Διοίκηση Ποιότητας
(Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας)

Σ. Μαλεφάκη
Τμήμα Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών Μηχανικών

2023–2024

Βασικά παραγοντικά πειράματα

- Επίδραση δύο ή περισσοτέρων παραγόντων πάνω σε μία μεταβλητή απόκρισης
- Λαμβάνονται παρατηρήσεις της μεταβλητής απόκρισης πάνω σε όλους τους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων
- Επιδράσεις στη μεταβλητή απόκρισης
  - Κύριες επιδράσεις των παραγόντων
  - Αλληλεπιδράσεις δύο ή περισσότερων παραγόντων
- Απλές γραφικές παραστάσεις
- Στατιστική συμπερασματολογία

Παραγοντικά πειράματα

πειράματα στα οποία υπεισέρχονται δύο ή περισσότεροι παράγοντες και όλα τα επίπεδα τους ενός παράγονται συνδυάζονται με τα επίπεδα όλων των άλλων παραγόντων για να παρατηρηθεί η μεταβλητή απόκρισης σε κάθε συνδυασμό.

- Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε ένα παραγοντικό πείραμα με δύο παράγοντες, το **Μορφωτικό επίπεδό** με 4 επίπεδα (αναλφάβητος, πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση) και το **ετήσιο εισόδημα** (<10000 ευρώ, $10000-20000$ ευρώ και >20000 ευρώ).

Σύνολο θεραπειών: $4 \times 3 = 12$

- Μετράμε τη μεταβλητή απόκρισης μέσα σε κάθε μία από αυτές τις θεραπείες.

- Μπορούμε να έχουμε μία ή περισσότερες παρατηρήσεις της μεταβλητής απόκρισης μέσα σε κάθε θεραπεία.

Είδη παραγόντων

- Σταθεροί: τα επίπεδα τους είναι συγκεκριμένα και είναι αυτά για τα οποία ενδιαφερόμαστε.

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στις μέσες τιμές της απόκρισης που αντιστοιχεί στους συνδυασμούς αυτών των επιπέδων

- Τυχαίοι: τα επίπεδα του παράγοντα που χρησιμοποιούνται είναι ένα τυχαίο δείγμα από το σύνολο των δυνατών επιπέδων του παράγοντα.

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στην ανάλυση της διασποράς της μεταβλητής απόκρισης σε επιμέρους όρους και στην εκτίμηση των συνιστωσών της διασποράς που οφείλεται στις επιδράσεις των παραγόντων.

Κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις παραγόντων

- Επιδράσεις παραγόντων: Μέσες μεταβολές της απόκρισης που αντιστοιχούν σε αλλαγές των θεραπειών.

Έστω ότι έχουμε ένα παραγοντικό πείραμα με δύο παράγοντες
A (με α επίπεδα) και B (με β επίπεδα) Σύνολο θεραπειών: $\alpha \times \beta$

- μ_{ij} μέση απόκριση για το επίπεδο i του παράγοντα A και το επίπεδο j του παράγοντα B.
- $\mu_{i.} = \dfrac{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_{ij}}{\beta}$ μέση απόκριση για το επίπεδο i του παράγοντα A.
- $\mu_{.j} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_{ij}}{\alpha}$ μέση απόκριση για το επίπεδο j του παράγοντα B.
- $\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} \mu_{ij}}{\alpha\beta}$ γενική μέση τιμη

- Κύριες επιδράσεις: Η επίδραση που έχει κάθε παράγοντας ξεχωριστά στην απόκριση χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η επίδραση των άλλων παραγόντων.
  - $\alpha_i = \mu_{i.} - \mu, \quad i = 1, \ldots \alpha$ κύρια επίδραση του παράγοντα A.
  - $\beta_j = \mu_{.j} - \mu, \quad j = 1, \ldots \beta$ κύρια επίδραση του παράγοντα B.

Δειγματικές μέσες τιμές

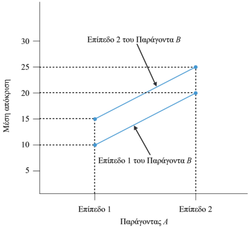
- $\bar{y}_{ij\cdot} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{n}$ δειγματικός μέσος που αντιστοιχεί στη θεραπεία (i,j) $i = 1,\ldots,\alpha$, $j = 1,\ldots,\beta$
- $\bar{y}_{i\cdot\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{n\beta}$ δειγματικός μέσος των παρατηρήσεων του i επιπέδου του παράγοντα A $i = 1,\ldots,\alpha$.
- $\bar{y}_{\cdot j\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{n\alpha}$ δειγματικός μέσος των παρατηρήσεων του j επιπέδου του παράγοντα B $j = 1,\ldots,\beta$.
- $\bar{y}_{\cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{n\alpha\beta}$ γενικός μέσος.

Δειγματικές κύριες επιδράσεις

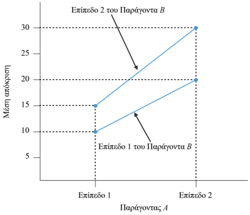
- $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdots}$, $i = 1,\cdots\alpha$
- $\hat{\beta}_j = \bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdots}$, $j = 1,\cdots\beta$
- $\sum_{i=1}^{\alpha}\hat{\alpha}_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{\beta}\hat{\beta}_j = 0$

Αλληλεπιδράσεις

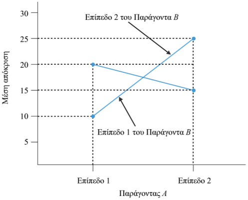
Κοινή επίδραση των παραγόντων πάνω στη μεταβλητή απόκρισης



Χωρίς αλληλεπίδραση



Συνεργατική αλληλεπίδραση



Ανταγωνιστική αλληλεπίδραση

Αλληλεπιδράσεις

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$
$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \alpha_i + \beta_j) = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu$$

αλληλεπίδραση του παράγοντα A και B στη θεραπεία (i, j).

- Δειγματική αλληλεπίδραση

$$(\hat{\alpha\beta})_{ij} = \bar{y}_{ij.} - (\bar{y}_{...} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j) = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha} (\hat{\alpha\beta})_{ij} = 0, \; j = 1 \dots \beta$$

$$\sum_{j=1}^{\beta} (\hat{\alpha\beta})_{ij} = 0, \; i = 1 \dots \alpha$$

Συμπερασματολογία σε παραγοντικό πείραμα πλήρους τυχαιοποίησης

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ik} + \epsilon_{ijk}$$

$i = 1, \cdots, \alpha, \; j = 1, \cdots, \beta, \; k = 1, \cdots, n$
όπου $\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$ τυχαία σφάλματα,

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{\beta} \beta_j = 0$$

- y_{ijk} απόκριση που παρατηρείται στην k επανάληψη του πειράματος για τη θεραπεία (i, j).

- μ γενικός μέσος
- α_i κύρια επίδραση παράγονται A, $i = 1, \cdots, \alpha$
- β_j κύρια επίδραση παράγονται B, $j = 1, \cdots, \beta$
- $(\alpha\beta)_{ij}$ αλληλεπίδραση των παραγόντων A και B στη θεραπεία (i, j)

$i = 1, \cdots, \alpha \; j = 1, \cdots, \beta$

(το παραπάνω πρότυπο γενικεύεται εύκολα για περισσότερους παράγοντες)

Έλεγχοι Υποθέσεων

- Έλεγχος Υπόθεσης κύριων επιδράσεων παράγοντα A

$$H_0 : \ \alpha_i = 0, \ i = 1, \ldots, \alpha \text{ κατά } H_1 : \ \text{ τουλάχιστον ένα } \alpha_i \neq 0$$

- Έλεγχος Υπόθεσης κύριων επιδράσεων παράγοντα B

$$H_0 : \ \beta_j = 0, \ j = 1, \ldots, \beta \text{ κατά } H_1 : \ \text{ τουλάχιστον ένα } \beta_j \neq 0$$

- Έλεγχος Υπόθεσης αλληλεπιδράσεων μεταξύ των παραγόντων A και B

$$H_0 : \ (\alpha\beta)_{ij} = 0, \ i = 1, \ldots, \alpha, \ j = 1, \ldots, \beta \text{ κατά } H_1 : \text{τουλάχιστον ένα } (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$$

Ανάλυση Διασποράς με δύο παράγοντες

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\overline{y}_{...})^2 = bn\sum_{i=1}^{\alpha}(\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{...})^2 + an\sum_{j=1}^{\beta}(\overline{y}_{.j.}-\overline{y}_{...})^2 +$$

$$n\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}(\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{.j.}+\overline{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\overline{y}_{ij.})^2$$

$$SST = SSA + SSB + SSAB + SSE$$

Βαθμοί Ελευθερίας

$$\alpha\beta n - 1 = (\alpha-1) + (\beta-1) + (\alpha-1)(\beta-1) + \alpha\beta(n-1)$$

Ανάλυση Διασποράς με δύο παράγοντες

$$MSA = \frac{SSA}{\alpha - 1}, \qquad MSB = \frac{SSB}{\beta - 1}$$

$$MSA = \frac{SSAB}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}, \qquad MSE = \frac{SSBE}{\alpha\beta(n-1)}$$

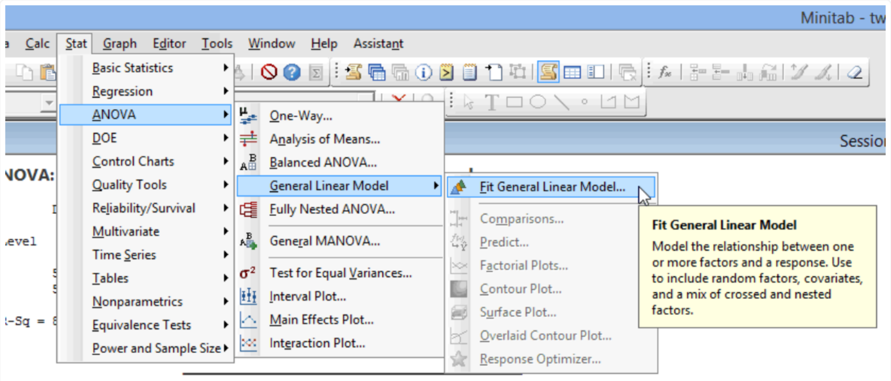
$$F = \frac{MSA}{MSE} \sim F_{\alpha-1,\alpha\beta(n-1)}, \; F = \frac{MSB}{MSE} \sim F_{\beta-1,\alpha\beta(n-1)}$$

$$F = \frac{MSAB}{MSE} \sim F_{(\alpha-1)(\beta-1),\alpha\beta(n-1)}$$

Άρα σε επίπεδο σημαντικότητας a απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση αν $F > F_{df_{ar},\alpha\beta(n-1)}$.

Ανάλυση Διασποράς με δύο παράγοντες

- `Stat → General Linear Model → Fit General Linear Model...`



Ανάλυση Διασποράς με δύο παράγοντες

Μεταβλητότητα	Βαθμοί ελευθερίας	’θροισμα τετραγώνων	Τετραγωνικός μέσος	$F-$έλεγχοι
Παράγοντας A	$\alpha-1$	SSA	$\frac{SSA}{\alpha-1}=MSA$	$\frac{MSA}{MSE}$
Παράγοντας B	$\beta-1$	SSB	$\frac{SSB}{\beta-1}=MSB$	$\frac{MSB}{MSE}$
Αλληλεπίδραση AB	$(\alpha-1)(\beta-1)$	$SSAB$	$\frac{SSAB}{(\alpha-1)(\beta-1)}=MSAB$	$\frac{MSAB}{MSE}$
Σφάλματα (ΣΣΕ)	$\alpha\beta(n-1)$	SSE	$\frac{SSE}{\alpha\beta(n-1)}=MSE$	
Ολική	$\alpha\beta n-1$	SST	$\frac{SST}{\alpha\beta n-1}=MST$	

$F=\frac{MSA}{MSE}\sim F_{\alpha-1,\alpha\beta(n-1)}$ **απορρίπτουμε την** H_0 **όταν** $F>F_{\alpha-1,\alpha\beta(n-1)}$.

$F=\frac{MSB}{MSE}\sim F_{\beta-1,\alpha\beta(n-1)}$ **απορρίπτουμε την** H_0 **όταν** $F>F_{\beta-1,\alpha\beta(n-1)}$.

$F=\frac{MSAB}{MSE}\sim F_{(\alpha-1)(\beta-1),\alpha\beta(n-1)}$ **απορρίπτουμε την** H_0 **όταν** $F>F_{(\alpha-1)(\beta-1),\alpha\beta(n-1)}$.

Παραγοντικά πειράματα με σταθερούς παράγοντες χωρίς επανάληψη ($n = 1$)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \cdots, \alpha, \; j = 1, \cdots, \beta,$$

όπου $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ τυχαία σφάλματα.

- Δεν έχουμε μεταβλητότητα μέσα σε κάθε θεραπεία
- Μηδενίζονται οι βαθμοί ελευθερίας των σφαλμάτων

Δεν είναι δυνατή η συμπερασματολογία σε αυτό το πρότυπο αν δεν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των παραγόντων A και B

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \cdots, \alpha, \; j = 1, \cdots, \beta,$$

Ανάλυση Διασποράς με δύο παράγοντες

Μεταβλητότητα	Βαθμοί ελευθερίας	ʼθροισμα τετραγώνων	Τετραγωνικός μέσος	$F-$έλεγχοι
Παράγοντας Α	$\alpha-1$	SSA	$\frac{SSA}{\alpha-1} = MSA$	$\frac{MSA}{MSE}$
Παράγοντας Β	$\beta-1$	SSB	$\frac{SSB}{\beta-1} = MSB$	$\frac{MSB}{MSE}$
Σφάλματα	$(\alpha-1)(\beta-1)$	SSE	$\frac{SSE}{(\alpha-1)(\beta-1)} = MSE$	
Ολική	$\alpha\beta-1$	SST	$\frac{SST}{\alpha\beta-1} = MST$	

$F = \frac{MSA}{MSE} \sim F_{\alpha-1,(\alpha-1)(\beta-1)}$ απορρίπτουμε την H_0 όταν $F > F_{\alpha-1,(\alpha-1)(\beta-1)}$.

$F = \frac{MSB}{MSE} \sim F_{\beta-1,(\alpha-1)(\beta-1)}$ απορρίπτουμε την H_0 όταν $F > F_{\beta-1,(\alpha-1)(\beta-1)}$.

Άσκηση

Ο υπεύθυνος ποιότητας μιας βιομηχανίας παραγωγής επίπλων κουζίνας θέλησε να διερευνήσει το κατά πόσο η αντοχή των συγκολλήσεων τύπου ΤΑΥ επηρεάζεται από τον τύπο του μίγματος της κόλλας που χρησιμοποιείται για τις κολλήσεις καθώς και από τη θερμοκρασία του μίγματος κατά τη διαδικασία της κόλλησης. Η θερμοκρασία του μίγματος της κόλλας μπορεί να ρυθμιστεί με ακρίβεια σε τρία διαφορετικά επίπεδα ($50^o C$, $60^o C$ και $70^o C$) με χρήση ειδικού μηχανήματος συγκόλλησης που διαθέτει η βιομηχανία. Ο υπεύθυνος θεωρεί πως πρέπει να ελέγξει και τους τέσσερις τύπους μίγματος κόλλας που είναι διαθέσιμοι στην αγορά. Για το σκοπό αυτό σχεδιάζει ένα πείραμα στο οποίο γίνονται συγκολλήσεις τύπου ΤΑΥ για διάφορους συνδυασμούς μίγματος κόλλας και θερμοκρασίας μίγματος και μετράται η δύναμη (σε Newton) που πρέπει να εφαρμοστεί (κάθετα) στο ελεύθερο άκρο του οριζόντιου δοκού ώστε να επέλθει η ρήξη του δεσμού που πραγματοποιήθηκε. Τα δεδομένα του πειράματος δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Άσκηση

Κόλλα τύπου Α		Κόλλα τύπου Β		Κόλλα τύπου Γ		Κόλλα τύπου Δ	
Θερμοκρασία μίγματος	Δύναμη	Θερμοκρασία μίγματος	Δύναμη	Θερμοκρασία μίγματος	Δύναμη	Θερμοκρασία μίγματος	Δύναμη
50°C	30.4	70°C	17.7	60°C	38.9	50°C	35.9
70°C	33.6	70°C	18.4	50°C	41.6	50°C	36.3
60°C	37.9	50°C	22.6	50°C	43.6	50°C	37.9
50°C	36.4	50°C	20.3	70°C	29.3	50°C	36.9
70°C	32.2	60°C	17.9	60°C	36.1	70°C	23.3
60°C	32.7	60°C	21.9	70°C	30.5	70°C	23.2
50°C	37.3	70°C	18.6	50°C	39.8	60°C	34.5
70°C	34.6	50°C	23.4	50°C	40.3	60°C	34.3
60°C	33.5	60°C	22.0	60°C	32.9	60°C	28.6
50°C	34.4	60°C	22.7	70°C	29.0	60°C	33.7
70°C	33.2	50°C	22.0	60°C	35.8	70°C	20.3
60°C	35.0	70°C	23.5	70°C	28.5	70°C	28.0

Άσκηση

1. Αναγνωρίστε το είδος του σχεδιασμού που χρησιμοποιήθηκε, τη μεταβλητή απόκρισης, τους παράγοντες και το είδος των επιδράσεων τους (σταθερές ή τυχαίες). Δώστε κατάλληλο πρότυπο για την περιγραφή του προβλήματος και προσδιορίστε τις υποθέσεις που το διέπουν (τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται).
2. Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα των κυρίων επιδράσεων των παραγόντων καθώς και το διάγραμμα αλληλεπίδρασης αυτών. Στη συνέχεια, να ερευνήσετε, μελετώντας τα διαγράμματα, αν υπάρχει κάποια θερμοκρασία μίγματος με την οποία μεγιστοποιείται η δύναμη που πρέπει να εφαρμοστεί ώστε να σπάσει η κόλληση (ανεξάρτητα από τον τύπο της κόλλας που χρησιμοποιείται) ή αν υπάρχει κάποιος τύπος κόλλας η χρήση του οποίου μεγιστοποιεί τη δύναμη που πρέπει να εφαρμοστεί ώστε να σπάσει η κόλληση (ανεξάρτητα από τη θερμοκρασία του μίγματος).
3. Να δώσετε τον πίνακα ανάλυσης διασποράς και να εντοπίσετε, σε επίπεδο σημαντικότητας 1%, τις σημαντικές παραγοντικές επιδράσεις αναφέροντας κάθε φορά ποια είναι η μηδενική υπόθεση που ελέγχετε. Τέλος, κάνοντας γραφική ανάλυση των υπολοίπων, να ελέγξετε το κατά πόσο μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι υποθέσεις του προτύπου.

Ερώτημα 1

Πρόκειται για παραγοντικό πείραμα δύο σταθερών παραγόντων με τέσσερα επίπεδα ο ένας και τρία επίπεδα ο άλλος και συνολικά 12 θεραπείες. Για κάθε θεραπεία προκύπτει πως έχουν γίνει $n = 4$ επαναλήψεις, γεγονός που καθιστά το σχεδιασμό ισορροπημένο.

Παράγοντες: ο τύπος μίγματος κόλλας (με 4 επίπεδα) και η θερμοκρασία του μίγματος κόλλας (με 3 επίπεδα)

Μεταβλητή απόκρισης: η δύναμη που ασκείται κάθετα στον οριζόντιο δοκό μέχρι να «σπάσει» η κόλληση

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \begin{cases} i = 1,2,3,4 \\ j = 1,2,3 \\ k = 1,2,3,4 \end{cases}$$

όπου α_i οι κύριες επιδράσεις του παράγοντα «Τύπος κόλλας» (Glue), β_j οι κύριες επιδράσεις του παράγοντα «Θερμοκρασία» (Temp) και $(\alpha\beta)_{ij}$ η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο παραγόντων για τη θεραπεία (i, j). Τα σφάλματα ε_{ijk} υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $N(0,\sigma)$ για κάθε i, j και k.