Διοίκηση Ποιότητας
(Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας)

Σ. Μαλεφάκη
Τμήμα Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών Μηχανικών

2022–2023

Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

Βασικές αρχές στον πειραματικό σχεδιασμό

- **Μεταβλητή απόκρισης** Το αποτέλεσμα που μετριέται σε ένα πείραμα

- **Παράγοντας** είναι μία μεταβλητή της οποίας οι τιμές (καταστάσεις) μεταβάλλονται προμελετημένα, ώστε να μελετηθεί η επίδραση κάθε μεταβολής του στη μεταβλητή απόκρισης.
  Ένας παράγοντας μπορεί να είναι ποιοτική μεταβλητή (φύλο, τοποθεσία, τύπος, ...) ή ποσοτική (χρόνος, θερμοκρασία,...)

- **Επίπεδο** (ή στάθμη) του παράγοντα είναι μια συγκεκριμένη τιμή ή κατάσταση του παράγοντα στην οποία θέλουμε να μελετήσουμε τη μεταβλητή απόκρισης

- **Θεραπεία** (ή δοκιμασία) είναι συνδυασμός πειραματικών συνθηκών κάτω από τις οποίες πρόκειται να παρατηρηθεί η μεταβλητή απόκρισης.

- **Επίδραση στη μεταβλητή απόκρισης** είναι η παρατηρούμενη μεταβολή στη μεταβλητή απόκρισης καθώς αλλάζουν οι θεραπείες των πειραμάτων.

Βασικές αρχές στον πειραματικό σχεδιασμό

- Πειραματική (ή δειγματοληπτική) μονάδα είναι το αντικείμενο (άτομα, πράγμα) στο οποίο μετριέται η μεταβλητή απόκρισης για δεδομένη θεραπεία.

- Μεταβλητή πλαισίου μεταβλητή που έχει σημαντική επίδραση στη μεταβλητή απόκρισης αλλά αυτό είναι γνωστό εξαρχής στον ερευνητή οπότε αυτή τη μεταβλητή δεν έχει νόημα να τη συμπεριλάβει στο πείραμα ως παράγοντα αλλά θα πρέπει να τεθεί υπό έλεγχο, για να μην οδηγηθούμε σε εσφαλμένα συμπεράσματα

- Μεταβλητή Θορύβου άγνωστη μεταβλητή που επηρεάζει τη μεταβλητή απόκρισης

- Πειραματικό (ή τυχαίο) σφάλμα είναι η μεταβλητότητα της μεταβλητής απόκρισης που δεν μπορεί να αποδοθεί σε αλλαγή θεραπείας.
Στην πραγματικότητα το τυχαίο σφάλμα είναι το συνδυασμένο αποτέλεσμα που έχουν όλες οι μεταβλητές θορύβου μαζί στη μεταβλητή απόκρισης.
Μικρό πειραματικό σφάλμα σημαίνει μεγαλύτερη δυνατότητα αναγνώρισης διαφορών στην επίδραση διαφορετικών θεραπειών, όπου υπάρχουν.

Πειραματικοί Σχεδιασμού

- **Σχεδιασμός πλήρους τυχαιοποίησης** Ο καταμερισμός των πειραματικών μονάδων στις θεραπείες (ή η κατανομή των θεραπειών στις πειραματικές μονάδες) γίνεται εντελώς τυχαία. Όλες οι μεταβλητές πλαισίων κρατούνται σταθερές και όλη η μεταβλητότητα στη μεταβλητή απόκρισης εντός μιας καθορισμένης θεραπείας δημιουργείται μόνο από τις μεταβλητές θορύβου.

- **Σχεδιασμός τυχαιοποιημένων πλήρων ομάδων** Ο ερευνητής δημιουργεί ομάδες οι οποίες μπορούν να ερμηνεύσουν τις διαφορές μεταξύ των πειραματικών μονάδων που οφείλονται σε μεταβλητές πλαισίου. Όλες οι θεραπείες καταμερίζονται τυχαία μέσα σε κάθε ομάδα.

- **Πίνακας σχεδιασμών** είναι ένας πλήρης καθορισμός των πειραματικών συνθηκών κάτω από τις οποίες θα παρατηρηθεί η μεταβλητή απόκρισης και της ακριβούς σειράς με την οποία θα γίνουν αυτές οι παρατηρήσεις.

Βασικές αρχές στον πειραματικό σχεδιασμό

- Ανάλυση αποτελεσμάτων πειραματικών σχεδιασμών
  - Γραφική ανάλυση
    οπτική απεικόνιση διαφορών μεταξύ των θεραπειών
  - Στατιστική Συμπερασματολογία
    (επιβεβαιώνουν τις αρχικές ενδείξεις που προσφέρει η γραφική ανάλυση)
    - Ανάλυση μέσων
    - Ανάλυση Διασποράς (ANOVA)

Διερεύνηση ενός παράγοντα σε πείραμα πλήρους τυχαιοποίησης

Σε αυτά τα πειράματα οι θεραπείες ταυτίζονται με τα επίπεδα του παράγοντα που έχουν επιλεγεί για διερεύνηση.

- **Σταθερός παράγοντας (fixed effect)** Εξάγουμε συμπεράσματα για τα συγκεκριμένα επίπεδα του παράγοντα που έχουν συμπεριληφθεί στο πείραμα
- **Τυχαίος παράγοντας (random effect)** Τα επίπεδα του παράγοντα που χρησιμοποιούνται στο δείγμα ειναι ένα τυχαίο δείγμα από ένα σύνολο δυνατών επιπέδων του παράγοντα.
- **Τεχνικές στατιστικής ανάλυσης**
  - Χρήση γραφικών παραστάσεων
  - Μέθοδος ανάλυσης μέσων
  - Ανάλυση διασποράς - ANOVA
  - Ανάλυση με τη χρήση διαστημάτων εμπιστοσύνης και μεθόδων πολλαπλών συγκρίσεων

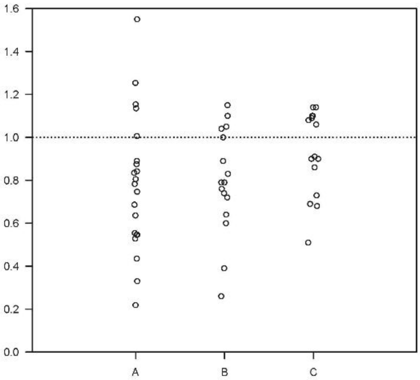
Ανάλυση με απλές γραφικές παραστάσεις

- Διάγραμμα κουκκίδας (Dotplot)
- Θηκόγραμμα (Boxplot)

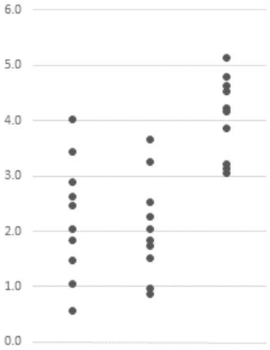
Μπορούμε να διακρίνουμε πιθανή διαφορά

- στις μέσες τιμές
- στη μεταβλητότητα

Διάγραμμα κουκκίδας

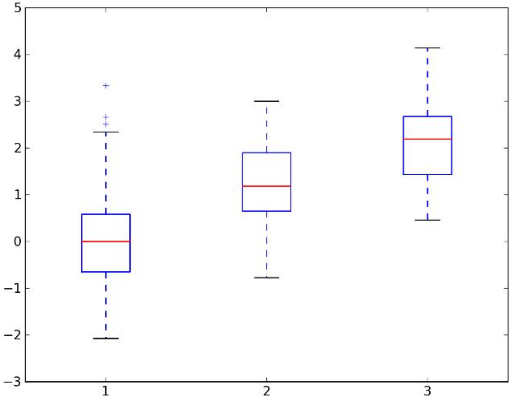


A



B

Θηκόγραμμα



Ανάλυση μέσων

Έστω ότι έχουμε ένα παράγοντα με k επίπεδα.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k \quad H_1 : \text{ τουλάχιστον ένα } \mu_j \text{ διαφορετικό}$$

- Μπορούμε να κάνουμε όλους του δυνατούς ελέγχους ανά δύο, όμως με αυτό τον τρόπο αυξάνουμε την πιθανότητα Σφάλματός Τύπου I, δηλαδή την πιθανότητα να προκύψουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ενώ στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν.

Παράδειγμα: Για $k = 10$, έχουμε 45 πιθανά ζεύγη υπό σύγκριση. Χρησιμοποιώντας $\alpha = 5\%$ σε κάθε έναν από τους 45 ελέγχους καταλήγουμε στο ότι $0.05 \times 45 \approx 2$ συγκρίσεις ενδέχεται να μας δώσουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στους μέσους εντελώς στην τύχη.

Γι΄ αυτό χρειαζόμαστε νέα μεθοδολογία.

Ανάλυση μέσων

$$y_{ij} = \mu_j + \epsilon_{ij}$$

όπου μ_j άγνωστες σταθερές
$\epsilon_{ij} \sim N(0,\ \sigma^2)$ τυχαία σφάλματα

Η ποσότητα σ^2 εκφράζει τη διασπορά των σφαλμάτων την οποία θεωρούμε σταθερή ανεξάρτητα της στάθμης του παράγοντα (υπόθεση ομοσκεδαστικότητας)

- y_{ij} i παρατήρηση που ανήκει στην j ομάδα $i = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, k$
- $\overline{y}_{.j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$ δειγματικός μέσος της j ομάδας
- $\overline{y}_{..} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} n_j} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$ γενικός δειγματικός μέσος

$$h = \frac{\max|\overline{y}_{.j} - \overline{y}_{..}|}{s_p\sqrt{\frac{k-1}{nk}}}$$

όπου $s_p^2 = \frac{s_1^2 + \ldots + s_k^2}{k}$ και s_j^2 η δειγματική διασπορά της j ομάδας.
Προφανώς η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται για μεγάλες τιμές της h, δηλαδή $h > h_a$, όπου h_a το $1 - a$ ποσοστιαίο σημείο της κατανομής του h.

Γραφική μορφή της μεθόδου

Μοιάζει με τα διαγράμματα ελέγχου

- Κεντρική γραμμή $\bar{y}_{..} = \frac{1}{nk}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}$ γενικός δειγματικός μέσος
- UDL $\bar{y}_{..} + h_a(k,n)s_p\sqrt{\frac{k-1}{nk}}$
- LDL $\bar{y}_{..} - h_a(k,n)s_p\sqrt{\frac{k-1}{nk}}$

Στο διάγραμμα αυτό σχεδιάζουμε τα σημεία $(j,\ \bar{y}_{.j}), \quad j = 1, \ldots, k.$

Αν ένα σημείο τουλάχιστον πέσει έξω από τις γραμμές απόφασης συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές στις μέσες τιμές των k πληθυσμών.

- `Stat` $\rightarrow$ `ANOVA` $\rightarrow$ `Analysis of Means`

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ κατά $H_1: $ τουλάχιστο ένα μ_i να είναι διαφορετικό

- y_{ij} i παρατήρηση που ανήκει στην j ομάδα $i = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, k$
- $y_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$ το άθροισμα των παρατηρήσεων της j ομάδας.
- $\bar{y}_{\cdot j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$ δειγματικός μέσος της j ομάδας
- $y_{\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$ το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων
- $\bar{y}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} n_j} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$ δειγματικός μέσος

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

$$y_{ij} = \mu + \theta_j + \epsilon_{ij}$$

όπου $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ τυχαία σφάλματα,
$\mu + \theta_j = \mu_j$ άγνωστες σταθερές.

- μ γενικός μέσος
- θ_j επίδραση θεραπείας (treatment effect), δηλώνουν την απόκλιση που μπορεί να έχει η μέση τιμή της Y από το μέσο που βρίσκεται το επίπεδο j.

$$E(y_{ij}|\text{θεραπείας}) = \mu + \theta_j, \;\; Var(y_{ij}|\text{θεραπείας}) = \sigma^2$$

$$y_{ij} \sim N(\mu + \theta_j, \sigma^2)$$

Τα y_{ij} είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

$$y_{ij} \sim N(\mu + \theta_j, \sigma^2)$$

Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε $k+1$ παραμέτρους οπότε βάζουμε τον περιορισμό

$$\sum n_j \theta_j = 0$$

Τους συντελεστές του μοντέλου διασποράς (τα μ_j) τα εκτιμάμε με τη βοήθεια του δείγματος που διαθέτουμε εφαρμόζοντας όπως και στο γραμμικό μοντέλο τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
Ελαχιστοποιώντας την ποσότητα

$$Q = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \mu_j)^2$$

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

$$Q = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \mu_j)^2$$

καταλήγουμε στο

$$\widehat{\mu}_j = \overline{y}_{.j}$$

$j = 1, \ldots, k$ προσαρμοσμένες τιμές (fitted values)

$\widehat{\epsilon}_{ij} = y_{ij} - \widehat{y}_{ij}$ εκτιμήσεις σφαλμάτων.

Μία σημαντική ιδιότητα των υπολοίπων είναι ότι μέσα σε κάθε ομάδα έχουν άθροισμα 0.

$$\sum_{i=1}^{n_j} \widehat{\epsilon}_{ij} = 0, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

Το σ^2 το εκτιμάμε με την ποσότητα

$$s^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij}-\widehat{y}_{ij})^2$$

εκτίμηση διασποράς των σφαλμάτων

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij}-\widehat{y}_{ij})^2}$$

τυπικό σφάλμα του μοντέλου (όσο μικρότερη τιμή έχει τόσο καλύτερη προσαρμογή έχουμε για το μοντέλο διασποράς).

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

Με βάση το μοντέλο που θεωρήσαμε για να ελέγχουμε την πιθανή διαφοροποίηση του υπό μελέτη χαρακτηριστικού στις k θεραπείες ελέγχουμε την υπόθεση

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \ldots, = \theta_k = 0$$

κατά

$$H_1 \text{ τουλάχιστον ένα } \theta_j,\ j = 1, \ldots, k \text{ να είναι διαφορετικό}$$

$$y_{ij} - \overline{y}_{..} = y_{ij} - \overline{y}_{.j} + \overline{y}_{.j} - \overline{y}_{..}$$

- $y_{ij} - \overline{y}_{.j}$ μεταβλητότητα εντός της ομάδας
- $\overline{y}_{.j} - \overline{y}_{..}$ μεταβλητότητα μεταξύ των ομάδων.

- Αν η μεταβλητότητα μεταξύ των ομάδων είναι μεγάλη και η μεταβλητότητα εντός της ομάδας μικρή η μηδενική υπόθεση πρέπει να απορριφθεί.

- Αν η μεταβλητότητα μεταξύ των ομάδων είναι μικρή και εντός της ομάδας μεγάλη η μηδενική υπόθεση δεν πρέπει να απορριφθεί.

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij}-\overline{y})^2=\sum_{j=1}^{k}n_j(\overline{y}_{.j}-\overline{y}_{..})^2+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij}-\overline{y}_{.j})^2$$

$$SST = SSTR + SSE$$

όπου

- SST συνολικό άθροισμα τετραγώνων
- SSTR άθροισμα τετραγώνων που οφείλεται στις θεραπείες
- SSE άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων

$$MSTR=\frac{SSTR}{k-1},\qquad MSE=\frac{SSE}{N-k},$$

$$F=\frac{MSTR}{MSE}\sim F_{k-1,N-k}$$

Άρα σε επίπεδο σημαντικότητας a απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση αν $F > F_{k-1,N-k,a}$.

- `Stat` $\rightarrow$ `ANOVA` $\rightarrow$ `One-way`

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

Μεταβλητότητα	Βαθ. ελευθ.	Άθροισμα τετραγώνων	Τετραγωνικός μέσος
Μεταξύ των ομάδων	$k-1$	$\sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{y}_{ij} - \overline{y}_{..})^2 = SSTR$	$\frac{SSTR}{k-1} = MSTR$
Εντός των ομάδων	$n-k$	$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \overline{y}_{.j})^2 = SSE$	$\frac{SSE}{N-k} = MSE$
Ολική	$n-1$	$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \overline{y}_{..})^2 = SST$	$\frac{SST}{N-1} = MST$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} \sim F_{k-1,N-k}$$

απορρίπτουμε την H_0 όταν $F > F_{k-1,N-k,a}$.

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα - Παράδειγμα

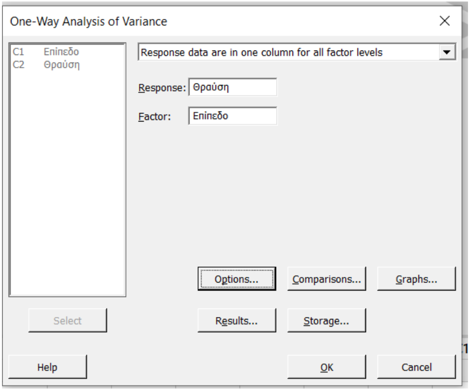
Χαλυβουργία παράγει, μεταξύ άλλων προϊόντων, χονδρόσυρμα διαμέτρου $5.5mm$ κατά DIN 17145 μέγιστης περιεκτικότητας σε άνθρακα 0.09% ($C(\%)max = 0.09$). Το συγκεκριμένου τύπου χονδρόσυρμα χρησιμοποιείται από πολλές συρματουργίες χαμηλού άνθρακα οι οποίες το υποβιβάζουν σε σύρματα χαμηλότερων διαμέτρων για την παραγωγή ηλεκτροδίων. Κρίσιμο χαρακτηριστικό ποιότητας του χονδροσύρματος αποτελεί το όριο θραύσης (N/mm^2). Το τμήμα ποιοτικού ελέγχου της χαλυβουργίας ενδιαφέρεται να διαπιστώσει κατά πόσο η περιεκτικότητα σε άνθρακα (του χάλυβα που χρησιμοποιείται για την παραγωγή του χονδροσύρματος), επηρεάζει ή όχι το όριο θραύσης του χονδροσύρματος. Για το σκοπό αυτό εκτελέστηκε πείραμα κατά το οποίο ο άνθρακας εξετάστηκε σε πέντε επίπεδα περιεκτικότητας ($1 : 0.05\% - 2 : 0.06\% - 3 : 0.07\% - 4 : 0.08\%$ και $5 : 0.09\%$). Κατασκευάστηκαν ποσότητες χονδροσύρματος για κάθε επίπεδο περιεκτικότητας άνθρακα και πραγματοποιήθηκαν 4 μετρήσεις σε τυχαία επιλεγμένα δείγματα. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

C(%)	**Όριο Θραύσης (N/mm^2)**			
0,05	375	378	380	373
0,06	380	383	383	384
0,07	385	388	382	385
0,08	391	394	390	388
0,09	401	398	395	399

Με βάση αυτά τα δεδομένα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το μέσο όριο θραύσης είναι το ίδιο για τα χονδροσύρματα όλων των επιπέδων περιεκτικότητας άνθρακα, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05.

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα - Παράδειγμα

- `Stat` → `ANOVA` → `One-way`



Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

Υποθέσεις του μοντέλου.

1. Κανονικότητα: $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$
2. Ομοσκεδαστικότητα:
   - Διάγραμμα κουκκίδων
   - Διάγραμμα διασποράς των υπολοίπων ως προς τις εκτιμώμενες τιμές

Εξετάσουμε αν η μεταβλητότητα των υπολοίπων είναι ανεξάρτητη από τη μέση τιμή του κάθε επιπέδου του παράγοντα. Αν το διάγραμμα εμφανίσει κάποια μορφή εξάρτησης, τότε αυτό αποτελεί ένδειξη για παραβίαση της ομοσκεδαστικότητας των σφαλμάτων.

3. Ανεξαρτησία: Τα σφάλματα είναι ανεξάρτητες τ.μ.
   - Διάγραμμα των υπολοίπων ως προς τη χρονική σειρά με την οποία εμφανίζονται

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

- Διαστήματα εμπιστοσύνης στο πρότυπο σταθερών επιδράσεων

$$\left(\overline{y}_{\cdot j} - t_{n_j-1,a/2}\frac{s_j}{\sqrt{n_j}},\ \overline{y}_{\cdot j} + t_{n_j-1,a/2}\frac{s_j}{\sqrt{n_j}}\right)$$

ή εναλλακτικά

$$\left(\overline{y}_{\cdot j} - t_{N-k,a/2}\frac{s_p}{\sqrt{n_j}},\ \overline{y}_{\cdot j} + t_{N-k,a/2}\frac{s_p}{\sqrt{n_j}}\right)$$

$$\left(\overline{y}_{\cdot j} - \overline{y}_{\cdot j'} - t_{N-k,a/2}s_p\sqrt{\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n'_j}},\ \overline{y}_{\cdot j} - \overline{y}_{\cdot j'} + t_{N-k,a/2}s_p\sqrt{\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n'_j}}\right)$$

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

- Αν απορρίψουμε την H_0, δηλαδή αν αποδεχτούμε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων των k θεραπειών, τότε περαιτέρω ανάλυση είναι απαραίτητη για να δούμε ποιες ακριβώς ομάδες έχουν διαφορετικούς μέσους.

- Μέθοδος Bonferroni. Για να κατασκευάζουμε ταυτόχρονα N το πλήθος $(1-a)\,100\%$ διαστήματα εμπιστοσύνης θα πρέπει να πάρουμε διαστήματα εμπιστοσύνης με επιμέρους επίπεδο εμπιστοσύνης $(1-a/N)\,100\%$.

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

- Μέθοδος Tukey

Κατασκευάζει $k(k-1)/2$ ταυτόχρονα διαστήματα εμπιστοσύνης

Βασίζεται στη στατιστική συνάρτηση

$$q = \frac{\overline{y}_{max} - \overline{y}_{min}}{s_q/\sqrt{n}}$$

όπου $\overline{y}_{max}$, $\overline{y}_{min}$ ο μέγιστος και ο ελάχιστος μέσος μεταξύ των k θεραπειών.

Η ποσότητα αυτή ακολουθεί μια συγκεκριμένη κατανομή της οποίας τα ποσοστιαία σημεία δίνονται στους αντίστοιχους πίνακες.

$$\left(\overline{y}_{.j} - \overline{y}_{.j'} - \frac{q_a(k,v)}{\sqrt{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n'_j}},\ \overline{y}_{.j} - \overline{y}_{.j'} + \frac{q_a(k,v)}{\sqrt{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n'_j}}\right)$$

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

- Μέθοδος Dunnett

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται όταν μία θεραπεία είναι ένα καθορισμένο σύνολο πειραματικών συνθηκών (δοκιμασία ελέγχου) και θέλουμε να τη συγκείνουμε με τις υπόλοιπες $k-1$ θεραπείες.

Δεν μας ενδιαφέρουν όλοι οι δυνατοί έλεγχοι αλλά μόνο οι $k-1$.

$$\left(\overline{y}_{.j} - \overline{y}_{.j'} - d_a(k,n)s_p/\sqrt{\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_j'}},\ \overline{y}_{.j} - \overline{y}_{.j'} + d_a(k,n)s_p/\sqrt{\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_j'}}\right)$$

όπου $d_a(k,n)$ σταθερά που εξαρτάται από το a, k, n, όπου υπάρχουν πίνακες που δίνουν τις τιμές αυτές.

Στην περίπτωση τυχαίων επιδράσεων

Υποθέτουμε ότι τα $\theta_1, \ldots, \theta_k$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές,

$$\theta_j \sim N(0, \sigma_\theta^2), \quad j = 1, \ldots, k$$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$E(y_{ij}) = \mu \quad Var(y_{ij}) = \sigma^2 + \sigma_\theta^2$$

Οπότε θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση

$$H_0: \ \sigma_\theta^2 = 0 \quad \text{κατά } H_1: \ \sigma_\theta^2 \geq 0$$

Αν η H_0 αληθεύει τότε όλες οι θεραπείες είναι ίδιες, ενώ αν η H_1 αληθεύει τότε υπάρχει μεταβλητότητα μεταξύ των θεραπειών.

Διάστημα Εμπιστοσύνης για το σ^2

$$\left(\frac{(n-k)MSE}{\mathcal{X}^2_{n-k,a/2}}, \frac{(n-k)MSE}{\mathcal{X}^2_{n-k,1-a/2}} \right)$$

Παράδειγμα

Βιομηχανία που δραστηριοποιείται στην παραγωγή και την εμπορία πετρελαιοειδών, ανταποκρινόμενη στις ανάγκες των καιρών, προχώρησε σε διάφορες δοκιμές προκειμένου να αλλάξει τη σύνθεση των παραγόμενων καυσίμων, έτσι ώστε αυτά να επαρκούν για περισσότερα χιλιόμετρα οδήγησης. Το τμήμα μάρκετινγκ της βιομηχανίας εκτιμά ότι το κόστος των πειραματικών δοκιμών, καθώς και η απώλεια στις πωλήσεις που θα προκληθεί από τα νέα καύσιμα λόγω της μείωσης της κατανάλωσης καυσίμου, θα υπερκαλυφθούν από τη μεγάλη αύξηση που αναμένεται να έχουν οι πωλήσεις λόγω της προσέλκυσης πελατών από ανταγωνιστικές εταιρείες. Οι δοκιμές περιλαμβάνουν τη χρήση διαφόρων συνδυασμών προσθέτων καυσίμου και ρυθμιστών τριβής σε όλους τους τύπους καυσίμου που διατίθενται στην αγορά και τη μέτρηση της κατανάλωσης καυσίμου που επιτυγχάνεται με κάθε έναν από αυτούς. Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν τις μετρήσεις κατανάλωσης (σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα) για την αμόλυβδη βενζίνη 95 οκτανίων για τις 4 υπό εξέταση νέες συνθέσεις βενζίνης που χρησιμοποιήθηκαν στις δοκιμές. Η σειρά πραγματοποίησης των δοκιμών ήταν τυχαία.

Παράδειγμα

Το πείραμα πραγματοποιήθηκε με όσο το δυνατόν περισσότερο σταθεροποιημένες συνθήκες διαφόρων μεταβλητών που επηρεάζουν την μεταβλητή απόκρισης, όπως ο τύπος του κινητήρα, η διαδρομή, ο οδηγός, οι καιρικές συνθήκες, η παλαιότητα του κινητήρα και η πίεση των ελαστικών.

Τύπος Βενζίνης			
Α	Β	Γ	Δ
4.881	3.932	5.566	5.044
5.304	3.854	5.182	5.730
5.729	4.024	5.627	5.984
4.888	4.746	5.162	6.132
4.366	4.920	6.546	5.872
4.608	5.569	5.795	4.948
5.055	4.928	5.479	6.587
5.608	3.849	6.686	5.026

Παράδειγμα

Ερώτημα 1.

Να αναφερθεί ο πειραματικός σχεδιασμός ο οποίος χρησιμοποιήθηκε για τον έλεγχο της ύπαρξης διαφορών στην μέση κατανάλωση μεταξύ των 4 νέων συνθέσεων καυσίμου. Επίσης, να αναφερθούν η μεταβλητή απόκρισης, ο παράγοντας, τα επίπεδα του παράγοντα και οι θεραπείες. Οι επιδράσεις του παράγοντα είναι σταθερές ή τυχαίες·

Απάντηση.

Πρόκειται για πείραμα πλήρους τυχαιοποίησης με ένα παράγοντα (τη σύνθεση της βενζίνης) και μεταβλητή απόκρισης την κατανάλωση σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα. Ο παράγοντας έχει 4 επίπεδα. Οι θεραπείες είναι 4 και συμπίπτουν με τα επίπεδα του παράγοντα, καθώς πρόκειται για πείραμα πλήρους τυχαιοποίησης με ένα παράγοντα. Τέλος, οι επιδράσεις του παράγοντα είναι σταθερές, αφού τα επίπεδα διεξαγωγής του πειράματος καθορίστηκαν σύμφωνα με τις εκτιμήσεις των υπευθύνων της εταιρείας.

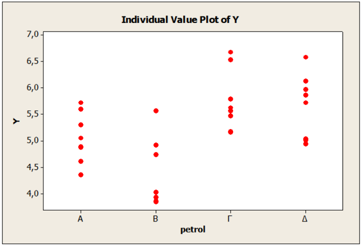
Παράδειγμα

Ερώτημα 2.

Να κατασκευαστεί διάγραμμα κουκίδων για τα δεδομένα του πειράματος. Σε ποια συμπεράσματα καταλήγετε, σύμφωνα με αυτό, για τους τέσσερις τύπους βενζίνης·

Απάντηση.

Graph → Individual Value Plot → With Groups.



Από το παραπάνω διάγραμμα φαίνεται να υπάρχουν κάποιες διαφορές στην κατανάλωση μεταξύ των 4 τύπων βενζίνης. Από αυτούς οι δύο πρώτοι φαίνεται να οδηγούν στη μικρότερη κατανάλωση.

Παράδειγμα

Ερώτηημα 3.

Να ελεγχθεί, χρησιμοποιώντας ως επίπεδο σημαντικότητας α την τιμή 0.05, αν η μέση κατανάλωση επηρεάζεται από τον τύπο βενζίνης.

Απάντηση.

Καλό θα είναι να γίνεται αρχικά έλεγχος για το αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του μοντέλου ANOVA. `Stat → ANOVA → One-Way`

One-way ANOVA: Y versus petrol

```
Source  DF      SS     MS     F      P
petrol   3   8,495  2,832  8,50  0,000
Error   28   9,331  0,333
Total   31  17,826

S = 0,5773   R-Sq = 47,65%   R-Sq(adj) = 42,04%

                             Individual 95% CIs For Mean Based on
                             Pooled StDev
Level  N    Mean   StDev  --+---------+---------+---------+-------
A      8  5,0549  0,4713           (------*------)
B      8  4,4778  0,6491  (------*------)
Γ      8  5,7554  0,5735                        (------*------)
Δ      8  5,6654  0,6006                      (------*------)
                          --+---------+---------+---------+-------
                          4,20      4,80      5,40      6,00

Pooled StDev = 0,5773
```

Η τιμή του παρατηρούμενου επιπέδου σημαντικότητας (P) είναι μικρότερη από το καθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας (0.05). Συμπεραίνουμε ότι η **μέση κατανάλωση επηρεάζεται από τον χρησιμοποιούμενο τύπο βενζίνης.**

Παράδειγμα

Ερώτημα 4.

Ποια σύνθεση καυσίμου θα προτείνατε στην εταιρία να επιλέξει για προώθηση στην αγορά· Για την εξαγωγή του συμπεράσματός σας να εφαρμοστεί η κατάλληλη στατιστική μέθοδος. Τα συμπεράσματά σας συμφωνούν με εκείνα που δόθηκαν στο ερώτημα 2·

`Stat → ANOVA → One-Way → Comparisons → Tukey's, family error rate: 5.`

Απάντηση.

```
Tukey 95% Simultaneous Confidence Intervals
All Pairwise Comparisons among Levels of petrol

Individual confidence level = 98,92%

petrol = A subtracted from:

petrol    Lower   Center   Upper  -------+---------+---------+---------+--
B       -1,3650  -0,5771  0,2107        (-----*------)
Γ       -0,0873   0,7005  1,4883                  (------*-----)
Δ       -0,1773   0,6105  1,3983                  (-----*------)
                                  -------+---------+---------+---------+--
                                      -1,2       0,0       1,2       2,4
petrol = B subtracted from:

petrol   Lower  Center   Upper  -------+---------+---------+---------+--
Γ       0,4898  1,2776  2,0655                      (------*-----)
Δ       0,3998  1,1876  1,9755                    (------*-----)
                                -------+---------+---------+---------+--
                                    -1,2       0,0       1,2       2,4
petrol = Γ subtracted from:

petrol    Lower   Center   Upper  -------+---------+---------+---------+--
Δ       -0,8778  -0,0900  0,6978           (-----*------)
                                  -------+---------+---------+---------+--
                                      -1,2       0,0       1,2       2,4
```

Επιβεβαιώνεται η εκτίμηση με το διάγραμμα κουκίδων: **Οι 2 πρώτοι τύποι βενζίνης οδηγούν στη μικρότερη κατανάλωση.**

Η μέση κατανάλωση με το 2ο τύπο φαίνεται να διαφέρει σημαντικά σε σχέση με εκείνη του 3ου & 4ου (τα ΔΕ για $\mu_\Gamma - \mu_B$ και $\mu_\Delta - \mu_B$ περιέχουν μόνο θετικές τιμές). Επίσης, ο τύπος Β φαίνεται να είναι προτιμότερος από τον Α, αν και η διαφορά της μέσης κατανάλωσης δεν είναι στατιστικά σημαντική (το αντίστοιχο ΔΕ περιέχει και θετικές και αρνητικές τιμές).

Σχεδιασμοί τυχαιοποιημένων πλήρων ομάδων

Ύπαρξη μεταβλητών πλαισίου

- Σταθεροποίηση της μεταβλητής πλαισίου

Καθ'όλη τη διάρκεια του πειράματος σε ένα επίπεδο (κατάσταση).
Τα συμπεράσματα που θα εξαχθούν αφορούν μόνο το συγκεκριμένο επίπεδο της μεταβλητής πλαισίου και κανένα άλλο.

- Ομαδοποίηση έτσι ώστε οι πειραματικές μονάδες μέσα σε κάθε ομάδα να είναι περισσότερο ομογενείς από ότι οι πειραματικές μονάδες σε διαφορετικές μονάδες.
  - Σχηματίζει μια ομάδα παρατηρήσεων για κάθε κατάσταση της μεταβλητής πλαισίου.
  - Σε κάθε ομάδα εφαρμόζονται όλες οι θεραπείες σε ίδιο πλήθος πειραματικών μονάδων (ισορροπημένοι σχεδιασμοί).
  - Στο σχεδιασμό αυτό οι θεραπείες εφαρμόζονται με τυχαία σειρά σε κάθε πειραματικοί μονάδα.

- Η στρατηγική αυτή είναι προτιμότερη από την πρώτη γιατί οδηγεί σε γενικότερα συμπεράσματα αναφορικά με τις δυνητικές καταστάσεις της μεταβλητής πλαισίου.

Ανάλυση Διασποράς σε σχεδιασμό πλήρων ομάδων

...

	Θεραπείες					
ομάδα	1	2	...	j	...	k
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j}	...	y_{1k}
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2j}	...	y_{2k}
...	...	...	...	...	...	...
n	y_{n1}	y_{n2}	...	y_{nj}	...	y_{nk}

$$y_{ij} = \mu + a_i + \theta_j + e_{ij}, i = 1, \ldots, n \; j = 1, \ldots, k$$

όπου μ γενικός μέσος όρος

a_i επίδραση της ομάδας i

θ_j επίδραση της θεραπείας j

$e_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Θεραπείες και ομάδες έχουν σταθερές επιδράσεις

Περιορισμοί $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ και $\sum_{j=1}^{k} \theta_j = 0$

- $\mu_{ij} = \mu + a_i + \theta_j$ άγνωστες σταθερές
- $a_i = \mu_{i\cdot} - \mu$
- $\theta_j = \mu_{\cdot j} - \mu$

όπου $\mu_{i\cdot}$ και $\mu_{\cdot j}$ οι μέσες αποκρίσεις της i ομάδας και της j θεραπείας αντίστοιχα.

Στατιστική Συμπερασματολογία στο πρότυπο σταθερών επιδράσεων

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_k = 0 \text{ κατά } H_1 : \text{ τουλάχιστόν ένα } \theta_j \neq 0$$

- $\overline{y}_{i.} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_{ij}$ δειγματικός μέσος της i ομάδας
- $\overline{y}_{.j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} y_{ij}$ δειγματικός μέσος της j θεραπείας
- $\overline{y}_{..} = \frac{1}{nk}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}$ δειγματικός μέσος

$\hat{\mu} = \overline{y}_{..}$ $\hat{a}_i = \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..}$ $\hat{\theta}_j = \overline{y}_{.j} - \overline{y}_{..}$

$$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \overline{y}_{..})^2 = k\sum_i (\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..})^2 + n\sum_j (\overline{y}_{.j} - \overline{y}_{..})^2 + \sum_i \sum_j (\overline{y}_{ij} - \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{.j} + \overline{y}_{..})^2$$

Στατιστική Συμπερασματολογία στο πρότυπο σταθερών επιδράσεων

$$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \overline{y}_{..})^2 = k \sum_i (\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..})^2 + n \sum_j (\overline{y}_{.j} - \overline{y}_{..})^2 + \sum_i \sum_j (\overline{y}_{ij} - \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{.j} + \overline{y}_{..})^2$$

1ος όρος Άθροισμα τετραγώνων της ομάδας Block sum of squares SSBL
2ος όρος Άθροισμα τετραγώνων για τη θεραπεία Treatment sum of squares SSTR
3ος όρος Άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων Error sum of squares SSE

$$\begin{aligned} \text{βε(SSE)} &= \text{βε(SST) - βε(SSBL) - βε(SSTR)} \\ &= nk - 1 - (n-1) - (k-1) \end{aligned}$$

$$F = \frac{SSTR/(k-1)}{SSE/(n-1)(k-1)} \sim F_{k-1,(n-1)(k-1)}$$

Απορρίπτω την H_0 για μεγάλες τιμές του F, $F > F_{k-1,(n-1)(k-1),a}$.

Στατιστική Συμπερασματολογία στο πρότυπο σταθερών επιδράσεων

Έλεγχός για την υπόθεση των ίσων μέσων αποκρίσεων για τις διάφορες ομάδες

$$H_0 : a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0 \text{ κατά } H_1 : \text{ τουλάχιστον ένα } a_i \neq 0$$

$$F = \frac{SSBL/(n-1)}{SSE/(n-1)(k-1)} \sim F_{n-1,(n-1)(k-1)}$$

Απορρίπτω την H_0 για μεγάλες τιμές του F, $F > F_{n-1,(n-1)(k-1),a}$.

Ανάλυση Διασποράς με έναν παράγοντα

Μεταβλητότητα	Βαθ. ελευθ.	Άθροισμα τετραγώνων	Τετραγωνικός μέσος
Μεταξύ των Θεραπειών	$k-1$	$n\sum_j(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})^2 = SSTR$	$\frac{SSTR}{k-1} = MSTR$
Μεταξύ των ομάδων	$n-1$	$k\sum_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 = SSBL$	$\frac{SSBL}{n-1} = MSBL$
Σφάλματα	$(n-1)(k-1)$	$\sum_i\sum_j(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})^2 = SSE$	$\frac{SSE}{(n-1)(k-1)} = MSE$
Ολική	$nk-1$	$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 = SST$	$\frac{SST}{n-1} = MST$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} \sim F_{k-1,(n-1)(k-1)}$$

απορρίπτουμε την H_0 όταν $F > F_{k-1,(n-1)(k-1),a}$.

$$F = \frac{MSBL}{MSE} \sim F_{n-1,(n-1)(k-1)}$$

απορρίπτουμε την H_0 όταν $F > F_{n-1,(n-1)(k-1),a}$.

Συνέχεια Παραδείγματος

Οι υπεύθυνοι θεώρησαν χρήσιμα τα αποτελέσματα, ωστόσο εξέφρασαν προβληματισμούς σε σχέση με την αξιοπιστία. Για αυτό επαναλήφθηκε το πείραμα χρησιμοποιώντας 4 διαφορετικούς (ως προς τον κυβισμό) τύπους κινητήρα. Τα στοιχεία που συλλέχθηκαν δίνονται στον επόμενο πίνακα.

Τύπος Κινητήρα	Τύπος Βενζίνης			
	Α	Β	Γ	Δ
1	4.607 5.072	4.273 4.372	5.093 6.776	5.276 6.168
2	6.288 5.607	4.283 5.527	6.558 7.085	6.628 5.149
3	8.373 7.368	6.909 6.599	7.865 7.882	8.816 9.935
4	8.372 10.085	7.973 7.411	8.668 10.705	9.641 9.040

Ποιος είναι ο πειραματικός σχεδιασμός ο οποίος χρησιμοποιήθηκε αυτή τη φορά· Να εξεταστεί εκ νέου η ύπαρξη διαφορών στη μέση κατανάλωση μεταξύ των τεσσάρων τύπων βενζίνης και να αναφερθούν τυχόν διαφορές στα συμπεράσματά σας σε σχέση με τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα. Με βάση την ανάλυση των αποτελεσμάτων και των δύο πειραμάτων, ποιο τύπο βενζίνης θα προτείνατε στην εταιρεία να προωθήσει στην αγορά·

Συνέχεια Παραδείγματος

Απάντηση:
Ο νέος σχεδιασμός είναι σχεδιασμός τυχαιοποιημένων πλήρων μονάδων με ένα παράγοντα (τύπος βενζίνης) και μια ομάδα (τύπος κινητήρα).

Stat → ANOVA → General Linear Model

ή εναλλακτικά Two-Way ή Balanced ANOVA (μόνο η πρώτη επιλογή δίνει τη δυνατότητα για πολλαπλές συγκρίσεις) και για πολλαπλές συγκρίσεις από το General Linear Model επιλέγουμε Comparisons για τον παράγοντα Τύπος Βενζίνης.

General Linear Model: Y1 versus petrol; Car Engine

Factor	Type	Levels	Values
petrol	fixed	4	A; B; Γ; Δ
Car Engine	fixed	4	1; 2; 3; 4

Analysis of Variance for Y1, using Adjusted SS for Tests

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
petrol	3	14,749	14,749	4,916	9,29	0,000
Car Engine	3	74,711	74,711	24,904	47,07	0,000
Error	25	13,228	13,228	0,529		
Total	31	102,688				

S = 0,727407   R-Sq = 87,12%   R-Sq(adj) = 84,03%

Unusual Observations for Y1

Obs	Y1	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
28	5,1490	6,4596	0,3402	-1,3106	-2,04 R
30	9,9350	8,5374	0,3402	1,3976	2,17 R

R denotes an observation with a large standardized residual.

Συνέχεια Παραδείγματος

```
Tukey 95,0% Simultaneous Confidence Intervals
Response Variable Y1
All Pairwise Comparisons among Levels of petrol
petrol = A  subtracted from:

petrol    Lower   Center     Upper  ----+---------+---------+---------+--
B        -2,054   -1,053  -0,05271  (------*------)
Γ        -0,393    0,607   1,60792             (------*------)
Δ        -0,390    0,610   1,61054             (------*------)
                                    ----+---------+---------+---------+--
                                      -1,5       0,0       1,5       3,0
petrol = B  subtracted from:

petrol    Lower   Center  Upper  ----+---------+---------+---------+--
Γ        0,6602    1,661  2,661                  (------*------)
Δ        0,6628    1,663  2,664                  (------*------)
                                 ----+---------+---------+---------+--
                                   -1,5       0,0       1,5       3,0
petrol = Γ  subtracted from:

petrol     Lower     Center  Upper  ----+---------+---------+---------+--
Δ        -0,9978  0,002625  1,003          (------*------)
                                    ----+---------+---------+---------+--
                                      -1,5       0,0       1,5       3,0
```

Συνέχεια Παραδείγματος

```
Tukey Simultaneous Tests
Response Variable Y1
All Pairwise Comparisons among Levels of petrol
petrol = A  subtracted from:
         Difference        SE of              Adjusted
petrol     of Means   Difference   T-Value     P-Value
B            -1,053       0,3637    -2,896      0,0364
Γ             0,607       0,3637     1,670      0,3598
Δ             0,610       0,3637     1,678      0,3561

petrol = B  subtracted from:
         Difference        SE of              Adjusted
petrol     of Means   Difference   T-Value     P-Value
Γ             1,661       0,3637     4,566      0,0006
Δ             1,663       0,3637     4,573      0,0006

petrol = Γ  subtracted from:
         Difference        SE of              Adjusted
petrol     of Means   Difference   T-Value     P-Value
Δ          0,002625       0,3637  0,007217       1,000
```

Υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των 4 τύπων βενζίνης (p-values). Ο τύπος *Β* φαίνεται να οδηγεί στη μικρότερη κατανάλωση καυσίμου. **Διαφέρει σημαντικά, σε ε.σ. 5%, και από τους τρείς άλλους τύπους.**
Με βάση τα παραπάνω ο τύπος βενζίνης που θα προτείναμε για προώθηση στην αγορά είναι ο *Β*.

Εκτίμηση χαμένων παρατηρήσεων

$$y = \frac{nO + k\theta - S}{(n-1)(k-1)}$$

όπου

- O άθροισμα υπόλοιπων παρατηρήσεων της ομάδας
- θ άθροισμα υπόλοιπων παρατηρήσεων της θεραπείας
- S άθροισμα όλων των παρατηρούμενων τιμών

Υπολογίζουμε κανονικά τα $SSBL$, $SSTR$, SSE, SSE με τις τιμές που υπάρχουν και την y και διορθώνουμε το $SSTR$

$$SSTR' = SSTR - \frac{(O-(k-1)S)^2}{k(k-1)}$$

βαθμοί ελευθερίας για το SST : $\quad nk-2$

βαθμοί ελευθερίας για το SSE : $\quad (n-1)(k-1)-1$