ΕΥΓΕΝΙΑ Ν. ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΚΛΑΣΕΙΣ Σ.Δ.Ε.

ΠΑΤΡΑ 2019

Στοιχεία Συγγραφέα: Ευγενία Ν. Πετροπούλου
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών
Πανεπιστημιούπολη Πατρών, 26504 Ρίο, Πάτρα
Τηλ.: (+30)2610962564
e-mail: jenpetr@upatras.gr
Ιστοσελίδα: http://petropoulou.civil.upatras.gr

Περιεχόμενα

1 Διαφορικές εξισώσεις αναγόμενες σε χωριζομένων μεταβλητών

Έστω μια ΣΔΕ της μορφής:

$$y' = f(ax + by + c), \;\; y = y(x), \tag{1.1}$$

όπου f γνωστή συνάρτηση, a, b, c γνωστές σταθερές και $y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι:

- $a \neq 0$, διότι διαφορετικά η (1.1) είναι μια ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών και
- $b \neq 0$, διότι διαφορετικά η (1.1) επιλύεται απευθείας με μία ολοκλήρωση.

Για να επιλύσουμε την (1.1) θέτουμε

$$w(x) = ax + by(x) + c, \tag{1.2}$$

απ΄ όπου βρίσκουμε

$$w'(x) = a + by'(x) \Rightarrow y'(x) = \frac{w'(x) - a}{b}. \tag{1.3}$$

Έτσι η (1.1) ανάγεται στην

$$\frac{w'(x) - a}{b} = f(w) \Rightarrow w'(x) = bf(w) + a, \tag{1.4}$$

που είναι μια ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών, δεδομένου ότι μπορεί να ξαναγραφεί στη μορφή:

$$\frac{dw}{bf(w) + a} = dx. \tag{1.5}$$

Παράδειγμα 1.1. Να βρεθεί η γενική λύση της ΣΔΕ

$$y' = \cos(x + y) \tag{1.6}$$

όπου $y = y(x)$.

Λύση. Θέτουμε

$$x + y = w \Rightarrow 1 + y' = w' \Rightarrow y' = w' - 1$$

και η (1.6) γίνεται

$$w' - 1 = \cos w \Rightarrow \frac{dw}{1 + \cos w} = dx,$$

απ΄ όπου με ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$\tan\frac{w}{2} = x + C \Rightarrow \tan\frac{x+y}{2} = x + C,$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά ή

$$y = -x + 2\arctan(x + C),$$

που είναι η γενική λύση της (1.6). □

2 Διαφορικές εξισώσεις αναγόμενες σε ομογενείς

Έστω μια ΣΔΕ της μορφής:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{dx + ky + m}\right), \;\; y = y(x), \tag{2.1}$$

όπου f γνωστή συνάρτηση, a, b, c, d, k, m γνωστές σταθερές και $y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι:

- ότι οι σταθερές a και d δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν, διότι διαφορετικά η (2.1) είναι μια ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών,
- ότι οι σταθερές b και k δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν, διότι διαφορετικά η (2.1) επιλύεται απευθείας με μία ολοκλήρωση,
- ότι οι σταθερές c και m δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν, διότι διαφορετικά η (2.1) είναι μια ομογενής ΣΔΕ,

- ότι οι σταθερές d και k δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν, διότι διαφορετικά η (2.1) είναι μια ΣΔΕ που ανάγεται σε ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών και

- ότι οι σταθερές a και b δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν, διότι διαφορετικά η (2.1) είναι μια ΣΔΕ που ανάγεται σε ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών.

Για να επιλύσουμε τη (2.1) θέτουμε

$$x = X + h_1, \ \ y = Y + h_2, \tag{2.2}$$

όπου h_1, h_2 σταθερές που θα προσδιορισθούν στην πορεία. Έτσι με χρήση της (2.2), η (2.1) γίνεται:

$$\begin{aligned} Y'(X) &= f\left(\frac{a(X+h_1)+b(Y+h_2)+c}{d(X+h_1)+k(Y+h_2)+m}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow Y'(X) &= f\left(\frac{aX+bY+ah_1+bh_2+c}{dX+kY+dh_1+kh_2+m}\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Στη συνέχεια απαιτούμε οι σταθερές h_1 και h_2 να ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l} ah_1+bh_2+c=0 \\ dh_1+kh_2+m=0 \end{array}\right\}. \tag{2.4}$$

Γι΄ αυτές τις τιμές των h_1, h_2, η (2.3) γίνεται μια ομογενής ΣΔΕ, η οποία επιλύεται κατά τα γνωστά.

Αναφορικά με το αλγεβρικό, γραμμικό σύστημα (2.4), διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

- Αν $\begin{vmatrix} a & b \\ d & k \end{vmatrix} \neq 0$, το σύστημα (2.4) έχει μοναδική λύση και οι σταθερές h_1, h_2 προσδιορίζονται μονοσήμαντα.

- Αν $\begin{vmatrix} a & b \\ d & k \end{vmatrix} = 0$, έπεται ότι

$$ak - db = 0 \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{b}{k} = \text{σταθερά, έστω } \lambda,$$

απ΄ όπου προκύπτει $a = \lambda d$, $b = \lambda k$ και η (2.1) ξαναγράφεται ως εξής:

$$y' = f\left(\frac{\lambda(dx+ky)+c}{dx+ky+m}\right). \tag{2.5}$$

Θέτοντας $dx + ky = w \Rightarrow d + ky' = w'$, η (2.5) γίνεται

$$\frac{w'-d}{k} = f\left(\frac{\lambda w + c}{w+m}\right) \Rightarrow w' = d + kf\left(\frac{\lambda w + c}{w+m}\right),$$

που είναι μια ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών.

Παράδειγμα 2.1. Να βρεθεί η γενική λύση της ΣΔΕ

$$y' = \left(\frac{x+y-1}{2x-4}\right)^2, \tag{2.6}$$

όπου $y = y(x)$.

Λύση. Κατ΄ αρχήν ελέγχουμε την τιμή της ορίζουσας $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$. Είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0.$$

Στη συνέχεια επιλύουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ 2x-4=0 \end{array}\right\},$$

βρίσκοντας $x = 2$ και $y = -1$.

Θέτοντας $x = X + 2$ και $y = Y - 1$, η (2.6) γίνεται:

$$Y'(X) = \left(\frac{X+2+Y-1-1}{2X+4-4}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y'(X) = \left(\frac{X+Y}{2X}\right)^2, \tag{2.7}$$

που είναι ομογενής ΣΔΕ, δεδομένου ότι η συνάρτηση $\left(\frac{X+Y}{2X}\right)^2$ είναι ομογενής μηδενικού βαθμού. Θέτοντας

$$u = \frac{Y}{X} \Rightarrow Y = Xu \Rightarrow Y' = u + Xu' \tag{2.8}$$

η (2.7) γίνεται:

$$u + Xu' = \frac{(u+1)^2}{4} \Rightarrow Xu' = \frac{u^2 - 2u + 1}{4} \Rightarrow \frac{4du}{(u-1)^2} = \frac{dX}{X},$$

απ΄ όπου με ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$-\frac{4}{u-1} = \ln|X| + C,$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά ή

$$\frac{4X}{X-Y} = \ln|X| + C \Rightarrow \frac{4(x-2)}{y-x+3} = \ln|x-2| + C,$$

που είναι η γενική λύση της (2.6). □

Παράδειγμα 2.2. Να βρεθεί η γενική λύση της ΣΔΕ

$$y' = \frac{4x+6y+3}{6x+9y+2}, \tag{2.9}$$

όπου $y = y(x)$.

Λύση. Κατ΄ αρχήν ελέγχουμε την τιμή της ορίζουσας $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$. Είναι

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η (2.9) ξαναγράφεται στη μορφή:

$$y' = \frac{2(2x+3y)+3}{3(2x+3y)+2}. \tag{2.10}$$

Επομένως, θέτοντας

$$2x + 3y = w \Rightarrow 2 + 3y' = w' \Rightarrow y' = \frac{w' - 2}{3},$$

η (2.10) γίνεται:

$$\frac{w' - 2}{3} = \frac{2w + 3}{3w + 2} \Rightarrow w' = \frac{12w + 13}{3w + 2} \Rightarrow \frac{3w + 2}{12w + 13} dw = dx,$$

απ΄ όπου με ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$w - \frac{5}{12} \ln |12w + 13| = 4x + C,$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά ή

$$2x + 3y - \frac{5}{12} \ln |12(2x + 3y) + 13| = 4x + C,$$

που είναι η γενική λύση της (2.9). □

3 Διαφορικές εξισώσεις Clairaut

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$y = xy' + f(y'), \;\; y = y(x), \tag{3.1}$$

όπου f γνωστή συνάρτηση, καλούνται ΣΔΕ τύπου Clairaut.

Για την επίλυση εξισώσεων της μορφής (4.1), θέτουμε προς χάριν ευκολίας $y' = p$ και στη συνέχεια παραγωγίζουμε την προκύπτουσα σχέση ως προς x βρίσκοντας:

$$\begin{gathered} y = xp + f(p) \Rightarrow y' = p + xp' + f'(p)p' \Rightarrow \\ \Rightarrow p = p + xp' + f'(p)p' \Rightarrow [x + f'(p]p' = 0. \end{gathered}$$

Από την ανωτέρω σχέση είναι εμφανές ότι είτε

$$p' = 0, \tag{3.2}$$

είτε

$$x + f'(p) = 0. \tag{3.3}$$

Εκ της (3.2) προκύπτει $p = C$, όπου C αυθαίρετη σταθερά και με αντικατάσταση στην (4.1) βρίσκουμε

$$y = xC + f(C),$$

που είναι η γενική λύση της (4.1).

Εκ της (3.3) προκύπτει $x = -f'(p)$ και με αντικατάσταση στην (4.1) βρίσκουμε

$$y = -pf'(p) + f(p).$$

Οι σχέσεις

$$x = -f'(p), y = -pf'(p) + f(p)$$

δίνουν μια ιδιάζουσα λύση της (4.1) σε παραμετρική μορφή.

Παράδειγμα 3.1. Να λυθεί η ΣΔΕ τύπου Clairaut

$$y = xy' + \ln y' \tag{3.4}$$

όπου $y = y(x)$.

Λύση. Θέτοντας $y' = p$, η (3.4) γίνεται:

$$y = xp + \ln p, \tag{3.5}$$

απ΄ όπου παραγωγίζοντας ως προς x βρίσκουμε

$$p = p + xp' + \frac{p'}{p} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{p}\right) p' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p' = 0 \text{ ή } x + \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = C \text{ ή } x = -\frac{1}{p},$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά. Επομένως, η γενική λύση της (3.4) είναι

$$y = xC + \ln C.$$

Θέτοντας στην (3.4) $x = -\dfrac{1}{p}$ βρίσκουμε

$$y = -1 + \ln p.$$

Οι σχέσεις

$$x=-\frac{1}{p}, y=-1+\ln p$$

δίνουν μια ιδιάζουσα λύση της (3.4) σε παραμετρική μορφή. Απαλείφοντας την παράμετρο p από αυτές τις δύο σχέσεις βρίσκουμε:

$$y=-1+\ln(-x^{-1}).$$

□

4 Διαφορικές εξισώσεις Lagrange

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$y=xg(y')+f(y'),\ \ y=y(x), \tag{4.1}$$

όπου f, g γνωστές συναρτήσεις, καλούνται ΣΔΕ τύπου Lagrange.

Για την επίλυση εξισώσεων της μορφής (;;), θέτουμε προς χάριν ευκολίας $y'=p$ και στη συνέχεια παραγωγίζουμε την προκύπτουσα σχέση ως προς x βρίσκοντας:

$$y=xg(p)+f(p)\Rightarrow y'=g(p)+xg'(p)p'+f'(p)p'\Rightarrow$$
$$\Rightarrow p=g(p)+xg'(p)p'+f'(p)p'\Rightarrow [xg'(p)+f'(p]p'=p-g(p)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow p'=\frac{p-g(p)}{xg'(p)+f'(p}\Rightarrow\frac{dx}{dp}=\frac{xg'(p)+f'(p}{p-g(p)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{dx}{dp}-\frac{g'(p)}{p-g(p)}x=\frac{f'(p}{p-g(p)},$$

που είναι γραμμική ΣΔΕ ως προς $x(p)$.

Από τη σχέση $p-g(p)=0$ προκύπτουν ιδιάζουσες λύσεις της (4.1), αν υπάρχουν.

Παράδειγμα 4.1. Να λυθεί η ΣΔΕ τύπου Lagrange

$$y=-xy'+\frac{1}{5}(y')^5 \tag{4.2}$$

όπου $y=y(x)$.

Λύση. Θέτοντας $y' = p$, η (4.2) γίνεται:

$$y = -xp + \frac{p^5}{5}, \tag{4.3}$$

απ΄ όπου παραγωγίζοντας ως προς x βρίσκουμε

$$p = -p - xp' + p^4p' \Rightarrow 2p = (p^4 - x)p' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{2p}{p^4 - x} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{p^4 - x}{2p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'(p) + \frac{1}{2p}x(p) = \frac{p^3}{2}, \tag{4.4}$$

που είναι γραμμική ΣΔΕ ως προς $x(p)$ με ολοκληρωτικό παράγοντα:

$$\mu(p) = e^{\int \frac{1}{2p}dp} = e^{\frac{\ln p}{2}} = e^{\ln p^{1/2}} = \sqrt{p}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (4.4) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(p) = \sqrt{p}$ καταλήγουμε στην

$$\frac{d}{dp}[x(p) \cdot \sqrt{p}] = \frac{p^{7/2}}{2},$$

απ΄ όπου ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$x \cdot \sqrt{p} = \frac{p^{9/2}}{9} + c \Rightarrow x = \frac{p^4}{9} + cp^{-1/2}, \tag{4.5}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά.

Αντικαθιστώντας την (4.5) στην (4.3) βρίσκουμε

$$y = \frac{4p^5}{45} - cp^{1/2}. \tag{4.6}$$

Οι σχέσεις (4.6) και (4.5) δίνουν τη γενική λύση της (4.2) σε παραμετρική μορφή

Από τη σχέση $p - g(p) = 0$, όπου $g(p) = -p$ προκύπτει:

$$2p = 0 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow y = 0,$$

που είναι ιδιάζουσα λύση της (4.2). $\square$

Αναφορές

[1] Ν. Δ. Αλικάκος & Γ. Η. Καλογερόπουλος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Σύγχρονη Εκδοτική, 2003.

[2] M. L. Abell & J. P. Braselton, Modern Differential Equations: Theory, Applications, Technology, Harcourt Brace College Publishers, 1996.

[3] Γ. Β. Βουγιατζής, Γ. Δ. Μπόζης & Δ. Β. Παπαδόπουλος, Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2012.

[4] W. E. Boyce & R. C. DiPrima, Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1999.

[5] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, 1991.

[6] Ν. Μυλωνάς & Χ. Σχοινάς, Διαφορικές Εξισώσεις, Μετασχηματισμοί και Μιγαδικές Συναρτήσεις, Εκδόσεις Α. Τζιόλα & Υιοί Α.Ε., 2015.

[7] Π. Δ. Σιαφαρίκας, Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Τόμος Ι, 3η έκδοση, 2002.

[8] Ν. Σταυρακάκης, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1997.

[9] M. Tenenbaum & H. Pollard, Ordinary Differential Equations, Dover Publications, 1985.

[10] Π. Μ. Χατζηκωνσταντίνου, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Μετασχηματισμοί Laplace και Fourier, Εκδόσεις Συμμετρία, 2009.