

Διοίκηση Ποιότητας (Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας)

Σ. Μαλεφάκη
Τμήμα Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών Μηχανικών

2022–2023

Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας



Δειγματοληψία



Δειγματοληψία

Πολλές φορές δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί 100% έλεγχος σε όλη την παρτίδα για αυτό και εφαρμόζεται η **δειγματοληψία αποδοχής**.

- ▶ Δειγματοληψία αποδοχής ιδιοτήτων κατά παρτίδα (βασίζεται σε ποιοτικά χαρακτηριστικά, ιδιότητες, π.χ. ελαττωματικό ή μη)
- ▶ Δειγματοληψία αποδοχής μεταβλητών κατά παρτίδα (βασίζεται σε μετρήσιμα χαρακτηριστικά, μεταβλητές)

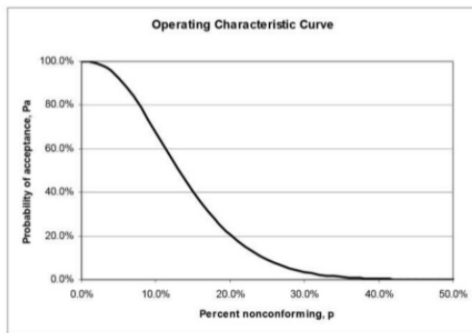
Σχέδιο ή Πλάνο δειγματοληψίας καθορίζει το μέγεθος των μονάδων που πρέπει να εξεταστούν καθώς και τα κριτήρια αποδοχής ή απόρριψης μιας παρτίδας (π.χ. $N = 2000$, $n = 200$, $c = 2$)

Δειγματοληψία

- ▶ Απλή δειγματοληψία
εξετάζεται μόνο ένα δείγμα αποτελούμενο από συγκεκριμένο αριθμό μονάδων. Η παρτίδα γίνεται δεκτή όταν ο αριθμός των ασυμφωνιών δεν υπερβαίνει τον αριθμό αποδοχής c .
- ▶ Διπλή δειγματοληψία
έλεγχος δύο δειγμάτων με καθορισμένο ζεύγος τιμών (c, r) για κάθε στάδιο δειγματοληψίας.
π.χ. $(c_1 = 1, r_1 = 4)$ και $(c_2 = 5, r_2 = 6)$
 - Μέχρι μία ασυμφωνία η παρτίδα γίνεται αποδεκτή
 - Αν έχει 4 ασυμφωνίες και πάνω η παρτίδα απορρίπτεται
 - Αν και τα δύο δείγματα μαζί έχουν μέχρι 5 ασυμφωνίες η παρτίδα γίνεται δεκτή, αν έχουν από 6 ασυμφωνίες και πάνω η παρτίδα απορρίπτεται.
- ▶ Πολλαπλή δειγματοληψία
Επέκταση της διπλής δειγματοληψίας, μετά τον έλεγχο κάθε δείγματος αποφασίζεται η αποδοχή ή η απόρριψη ή η συνέχιση της δειγματοληψίας σε συνάρτηση των ευρεθέντων ασυμφωνιών.

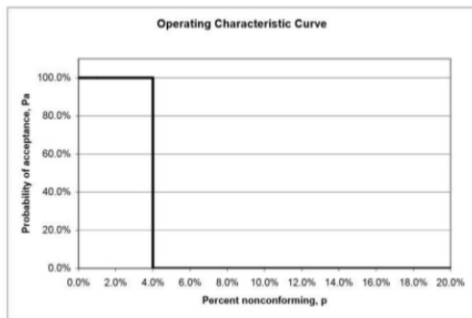
Χαρακτηρίζουσα καμπύλη

απεικονίζει τις πιθανότητες με τις οποίες μια παρτίδα με ορισμένο ποσοστό ασυμφωνιών (p_0) γίνεται αποδεκτή



Χαρακτηρίζουσα καμπύλη

Ιδανική χαρακτηρίζουσα καμπύλη



Χαρακτηρίζουσα καμπύλη

Έστω ότι το μέγεθος της παρτίδας είναι μεγάλο και έστω n ένα τυχαίο δείγμα από αυτή.

Αν D ο αριθμός των μη συμφωνηθέντων προϊόντων και p_0 η πιθανότητα να έχουμε μη συμφωνηθέν προϊόν, τότε $D \sim \mathcal{B}(n, p_0)$ οπότε

$$P_\alpha = \sum_{i=0}^c \binom{n}{i} p_0^i (1 - p_0)^{n-i}$$

Όταν το n είναι μεγάλο και p_0 είναι μικρό μία καλή προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής είναι η κατανομή Poisson

$$P_\alpha = \sum_{i=0}^c \frac{(np_0)^i e^{-np_0}}{i!}$$

Όταν το μέγεθος N της παρτίδας είναι μικρό, τότε η κατανομή των μη συμφωνούντων στοιχείων στο δείγμα είναι υπεργεωμετρική.

Χαρακτηρίζουσα καμπύλη

3.1. Υπεργεωμετρική ή τύπου A χαρακτηριστική καμπύλη

$$P_a = P(D_n \leq c | p) = \sum_{d=0}^c \frac{\binom{Np}{d} \binom{N(1-p)}{n-d}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \leq p \leq 1$$

3.2 Διωνυμική ή τύπου B χαρακτηριστική καμπύλη

$$P_a = P(D_n \leq c | p) = \sum_{d=0}^c \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d}, \quad 0 \leq p \leq 1$$

3.3. Poisson χαρακτηριστική καμπύλη

$$P_a = \sum_{d=0}^c e^{-np} \frac{(np)^d}{d!}, \quad 0 \leq p \leq 1$$

4. Χαρακτηρίζουσα καμπύλη

Γραφική παράσταση της πιθανότητας αποδοχής που είναι συνάρτηση του p ($P(D_n \leq c | p)$)

Χαρακτηρίζουσα καμπύλη

Παράδειγμα 1

Μια εταιρεία συναρμολόγησης ΗΥ πρόκειται να παραλάβει παρτίδες σκληρών δίσκων μεγέθους $N = 5000$. Για τον έλεγχο των παρτίδων εφαρμόζεται σχέδιο απλής δειγματοληψίας με $n = 90$ και $c = 1$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα αποδοχής μιας παρτίδας που περιέχει 9% ελαττωματικούς σκληρούς δίσκους χρησιμοποιώντας υπεργεωμετρική, διωνυμική και Poisson χαρακτηριστική καμπύλη

Απάντηση 1

Υπεργεωμετρική:

$$P_a = \sum_{d=0}^1 \frac{\binom{450}{d} \binom{4550}{90-d}}{\binom{5000}{90}} = \frac{\binom{450}{0} \binom{4550}{90}}{\binom{5000}{90}} + \frac{\binom{450}{1} \binom{4550}{89}}{\binom{5000}{90}} = 0.00191552$$

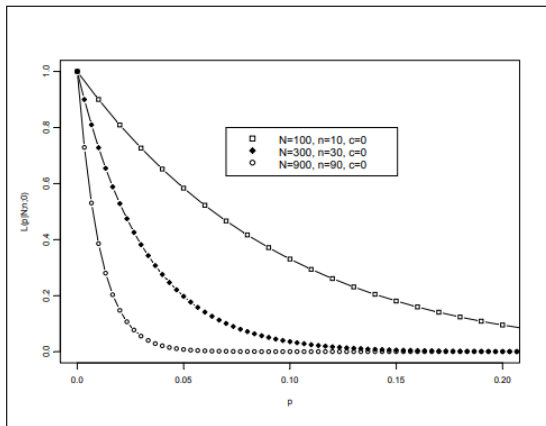
Διωνυμική:

$$P_a = \sum_{d=0}^1 \binom{90}{d} (0.09)^d (0.91)^{90-d} = (0.91)^{90} + (90)(0.09)^1 (0.91)^{89} = 0.00203896$$

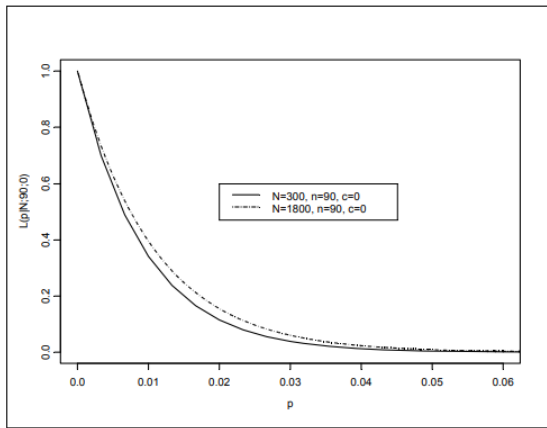
Poisson:

$$P_a = \sum_{d=0}^1 e^{-(90)(0.09)} \frac{((90)(0.09))^d}{d!} = e^{-8.1} + 8.1e^{-8.1} = 0.00276221$$

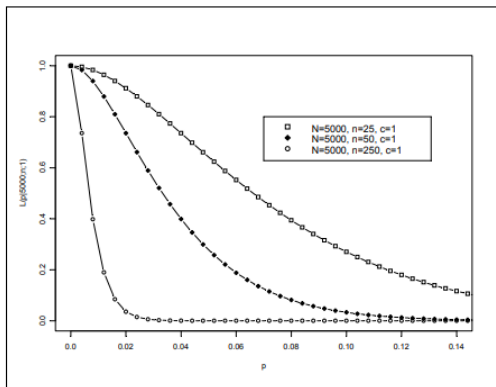
Χαρακτηριστικές καμπύλες απλών σχεδίων (πλάνων) δειγματοληψίας



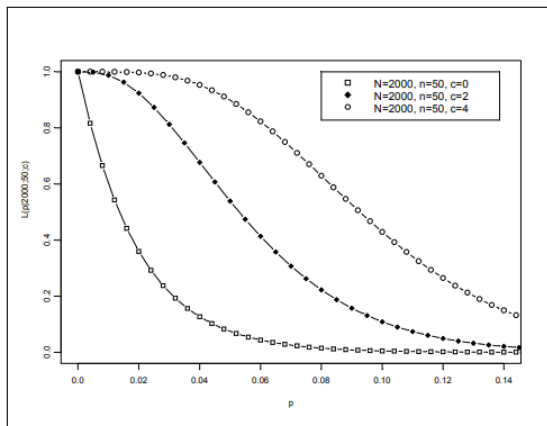
Χαρακτηριστικές καμπύλες απλών σχεδίων (πλάνων) δειγματοληψίας



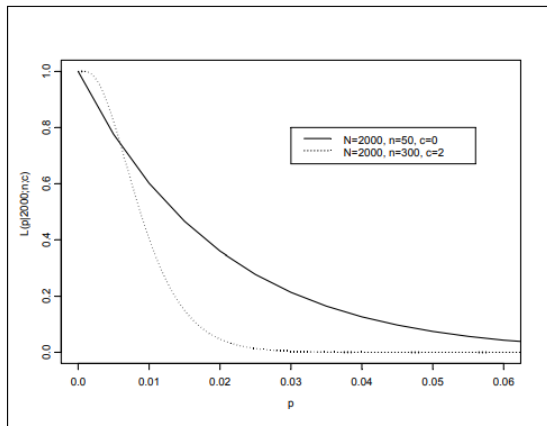
Χαρακτηρίζουσες καμπύλες απλών σχεδίων (πλάνων) δειγματοληψίας



Χαρακτηριστικές καμπύλες απλών σχεδίων (πλάνων) δειγματοληψίας



Χαρακτηρίζουσες καμπύλες απλών σχεδίων (πλάνων) δειγματοληψίας



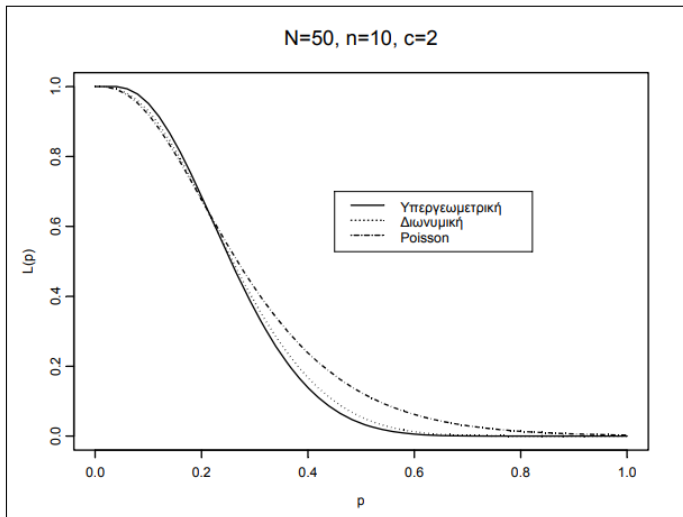
Χαρακτηρίζουσες καμπύλες απλών σχεδίων (πλάνων) δειγματοληψίας

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε ότι η κλίση της χαρακτηρίζουσας καμπύλης αυξάνεται κυρίως όταν

- το μέγεθος της παρτίδας N αυξάνεται με την ποσότητα n/N να παραμένει σταθερή,
- το μέγεθος του δείγματος n αυξάνεται,
- ο αριθμός αποδοχής c μειώνεται.

Όταν μεταβάλλονται περισσότερες παράμετροι στα σχέδια δειγματοληψίας τότε η επίδρασή τους στην χαρακτηριστική καμπύλη είναι γενικά προσθετική.

Χαρακτηρίζουσες καμπύλες απλών σχεδίων (πλάνων) δειγματοληψίας



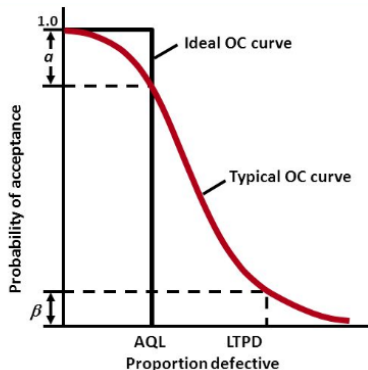
Σχεδιασμός πλάνου απλής δειγματοληψίας με δεδομένη χαρακτηρίζουσα καμπύλη

$$1 - \alpha = \sum_{i=0}^c \binom{n}{i} p_1^i (1 - p_1)^{n-i}$$

$$\beta = \sum_{i=0}^c \binom{n}{i} p_2^i (1 - p_2)^{n-i}$$

όπου p_1 , p_2 ποσοστά μη συμφωνούντων προϊόντων

Λύνουμε το παραπάνω σύστημα ως προς (n, c)



Επανορθωτικός έλεγχος απλής δειγματοληψίας

- ▶ Γίνεται έλεγχος κατά 100% στις απορριπτόμενες παρτίδες
- ▶ Όσες μονάδες βρεθούν με μεγαλύτερες από τις προβλεπόμενες ασυμφωνίες απομακρύνονται και αντικαθίστανται από άλλες μονάδες από παρτίδες που έχουν χαρακτηριστεί αποδεκτές.

Η διαδικασία αυτή βελτιώνει την τελική ποιότητα των προϊόντων

- ▶ Μέση εξερχόμενη ποιότητα (AOQ - Average Outgoing Quality) μέσο κλάσμα μη συμφωνουσών εξερχόμενων μονάδων μετά την εφαρμογή επανορθωτικού ελέγχου.

$$AOQ = \frac{P_{\alpha} p_0 (N - n)}{N}$$

- ▶ Μέσος συνολικό αριθμός ελεγχόμενων προϊόντων (ATI - Average Total Inspection)

$$ATI = n + (1 - P_{\alpha})(N - n)$$

Άσκηση

Βιομηχανία παραγωγής εξαρτημάτων ηλεκτρονικών υπολογιστών συσκευάζει τους παραγόμενους οδηγούς DVD-ROM σε παρτίδες μεγέθους $N=2000$ οδηγών. Η βιομηχανία προμηθεύει γνωστή εταιρεία συναρμολόγησης ηλεκτρονικών υπολογιστών, με την οποία έχει συμφωνήσει ότι η αποδοχή των παρτίδων θα γίνεται μετά από επανορθωτικό έλεγχο απλής δειγματοληψίας σύμφωνα με το πλάνο $n = 60$ και $c = 3$.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα αποδοχής μιας παρτίδας που περιέχει 40 ελαττωματικούς οδηγούς DVD-ROM;
- (β) Ποια είναι η μέση εξερχόμενη ποιότητα των παρτίδων, αν κάθε εισερχόμενη παρτίδα περιέχει 40 ελαττωματικούς οδηγούς DVD-ROM;
- (γ) Να υπολογιστεί ο μέσος συνολικός αριθμός ελεγχόμενων οδηγών DVD-ROM ανά παρτίδα.
- (δ) Να απαντηθούν τα ερωτήματα με MINITAB.

Σημείωση: Για υπολογισμό πιθανοτήτων αποδοχής ή απόρριψης να χρησιμοποιηθεί μόνο η κατανομή Poisson.

(α) Έχουμε $N = 2000$, $n = 60$, $c = 3$ και $p_0 = 40/2000 = 0.02$. Άρα $np_0 = (60)(0.02) = 1.2$. Έτσι

$$\begin{aligned} P_a &= P(D_n \leq 3) = \sum_{j=0}^3 \frac{(np_0)^j e^{-np_0}}{j!} = e^{-np_0} \left(1 + np_0 + \frac{(np_0)^2}{2} + \frac{(np_0)^3}{6} \right) \\ &= (0.3012) \left(1 + 1.2 + \frac{(1.2)^2}{2} + \frac{(1.2)^3}{6} \right) = 0.9662 \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι η μέση εξερχόμενη ποιότητα είναι

$$AOQ(p_0) = AOQ(0.02) = \frac{P_a p_0 (N - n)}{N} = \frac{(0.9662)(0.02)(2000 - 60)}{2000} = 0.01874.$$

(γ) Έχουμε

$$ATI = ATI(p_0) = n + (1 - P_a)(N - n) = 60 + (1 - 0.9662)(2000 - 60) = 125.572 \cong 126$$

(δ) Stat > Quality Tools > Acceptance Sampling by Attributes

Acceptance Sampling by Attributes

Compare User Defined Sampling Plans

Measurement type: Number of defects

Units for quality levels: Defects per hundred

Acceptable quality level (AQL):

Rejectable quality level (RQL or LTPD):

Sample sizes: 60

Acceptance numbers: 3

Lot size: 2000

Options...
Graphs...

OK
Cancel
Help

Acceptance Sampling by Attributes: Options

Use hypergeometric distribution for isolated lot

Enter additional quality levels to calculate acceptance probabilities:

2

(Units: Defects per hundred)

OK
Cancel
Help

Acceptance Sampling by Attributes

Measurement type: Number of defects

Lot quality in defects per hundred

Lot size: 2000

Use Poisson distribution to calculate probability of acceptance

Compare User Defined Plan(s)

Sample Size 60

Acceptance Number 3

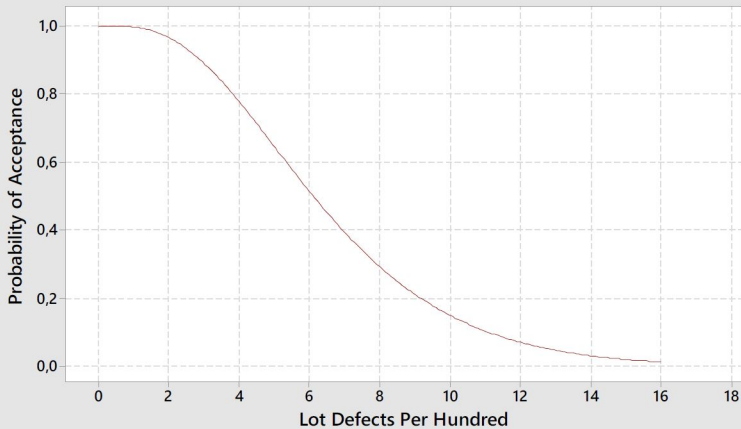
Accept lot if number of defects in 60 items ≤ 3 ; Otherwise reject.

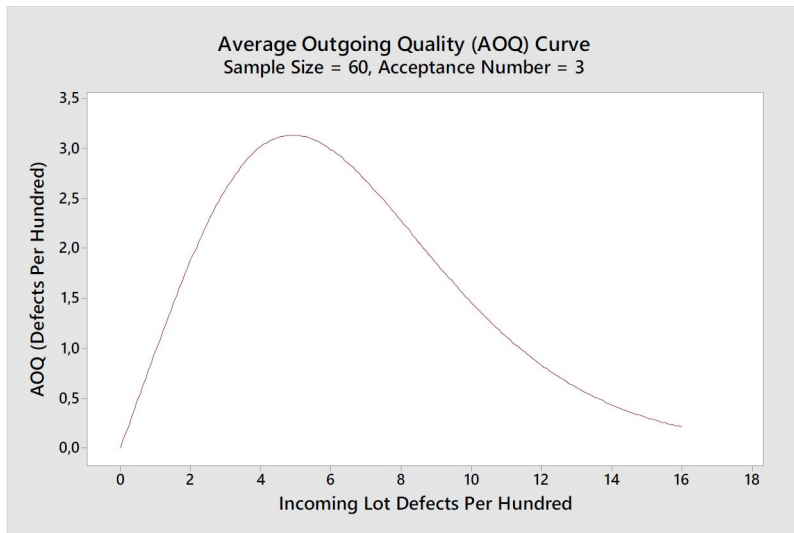
Defects		Probability	Probability	AOQ	ATI
Per Hundred	Accepting	Rejecting			
2	0,966	0,034	1,874	125,5	

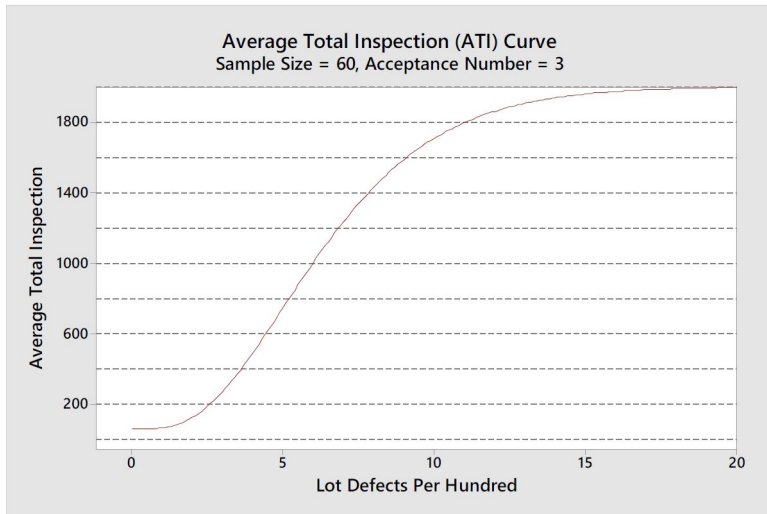
Average Outgoing Quality Limit(s) (AOQL)

AOQL	At Defects per Hundred
3,140	4,909

Operating Characteristic (OC) Curve
 Sample Size = 60, Acceptance Number = 3





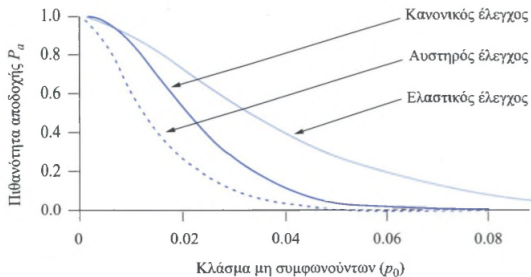


Προδιαγραφή MIL-STD-105E (ANSI-ASQC Z1.4)

πρώτη σημαντική προδιαγραφή για δειγματοληψία ιδιοτήτων

- ▶ 3 τύποι δειγματοληψίας (απλή, διπλή, πολλαπλή)
- ▶ 3 γενικά επίπεδα ελέγχου (I, II, III)
- ▶ 4 πρόσθετα επίπεδα ελέγχου ($S - 1$, $S - 2$, $S - 3$, $S - 4$):
Μικρά δείγματα, ανοχή σχετικά με τους κινδύνους
- ▶ 3 κατηγορίες ελέγχου (κανονικός, αυστηρός, ελαστικός)

Προδιαγραφή MIL-STD-105E (ANSI-ASQC Z1.4)



Προδιαγραφή MIL-STD-105E (ANSI-ASQC Z1.4)

πρώτη σημαντική προδιαγραφή για δειγματοληψία ιδιοτήτων

- ▶ 3 τύποι δειγματοληψίας (απλή, διπλή, πολλαπλή)
- ▶ 3 γενικά επίπεδα ελέγχου (I, II, III)
- ▶ 4 πρόσθετα επίπεδα ελέγχου ($S - 1$, $S - 2$, $S - 3$, $S - 4$):
Μικρά δείγματα, ανοχή σχετικά με τους κινδύνους
- ▶ 3 κατηγορίες ελέγχου (κανονικός, αυστηρός, ελαστικός)

- ▶ Αποδεκτή στάθμη ποιότητας (AQL): το μέγιστο ποσοστό ασυμφωνιών ή ο μέγιστος αριθμός ασυμφωνιών σε 100 ελεγχόμενες μονάδες που για τους σκοπούς του δειγματοληπτικού ελέγχου θεωρείται ικανοποιητικός ως μέση στάθμη ποιότητας της παραγωγικής διαδικασίας.

Διαδικασία εφαρμογής προδιαγραφής

- ▶ Προσδιορισμός του κωδικού γράμματος δείγματος σε σχέση με το μέγεθος της παρτίδας και το επίπεδο ελέγχου
- ▶ Προσδιορισμός του AQL (συνήθως προβλέπεται από τη σύμβαση μεταξύ παραγωγού και παραλήπτη)
- ▶ Προσδιορισμός της αυστηρότητας του ελέγχου (κανονική, αυστηρή ή ελαστική) Συνήθως ο έλεγχος ξεκινάει από κανονικό και μεταπηδάει σε αυστηρό ή ελαστικό.
- ▶ Προσδιορισμός του τύπου δειγματοληψίας (απλή, διπλή, πολλαπλή)
- ▶ Χρήση κατάλληλου πίνακα για την εύρεση του πλάνου δειγματοληψίας

Προδιαγραφή MIL-STD-105E (ANSI-ASQC Z1.4)

Συνήθως κάθε έλεγχος προϊόντων ενός κατασκευαστή, και πάντοτε με απόφαση της υπεύθυνης αρχής παραλαβής, αρχίζει με κανονικό έλεγχο και επίπεδο ελέγχου II. Αλλαγή του επιπέδου ελέγχου (δεσμεύσεις των κανόνων μετάπτωσης) γίνεται μόνο στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) Ο κανονικός έλεγχος εφαρμόζεται στην έναρξη της παραλαβής των παρτίδων και προχωρά κανονικά. Αν απορριφθούν 2 από τις 2–5 επόμενες παρτίδες, ο έλεγχος αναβαθμίζεται σε αυστηρό.
- β) Ο αυστηρός έλεγχος θα συνεχιστεί για τις 5 επόμενες παρτίδες. Αν δε διαπιστωθεί απόρριψη, ο έλεγχος υποβιβάζεται σε κανονικό.
- γ) Ο κανονικός έλεγχος υποβιβάζεται σε ελαστικό εφόσον πληρούνται **όλοι** οι επόμενοι όροι: (1) Οι 10 προηγούμενες παρτίδες ήταν σε επίπεδο κανονικού ελέγχου και ήταν αποδεκτές χωρίς καμιά απόρριψη παρτίδας κατά την αρχική εξέταση, (2) ο ολικός αριθμός ασυμφωνιών στα δείγματα από τις προηγούμενες 10 παρτίδες είναι ίσος ή μικρότερος από τον οριακό αριθμό για ελαστικό έλεγχο, (3) η παραγωγή είναι σταθερή χωρίς προβλήματα οποιασδήποτε φύσης και (4) το εγκρίνει η αρμόδια αρχή.
- δ) Ο ελαστικός έλεγχος αναβαθμίζεται σε κανονικό όταν απορρίπτεται μια παρτίδα, ή η παραγωγή δεν είναι σταθερή, ή ο παραλήπτης απαιτεί κανονικό έλεγχο, ή όταν οι ασυμφωνίες δεν οδηγούν σε απόρριψη, αλλά ούτε και σε αποδοχή, π.χ. σε μια διπλή δειγματοληψία όταν $Ac = 2$, $Re = 4$ και η παρτίδα έχει 3 ασυμφωνίες.

Παράδειγμα

1. Για μεγέθη παρτίδων $N = 2000$, $AQL = 0.65\%$, έχουμε κατά τα συνήθη:

Μέγεθος Παρτίδας	Ειδικό επίπεδο επιθεώρησης				Γενικό επίπεδο επιθεώρησης		
	S-1	S-2	S-3	S-4	I	II	III
2 - 8	A	A	A	A	A	A	B
9 - 15	A	A	A	A	A	B	C
16 - 25	A	A	B	B	B	C	D
26 - 50	A	B	B	C	C	D	E
51 - 90	B	B	C	C	C	E	F
91 - 150	B	B	C	D	D	F	G
151 - 280	B	C	D	E	E	G	H
281 - 500	B	C	D	E	F	H	J
501 - 1200	C	C	E	F	G	J	K
1201 - 3200	C	D	E	G	H	K	L
3201 - 10000	C	D	F	G	J	L	M
10001 - 35000	C	D	F	H	K	M	N
35001 - 150000	D	E	G	J	L	N	P
150001 - 500000	D	E	G	J	M	P	Q
500001 -	D	E	H	K	N	Q	R

Παράδειγμα

Για μεγέθη παρτίδων $N = 550000$, $AQL = 0.015\%$, έχουμε κατά τα συνήθη:

Μέγεθος Παρτίδας		Ειδικό επίπεδο επιθεώρησης				Γενικό επίπεδο επιθεώρησης			
		S - 1	S - 2	S - 3	S - 4	I	II	III	
2	- 8	A	A	A	A	A	A	B	
9	- 15	A	A	A	A	A	B	C	
16	- 25	A	A	B	B	B	C	D	
26	- 50	A	B	B	C	C	D	E	
51	- 90	B	B	C	C	C	E	F	
91	- 150	B	B	C	D	D	F	G	
151	- 280	B	C	D	E	E	G	H	
281	- 500	B	C	D	E	F	H	J	
501	- 1200	C	C	E	F	G	J	K	
1201	- 3200	C	D	E	G	H	K	L	
3201	- 10000	C	D	F	G	J	L	M	
10001	- 35000	C	D	F	H	K	M	N	
35001	- 150000	D	E	G	J	L	N	P	
150001	- 500000	D	E	G	J	M	P	Q	
500001	-	D	E	H	K	N	Q	R	

Παράδειγμα

Πίνακας Π. Σχέδια απλής δειγματοληψίας για κανονικό έλεγχο (Αντίγραφο Πίνακα Π-Α, MIL-STD-105E)

Sample Size Code Letter	Sample Size n	Αποδεκτή στάθμη ποιότητας (AQL)																											
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000		
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	
A	2																												
B	3																												
C	5																												
D	8																												
E	13																												
F	20																												
G	32																												
H	50																												
J	80																												
K	125																												
L	200																												
M	315																												
N	500																												
P	800																												
Q	1250																												
R	2000																												

- ↓ = Να χρησιμοποιηθεί το πρώτο σχέδιο δειγματοληψίας κάτω από το βέλος. Αν το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο ή υπερβαίνει το μέγεθος της παρτίδας να γίνει 100% έλεγχος
- ↑ = Να χρησιμοποιηθεί το πρώτο σχέδιο δειγματοληψίας πάνω από το βέλος
- Ac = Αριθμός αποδοχής (Acceptance Number)
- Re = Αριθμός απόρριψης (Rejection Number)

Δηλαδή το μέγεθος δείγματος είναι $n = 800$, $c = Ac = 0$ και $r = Re = 1$.

Προδιαγραφή MIL-STD-105E - Άσκηση

Βιομηχανία παραγωγής προτηγανισμένων, κατεψυγμένων πατατών προμηθεύεται κάθε εβδομάδα 2500 σακιά πατάτες από μεγάλο προμηθευτή της λαχαναγοράς. Κατά την παραλαβή τους οι παρτίδες ελέγχονται μέχρι σήμερα με πλάνο απλής δειγματοληψίας (A) που προβλέπει $n = 500$ και $c = 2$, ενώ προτείνεται στο μέλλον να ελέγχονται με πλάνο απλής δειγματοληψίας (B) σύμφωνα με την προδιαγραφή MIL-STD-105E με κανονικό έλεγχο, επίπεδο ελέγχου III, αποδεκτή στάθμη ποιότητας 0.15% και απορριπτέα στάθμη ποιότητας 2.4%.

(α) Να προσδιορισθεί το πλάνο απλής δειγματοληψίας B.

(β) Να κατασκευαστεί σε ένα διάγραμμα η χαρακτηρίζουσα καμπύλη (OC) για κάθε ένα από τα δύο πλάνα δειγματοληψίας. Σχολιάστε την αυστηρότητα των δύο πλάνων δειγματοληψίας και βάσει αυτής αξιολογήστε τα.

(γ) Να προσδιοριστούν οι κίνδυνοι παραγωγού και καταναλωτή του πλάνου απλής δειγματοληψίας A.

(δ) Αν εφαρμόζεται επανορθωτικός έλεγχος, να κατασκευαστεί σε ένα διάγραμμα η καμπύλη μέσης εξερχόμενης ποιότητας και των δύο πλάνων δειγματοληψίας. Στη συνέχεια, προσδιορίστε (είτε προσεγγιστικά χρησιμοποιώντας το διάγραμμα, είτε με ακρίβεια) ποιο είναι το υψηλότερο μέσο κλάσμα μη συμφωνούντων σακίων που μπορεί να παραληφθούν μετά τον επανορθωτικό έλεγχο και να βρεθούν στις αποθήκες της εταιρείας και στις δύο περιπτώσεις/πλάνα δειγματοληψίας.

(ε) Από ιστορικά στοιχεία έχει προκύψει ότι ο προμηθευτής αποστέλλει συνήθως παρτίδες προϊόντων με κλάσμα μη συμφωνούντων που είναι ίσο είτε με 0.12%, είτε με 1.021%. Προσδιορίστε τη μέση εξερχόμενη ποιότητα και το μέσο συνολικό αριθμό ελεγχόμενων προϊόντων (ATI) για το πλάνο δειγματοληψίας A, όταν το κλάσμα μη συμφωνούντων ισούται με κάθε μία από αυτές τις τιμές. Τι παρατηρείτε; Σχολιάστε σχετικά.

Προδιαγραφή MIL-STD-105E - Λύση

(α) Η παρτίδα έχει μέγεθος $N = 2500$ σακιά και για επίπεδο ελέγχου III από τον Πίνακα 1.13, σελ. 59, Τόμος Ε, προκύπτει κωδικό γράμμα μεγέθους δείγματος L . Από τον Πίνακα 1.14 σελ. 60, Τόμος Ε για αποδεκτή στάθμη ποιότητας 0.15%, κανονικό έλεγχο και κωδικό γράμμα L προκύπτει το πλάνο δειγματοληψίας: $n = 315$, $c = 1$ και $r = 2$ (λόγω διπλού βέλους η ακολουθούμενη μετάπτωση είναι προς τα κάτω).

(β)

Για το προτεινόμενο πλάνο δειγματοληψίας Β $n = 315$ και $c = 1$ υπολογίζουμε την πιθανότητα αποδοχής από τη σχέση

$$P_a = \sum_{d=0}^{c-1} \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d (1-p)^{n-d} = (1-p)^{315} + 315p(1-p)^{314}$$

για μια σειρά κλασμάτων μη συμφωνούντων από 0 έως 0.04 (4%), με βήμα 0.001 (0.1%) αρχικά και 0.002 (0.2%) στη συνέχεια. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για το τρέχον πλάνο δειγματοληψίας Α με $n = 500$ και $c = 2$ χρησιμοποιώντας τη σχέση

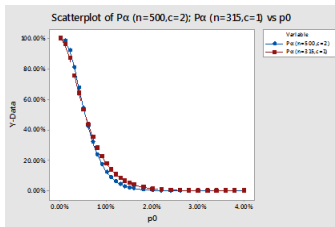
$$P_a = \sum_{d=0}^{c-2} \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d (1-p)^{n-d} = (1-p)^{500} + 500p(1-p)^{499} + \frac{499 \cdot 500}{2} p^2 (1-p)^{498}$$

Προδιαγραφή MIL-STD-105E - Λύση

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα (Πίνακας 1):

$n = 315$ και $c = 1$			$n = 500$ και $c = 2$	
P_o	P_n		P_o	P_n
0.00%	100.00%	0.00%	100.00%	AQL
0.10%	95.98%	0.10%	98.57%	
0.15%	91.81%	0.15%	95.96%	
0.20%	86.82%	0.20%	91.99%	
0.30%	75.60%	0.30%	80.90%	
0.40%	64.09%	0.40%	67.67%	
0.50%	53.26%	0.50%	54.35%	
0.60%	43.58%	0.60%	42.25%	
0.70%	35.23%	0.70%	31.99%	
0.80%	28.20%	0.80%	23.69%	
0.90%	22.38%	0.90%	17.23%	LTPD
1.00%	17.64%	1.00%	12.34%	
1.10%	13.82%	1.10%	8.72%	
1.20%	10.77%	1.20%	6.09%	
1.30%	8.35%	1.30%	4.21%	
1.40%	6.45%	1.40%	2.89%	
1.50%	4.96%	1.50%	1.96%	
1.60%	3.80%	1.60%	1.32%	
1.80%	2.22%	1.80%	0.59%	
2.00%	1.28%	2.00%	0.26%	
2.20%	0.73%	2.20%	0.11%	
2.40%	0.42%	2.40%	0.0471%	
2.60%	0.23%	2.60%	0.02%	
2.80%	0.13%	2.80%	0.01%	
3.00%	0.07%	3.00%	0.00%	
3.20%	0.04%	3.20%	0.00%	
3.40%	0.02%	3.40%	0.00%	
3.60%	0.01%	3.60%	0.00%	
3.80%	0.01%	3.80%	0.00%	
4.00%	0.00%	4.00%	0.00%	

Προδιαγραφή MIL-STD-105E - Λύση



Όπως διαπιστώνουμε τόσο από τον πίνακα 1 όσο και από τα διαγράμματα των δύο χαρακτηριστικών καμπύλων, το πλάνο δειγματοληψίας $n = 500$ και $c = 2$ είναι πιο ελαστικό (δηλ. παρουσιάζει μεγαλύτερη P_{α}) σε χαμηλά κλάσματα μη συμφωνούντων (ως το 0.5% περίπου) και πιο αυστηρό (δηλ. παρουσιάζει μικρότερη P_{α}) σε υψηλότερα κλάσματα μη συμφωνούντων, σε σχέση με το πλάνο $n = 315$ και $c = 1$. Συνεπώς, μεταξύ των δύο πλάνων είναι προτιμότερο. Σχόλιο: Το πλάνο δειγματοληψίας $n = 500$ και $c = 2$ έχει χαρακτηρίζουσα καμπύλη με μεγαλύτερη (πιο «απότομη») κλίση, άρα μεγαλύτερη διαχωριστική ισχύ.

Προδιαγραφή MIL-STD-105E - Λύση

(γ)

(1^{ος} τρόπος): Από τον παραπάνω πίνακα 1 διαπιστώνουμε πως

$$\alpha = 1 - P\alpha (p_1 = AQL = 0.15\%) = 1 - 0.9596 = 0.0404 \text{ (ή } 4.04\%)$$

$$\beta = P\alpha (p_2 = LTPD = 2.4\%) = 0.000471 \text{ (ή } 0.0471\%)$$

(2^{ος} τρόπος): Από τους τύπους (1.4) και (1.5), σελ. 27, Τόμος Ε έχουμε

$$a = 1 - \sum_{d=0}^{c-2} \frac{n!}{d!(n-d)!} p_1^d (1-p_1)^{n-d} = 1 - (1-p_1)^{500} - 500p_1(1-p_1)^{499}$$

$$= \frac{499 \cdot 500}{2} p_1^2 (1-p_1)^{498} = 1 - 0.4721 - 0.3546 - 0.1329 = 0.040381$$

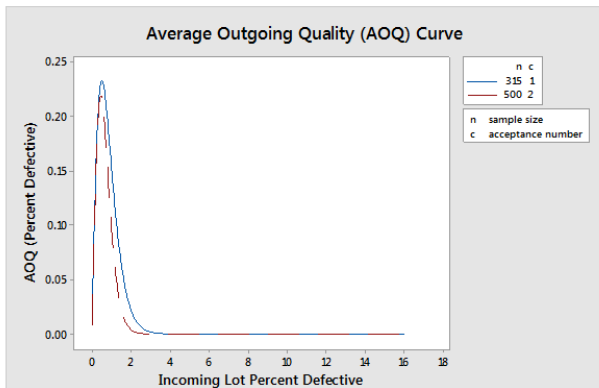
$$\beta = \sum_{d=0}^{c-2} \frac{n!}{d!(n-d)!} p_2^d (1-p_2)^{n-d} = (1-p_2)^{500} - 500p_2(1-p_2)^{499}$$

$$= \frac{499 \cdot 500}{2} p_2^2 (1-p_2)^{498} = 5.30773 \cdot 10^{-6} + 6.52590 \cdot 10^{-5} + 4.00380 \cdot 10^{-4} = 0.0004709$$

Προδιαγραφή MIL-STD-105E - Λύση

(δ)

Επιλέγουμε στο MINITAB τη διαδικασία: Stat → Quality Tools → Acceptance Sampling by Attributes → Compare User Defined Sampling Plans. Στη συνέχεια επιλέγουμε στο Measurement type: Go / no go (defective) και στο Units for quality levels: Percent defective (αν έχουν καταχωρηθεί τα δεδομένα ως ποσοστά, όπως στον πίνακα 1. Διαφορετικά: proportion defective). Πληκτρολογούμε στο Sample Sizes: 315 500, στο Acceptance numbers: 1 2 και στο Lot size: 2500. Πιέζουμε Graphs και στο παράθυρο που ανοίγει επιλέγουμε **Average outgoing quality (AOQ) curve** και **Display graph on one page**, πιέζουμε 2 φορές OK και παίρνουμε το εξής διάγραμμα:



Προδιαγραφή MIL-STD-105E - Λύση

(δ)

Το υψηλότερο μέσο κλάσμα μη συμφωνούντων σακίων που μπορεί να παραληφθούν μετά τον έλεγχο αποδοχής και να βρεθούν στις αποθήκες της εταιρείας είναι η μέγιστη τιμή του *AOQL* ή αλλιώς το όριο μέσης εξερχόμενης ποιότητας (*AOQL*).

Μετά την προαναφερθείσα διαδικασία με το MINITAB παίρνουμε ακόμη τα παρακάτω αποτελέσματα από τα οποία μπορεί να προσδιοριστεί με (σχετική) **ακρίβεια** το όριο μέσης εξερχόμενης ποιότητας (*AOQL*) και για τα δύο πλάνα δειγματοληψίας:

Acceptance Sampling by Attributes

Measurement type: Go/no go
Lot quality in percent defective
Lot size: 2500
Use binomial distribution to calculate probability of acceptance

Sample Size (n)	Acceptance Number (c)	At Percent AOQL	Percent Defective
315	1	0.233	0.512
500	2	0.219	0.453

Accept lot if defective items in n sampled $\leq c$; Otherwise reject.

Προδιαγραφή MIL-STD-105E - Λύση

(ε)

Για το πλάνο δειγματοληψίας A ($n = 500$ και $c = 2$) υπολογίζουμε τις πιθανότητες αποδοχής για $p_0 = 0.12\%$ και $p_0 = 1.021\%$, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$P_a = \sum_{d=0}^{c-2} \frac{500!}{d!(500-d)!} p^d (1-p)^{500-d}$$

και παίρνουμε για $p_0 = 0.12\% \rightarrow P_a = 0.977$ και για $p_0 = 1.021\% \rightarrow P_a = 0.1148$ |

Η μέση εξερχόμενη ποιότητα, AOQ δίνεται από τον τύπο (1.6), σελ. 30, Τόμος E

$$AOQ = \frac{P_a p_0 (N - n)}{N}$$

και είναι για τις δύο τιμές p_0 :

$$\text{για } p_0 = 0.12\% \quad AOQ = \frac{0.977 \cdot 0.0012 \cdot (2500 - 500)}{2500} = 0.000938 \text{ ή } 0.0938\%$$

$$\text{για } p_0 = 1.021\% \quad AOQ = \frac{0.1148 \cdot 0.01021 \cdot (2500 - 500)}{2500} = 0.000938 \text{ ή } 0.0938\%$$

Ο μέσος συνολικός αριθμός ελεγχόμενων σακίων ανά παρτίδα, ATI , δίνεται από τον τύπο (1.7), σελ. 31, Τόμος E

$$ATI = n + (1 - P_a)(N - n)$$

και είναι για τις δύο τιμές p_0 :

$$\text{για } p_0 = 0.12\% \quad ATI = 500 + (1 - 0.977)(2500 - 500) = 546.065$$

$$\text{για } p_0 = 1.021\% \quad ATI = 500 + (1 - 0.1148)(2500 - 500) = 2270.35$$

Διαπιστώνουμε ότι έστω και αν η AOQ είναι (σχεδόν) ίδια και στις δύο περιπτώσεις (άρα από απόψεως ποιότητας σακίων που παραλαμβάνονται δεν υπάρχει διαφορά), ο ATI για το υψηλότερο κλάσμα μη συμφωνούντων ($p_0 = 1.021\%$) είναι σαφώς μεγαλύτερο, άρα και η οικονομική επιβάρυνση της βιομηχανίας παραγωγής προτηγανισμένων, κατεψυγμένων πατατών.

Δειγματοληψία αποδοχής μεταβλητών

- ▶ Το πλάνο δειγματοληψίας καθορίζει το μέγεθος του δείγματος n καθώς και το κριτήριο αποδοχής της παρτίδας μετά τη συλλογή των δεδομένων.
- ▶ Τα πλάνα δειγματοληψίας στηρίζονται συνήθως στο μέσο όρο και στην τυπική απόκλιση του ποιοτικού χαρακτηριστικού που μελετάται.
- ▶ Όταν είναι γνωστή η κατανομή των ποιοτικών χαρακτηριστικών στην παρτίδα μπορούν να σχεδιαστούν πλάνα δειγματοληψίας με καθορισμένους κινδύνους αποδοχής και απόρριψης παρτίδων.

Προσδιορισμός του κλάσματος μη συμφωνούντων

Υποθέτουμε κανονική κατανομή για τις ελεγχόμενες μεταβλητές με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ .

Έστω USL άνω όριο προδιαγραφών ή/και LSL κάτω όριο προδιαγραφών

$$p = P(X < LSL) = P\left(Z < \frac{LSL - \mu}{\sigma}\right)$$

Παράδειγμα: Η μέση τιμή πάχους επιμετάλλωσης νικελίου σε παρτίδες ράβδων χαλκού είναι $0.65mm$ ενώ η τυπική απόκλιση είναι $0.05mm$. Με βάση την εφαρμοζόμενη προδιαγραφή δεν επιτρέπεται πάχος μεγαλύτερο από $0.70mm$. Ποιο είναι το κλάσμα μη συμφωνούντων σε αυτή την περίπτωση;
(0.1587)

Προσδιορισμός πλάνου δειγματοληψίας όταν είναι γνωστή η διασπορά

Υπολογίζονται οι ποσότητες Z_{LSL} ή Z_{USL} και καθορίζεται ένα κριτήριο αποδοχής k , όταν $Z_{LSL} \geq k$ ή $Z_{USL} \geq k$ η παρτίδα γίνεται αποδεκτή.

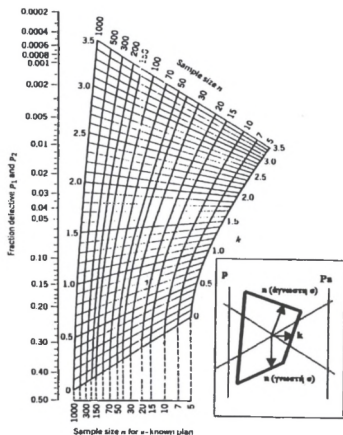
$$Z_{LSL} = \frac{\mu - LSL}{\sigma}, \quad Z_{USL} = \frac{USL - \mu}{\sigma}$$

Εναλλακτικά, το κριτήριο αποδοχής είναι η τιμή M , την οποία δεν πρέπει να υπερβαίνει το κλάσμα ασυμφωνιών \hat{p} , όταν $\hat{p} \leq M$ η παρτίδα γίνεται αποδεκτή.

Όταν δεν είναι γνωστή η τυπική απόκλιση, η τυπική απόκλιση εκτιμάται από ένα δείγμα μεγέθους n και αντικαθίσταται στους παραπάνω τύπους.

Προσδιορισμός πλάνου δειγματοληψίας μεταβλητών με δεδομένη χαρακτηρίζουσα καμπύλη

Προσδιορίζονται δύο σημεία πάνω στη χαρακτηρίζουσα καμπύλη $(p_1, 1 - \alpha)$ και (p_2, β) . Με τη χρήση του νομογραφήματος Jacobson υπολογίζεται το απαιτούμενο μέγεθος δείγματος και η κρίσιμη περιοχή αποδοχής ή απόρριψής k (ή M), είτε είναι γνωστή είτε είναι άγνωστη η διασπορά.



Προσδιορισμός πλάνου δειγματοληψίας μεταβλητών με δεδομένη χαρακτηρίζουσα καμπύλη

$$k = Z_1 \frac{Z_\alpha}{\sqrt{n}} \quad \text{και} \quad n = \left[\frac{Z_\alpha + Z_\beta}{Z_1 - Z_2} \right]^2$$

$$M = 1 - N\left(k \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)$$

$$\hat{p} = 1 - N\left(\frac{\bar{x} - LSL}{s} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)$$