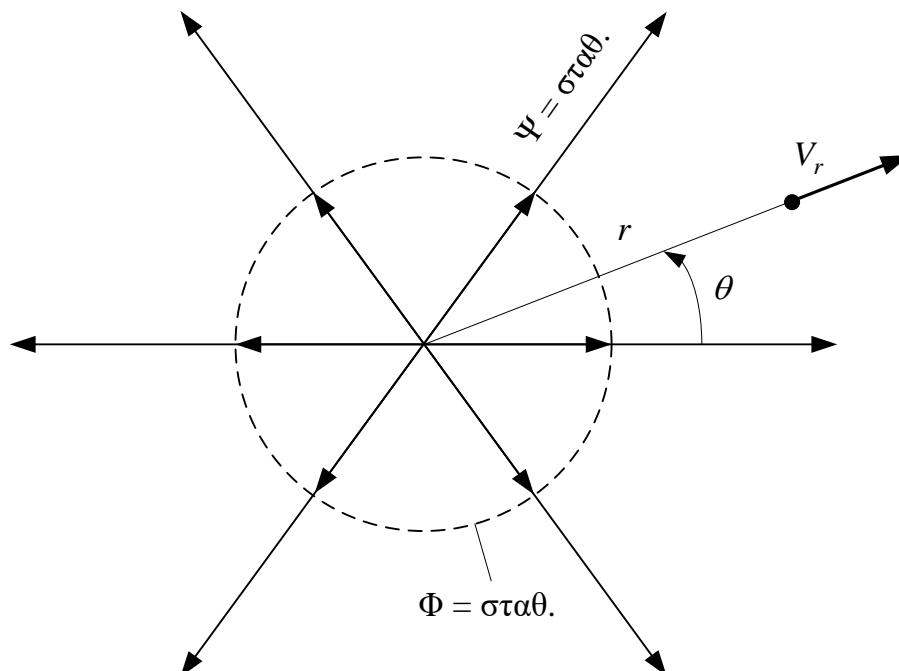
και

$$\Psi = V_{\infty} r \sin \theta \quad (2.4)$$

Τα ανωτέρω προκύπτουν από απλή αντικατάσταση των καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) με τις πολικές (r, θ) οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 2.1:

$$x = r \cos \theta \text{ και } y = r \sin \theta$$

2.2 Σημειακή Πηγή



Σχήμα 2.2: Ισοϖσείς της ροϊκής συνάρτησης και του δυναμικού της ταχύτητας για σημειακή πηγή.

Στην περίπτωση της σημειακής πηγής η ροή θεωρείται ακτινική με ταχύτητα V_r , όπως δείχνει το Σχήμα 2.2. Η ροή μάζας που περνά από ομόκεντρους κύκλους ακτίνας (r) γύρω από την σημειακή πηγή είναι σταθερή:

$$\dot{m} = \rho V_r 2\pi r = \text{σταθερή} \Rightarrow V_r = \frac{\dot{m}/\rho}{2\pi r} \equiv \frac{\Lambda}{2\pi r} \quad (2.5)$$

όπου Λ ορίζεται η ένταση της πηγής. Η περίπτωση στην οποία οι ταχύτητες του πεδίου έχουν φορά προς το κέντρο ονομάζεται *απαγωγή* ή *αρνητική πηγή* με ένταση $-\Lambda$.

Οι εκφράσεις της ακτινικής ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (2.6)$$

Αντικαθιστώντας την (2.5) στην (2.6) παίρνουμε τις εκφράσεις για το δυναμικό και τη ροϊκή συνάρτηση:

$$\frac{\Lambda}{2\pi r} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Rightarrow \Phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r \quad (2.7)$$

και

$$\frac{\Lambda}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \Rightarrow \Psi = \frac{\Lambda}{2\pi} \theta \quad (2.8)$$

Η τιμή του δυναμικού είναι σταθερή σε κάθε κύκλο ακτίνας r , ενώ η τιμή της ροϊκής συνάρτησης είναι σταθερή σε κάθε ακτίνα γωνίας θ . Είναι δηλαδή, οι γραμμές του δυναμικού ομόκεντροι κύκλοι, ενώ η ροϊκή συνάρτηση είναι ακτίνες όπως απεικονίζει το Σχήμα 2.2.

Στις τρεις διαστάσεις οι ομόκεντροι κύκλοι αντικαθίστανται από ομόκεντρες σφαίρες επιφάνειας $4\pi r^2$. Η παροχή μάζας είναι σε αυτή τη περίπτωση:

$$\dot{m} = \rho V_r 4\pi r^2 \Rightarrow V_r = \frac{\dot{m}/\rho}{4\pi r^2} \equiv \frac{\Lambda}{4\pi r^2} \quad (2.9)$$

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι:

$$V_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\Lambda}{4\pi r^2} \Rightarrow d\Phi = \frac{\Lambda}{4\pi r^2} dr \Rightarrow$$

$$\Phi = -\frac{\Lambda}{4\pi r} \quad (2.10)$$

Σε όλες τις ανωτέρω σχέσεις οι σταθερές ολοκλήρωσης προκύπτουν μηδενικές με κατάλληλη επιλογή τιμών αναφοράς των συναρτήσεων Φ και Ψ για $\theta=0$ και $r=\infty$. Επίσης, υπάρχει απειρισμός των εκφράσεων για $r=0$.

Σημειακές πηγές μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να προσομοιώσουμε την εκτόπιση της ελεύθερης ροής από την ύπαρξη στερεού σώματος.

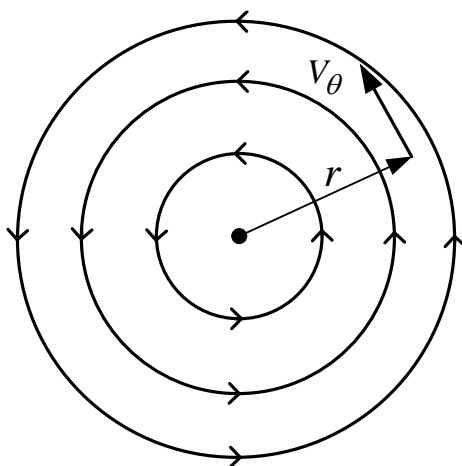
2.3 Στρόβιλος σε Δυο Διαστάσεις

Θεωρούμε δισδιάστατη αστρόβιλη ροή με μηδενική ακτινική ταχύτητα ($V_r = 0$) και με περιφερειακή ταχύτητα $V_\theta = V_\theta(r)$ η οποία είναι συνάρτηση μόνο της ακτίνας (r). Οι γραμμές ροής δηλαδή, είναι ομόκεντροι κύκλοι, όπως απεικονίζει το Σχήμα 2.3. Η ροή είναι μη συνεκτική και δεν δημιουργεί στροβιλότητα. Επομένως, έχουμε σε πολικές συντεταγμένες:

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{V_\theta}{r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = 0$$

Εφόσον είναι $V_r = 0$ και η V_θ δεν εξαρτάται από τη γωνία (θ), η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$\frac{V_\theta}{r} + \frac{dV_\theta}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r \cdot V_\theta) = 0 \Rightarrow V_\theta = \frac{C}{r}$$



Σχήμα 2.3: Σημειακός στρόβιλος σε δυο διαστάσεις.

Η σταθερά της ολοκλήρωσης (C) συνδέεται με ένα νέο μέγεθος, την *κυκλοφορία* (Γ) η οποία ορίζεται πάνω σε μία κλειστή γραμμή (l) ως εξής:

$$\Gamma \equiv - \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (2.11)$$

Η κυκλοφορία ορίζεται ως θετική για δεξιόστροφη κίνηση του ρευστού. Στην περίπτωση του σημειακού στροβίλου όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.3, έχουμε:

$$\Gamma = -V_{\theta}(2\pi r) \Rightarrow V_{\theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (2.12)$$

Η κυκλοφορία (Γ) μπορεί να θεωρηθεί και ως η ένταση του στροβίλου. Προκύπτουν αντίστοιχα οι παρακάτω σχέσεις για το δυναμικό της ταχύτητας και τη ροϊκή συνάρτηση σε πολικές συντεταγμένες:

$$V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \Rightarrow \Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (2.13)$$

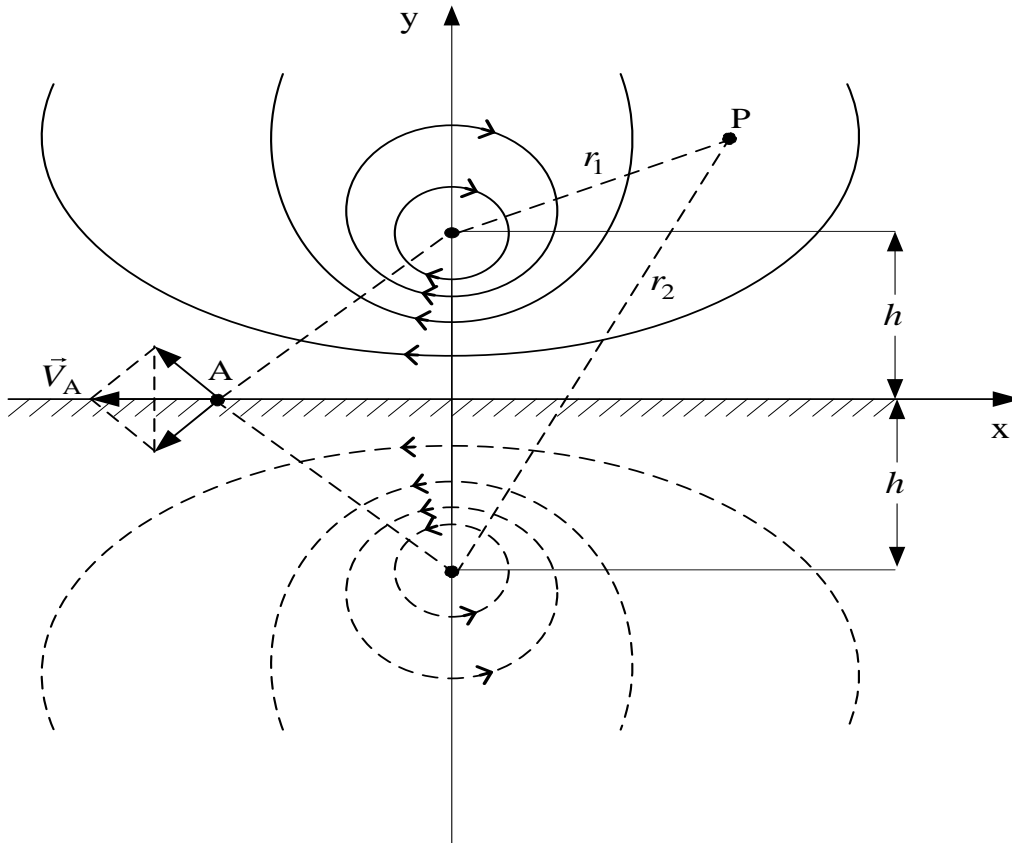
$$V_{\theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \Rightarrow \Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (2.14)$$

Η τιμή του δυναμικού είναι σταθερή σε κάθε ακτίνα γωνίας θ , ενώ της ροϊκής συνάρτησης σε κάθε κύκλο ακτίνας r . Είναι δηλαδή, οι γραμμές της ροϊκής συνάρτησης ομόκεντροι κύκλοι, ενώ οι γραμμές του δυναμικού είναι ακτίνες. Στις ανωτέρω σχέσεις, οι σταθερές ολοκλήρωσης εξαλείφονται θεωρώντας κατάλληλες τιμές $\Phi = 0$ και $\Psi = 0$.

2.3.1 Επίδραση του Εδάφους σε Στρόβιλο - Μέθοδος των Ειδώλων

Θεωρούμε στρόβιλο έντασης Γ , οποίος βρίσκεται σε απόσταση h από το έδαφος, όπως δείχνει το Σχήμα 2.4.

Κατά την προσγείωση / απογείωση αεροσκαφών συναντούμε τέτοιους στροβίλους κοντά στο έδαφος. Για την εύρεση του πεδίου ροής μπορούμε να αντικαταστήσουμε το έδαφος με έναν δεύτερο στρόβιλο-είδωλο, όπως απεικονίζει το Σχήμα 2.4. Το είδωλο έχει την ίδια ένταση με τον πραγματικό στρόβιλο αλλά αντίθετη κυκλοφορία ούτως ώστε να μηδενιστεί στο έδαφος η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, η οποία επάγεται από τους δύο στροβίλους. Το Σχήμα 2.4 απεικονίζει επίσης, τις επαγόμενες ταχύτητες από τους δύο στροβίλους αλλά και τη συνολική ταχύτητα σε ένα σημείο του εδάφους (A).



Σχήμα 2.4: Στρόβιλος κοντά στο έδαφος και στρόβιλος-είδωλο.

Το συνολικό πεδίο ροής σε θέση (x, y) του πεδίου μπορεί να εκφραστεί με άθροιση των ροϊκών συναρτήσεων που αντιστοιχούν στο πεδίο του καθενός στρόβιλου.

$$\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_1 - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_2$$

Θεωρώντας το τυχαίο σημείο $P(x, y)$ στο Σχήμα 2.4, εκφράζονται οι αποστάσεις του r_1 και r_2 από τους στρόβιλους με βάση τις συντεταγμένες του καθώς και την απόσταση h . Το συνιστάμενο πεδίο γράφεται ως εξής:

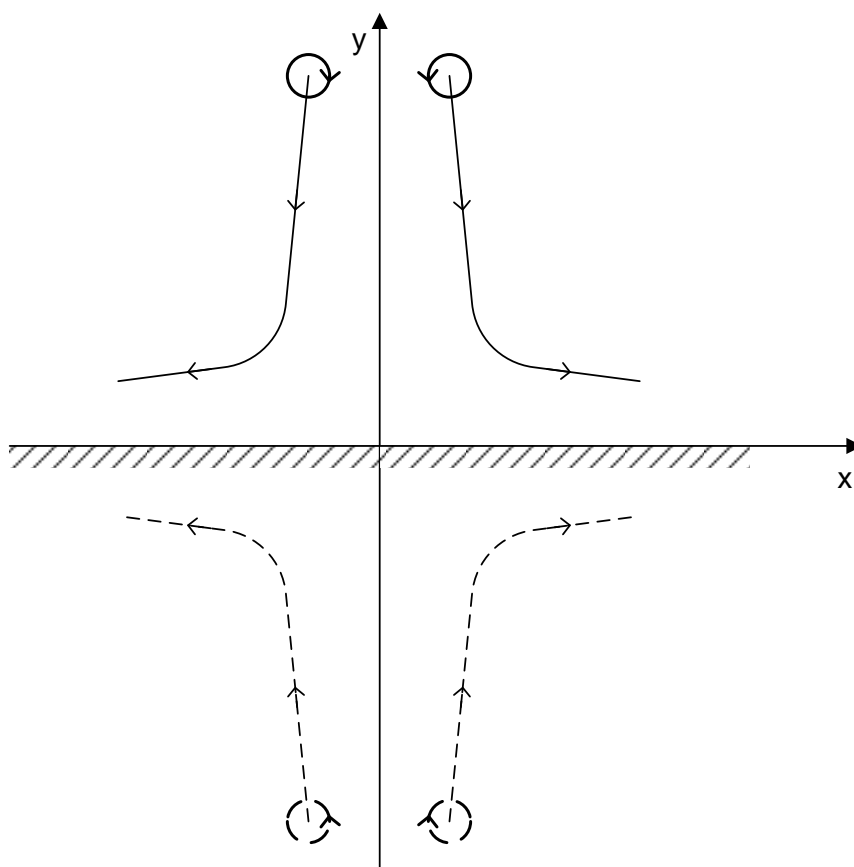
$$\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\ln \sqrt{x^2 + (y-h)^2} - \ln \sqrt{x^2 + (y+h)^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{x^2 + (y-h)^2}{x^2 + (y+h)^2} \quad (2.15)$$

Οι γραμμές ροής που δίνονται από την εξίσωση (2.15) δεν είναι κύκλοι και απεικονίζονται στο Σχήμα 2.4. Ο στρόβιλος θα κινηθεί παράλληλα στο έδαφος προς τα αριστερά με ταχύτητα $[\Gamma / (2\pi \cdot 2h)]$, η οποία είναι η επαγόμενη ταχύτητα στο κέντρο του από το στρόβιλο-είδωλο.

2.3.2 Αλληλεπίδραση Στροβίλων

Θεωρούμε δύο στρόβιλους αντίθετης κυκλοφορίας σε κάποιο ύψος κοντά στο έδαφος, όπως απεικονίζονται στο Σχήμα 2.5. Ο κάθε στρόβιλος θα κινηθεί όπως στο σχήμα εξ' αιτίας των ταχυτήτων που επάγονται από τον άλλο στρόβιλο καθώς και από τα δυο είδωλα. Παράδειγμα τέτοιας αλληλεπίδρασης είναι η περίπτωση στροβίλων από τα άκρα της πτέρυγας αεροσκάφους όταν αυτό βρίσκεται κοντά στο έδαφος.



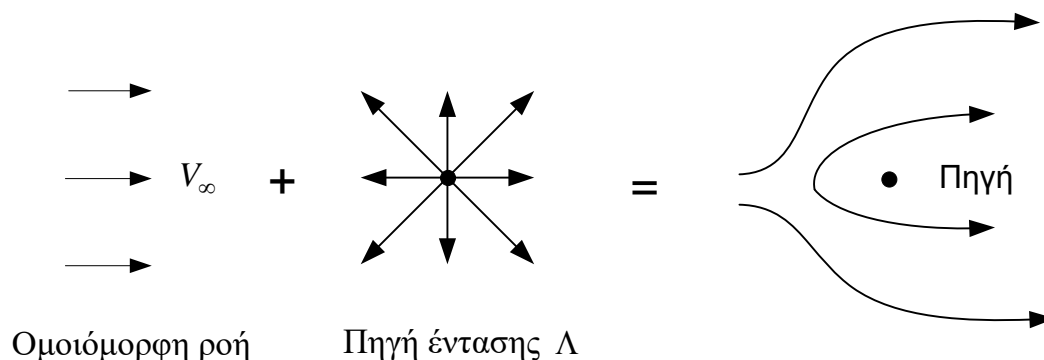
Σχήμα 2.5: Αλληλεπίδραση δυο στροβίλων και εδάφους. Περίπτωση στροβίλων των άκρων της πτέρυγας αεροσκάφους κατά την απογείωση.

2.4 Επαλληλία Στοιχειωδών Ροών

Απλή άθροιση των τιμών της ροϊκής συνάρτησης, του δυναμικού ή και της ταχύτητας των θεμελιωδών πεδίων που μελετήθηκαν θα μας δώσει σύνθετες ροές που ενδιαφέρουν πρακτικές εφαρμογές.

2.4.1 Ομοιόμορφη Ροή με Πηγή

Ο συνδυασμός ελεύθερης ροής ομοιόμορφης ταχύτητας (V_∞) με σημειακή πηγή μοντελοποιεί ροή γύρω από στερεό σώμα. Αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Επαλληλία ομοιόμορφης ροής και σημειακής πηγής.

Η εξίσωση της ροϊκής συνάρτησης βρίσκεται αθροίζοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις των στοιχειωδών ροών:

$$\Psi = V_\infty r \sin \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} \theta$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες υπολογίζονται με παραγωγίσεις της ανωτέρω έκφρασης της ροϊκής συνάρτησης:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = V_\infty \cos \theta + \frac{\Lambda}{2\pi r}$$

$$V_\theta = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} = - V_\infty \sin \theta$$

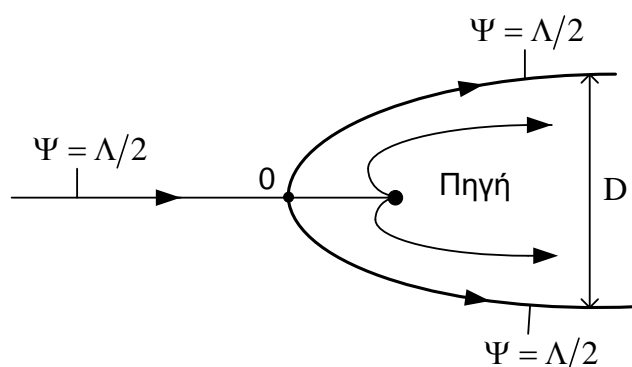
Η ταχύτητα της ροής μηδενίζεται σε ένα σημείο το οποίο ονομάζεται *σημείο ανακοπής*. Η θέση του σημείου αυτού βρίσκεται μηδενίζοντας τις ανωτέρω συνιστώσες της ταχύτητας V_r και V_θ . Προκύπτουν οι εξής πολικές συντεταγμένες:

$$r_0 = \frac{\Lambda}{2\pi V_\infty} \quad \text{και} \quad \theta_0 = \pi$$

Η τιμή της ροϊκής συνάρτησης στην γραμμή ροής η οποία διέρχεται από το σημείο ανακοπής βρίσκεται αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου ανακοπής στην εξίσωση της ροϊκής συνάρτησης ως εξής:

$$\Psi = V_\infty \frac{\Lambda}{2\pi V_\infty} \sin \pi + \frac{\Lambda}{2\pi} \pi \Rightarrow \Psi = \frac{\Lambda}{2}$$

Η ροϊκή γραμμή η οποία περνά από το σημείο ανακοπής (0) διακλαδώνεται σε δυο γραμμές και ορίζει ένα νοητό "σώμα" το οποίο εκτείνεται στο άπειρο όπως απεικονίζει το Σχήμα 2.7. Στο εσωτερικό της γραμμής $\Psi = \Lambda/2$ η ροή είναι ανεξάρτητη από την εξωτερική ροή. Συνεπώς η παροχή μάζας στο εσωτερικό είναι η παροχή της πηγής (\dot{m}).



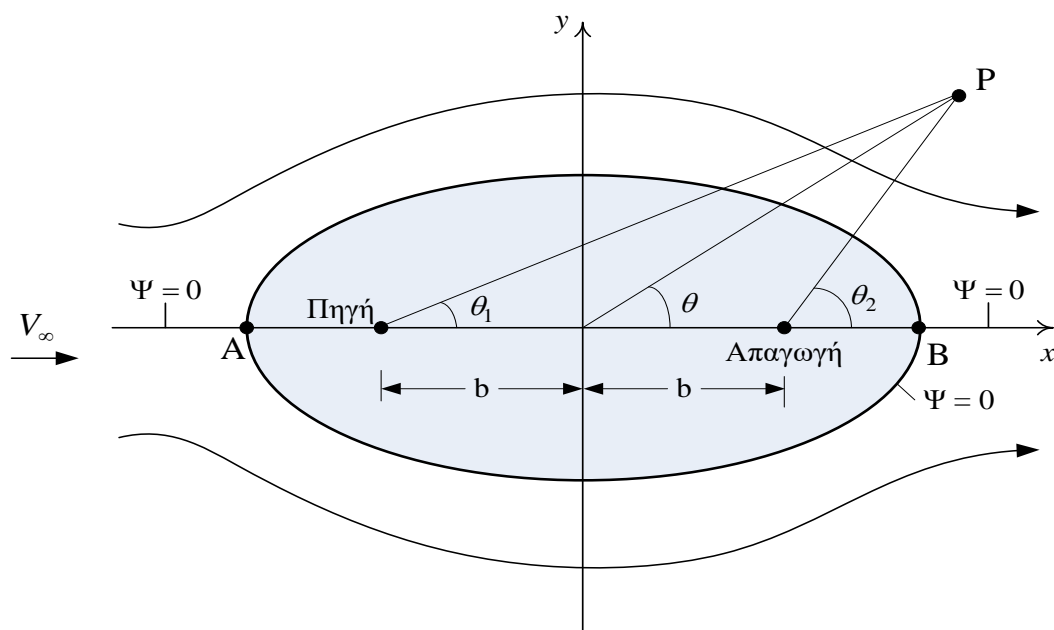
Σχήμα 2.7: Γραμμές ροής της επαλληλίας ομοιόμορφης ροής και σημειακής πηγής. Ορίζεται ένα ημιάπειρο οβάλ στερεό σώμα.

Η διατομή του σώματος αυτού (D) σε μακρινή απόσταση από την πηγή προσεγγίζεται θεωρώντας την ταχύτητα ομοιόμορφη (V_∞) αφού η ταχύτητα που επάγει η πηγή είναι ελάχιστη. Έχουμε δηλαδή, ότι:

$$\dot{m} = \rho \cdot V_\infty \cdot D_\infty \Rightarrow D_\infty = \frac{\Lambda}{V_\infty}$$

2.4.2 Ομοιόμορφη Ροή με Πηγή και Απαγωγή (Σώμα Rankine)

Η ροή γύρω από κλειστό σώμα μπορεί να μοντελοποιηθεί προσθέτοντας μια αρνητική πηγή (απαγωγή) στην προηγούμενη διάταξη, όπως απεικονίζει το Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8: Επαλληλία ομοιόμορφης ροής και σημειακής πηγής και απαγωγής. Ορίζεται ένα οβάλ στερεό σώμα.

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της ροϊκής συνάρτησης είναι:

$$\Psi = V_{\infty} r \sin \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} \theta_1 - \frac{\Lambda}{2\pi} \theta_2 \quad (2.16)$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η εξίσωση της ροϊκής συνάρτησης είναι:

$$\Psi = V_{\infty} y + \frac{\Lambda}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x+b}\right) - \frac{\Lambda}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x-b}\right) \quad (2.17)$$

Οι συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων προκύπτουν είτε με παραγωγίσεις των εκφράσεων της ροϊκής συνάρτησης, είτε με επαλληλία των εκφράσεων των ταχυτήτων για ελεύθερη ροή, πηγή και απαγωγή. Οι συνιστώσες της ταχύτητας σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνονται από τις εξισώσεις:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = V_{\infty} + \frac{\Lambda}{2\pi} \cdot \frac{x+b}{(x+b)^2 + y^2} - \frac{\Lambda}{2\pi} \cdot \frac{x-b}{(x-b)^2 + y^2} \quad (2.18)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\Lambda}{2\pi} \cdot \frac{y}{(x+b)^2 + y^2} - \frac{\Lambda}{2\pi} \cdot \frac{y}{(x-b)^2 + y^2} \quad (2.19)$$

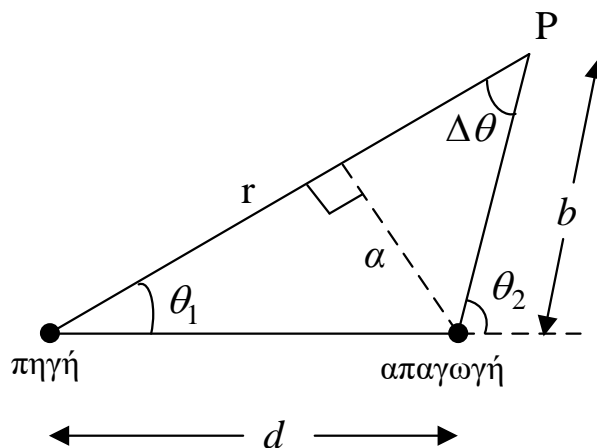
Στο Σχήμα 2.8 υπάρχουν δύο σημεία ανακοπής στις θέσεις $A(\theta_1 = \theta_2 = \pi)$ και $B(\theta_1 = \theta_2 = 0)$, στις οποίες η ταχύτητα είναι μηδέν ($u = v = 0$). Θέτοντας τις παραπάνω τιμές των γωνιών στην εξίσωση (2.16) της ροϊκής συνάρτησης, παίρνουμε ότι $\Psi = 0$. Άρα η εξίσωση του νοητού σώματος που σχηματίζεται από την ροϊκή γραμμή που περνά από τα σημεία ανακοπής είναι:

$$V_{\infty} r \sin \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (2.20)$$

Η παραπάνω εξίσωση ορίζει ένα σώμα οβάλ σχήματος, το επονομαζόμενο σώμα *Rankine*. Όσο πλησιάζουν οι δύο πηγές μεταξύ τους, τόσο το σχήμα προσεγγίζει κύκλο.

2.4.3 Ροή Διπόλου

Εξετάζουμε τώρα το πεδίο ροής που επάγει το ζεύγος σημειακών πηγών ίδιας θετικής και αρνητικής έντασης, οι οποίες βρίσκονται σε μικρή απόσταση μεταξύ τους (d), όπως απεικονίζεται το Σχήμα 2.9.



Σχήμα 2.9: Γεωμετρία υπολογισμού διπόλου.

Η τιμή της ροϊκής συνάρτησης στο σημείο P είναι:

$$\Psi = \frac{\Lambda}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) = -\frac{\Lambda}{2\pi} \Delta\theta \quad (2.21)$$

Μειώνοντας την απόσταση (d), αλλά διατηρώντας το γινόμενο $d \cdot \Lambda$ σταθερό ($\Lambda \rightarrow \infty$), δημιουργείται το επονομαζόμενο δίπολο (“doublet”) έντασης $\kappa \equiv d \cdot \Lambda$.

Με βάση την γεωμετρία που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.9, έχουμε ότι καθώς η απόσταση d τείνει στο μηδέν, δηλαδή $\theta_1 \approx \theta_2 \equiv \theta$, τα μήκη a και b προσεγγίζονται ως:

$$\begin{aligned} a &\approx d \sin \theta \\ b &\approx r - d \cos \theta \end{aligned}$$

Επομένως, η γωνία $\Delta\theta$ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\Delta\theta \approx \frac{a}{b} \approx \frac{d \sin \theta}{r - d \cos \theta}$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση (2.21) για τη ροϊκή συνάρτηση δίπολου την παραπάνω προσέγγιση της γωνίας ($\Delta\theta$), έχουμε:

$$\Psi = \lim_{d \rightarrow 0} \left(-\frac{\Lambda}{2\pi} \frac{d \sin \theta}{r - d \cos \theta} \right) = \lim_{d \rightarrow 0} \left(-\frac{\kappa}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r - d \cos \theta} \right)$$

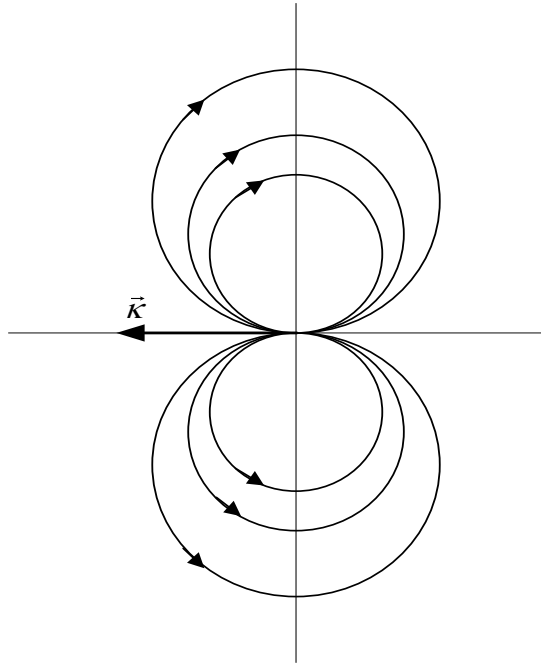
και επομένως προκύπτει ότι:

$$\boxed{\Psi_{\text{δίπολου}} = -\frac{\kappa}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}} \quad (2.22)$$

Αντίστοιχα, για την συνάρτηση δυναμικού προκύπτει:

$$\boxed{\Phi_{\text{δίπολου}} = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}} \quad (2.23)$$

Σε αντίθεση με την σημειακή πηγή, υπάρχει εδώ εξάρτηση του πεδίου και από την γωνία θ . Το Σχήμα 2.10 απεικονίζει χαρακτηριστικές γραμμές ροής δίπολου. Η κατεύθυνση του δίπολου είναι από την αρνητική προς τη θετική πηγή όπως ορίζει το διάνυσμα $\vec{\kappa}$.



Σχήμα 2.10: Γραμμές ροής γύρω από δίπολο έντασης \vec{k} .

Η μορφή των ροϊκών γραμμών προκύπτει από την σχέση (2.22) θεωρώντας μια συγκεκριμένη γραμμή με σταθερή τιμή ροϊκής συνάρτησης C :

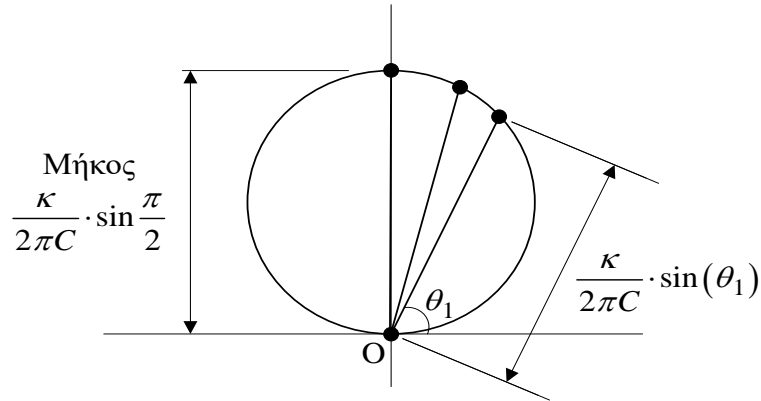
$$\Psi = -\frac{\kappa}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r} = C \Rightarrow r = -\frac{\kappa}{2\pi C} \sin\theta \quad (2.24)$$

Είναι δηλαδή κύκλοι διαμέτρου $\kappa/(2\pi C)$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.11. Κάθε τιμή της παραμέτρου C αντιστοιχεί σε έναν διαφορετικό κύκλο. Για $\theta=0$, το μήκος της χορδής του κύκλου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι μηδενικό για όλες τις τιμές της παραμέτρου C . Επομένως, όλες οι ροϊκές γραμμές διέρχονται από την αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10.

Οι συνιστώσες της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες προκύπτουν με παραγωγίσεις της έκφρασης της ροϊκής συνάρτησης (2.22):

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = -\frac{\kappa}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (2.25)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -\frac{\kappa}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \quad (2.26)$$



Σχήμα 2.11: Ενδεικτική γραμμή ροής διπόλου έντασης \vec{k} για μια τιμή της παραμέτρου C .

2.4.4 Δίπολο σε Τρεις Διαστάσεις

Η ροϊκή συνάρτηση δεν μπορεί να οριστεί στις τρεις διαστάσεις. Επομένως, για το δίπολο σε τρισδιάστατο πεδίο, χρησιμοποιούμε το δυναμικό ταχύτητας όπως δίνεται στην σχέση (2.10). Συγκεκριμένα, τα μήκη (r, b) ορίζονται όπως και στη διδιάστατη περίπτωση του Σχήματος 2.9 και το δυναμικό στο σημείο P είναι:

$$\Phi = - \frac{\Lambda}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\Lambda}{4\pi} \frac{r-b}{rb} \quad (2.27)$$

Θεωρώντας ότι $d \rightarrow 0$ έχουμε ότι

$$r-b \rightarrow d \cos \theta \quad \text{και} \quad rb \rightarrow r^2$$

Επομένως, στο όριο το δυναμικό παίρνει την έκφραση:

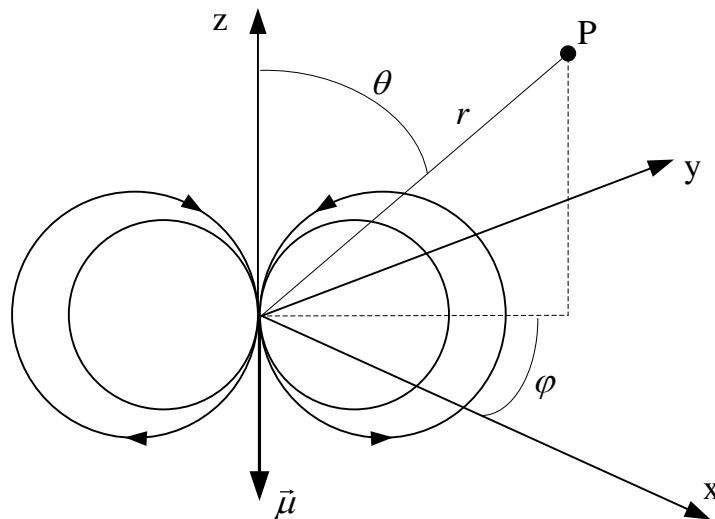
$$\Phi = \frac{\Lambda}{4\pi} \frac{d \cos \theta}{r^2} \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2}} \quad (2.28)$$

όπου $\mu \equiv d \cdot \Lambda$ είναι η ένταση του τρισδιάστατου διπόλου. Το πεδίο ταχύτητας που προκύπτει σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) είναι:

$$\vec{V} = \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \Rightarrow$$

$$\vec{V} = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} \hat{e}_r - \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} \hat{e}_\theta \quad (2.29)$$

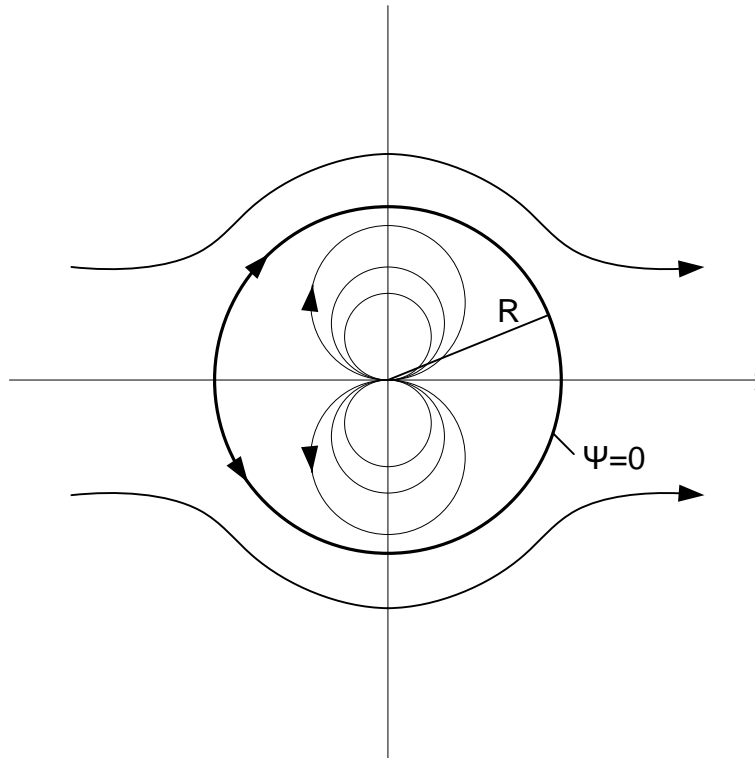
Παρατηρούμε ότι το πεδίο ροής είναι ανεξάρτητο της γωνίας φ , δηλαδή η ροή είναι *αξονοσυμμετρική*. Χαρακτηριστικές γραμμές ροής απεικονίζονται στο Σχήμα 2.12.



Σχήμα 2.12: Δίπολο έντασης (μ) με προσανατολισμό προς τον αρνητικό άξονα z με χαρακτηριστικές γραμμές ροής.

2.5 Ροή Δυναμικού γύρω από Κύλινδρο

Η μελέτη της ροής γύρω από κύλινδρο αποτελεί ένα από τα κλασικά προβλήματα της μηχανικής των ρευστών. Η επαλληλία διαστάτου διπόλου με την ελεύθερη ροή δίνει ροή γύρω από κύλινδρο. Το Σχήμα 2.13 απεικονίζει γραμμές ροής του πεδίου αυτού, το οποίο θεωρείται χρονικά αμετάβλητο, μη συνεκτικό, και ασυμπιεστο. Εκφράζεται δηλαδή, η ροή από συνάρτηση δυναμικού.



Σχήμα 2.13: Ροή δυναμικού γύρω από κύλινδρο ακτίνας R .

Υπερθέτοντας τις ροϊκές συναρτήσεις για ομοιόμορφη ροή (σχέση (2.4)) και για δίπολο (σχέση (2.22)), προκύπτει ότι το συνιστάμενο πεδίο ροής περιγράφεται από την ακόλουθη ροϊκή συνάρτηση:

$$\Psi = V_{\infty} r \sin \theta - \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} = V_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{\kappa}{2\pi V_{\infty} r^2} \right)$$

Ορίζοντας

$$R^2 \equiv \frac{\kappa}{2\pi V_{\infty}}$$

παίρνουμε την έκφραση για τη ροϊκή συνάρτηση:

$$\boxed{\Psi = V_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)} \quad (2.30)$$

Το πεδίο ταχυτήτων προκύπτει με παραγωγή της (2.30), χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (2.31)$$

$$V_\theta = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} = - \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) V_\infty \sin \theta \quad (2.32)$$

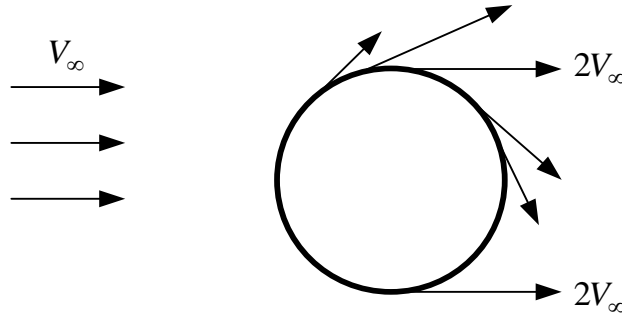
Θέτοντας $V_r = V_\theta = 0$ στις παραπάνω σχέσεις, βρίσκουμε δυο σημεία ανακοπής στις θέσεις $(\theta = 0, r = R)$ και $(\theta = \pi, r = R)$. Η τιμή της ροϊκής συνάρτησης στα σημεία αυτά είναι μηδέν, όπως προκύπτει με αντικατάσταση στη (2.30). Επίσης, παρατηρείται ότι για $\theta = \pi$ και $\theta = 0$ και για όλες τις τιμές του r η συνάρτηση Ψ είναι μηδέν. Δηλαδή, η οριζόντια γραμμή που διέρχεται από τα σημεία ανακοπής, είναι μέρος της ροϊκής γραμμής $\Psi = 0$. Επίσης, για $r = R$, η συνάρτηση Ψ είναι μηδέν για όλες τις τιμές της γωνίας θ . Δηλαδή, ο κύκλος με ακτίνα R είναι μέρος της γραμμής ροής στην οποία είναι $\Psi = 0$. Η ροϊκή αυτή γραμμή αποτελεί το διαχωριστικό όριο μεταξύ της περιοχής $r < R$, όπου η επιρροή του διπόλου είναι μεγαλύτερη και της περιοχής με $r > R$, όπου η επιρροή της ομοιόμορφης ροής είναι μεγαλύτερη. Η περιοχή $r < R$ μπορεί να αντικατασταθεί με ένα στερεό σώμα, κύλινδρο στην προκειμένη περίπτωση, και το ροϊκό πεδίο στη περιοχή $r > R$ θα εκφράζει τη ροή γύρω από κύλινδρο, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.13.

Το πεδίο ροής είναι *συμμετρικό*, τόσο ως προς τον οριζόντιο, όσο και ως προς τον κατακόρυφο άξονα οι οποίοι περνούν από το κέντρο του κύκλου. Δηλαδή, η κατανομή της πίεσης γύρω από τον κύλινδρο είναι συμμετρική. Συνεπώς, δεν ασκείται καμιά δύναμη στον κύλινδρο. Το γεγονός αυτό της μη ύπαρξης δυνάμεων πάνω στο σώμα ονομάζεται *παράδοξο του d'Alambert*. Η αγνόηση της ιξώδους συμπεριφοράς της ροής (οριακό στρώμα και απόρρευμα) "ευθύνεται" για αυτό το αποτέλεσμα.

Οι σχέσεις (2.31) και (2.32) δίνουν ότι στην επιφάνεια του κυλίνδρου ($r = R$) η συνιστώσα V_r είναι μηδέν και η εφαπτομενική ταχύτητα είναι:

$$V_\theta = - 2V_\infty \sin \theta$$

Η ταχύτητα στην επιφάνεια του κυλίνδρου απεικονίζεται στο Σχήμα 2.14. Η ροή αυτή ονομάζεται και ροή *δυναμικού*.



Σχήμα 2.14: Διανύσματα ταχύτητας πάνω στην επιφάνεια κυλίνδρου σε μη συνεκτική και ασυμπιεστή ροή.

Παρατηρούμε ότι η ελεύθερη ροή επιταχύνεται σημαντικά με την παρουσία του κυλίνδρου στο πάνω και στο κάτω μέρος αυτού.

Εξετάζουμε τώρα την κατανομή της πίεσης στην επιφάνεια. Ο συντελεστής πίεσης ορίζεται ως εξής:

$$C_p \equiv \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}$$

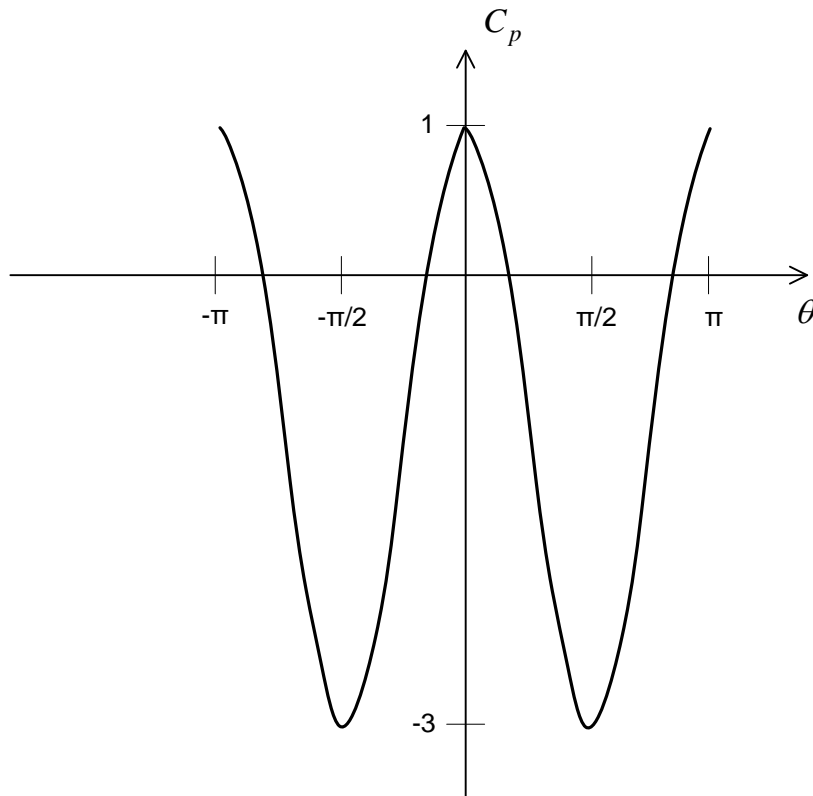
Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται για τα σημεία της επιφάνειας, ως εξής:

$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = P + \frac{1}{2} \rho V_\theta^2 \Rightarrow C_p = 1 - \left(\frac{V_\theta}{V_\infty} \right)^2 \quad (2.33)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση για την V_θ στην επιφάνεια στην ανωτέρω σχέση για τον C_p προκύπτει:

$$\boxed{C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta} \quad (2.34)$$

Στο Σχήμα 2.15 δίνεται η κατανομή του συντελεστή πίεσης γύρω από τον κύλινδρο. Παρατηρείται ότι στα σημεία ανακοπής ($\theta = \pm \pi$) είναι $C_p = 1$, και στα σημεία όπου η ταχύτητα της ροής είναι μέγιστη ($\theta = \pm \pi/2$) είναι $C_p = -3$.

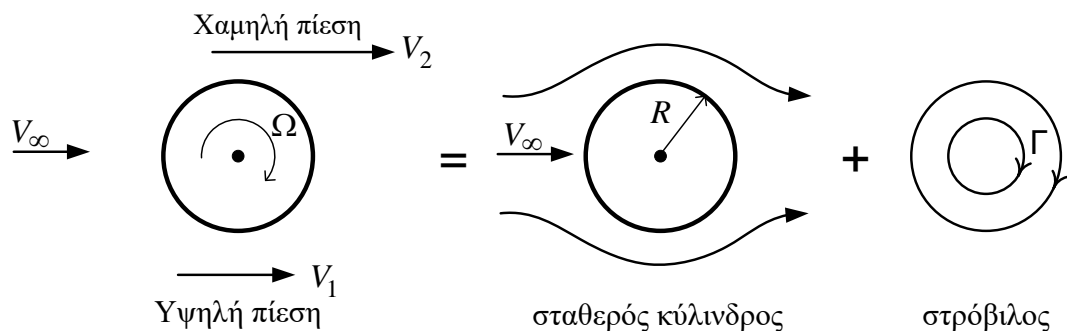


Σχήμα 2.15: Κατανομή του συντελεστή πίεσης σε ροή δυναμικού γύρω από ακίνητο κύλινδρο.

2.5.1 Ροή γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο

Στο προηγούμενο τμήμα εξετάστηκε η ροή γύρω από ακίνητο κύλινδρο, με βάση τις παραδοχές της ασυμπίεστης και μη συνεκτικής ροής. Από την ανάλυση προέκυψε ότι το ροϊκό πεδίο είναι συμμετρικό ως προς τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Γι' αυτό το λόγο δεν εξασκείται δύναμη από το ροϊκό πεδίο στον κύλινδρο. Στο παρόν τμήμα θα εξεταστεί η ροή γύρω από κύλινδρο ο οποίος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω . Η ασυμμετρία στο πεδίο που προκύπτει από την περιστροφή αυτή οδηγεί στην δημιουργία κατακόρυφης δύναμης στο σώμα.

Είναι δυνατή η μοντελοποίηση της ροής γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο, με τη σύνθεση των επαγόμενων πεδίων από ομοιόμορφη ροή, δίπολο και στρόβιλο με το όριο του κυλίνδρου να αποτελεί ροϊκή γραμμή του συνισταμένου πεδίου. Η επαλληλία αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 2.16.



Σχήμα 2.16: Επαλληλία ομοιόμορφης ροής, διπόλου, και στρόβιλου για τον υπολογισμό του πεδίου ροής περιστρεφόμενου κυλίνδρου.

Η ροϊκή συνάρτηση για το πεδίο γύρω από σταθερό κύλινδρο ακτίνας R δίνεται από την (2.30). Το ροϊκό πεδίο που επάγεται από στρόβιλο δίνεται από την εξίσωση (2.14):

$$\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + C$$

όπου C είναι μία σταθερά.

Το συνιστάμενο πεδίο ροής περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\Psi = V_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + C$$

Θεωρώντας ότι η περίμετρος του κυλίνδρου είναι η ροϊκή γραμμή $\Psi = 0$, υπολογίζουμε τιμή για τη σταθερά C . Είναι δηλαδή:

$$0 = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln R + C \Rightarrow C = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R$$

Επομένως, η ροϊκή συνάρτηση είναι:

$$\Psi = V_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R} \quad (2.35)$$

Οι συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων σε πολικές συντεταγμένες προκύπτουν είτε με παραγωγίσεις της ροϊκής συνάρτησης, είτε με επαλληλία των εκφράσεων των ταχυτήτων για σταθερό κύλινδρο (σχέσεις (2.31) και (2.32)) και για σημειακό στρόβιλο (σχέση (2.12)):

$$V_r = V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (2.36)$$

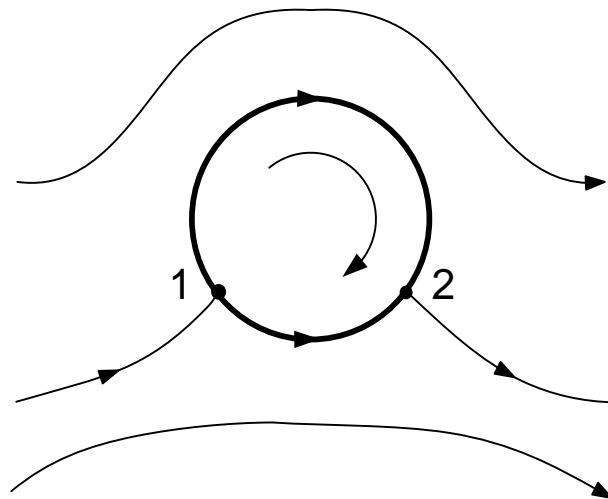
$$V_\theta = - \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (2.37)$$

Τα σημεία ανακοπής προσδιορίζονται θέτοντας $V_r = 0$ και $V_\theta = 0$. Μια λύση του συστήματος αυτών των δύο εξισώσεων είναι η παρακάτω:

$$r = R \quad \text{και} \quad \sin \theta = - \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} < 0 \quad (2.38)$$

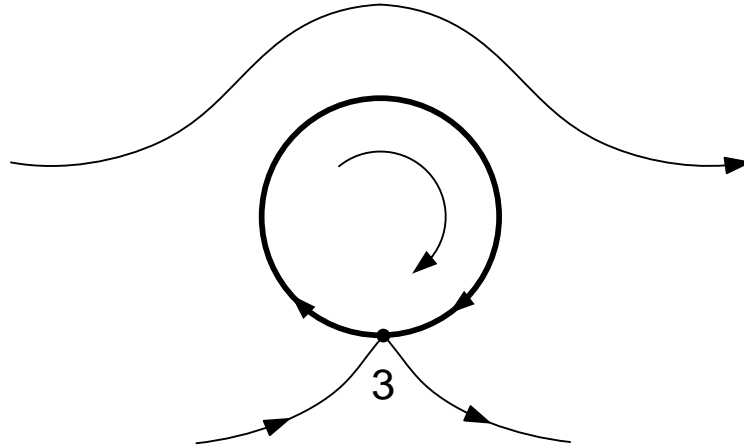
το οποίο σημαίνει ότι υπάρχουν σημεία ανακοπής στο τρίτο και τέταρτο τεταρτημόριο. Οι ακόλουθες περιπτώσεις αναλύονται:

i) $\Gamma < 4\pi V_\infty R$: στην περίπτωση αυτή υπάρχουν δύο σημεία ανακοπής πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου, τα οποία υποδεικνύονται με τα σημεία 1 και 2 στο Σχήμα 2.17.



Σχήμα 2.17: Ροή γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο με δυο σημεία ανακοπής (1,2) πάνω στην επιφάνειά του.

ii) $\Gamma = 4\pi V_\infty R$: στην περίπτωση αυτή υπάρχει ένα σημείο ανακοπής πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου σε γωνία $\theta = -\frac{\pi}{2}$, όπως υποδεικνύεται με το σημείο 3 στο Σχήμα 2.18.



Σχήμα 2.18: Ροή γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο με ένα σημείο ανακοπής (3) πάνω στην επιφάνειά του.

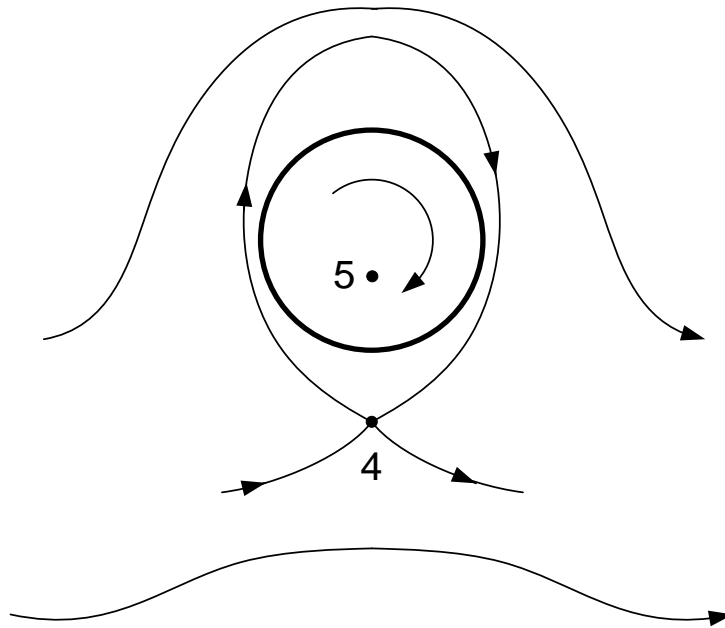
iii) $\Gamma > 4\pi V_\infty R$: στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (2.38) δεν είναι έγκυρη, οπότε θα πρέπει να αναζητηθεί μια εναλλακτική λύση για το σύστημα των εξισώσεων $V_r = 0$ και $V_\theta = 0$. Προηγουμένως δείχθηκε ότι η ταχύτητα V_r (Εξίσωση (2.36)) μηδενίζεται για $r = R$. Ωστόσο, μηδενίζεται και για τιμές της γωνίας $\theta = \frac{\pi}{2}$ και $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Αντικαθιστώντας $\theta = -\frac{\pi}{2}$ στην ταχύτητα V_θ (Εξίσωση (2.37)), θέτοντας την ίση με μηδέν και αναδιατάσσοντας προκύπτει η εξίσωση:

$$r^2 - \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} r + R^2 = 0 \quad (2.39)$$

Η εξίσωση (2.39) είναι τριώνυμο ως προς την ακτίνα r στην οποία βρίσκεται το σημείο ανακοπής και επιλύοντάς το προκύπτουν οι λύσεις:

$$r_{1,2} = R \cdot \left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} \right)^2 - 1} \right) \quad (2.40)$$

Από την (2.40) για $\Gamma > 4\pi V_\infty R$ προκύπτει ότι υπάρχουν δύο σημεία ανακοπής σε γωνία $\theta = -\frac{\pi}{2}$, με το ένα να βρίσκεται εκτός του κυλίνδρου ($r_1 > R$) και το άλλο να βρίσκεται στο εσωτερικό του κυλίνδρου ($r_2 < R$). Τα σημεία ανακοπής υποδεικνύονται με τα σημεία 4 και 5 στο Σχήμα 2.19. Όσο αυξάνεται η ταχύτητα της περιστροφής το σημείο ανακοπής εκτός του κυλίνδρου (σημείο 4) απομακρύνεται από τον κύλινδρο.



Σχήμα 2.19: Ροή γύρω από περιστρεφόμενο κύλινδρο με ένα σημείο ανακοπής εκτός του κυλίνδρου (4) και ένα στο εσωτερικό αυτού (5).

Συνεπώς, η ένταση του στροβίλου Γ (στην ουσία η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής) καθορίζει την μορφή του ροϊκού πεδίου. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει εδώ η συμμετρία ως προς τον οριζόντιο άξονα. Η ασυμμετρία αυτή στις ταχύτητες και άρα στην κατανομή της πίεσης στην επιφάνεια δίνει τη

δύναμη της άντωσης η οποία ενεργεί κατακόρυφα προς τα πάνω, για τον δεξιόστροφα περιστρεφόμενο κύλινδρο.

Ο υπολογισμός της πίεσης στην επιφάνεια του κυλίνδρου, απαιτεί αρχικά τον προσδιορισμό της ταχύτητας πάνω σε αυτόν. Η ταχύτητα αυτή προκύπτει από την (2.37), θέτοντας $r = R$:

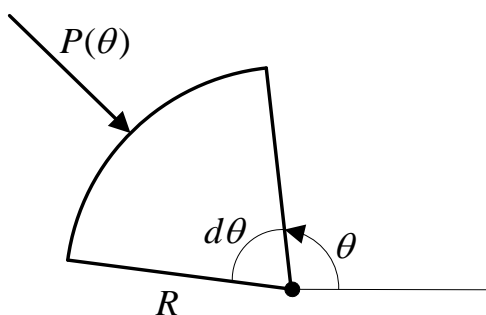
$$V_{\theta} = -2V_{\infty} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad (2.41)$$

Από την εξίσωση Bernoulli προκύπτει για την κατανομή πίεσης $P(\theta)$ στην επιφάνεια:

$$P(\theta) = P_{\infty} + \frac{\rho}{2}(V_{\infty}^2 - V_{\theta}^2) \Rightarrow$$

$$P(\theta) = P_{\infty} + \frac{\rho}{2} \left[V_{\infty}^2 - \left(2V_{\infty} \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right] \quad (2.42)$$

Η άντωση που αναπτύσσεται υπολογίζεται με άθροιση των δυνάμεων πίεσης στην επιφάνεια. Η δύναμη πίεσης ενεργεί κάθετα στην τοπική επιφάνεια του κυλίνδρου στο μήκος της $R \cdot d\theta$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.20, και είναι $P(\theta) \cdot R \cdot d\theta$ ανά μονάδα μήκους κυλίνδρου. Η προβολή της δύναμης αυτής στην κατακόρυφη διεύθυνση είναι: $-P(\theta) \cdot R \cdot d\theta \cdot \sin \theta$, όπου το αρνητικό πρόσημο εκφράζει ότι για $0 < \theta < \pi$ η κατακόρυφη προβολή έχει φορά προς τα κάτω.



Σχήμα 2.20: Διαφορικό στοιχείο του κυλίνδρου γωνίας $d\theta$ και ακτίνας R . Η δύναμη πίεσης $P(\theta)$ ενεργεί κάθετα στην τοπική επιφάνεια του κυλίνδρου.

Η άθροιση όλων των προβολών στην κατακόρυφη διεύθυνση, δηλαδή η άντωση L , εκφράζεται από το ολοκλήρωμα:

$$L = - \int_0^{2\pi} P(\theta) \cdot R \cdot \sin \theta \, d\theta$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση (2.42) και αξιοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις για τα ολοκληρώματα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = 0$$

, προκύπτει τελικά ότι:

$$\boxed{L = \rho V_\infty \Gamma} \quad (2.43)$$

Η (2.43) είναι γνωστή ως το *θεώρημα Kutta – Joukowski*. Κάθε σώμα στην επιφάνεια του οποίου αναπτύσσεται κυκλοφορία Γ , δέχεται δύναμη κάθετη στη διεύθυνση της ελεύθερης ροής.

Όσον αφορά την αντίσταση που αναπτύσσεται στον κύλινδρο, παραμένει μηδενική εξαιτίας της συμμετρίας που παρουσιάζει το ροϊκό πεδίο ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Αυτό οφείλεται στην παραδοχή της μη συνεκτικής ροής.

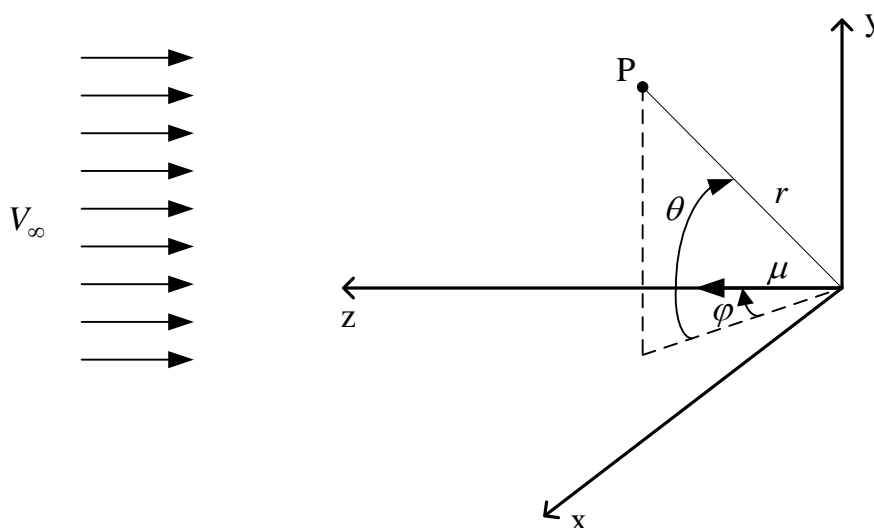
Η εξάσκηση δύναμης σε σώματα τα οποία περιστρέφονται σε ροή είναι γνωστή και ως *φαινόμενο Magnus*.

2.6 Ροή Δυναμικού γύρω από Σφαίρα

Η ροή γύρω από μία ακίνητη σφαίρα, μπορεί να περιγραφεί με επαλληλία ομοιόμορφης ροής και τρισδιάστατου δίπολου. Βασική απαίτηση είναι η επιφάνεια της σφαίρας να αποτελεί ‘ροϊκή επιφάνεια’ (κατά αναλογία με τη ροϊκή γραμμή στις δύο διαστάσεις) του πεδίου ροής. Στην ακόλουθη ανάλυση θεωρείται ότι η ροή είναι χρονικά αμετάβλητη, ασυμπίεστη, και μη συνεκτική. Εκφράζεται δηλαδή, η ροή από συνάρτηση δυναμικού.

Η ομοιόμορφη ροή έχει τις ακόλουθες συνιστώσες ταχύτητας σε *σφαιρικό* σύστημα συντεταγμένων το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 2.21:

$$\begin{aligned}
 V_r &= -V_\infty \cos \theta \\
 V_\theta &= V_\infty \sin \theta \\
 V_\varphi &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$



Σχήμα 2.21: Ομοιόμορφη ροή και δίπολο έντασης (μ) σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

Οι συνιστώσες της ταχύτητας που επάγεται από το τρισδιάστατο δίπολο σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνονται από τη σχέση (2.29) με αντεστραμμένο πρόσημο λόγω αλλαγής της φοράς του διπόλου (προς τον θετικό άξονα z):

$$V_r = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3}$$

$$V_\theta = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3}$$

$$V_\varphi = 0$$

όπου μ είναι η ένταση του διπόλου. Επομένως, η συνολική ταχύτητα έχει τις συνιστώσες:

$$V_r = \left(-V_\infty + \frac{\mu}{2\pi r^3} \right) \cos \theta \tag{2.45}$$

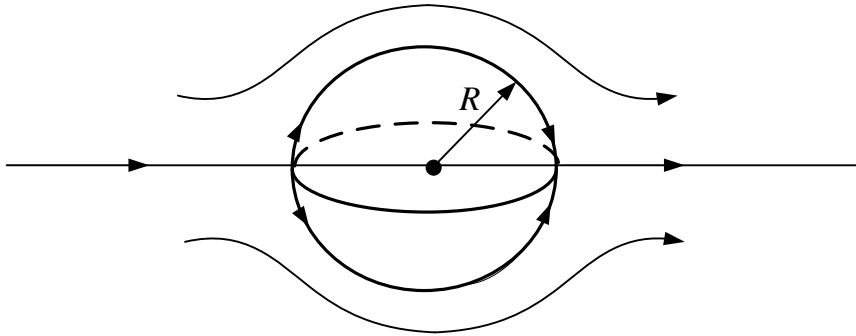
$$V_{\theta} = \left(V_{\infty} + \frac{\mu}{4\pi r^3} \right) \sin \theta \quad (2.46)$$

Τα σημεία ανακοπής του πεδίου (R, Θ) προσδιορίζονται θέτοντας $V_r = V_{\theta} = 0$. Συγκεκριμένα:

$$V_{\theta} = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \Theta = 0, \pi$$

$$V_r = 0 \Rightarrow R = \left(\frac{\mu}{2\pi V_{\infty}} \right)^{1/3} \quad (2.47)$$

Η σχέση (2.47) εκφράζει ότι στην ακτίνα R και για κάθε τιμή των γωνιών θ και φ θα είναι $V_r = 0$. Δηλαδή, στην σφαίρα ακτίνας R η ροή είναι εφαπτομενική στην επιφάνειά της όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.22.



Σχήμα 2.22: Ροή δυναμικού γύρω από σφαίρα ακτίνας R .

Η ταχύτητα V_{θ} πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας προκύπτει θέτοντας $r = R$ στη σχέση (2.46):

$$V_{\theta} = \frac{3}{2} V_{\infty} \sin \theta \quad (2.48)$$

Η μέγιστη ταχύτητα προκύπτει για $\theta = \pm 90^\circ$ και είναι ίση με $1.5 V_{\infty}$. Για τον κύλινδρο είδαμε ότι η μέγιστη ταχύτητα είναι $2 V_{\infty}$, μεγαλύτερη δηλαδή της αντίστοιχης για τη σφαίρα. Αυτή η διαφορά εξηγείται φυσικά από το γεγονός ότι στη διδιάστατη περίπτωση η ροή «περιορίζεται» να διέλθει στο επάνω και στο κάτω μέρος του κυλίνδρου, ενώ στη σφαίρα μπορεί επιπλέον να διέλθει

και πλευρικά, από τα «αριστερά» και από τα «δεξιά» της σφαίρας. Η πλευρική κίνηση του ρευστού «ανακουφίζει» τη ροή, δηλαδή η ροή δεν «χρειάζεται» να επιταχυνθεί τόσο ώστε να ξεπεράσει το εμπόδιο της σφαίρας. Αυτό είναι ένα παράδειγμα του γενικού φαινομένου της «ανακούφισης» των τρισδιάστατων ροών (“3-D relieving effect”), το οποίο αφορά όλους τους τύπους τρισδιάστατων ροών.

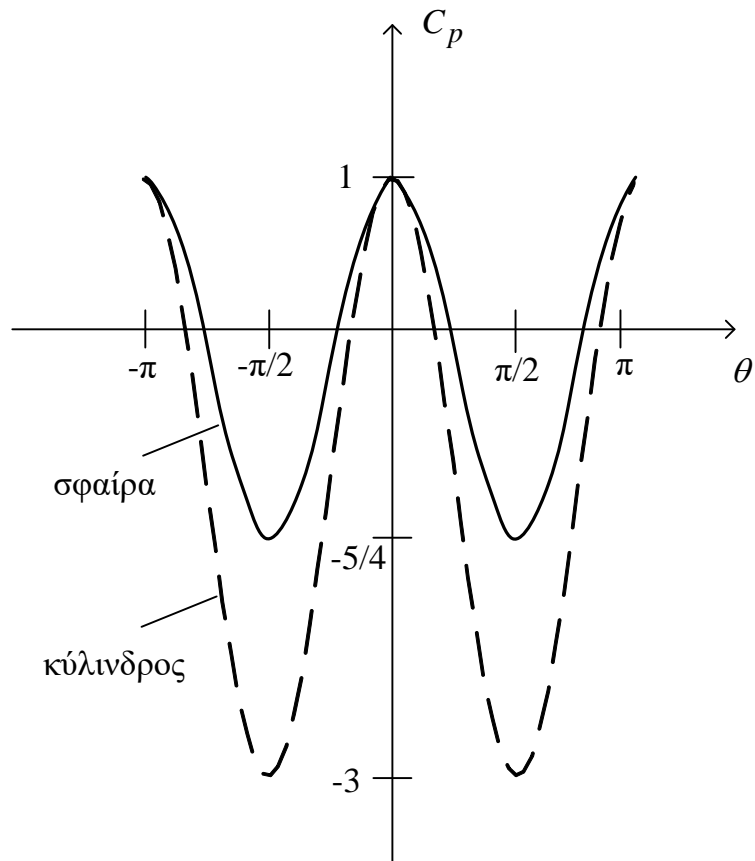
Ο συντελεστής πίεσης στην επιφάνεια της σφαίρας προκύπτει ως εξής:

$$P_{\infty} + \frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2 = P_{\theta} + \frac{1}{2}\rho V_{\theta}^2 \Rightarrow$$

$$C_p = 1 - \left(\frac{V_{\theta}}{V_{\infty}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{3}{2}\sin\theta\right)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{C_p = 1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta} \quad (2.49)$$

Στο Σχήμα 2.23 δίνεται η μεταβολή του συντελεστή πίεσης (C_p) για τη σφαίρα και τον κύλινδρο συναρτήσει της γωνίας θ . Παρατηρείται ότι η πίεση στη σφαίρα είναι μικρότερη κατά απόλυτη τιμή από αυτή που αναπτύσσεται στον κύλινδρο στις δύο διαστάσεις. Η διαφορά αυτή και πάλι αποτελεί μια έκφραση του φαινομένου της «ανακούφισης» των τρισδιάστατων ροών. Για να ξεπεράσει η ροή το εμπόδιο της σφαίρας δεν οδηγείται σε μεταβολές πίεσης τόσο έντονες όσο στη ροή γύρω από κύλινδρο.



Σχήμα 2.23: Κατανομή του συντελεστή πίεσης γύρω από σφαίρα, και σύγκρισή της με αυτήν του κυλίνδρου.

2.7 Παραδείγματα - Ασκήσεις

2.7.1 Συμπιεστότητα, στροβιλότητα και ροϊκή συνάρτηση

Να βρεθεί εάν τα παρακάτω πεδία ταχυτήτων εκφράζουν ασυμπίεστη και αστρόβιλη ροή και να βρεθούν οι αντίστοιχες ροϊκές συναρτήσεις.

$$\alpha) u = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\beta) u = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\gamma) u = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Λύση

α)

Οι παράγωγοι των ταχυτήτων που παρουσιάζονται στην εξίσωση συνέχειας είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{0 - 2y2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{0 - 2x2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Αθροίζοντας τις παραγώγους προκύπτει:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

, επομένως ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας.

Άρα η ροή είναι ασυμπίεστη.

Οι παράγωγοι των ταχυτήτων που παρουσιάζονται στον ορισμό της στροβιλότητας είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2(x^2 + y^2) - (-2x) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Η στροβιλότητα υπολογίζεται ως:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Άρα η ροή είναι αστρόβιλη.

Για τη ροϊκή συνάρτηση Ψ ισχύουν:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

Με ολοκλήρωση των δύο ανωτέρω σχέσεων προκύπτει:

$$\Psi = \ln(x^2 + y^2) + C$$

Οι γραμμές της παραπάνω ροϊκής συνάρτησης είναι ομόκεντροι κύκλοι και η ροή παριστάνει ροϊκό πεδίο στροβίλου.

β)

Οι παράγωγοι των ταχυτήτων που παρουσιάζονται στην εξίσωση συνέχειας είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Αθροίζοντας τις παραγώγους προκύπτει:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

, επομένως ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας.

Άρα η ροή είναι ασυμπίεστη.

Οι παράγωγοι των ταχυτήτων που παρουσιάζονται στον ορισμό της στροβιλότητας είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{0 - 2x2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{0 - 2x2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4yx}{(x^2 + y^2)^2}$$

Η στροβιλότητα υπολογίζεται ως:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Άρα η ροή είναι αστρόβιλη.

Για τη ροϊκή συνάρτηση Ψ ισχύουν:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u = \frac{2x}{x^2 + y^2} = 2 \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v = -\frac{2y}{x^2 + y^2} = 2 \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Με ολοκλήρωση των δύο ανωτέρω σχέσεων προκύπτει:

$$\Psi = 2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

Οι γραμμές της παραπάνω ροϊκής συνάρτησης είναι ακτίνες και η ροή παριστάνει ροϊκό πεδίο σημειακής πηγής.

γ)

Οι παράγωγοι των ταχυτήτων που παρουσιάζονται στην εξίσωση συνέχειας είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - (y^2 - x^2)[4x(x^2 + y^2)]}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{2x^5 - 6xy^4 - 4y^2x^3}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2x(x^2 + y^2)^2 - 2xy[4y(x^2 + y^2)]}{(x^2 + y^2)^4} = -\frac{2x^5 - 6xy^4 - 4y^2x^3}{(x^2 + y^2)^4}$$

Αθροίζοντας τις παραγώγους προκύπτει:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

, επομένως ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας.

Άρα η ροή είναι ασυμπύεστη.

Οι παράγωγοι των ταχυτήτων που παρουσιάζονται στον ορισμό της στροβιλότητας είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y(x^2 + y^2)^2 - (y^2 - x^2)[4y(x^2 + y^2)]}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{-2y^5 + 6yx^4 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y(x^2 + y^2)^2 - 2xy[4x(x^2 + y^2)]}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{-2y^5 + 6yx^4 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^4}$$

Η στροβιλότητα υπολογίζεται ως:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Άρα η ροή είναι αστρόβιλη.

Για τη ροϊκή συνάρτηση Ψ ισχύουν:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Με ολοκλήρωση των δύο ανωτέρω σχέσεων προκύπτει:

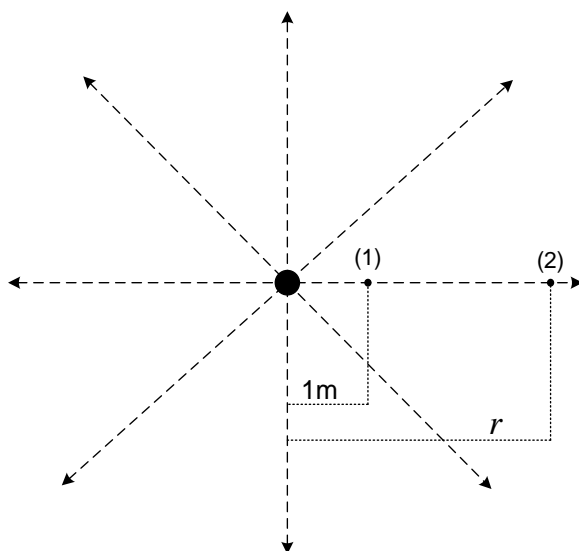
$$\Psi = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C$$

Η παραπάνω ροϊκή συνάρτηση σε πολικές συντεταγμένες είναι ανάλογη του

$\frac{\sin \theta}{r}$ και παριστάνει ροϊκό πεδίο διπόλου.

2.7.2 Κατανομή πίεσης σε ροή σημειακής πηγής

Θεωρείται ιδανική δισδιάστατη πηγή από την οποία εξέρχεται νερό σταθερής παροχής των $2 \text{ m}^2/\text{s}$. Να βρεθεί η κατανομή της πίεσης συναρτήσει της απόστασης από την πηγή.



Λύση

Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ δυο σημείων (1) και (2) του πεδίου όπου το ένα σημείο είναι το σημείο αναφοράς

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

Οι γραμμές ροής σε μία δισδιάστατη πηγή είναι ακτινικές με αρχή το σημείο της πηγής. Η ταχύτητα του ρευστού για σημειακή πηγή συναρτήσει της απόστασης από την πηγή και της έντασης της πηγής είναι:

$$V_r = \frac{\Lambda}{2\pi r}$$

Καθώς η ταχύτητα του ρευστού ακριβώς πάνω στην πηγή παρουσιάζει αοριστία ($V_r = \infty$), η κατανομή της πίεσης προσδιορίζεται ως προς ένα τυχαίο σημείο E το οποίο απέχει απόσταση 1 m από την πηγή, οπότε:

$$P - P_E = \frac{\rho}{2} (V_E^2 - V^2) \Rightarrow$$

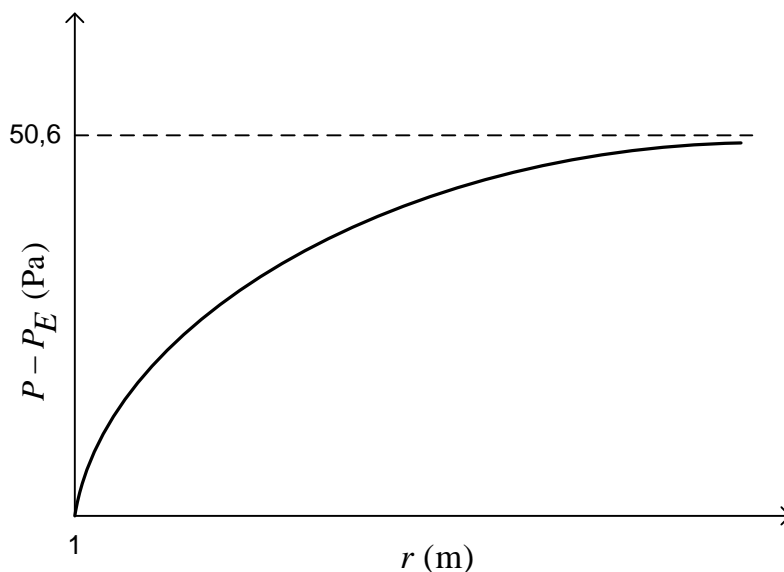
$$P - P_E = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\Lambda}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{r_E^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

Με αντικατάσταση, και θεωρώντας θερμοκρασία νερού 20 °C, η τελική κατανομή πίεσης ως προς το σημείο E είναι:

$$P - P_E = \frac{998,2 \text{ kg/m}^3}{2} \left(\frac{2 \text{ m}^2/\text{s}}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{1,0^2 \text{ m}^2} - \frac{1}{r^2 \text{ m}^2} \right) \Rightarrow$$

$$P - P_E = 50,6 \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \text{ Pa}$$

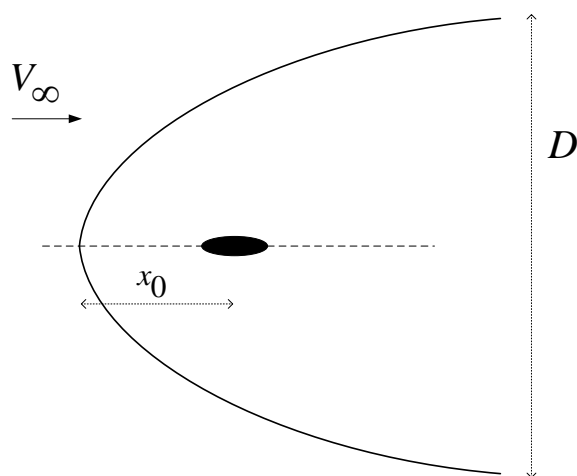
Στο παρακάτω γράφημα δίνεται η μεταβολή της πίεσης συναρτήσει της απόστασης από την πηγή. Παρατηρούμε ότι για $r \rightarrow \infty$ η διαφορά πίεσης γίνεται 50,6 Pa.



Γράφημα 1: Κατανομή της πίεσης συναρτήσει της απόστασης από την πηγή.

2.7.3 Έκταση διασποράς καυσίμου σε διαρροή από βάρκα

Μία ακίνητη βάρκα σε μία λίμνη έχει διαρροή καυσίμου, και χάνει καύσιμο με ρυθμό $150 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. Αν η ταχύτητα του ρεύματος στη λίμνη, στο σημείο που βρίσκεται η βάρκα, είναι $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και το μέσο βάθος είναι 20 m , να προσδιοριστεί η έκταση διασποράς του καυσίμου.



Λύση

Θεωρείται ότι η διαρροή καυσίμου αναπαριστάται σαν σημειακή πηγή και το νερό και το καύσιμο συμπεριφέρονται σαν ιδανικά ρευστά. Θεωρείται ακόμη, ότι η ροή του καυσίμου λαμβάνει χώρα στις δύο διαστάσεις.

Με βάση τις παραδοχές, το πεδίο ροής μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω της υπέρθεσης δύο πεδίων. Ένα ομοιόμορφο πεδίο ροής το οποίο μοντελοποιεί την επίδραση του ρεύματος της λίμνης, και ένα πεδίο ροής το οποίο επάγει μία σημειακή πηγή στις δύο διαστάσεις. Η ροϊκή συνάρτηση για το συνιστάμενο πεδίο ροής σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$\Psi = V_{\infty} r \sin \theta + \frac{\Lambda \theta}{2\pi}$$

Ο συνδυασμός ομοιόμορφης ροής και σημειακής πηγής, οδηγεί στην αναπαράσταση ημιάπειρου οβάλ σώματος, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$V_{\infty} r \sin \theta + \frac{\Lambda \theta}{2\pi} = \frac{\Lambda}{2} \Rightarrow r = \frac{\Lambda(\pi - \theta)}{2\pi V_{\infty} \sin \theta}$$

Στο παρόν παράδειγμα, το καύσιμο είναι περιορισμένο μέσα στο ημιάπειρο σώμα. Το μέγιστο πάχος του σώματος είναι ίσο με (εξισώνοντας την παροχή μάζας της πηγής με την παροχή στην διατομή):

$$D = \frac{\Lambda}{V_{\infty}}$$

όπου Λ είναι ο ρυθμός απόρριψης ανά μονάδα βάθους (δηλαδή,

$$\Lambda = \frac{150 \text{ m}^3/\text{s}}{20 \text{ m}} = 7,5 \text{ m}^2/\text{s} \text{). Τότε,}$$

$$D = \frac{\Lambda}{V_{\infty}} = \frac{7,5 \text{ m}^2/\text{s}}{0,5 \text{ m}/\text{s}} = 15,0 \text{ m}$$

Επίσης, το καύσιμο εξαπλώνεται σε απόσταση x_0 από το σημείο διαρροής, η οποία είναι ίση με:

$$x_0 = -r_{stag} = -\frac{\Lambda}{2\pi V_{\infty}} = -\frac{7,5 \text{ m}^2/\text{s}}{2\pi \cdot 0,5 \text{ m}/\text{s}} = -2,387 \text{ m}$$

2.7.4 Επαλληλία ομοιόμορφης ροής, πηγής και στρόβιλου

Θεωρείται δισδιάστατη πηγή έντασης Λ και στρόβιλος έντασης Γ , μέσα σε ομοιόμορφη ροή ταχύτητας V . Τα κέντρα της πηγής και του στρόβιλου συμπίπτουν. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου ανακοπής. Θεωρείται ότι η ροή είναι ασυμπίεστη και αστρόβιλη.

Λύση

Επειδή η ροϊκή συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, είναι δυνατό να γίνει σύνθεση του ροϊκού πεδίου με επαλληλία των ροϊκών συναρτήσεων των πεδίων ροής που επάγονται ξεχωριστά από την πηγή, τον στρόβιλο και την ομοιόμορφη ροή.

Χρησιμοποιείται πολικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή πάνω στο κέντρο της πηγής. Οπότε:

Ομοιόμορφη ροή: $\Psi_V = V \cdot r \cdot \sin \theta$

Πηγή: $\Psi_\Lambda = \frac{\Lambda}{2\pi} \cdot \theta$

Στρόβιλος: $\Psi_\Gamma = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \ln(r)$

Η ροϊκή συνάρτηση του συνιστάμενου πεδίου ροής θα είναι ίση με:

$$\Psi = \Psi_V + \Psi_\Lambda + \Psi_\Gamma$$

Η ακτινική ταχύτητα της ροής είναι ίση με:

$$V_r = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = V \cdot \cos \theta + \frac{\Lambda}{2\pi \cdot r}$$

Η εφαπτομενική ταχύτητα της ροής είναι ίση με:

$$V_{\theta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -V \cdot \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi \cdot r}$$

Στο σημείο ανακοπής ισχύει ότι: $V_r = V_{\theta} = 0$. Οπότε προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του σημείου ανακοπής είναι:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\Gamma}{\Lambda}\right) \quad \text{και} \quad r = -\frac{\Lambda}{2\pi \cdot V \cdot \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{\Gamma}{\Lambda}\right)\right)}$$

ή

$$r = \frac{\Lambda}{2\pi \cdot V \cdot \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{\Gamma}{\Lambda}\right)\right)} \quad \text{και} \quad \theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\Gamma}{\Lambda}\right)$$

2.7.5 Διαφορά πίεσης σε δυναμική ροή γύρω από κύλινδρο

Θεωρείται δυναμική ροή γύρω από κύλινδρο ακτίνας R σε ομοιόμορφη ροή ταχύτητας V_∞ ο οποίος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω . Να υπολογιστεί η διαφορά πίεσης μεταξύ του κατώτατου και του ανώτατου σημείου του κυλίνδρου $P_K - P_A$.

Λύση

Οι συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων για ροή γύρω από κύλινδρο με περιστροφή σε πολικές συντεταγμένες είναι :

$$V_r = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \cdot \cos \theta \quad (1)$$

$$V_\theta = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \cdot \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (2)$$

Για την επιφάνεια του κυλίνδρου από την (1) έχουμε :

$$r = R \Rightarrow V_r = 0$$

και από την (2)

$$r = R \Rightarrow V_\theta = -2V_\infty \cdot \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Οπότε οι ταχύτητες στο ανώτατο και στο κατώτατο σημείου του κυλίνδρου είναι αντίστοιχα :

$$\theta_A = 90^\circ \Rightarrow V_A = -2V_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

$$\theta_K = 270^\circ \Rightarrow V_K = 2V_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Οι παραπάνω εκφράσεις περιέχουν την κυκλοφορία Γ και όχι τη γωνιακή ταχύτητα Ω που μας δίνεται οπότε πρέπει να βρούμε τη μεταξύ τους σχέση. Η ταχύτητα που επάγει η κυκλοφορία Γ και η γωνιακή ταχύτητα Ω στην επιφάνεια του κυλίνδρου είναι ίσες οπότε ισχύει :

$$\frac{\Gamma}{2\pi R} = \Omega R$$

και

$$V_A = -2V_\infty - \Omega R$$

$$V_K = 2V_\infty - \Omega R$$

Για να βρούμε την διαφορά της πίεσης παίρνουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των δύο σημείων του κυλίνδρου :

$$P_K + \frac{1}{2}\rho V_K^2 = P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 \Rightarrow$$

$$P_K - P_A = \frac{1}{2}\rho(V_A^2 - V_K^2) = \frac{1}{2}\rho(4V_\infty^2 + \Omega^2 R^2 + 4V_\infty \Omega R - 4V_\infty^2 - \Omega^2 R^2 + 4V_\infty \Omega R) \Rightarrow$$

$$P_K - P_A = 4\rho V_\infty \Omega R$$