# ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
# *για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ*

## *Τεύχος 1*

### ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ
### ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
### *για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ*


***Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης***

***Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής,***
***Γενικό Τμήμα Πολυτεχνικής Σχολής Πανεπιστημίου Πατρών***



GOTSIS
ΕΚΔΟΣΕΙΣ

***1η Έκδοση***
***Πάτρα, 2008***

**Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης** *(συγγραφέας, Γενικό Τμήμα, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών)*
**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ *για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, Τεύχος 1:***
**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ *για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ***
**1η Έκδοση: Φεβρουάριος 2008**



**ISBN 978-960-98187-2-8** (Αυτό το τεύχος. Παράκληση για χρήση του ISBN για παραγγελίες.)
**ISBN SET 978-960-98187-1-1** (Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ *για Πολιτικούς Μηχανικούς* SET)

## ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ, ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟΝ ΕΚΔΟΤΗ

**Βιβλιοπωλείο «Γνώση»**, Οδός Αράτου 41, 262.21 ΠΑΤΡΑ
Τηλέφωνο: (+30) 2610 226453, Fax: (+30) 2610 226690,
E-mail: gnossis@otenet.gr



## ΕΚΤΥΠΩΣΗ-ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ

«Ταχύτυπο», Ταχυεκτυπώσεις – Γραβάνης Ε.Π.Ε., Πάροδος Διοδώρου 160, Βελβίτσι, 264.43 ΠΑΤΡΑ
Τηλέφωνα: (+30) 2610 461780 έως (+30) 2610 461790, E-mail: info@tachytypo.gr

## ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ

Η κεντρική είσοδος και ένα πολύ μικρό τμήμα του κτιρίου του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών στην Πανεπιστημιούπολη στο Ρίο Πατρών

## ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

**Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης**
Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής
Γενικό Τμήμα, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών
Πανεπιστημιούπολη Πατρών, 265.04 ΡΙΟ, ΠΑΤΡΑ
Τηλέφωνα: (+30) 2610 432257, (+30) 2610 997378,
E-mail: n.ioakimidis@upatras.gr, http://www.des.upatras.gr/amm/ioakimidis/ioakimidis.htm

# ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
## *για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ*

### *Τεύχος 1*

# *Μέρος Α*

# ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
## *για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ*

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α2

## *ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ*

### *ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ*

*Υπάρχουν εκατοντάδες (ίσως και χιλιάδες) προβλήματα στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού σε πάρα πολλούς τομείς της δραστηριότητάς του όπου παρουσιάζονται συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε πέντε τέτοια παραδείγματα όπου παρουσιάζονται συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και θα καταστρώσουμε τις εξισώσεις αυτές. Πιο συγκεκριμένα στην Ενότητα Α2.1 θα αναφερθούμε στις κλασικές διαφορικές εξισώσεις που αφορούν σε μια συνήθη δοκό (ένα τόσο σημαντικό και χρήσιμο γραμμικό φορέα στις κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού) στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως στη Μηχανική των Υλικών. Σχετική γενίκευση γίνεται επίσης σε δοκό επί ελαστικής βάσεως (θεμελιώσεως, θεμελίου, όπως είναι το έδαφος) σύμφωνα με την κλασική υπόθεση του Winkler (1867) για τη συμπεριφορά της ελαστικής βάσεως στη δοκό. Τέτοιες δοκοί είναι οι πεδιλοδοκοί στις Κατασκευές και οι σιδηροτροχιές στη Σιδηροδρομική. Στην Ενότητα Α2.2 θα αναφερθούμε στις Ταλαντώσεις και θα καταστρώσουμε τη διαφορική εξίσωση των ελεύθερων ταλαντώσεων μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου–ελατηρίου μέσω ενεργειακής μεθόδου και όχι μέσω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Στην Ενότητα Α2.3 θα αναφερθούμε στις Θεμελιώσεις και στην κατάστρωση της διαφορικής εξισώσεως που ισχύει για θλιπτική αξονική φόρτιση κατακόρυφου πασσάλου στο έδαφος. Στην Ενότητα Α2.4 θα αναφερθούμε στη Ρευστομηχανική στην κατανομή της ταχύτητας (προκύπτει παραβολική, όχι ομοιόμορφη) σε μόνιμη ροή Νευτώνειου (όχι ιδεατού) ρευστού σε σωλήνα κυκλικής διατομής. Τέλος στην Ενότητα Α2.5 θα αναφερθούμε στην Περιβαλλοντική Υδραυλική στη διαφορική εξίσωση που ισχύει κατά την κίνηση ρύπου σε μόνιμη ροή σε υδατόρρευμα με μεταγωγή του ρύπου και ταυτόχρονη αποδόμησή του.*

## Α2.1. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΣΥΝΗΘΗΣ ΔΟΚΟΣ ΣΕ ΚΑΜΨΗ

### *Α2.1.1. Η συνήθης δοκός και οι δυνατότητες στηρίξεώς της*

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στις τόσο στοιχειώδεις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της συνήθους δοκού στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως Δοκών στη Μηχανική των Υλικών. Λέγοντας συνήθη δοκό συμφωνούμε να εννοούμε εδώ μια απλή, αρκετά λεπτή, ευθύγραμμη δοκό μήκους $L$ κατά μήκος του άξονα $Ox$ (συνήθως με $0 \le x \le L$) από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό με σταθερή διατομή καθ' όλο το μήκος της και, φυσικά, με δύο άκρα: συνήθως $x = 0$ και $x = L$. Η συνήθης αυτή δοκός (που είναι ένας γραμμικός φορέας) θεωρείται ότι βρίσκεται υπό την επίδραση κατανεμημένης κάθετης στατικής φορτίσεως $p = p(x)$ (σε N/m ή μάλλον σε kN/m).[1] Για τις στηρίξεις της δοκού αυτής θεωρούμε ότι, εάν υπάρχουν,

[1] Πολύ συχνά χρησιμοποιείται και το σύμβολο $q$ αντί του $p$ στη Στατική. Όμως στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά το σύμβολο $q$ θα χρησιμοποιηθεί σε άλλη περίπτωση, συγκεκριμένα για τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$ στις ταλαντώσεις δοκών στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ. Αυτό το θέμα εξετάζεται λεπτομερέστερα στη Δυναμική των Κατασκευών.

περιορίζονται στα άκρα της $x = 0$ και $x = L$ (δεν υπάρχουν δηλαδή ενδιάμεσες στηρίξεις). Για τα άκρα $x = 0$ και $x = L$ της ίδιας δοκού υπάρχουν οι εξής τέσσερις κυριότερες και απόλυτα αποδεκτές από στατικής απόψεως δυνατότητες:

1. Πακτωμένο (με πάκτωση) το αριστερό άκρο $x = 0$ και ελεύθερο το δεξιό $x = L$ ή αντίστροφα. Τότε η δοκός καλείται πρόβολος.
2. Πακτωμένο (με πάκτωση) το αριστερό άκρο $x = 0$ και με κύλιση το δεξιό $x = L$ ή αντίστροφα. Τότε η δοκός καλείται μονόπακτη υπερστατική δοκός.
3. Πακτωμένα (με πάκτωση) και τα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$. Τότε η δοκός καλείται αμφίπακτη (αμφίπακτη δοκός).
4. Αρθρωμένο (με άρθρωση) το αριστερό άκρο $x = 0$ και με κύλιση το δεξιό $x = L$ ή αντίστροφα. Τότε η δοκός (που έχει απλές στηρίξεις και στα δύο άκρα της) καλείται αμφιέρειστη (αμφιέρειστη δοκός).

Σημειώνεται ότι η πρώτη και η τέταρτη από τις πιο πάνω στατικά αποδεκτές δυνατότητες αναφέρονται σε ισοστατικές δοκούς, ενώ η δεύτερη και η τρίτη σε υπερστατικές δοκούς.

Υπάρχουν επίσης και οι εξής τέσσερις απαράδεκτες από στατικής απόψεως δυνατότητες:

1. Αρθρωμένο (με άρθρωση) το αριστερό άκρο $x = 0$ και ελεύθερο το δεξιό $x = L$ ή αντίστροφα.
2. Με κύλιση το αριστερό άκρο $x = 0$ και ελεύθερο το δεξιό $x = L$ ή αντίστροφα.
3. Με κύλιση και τα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$.
4. Ελεύθερα και τα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$.

Οι δυνατότητες αυτές δεν εξασφαλίζουν τη στατική ισορροπία στη Στατική, γιατί οι στηρίξεις της δοκού είναι στατικά ελλιπείς. Μπορεί επομένως να υπάρξει κίνηση της δοκού, περιστροφική (στην 1η δυνατότητα) ή μεταφορική (στην 3η δυνατότητα) ή/και τα δύο ταυτόχρονα (στη 2η και στην 4η δυνατότητα). Αντίθετα στη Δυναμική επιτρέποντας την κίνηση της δοκού (υπό περιορισμούς ή απόλυτα ελεύθερη) όλες αυτές οι δυνατότητες είναι καθ' όλα αποδεκτές.

### *Α2.1.2. Τα βασικά μεγέθη κατά μήκος της δοκού*

Στην παρούσα συνήθη δοκό υπό στατική φόρτιση $p = p(x)$ τα εξής μεγέθη είναι σημαντικά κατά μήκος της ($0 \leq x \leq L$):

- Το ***βέλος κάμψεως*** $v = v(x)$, που δημιουργεί την ελαστική γραμμή της δοκού, όπως αποκαλεί ο Πολιτικός Μηχανικός το σχήμα, τη μορφή που παίρνει η δοκός μετά την παραμόρφωσή της εξαιτίας της κάμψεώς της.[2]
- Η ***κλίση*** $v' = v'(x)$ της δοκού και η σχετική με αυτή ***γωνία στροφής*** (ή ***γωνία κλίσεως*** ή απλά ***στροφή***) $\theta = \theta(x)$. Η σχέση που τις συνδέει είναι προφανώς η εξής:

$$v'(x) = \tan\theta(x). \tag{2.1.1}$$

- Η ***καμπυλότητα*** $\kappa = \kappa(x)$ κατά μήκος της δοκού (μετά την παραμόρφωσή της φυσικά). Η σχετική ακτίνα καμπυλότητας $R = R(x)$ (που υποτίθεται εδώ θετική) υπολογίζεται από το γνωστό τύπο

$$R(x) = \frac{1}{|\kappa(x)|}. \tag{2.1.2}$$

[2] Συμβολίζουμε εδώ το βέλος κάμψεως με $v$, γιατί παριστάνει τη μετατόπιση κατά τον άξονα $Oy$ (κάθετη, εγκάρσια μετατόπιση ως προς τον ουδέτερο άξονα της δοκού, δηλαδή ως προς τις νοητές ίνες της που ούτε εφελκύονται, αλλ' ούτε θλίβονται κατά την κάμψη) κατά μήκος της δοκού. Γενικότερα οι μετατοπίσεις κατά τους άξονες $Ox$, $Oy$ και $Oz$ συμβολίζονται στη Μηχανική των Υλικών με $u$, $v$ και $w$ αντίστοιχα. Είναι κατανοητό βέβαια ότι το ίδιο σύμβολο $v$ δηλώνει σε προβλήματα Κινηματικής–Δυναμικής και την ταχύτητα υλικού σημείου. Εντούτοις ελπίζεται να μην υπάρξει σύγχυση: $v = v(x)$ (ανεξάρτητη μεταβλητή η θέση $x$) το βέλος κάμψεως σε δοκούς, ενώ $v = v(t)$ (ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος $t$) η ταχύτητα υλικού σημείου.

- Η ***καμπτική ροπή*** (ή ***ροπή κάμψεως***) $M = M(x)$ κατά μήκος της δοκού.
- Η ***τέμνουσα δύναμη*** (ή ***διατμητική δύναμη***) $Q = Q(x)$ κατά μήκος της δοκού.[3]
- Η ***κατανεμημένη κάθετη φόρτιση*** $p = p(x)$ κατά μήκος της δοκού, στην οποία ήδη αναφερθήκαμε. Συχνά σ' αυτήν ο Πολιτικός Μηχανικός συμπεριλαμβάνει με κατάλληλο τρόπο συγκεντρωμένα φορτία $P_k$ και ροπές $M_k$ κατά μήκος της δοκού. (Λεπτομέρειες για το πώς μπορεί να επιτευχθεί αυτό θα αναφερθούν στις Ενότητες A11.14 και A11.15 του Κεφαλαίου A11.)

Παρατηρούμε πως από τα έξι πιο πάνω μεγέθη τα τρία πρώτα, δηλαδή: (α) το βέλος κάμψεως $v(x)$, (β) η κλίση $v'(x)$ και η σχετιζόμενη με αυτή γωνία στροφής (ή γωνία κλίσεως ή απλά στροφή) $\theta(x)$ καθώς και (γ) η καμπυλότητα $\kappa(x)$ είναι γεωμετρικής φύσεως. (Αφορούν δηλαδή στη Γεωμετρία της δοκού που λόγω της κάμψεώς της έχει παραμορφωθεί.) Αντίθετα τα τρία τελευταία μεγέθη, δηλαδή: (α) η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M(x)$, (β) η τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) $Q(x)$ και (γ) η κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$ είναι μηχανικής φύσεως. (Αφορούν δηλαδή σε στατικά, μηχανικά μεγέθη κατά μήκος της παραμορφωθείσας δοκού.)

### ***A2.1.3. Οι γεωμετρικές διαφορικές εξισώσεις***

Ας υπενθυμίσουμε και πάλι ότι στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ λέγοντας διαφορικές εξισώσεις αναφερόμαστε στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Αυτές είναι διαφορικές εξισώσεις με μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως είναι εδώ η θέση $x$ κατά μήκος της δοκού: $0 \le x \le L$.

Καταρχήν, η ήδη αναφερθείσα σχέση (2.1.1)

$$v'(x) = \tan\theta(x) \tag{2.1.3}$$

αποτελεί μια πρώτη διαφορική εξίσωση κατά μήκος της δοκού: $0 < x < L$. Η διαφορική αυτή εξίσωση συνδέει το βέλος κάμψεως $v(x)$ (στο αριστερό μέλος) με τη γωνία στροφής (ή γωνία κλίσεως ή στροφή) $\theta(x)$ στο δεξιό μέλος. Υποθέτουμε τη γωνία στροφής (ή γωνία κλίσεως ή στροφή) $\theta(x)$ γνωστή συνάρτηση και το βέλος κάμψεως $v(x)$ άγνωστη. Έτσι διαπιστώνουμε αμέσως ότι πρόκειται για μια πάρα πολύ απλή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (και πρώτου βαθμού φυσικά) με άγνωστη συνάρτηση το βέλος κάμψεως $v(x)$ και γνωστή τη γωνία στροφής $\theta(x)$.

Σε μια αρχικά ευθύγραμμη δοκό, όπως εξ υποθέσεως είναι η παρούσα συνήθης δοκός, αρχικά με $v(x) \equiv 0$, η ελαστική παραμόρφωσή της εξαιτίας της κάμψεώς της οδηγεί συνήθως σε πολύ μικρές γωνίες στροφής $\theta(x)$, οπότε δεχόμαστε ότι

$$\tan\theta(x) \approx \theta(x). \tag{2.1.4}$$

Αυτό είναι εύλογο, όπως ήδη ξέρουμε και όπως προκύπτει και από τη γνωστή σειρά Maclaurin (σειρά Taylor στο σημείο $\theta = 0$) της συναρτήσεως $\tan\theta$. Αυτή η σειρά Maclaurin έχει τη μορφή

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\,\theta^5}{15} + \frac{17\,\theta^7}{315} + \frac{62\,\theta^9}{2835} + O(\theta^{11}) \tag{2.1.5}$$

με πρώτο όρο το $\theta$.

Επομένως η διαφορική εξίσωση (2.1.3) παίρνει την κάπως απλούστερη προσεγγιστική μορφή

$$v'(x) = \theta(x). \tag{2.1.6}$$

Αυτή είναι η μορφή που υποθέτει συνήθως ότι ισχύει ο Πολιτικός Μηχανικός και στην οποία εκ προθέσεως (για διευκόλυνσή μας) αντικαταστήσαμε το σύμβολο της προσεγγίσεως $\approx$ με το σύμβολο της ισότητας $=$. Βέβαια πρόκειται για διαφορική εξίσωση μόνο εάν η γωνία στροφής $\theta(x)$ είναι γνωστή συνάρτηση και το βέλος κάμψεως $v(x)$ (η παράγωγός του $v'(x)$ είναι η κλίση της δοκού, όπως

[3] Συχνά για την τέμνουσα δύναμη χρησιμοποιείται και το σύμβολο $V$ αντί του $Q$ ιδίως στην Αμερικανική βιβλιογραφία.

αναφέραμε) είναι η άγνωστη συνάρτηση. Τότε πρέπει να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση (2.1.3), για να προσδιορίσουμε το βέλος κάμψεως $v(x)$. Αντίθετα είναι δυνατόν το βέλος κάμψεως $v(x)$ να είναι αυτό που είναι γνωστό κατά μήκος της δοκού, έστω από μετρήσεις στην ελαστική γραμμή της, δηλαδή στο σχήμα της παραμορφωμένης δοκού μετά την κάμψη της. Στην περίπτωση αυτή ζητείται η γωνία στροφής $\theta(x)$ και η εξίσωση (2.1.3) δεν αποτελεί πια διαφορική εξίσωση, επειδή η παράγωγος $v'(x)$ θεωρείται γνωστή (με παραγώγιση του γνωστού βέλους κάμψεως $v(x)$). Τότε η εξίσωση (2.1.3) είναι απλά ένας τύπος που μας δίνει εύκολα τη γωνία στροφής $\theta(x)$.

Στην περίπτωση της διαφορικής εξισώσεως (2.1.6) πρόκειται για μια ιδιαίτερα απλή γραμμική διαφορική εξίσωση, η οποία εύκολα λύνεται με κατευθείαν ολοκλήρωση ως προς τη θέση $x$. Η ολοκλήρωση αυτή μας δίνει αμέσως

$$v(x) = \int_0^x \theta(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C \tag{2.1.7}$$

φυσικά με την υπόθεση ότι η γνωστή γωνία στροφής $\theta(x)$ είναι κατάλληλη προς ολοκλήρωση συνάρτηση, π.χ. τμηματικά συνεχής συνάρτηση. Κάτι τέτοιο (η δυνατότητα ολοκληρώσεως της γνωστής συναρτήσεως $\theta(x)$) στα μεν μαθηματικά αποτελεί απλά υπόθεση, στη δε Μηχανική των Υλικών αναγκαία απαίτηση του Πολιτικού Μηχανικού σε ένα καλά ορισμένο (καλά τοποθετημένο) πρόβλημα δοκού και θεωρείται ότι ισχύει.

Στη λύση αυτή (2.1.7) το μεν ολοκλήρωμα γράφτηκε σαν ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα, αλλ' εδώ με το άνω όριο ολοκληρώσεως $x$ μεταβλητό. Σαν κάτω όριο ολοκληρώσεως τέθηκε το $x = 0$ θεωρώντας σαν αριστερό άκρο της δοκού το σημείο $x = 0$. Για να αποφευχθεί σύγχυση μεταξύ του μεταβλητού άνω ορίου ολοκληρώσεως $x$ και της μεταβλητής ολοκληρώσεως, χρησιμοποιήθηκε για τη μεταβλητή ολοκληρώσεως το νέο, βοηθητικό σύμβολο $\xi$, που και αυτό βέβαια δηλώνει θέση κατά μήκος της δοκού. Προφανώς $0 \le \xi \le x$ στο ολοκλήρωμα της λύσεως (2.1.7).

Ας σημειωθεί σχετικά ότι στα μαθήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ και ΙΙΙ η μαθηματική σχέση

$$v(x) = \int_0^x \theta(x)\,\mathrm{d}x + C \tag{2.1.8}$$

θα θεωρείται μαθηματικό λάθος. Αυτό συμβαίνει, επειδή η μεταβλητή ολοκληρώσεως $x$ πρέπει να μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, x]$ με δεξιό άκρο το σημείο $x$ και τούτο προκαλεί ίσως σύγχυση. Αναγνωρίζεται εντούτοις ότι, αν και μαθηματικά εσφαλμένη, η σχέση (2.1.8) συχνά χρησιμοποιείται στην τεχνική (και όχι μόνο) βιβλιογραφία αντί για την αντίστοιχη σωστή σχέση (2.1.7).

Στην ίδια λύση (2.1.7) προστέθηκε βέβαια και μια σταθερά ολοκληρώσεως: η $C$. Αυτό είναι εύλογο μετά την ολοκλήρωση και αναγκαίο, ώστε η λύση αυτή να αποτελεί τη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (2.1.6), που μπορεί έτσι κι αλλιώς να επαληθευθεί με παραγώγιση. Τότε, δηλαδή παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή $x$, εύκολα επιστρέφουμε από τη γενική λύση (2.1.7) στη διαφορική εξίσωση (2.1.6), από την οποία ξεκινήσαμε.

Βέβαια σχεδόν πάντοτε ο Πολιτικός Μηχανικός δεν ενδιαφέρεται για τη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (2.1.6), αλλά μόνο για μια μερική λύση (ή ειδική λύση) της ίδιας διαφορικής εξισώσεως όπου δε θα υπεισέρχεται καμία σταθερά. Έτσι, υποθέτοντας εδώ ότι γνωρίζουμε την τιμή $v_0$ του βέλους κάμψεως $v(x)$ στο αριστερό άκρο $x = 0$ της δοκού, δηλαδή ότι

$$v(0) = v_0, \tag{2.1.9}$$

εύκολα διαπιστώνουμε (θέτοντας $x = 0$) ότι η γενική λύση (2.1.7) παίρνει στο άκρο $x = 0$ τη μορφή

$$v(0) = v_0 = 0 + C = C \quad \Longrightarrow \quad C = v_0. \tag{2.1.10}$$

Άρα (με $C = v_0$) προκύπτει η εξής μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως (2.1.6), που συμπεριλαμβάνει τώρα και την αρχική συνθήκη (2.1.9):

$$v(x) = v_0 + \int_0^x \theta(\xi)\,d\xi. \tag{2.1.11}$$

Τη συγκεκριμένη αυτή λύση την αποκαλούμε επίσης και λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (2.1.6) και (2.1.9), δηλαδή του προβλήματος

$$v'(x) = \theta(x), \qquad v(0) = v_0. \tag{2.1.12}$$

Το πρόβλημα αυτό αποτελείται από μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (την εξίσωση (2.1.6)) και μία αρχική συνθήκη (τη συνθήκη (2.1.9)). Φυσικά, αν η διαφορική εξίσωση ήταν δευτέρας τάξεως, θα χρειαζόμασταν δύο αρχικές συνθήκες, αν ήταν τρίτης, τρεις συνθήκες, κλπ.

Ξεκινήσαμε από την πάρα πολύ απλή διαφορική εξίσωση (2.1.3) και την αντίστοιχή της προσεγγιστική διαφορική εξίσωση (2.1.6), που αφορούν σε γεωμετρικά μεγέθη κατά μήκος της δοκού: στο βέλος κάμψεως $v(x)$ και στην αντίστοιχη γωνία στροφής (ή γωνία κλίσεως ή απλά στροφή) $\theta(x)$. Πιστεύουμε ότι τα μεγέθη αυτά είναι κατανοητά σαν έννοιες από τη γεωμετρία ακόμη και στον πρωτοετή φοιτητή/στην πρωτοετή φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό.

Λίγο δυσκολότερη έννοια, γεωμετρική και αυτή πάντως, είναι η καμπυλότητα $\kappa = \kappa(x)$ μιας καμπύλης (εδώ της ελαστικής γραμμής της δοκού). Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι ότι η καμπυλότητα $\kappa = \kappa(x)$ μιας καμπύλης $y = y(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$\kappa(x) = \frac{y''(x)}{\left[1 + y'^{\,2}(x)\right]^{3/2}} \equiv \frac{y''(x)}{\left[\sqrt{1 + y'^{\,2}(x)}\,\right]^3} \tag{2.1.13}$$

με τη χρήση και του συμβόλου της τετραγωνικής ρίζας.

Για την παρούσα συνήθη δοκό, απλά γράφοντας $v$ αντί $y$, επαναλαμβάνουμε τον πιο πάνω τύπο στη μορφή

$$\kappa(x) = \frac{v''(x)}{\left[1 + v'^{\,2}(x)\right]^{3/2}} \equiv \frac{v''(x)}{\left[\sqrt{1 + v'^{\,2}(x)}\,\right]^3}. \tag{2.1.14}$$

Ο τύπος αυτός μας δίνει την καμπυλότητα $\kappa(x)$ της παραμορφωμένης (λόγω της κάμψεώς της) δοκού σε κάθε σημείο της $x$ με $0 \le x \le L$ (με $L$, επαναλαμβάνεται, το μήκος της δοκού). Από την αντίστροφη άποψη, που προς το παρόν ίσως συναντά την αδιαφορία (ή ακόμη και τη δυσαρέσκεια) του πρωτοετούς φοιτητή και της πρωτοετούς φοιτήτριας Πολιτικού Μηχανικού (και τούτο είναι κατανοητό), ο ίδιος τύπος (2.1.14) μπορεί να αποτελεί μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Στην εξίσωση αυτή άγνωστη συνάρτηση είναι η $v(x)$ (εξαρτημένη μεταβλητή η $v$) και ανεξάρτητη μεταβλητή η $x$. Κάτι τέτοιο ισχύει, όταν είναι γνωστή η καμπυλότητα $\kappa(x)$ και άγνωστο το βέλος κάμψεως $v(x)$, δηλαδή είναι άγνωστη η ελαστική γραμμή της δοκού. Δε φτάνει που είναι δευτέρας τάξεως διαφορική εξίσωση η εξίσωση (2.1.14), είναι επιπλέον και μη γραμμική λόγω του μη γραμμικού όρου $v'^{\,2}(x)$ στη ρίζα του παρονομαστή. Ας σημειωθεί βέβαια παρενθετικά ότι με την εξής αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής: $z = v'$ (οπότε και $z' = v''$) η τάξη της διαφορικής εξισώσεως (2.1.14) μειώνεται αμέσως από δεύτερη σε πρώτη, γιατί τώρα

$$\kappa(x) = \frac{z'(x)}{\left[1 + z^2(x)\right]^{3/2}} \equiv \frac{z'(x)}{\left[\sqrt{1 + z^2(x)}\,\right]^3}. \tag{2.1.15}$$

Όμως στις συνήθεις δοκούς, όπως ήδη αναφέρθηκε, η κλίση τους $v'(x)$ μετά την καμπτική παραμόρφωσή τους (οπότε παίρνουν το σχήμα της ελαστικής γραμμής τους στη συγκεκριμένη κάμψη τους) είναι πολύ μικρή, ας πούμε $|v'(x)| < 1/10$. Τότε το τετράγωνό της είναι πολύ–πολύ μικρότερο, συγκεκριμένα $v'^{\,2}(x) < 1/100$ για $|v'(x)| < 1/10$. Επομένως, συγκρινόμενο με τη μονάδα στην τετραγωνική ρίζα του παρονομαστή στη σχέση (2.1.14), απλά μπορεί να αγνοηθεί και πραγματικά πάντοτε αγνοείται από τον Πολιτικό Μηχανικό. Με τον τρόπο αυτό η μη γραμμική διαφορική εξίσωση (2.1.14) προσεγγίζεται από την αντίστοιχη και τόσο απλή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\kappa(x) = v''(x) \quad \Longleftrightarrow \quad v''(x) = \kappa(x). \tag{2.1.16}$$

Η διαδικασία αυτή της προσεγγιστικής αντικαταστάσεως μιας μη γραμμικής διαφορικής εξισώσεως από γραμμική ονομάζεται ***γραμμικοποίηση*** της διαφορικής εξισώσεως. Η γραμμικοποίηση είναι υπολογιστικά πολύ ωφέλιμη, επειδή οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις συνήθως λύνονται πολύ πιο εύκολα από τις μη γραμμικές. Αντίθετα οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις συνήθως δε μπορούν να επιλυθούν με κλειστό τύπο, αλλά και αριθμητικά είναι πολύ πιο δύσκολες στην επίλυσή τους από τις γραμμικές. Τονίζεται επίσης ότι, όπως ήδη διευκρινίσθηκε, το σφάλμα στην παραπάνω προσέγγιση (2.1.16) είναι κυριολεκτικά ελάχιστο για αρχικά ευθύγραμμες δοκούς υπό συνηθισμένη ελαστική καμπτική καταπόνηση. Άρα η γραμμικοποίηση δεν εισάγει καθόλου σημαντικό σφάλμα στις συνήθεις (και αρχικά ευθύγραμμες) δοκούς που συναντά ο Πολιτικός Μηχανικός. Πρέπει επομένως αυτός να θεωρεί τον εαυτό του πολύ τυχερό απ' αυτής της απόψεως.

Αυτή είναι η εξίσωση την οποία θα χρησιμοποιούμε από δω και πέρα: η γραμμική διαφορική εξίσωση (2.1.16), η οποία προέκυψε από τη γραμμικοποίηση της μη γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (2.1.14). Αν και η εξίσωση (2.1.16) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως, εντούτοις καμία υπολογιστική δυσκολία δεν παρουσιάζει. Απλά απαιτούνται για την εύρεση της γενικής λύσεώς της $v(x)$ δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις, κατά τις οποίες παρουσιάζονται προφανώς και δύο σταθερές ολοκληρώσεως $C_1$ και $C_2$. Πιο συγκεκριμένα η πρώτη ολοκλήρωση της διαφορικής εξισώσεως (2.1.16) οδηγεί στη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$v'(x) = \int_0^x \kappa(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C_1 \tag{2.1.17}$$

με τη χρήση και της βοηθητικής μεταβλητής, μεταβλητής ολοκληρώσεως $\xi$. Στη συνέχεια η δεύτερη ολοκλήρωση οδηγεί στη γενική λύση

$$v(x) = \int_0^x \left[\int_0^\eta \kappa(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\eta + C_1 x + C_2 \tag{2.1.18}$$

με τη χρήση και δεύτερης βοηθητικής μεταβλητής, μεταβλητής ολοκληρώσεως $\eta$ στη δεύτερη ολοκλήρωση στο διαδοχικό ολοκλήρωμα αυτής της γενικής λύσεως (2.1.18).

Ο προσδιορισμός των δύο σταθερών $C_1$ και $C_2$ μπορεί εύκολα να γίνει με τη χρήση δύο συνθηκών, π.χ. των αρχικών συνθηκών

$$v(0) = v_0, \qquad v'(0) = \theta_0 \tag{2.1.19}$$

(βέλος κάμψεως και γωνία στροφής αντίστοιχα) στο αριστερό άκρο $x = 0$ της δοκού που εξετάζουμε υπό την παραδοχή (2.1.6) ($v'(x) = \theta(x)$) που ήδη έγινε. Επομένως, εξαιτίας της δεύτερης αρχικής συνθήκης (2.1.19), η ενδιάμεση σχέση (2.1.17) παίρνει την εξής μορφή στο άκρο $x = 0$:

$$v'(0) = \theta_0 = 0 + C_1 = C_1 \implies C_1 = \theta_0 \implies v'(x) = \int_0^x \kappa(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \theta_0. \tag{2.1.20}$$

Στη συνέχεια, εξαιτίας και της πρώτης αρχικής συνθήκης (2.1.19), η γενική λύση (2.1.18) μας δίνει στο άκρο $x = 0$

$$v(0) = v_0 = 0 + 0 + C_2 = C_2 \implies C_2 = v_0 \implies v(x) = \int_0^x \left[\int_0^\eta \kappa(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\eta + \theta_0 x + v_0, \tag{2.1.21}$$

όπου πήραμε το θάρρος να χρησιμοποιήσουμε και την ήδη ευρεθείσα τιμή $C_1 = \theta_0$ της σταθεράς $C_1$. Επομένως η μερική λύση (ή ειδική λύση) της διαφορικής εξισώσεως (2.1.16) που αντιστοιχεί στις δύο αρχικές συνθήκες (2.1.19) ή, με άλλες λέξεις, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$v''(x) = \kappa(x), \qquad v(0) = v_0, \qquad v'(0) = \theta_0 \tag{2.1.22}$$

είναι η εξής:

$$v(x) = v_0 + \theta_0 x + \int_0^x \left[ \int_0^\eta \kappa(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right] \mathrm{d}\eta. \tag{2.1.23}$$

Στη λύση αυτή πήραμε την πρωτοβουλία να αλλάξουμε και τη σειρά των προσθετέων στο δεξιό μέλος, ώστε να ταιριάζει με τη μορφή που θα ήθελε να έχει μπροστά του ο Πολιτικός Μηχανικός.

Ας σημειωθεί τέλος ότι η λύση αυτή (2.1.23) επαληθεύει την αρχική συνθήκη $v(0) = v_0$, όπως προκύπτει αμέσως θέτοντας σ' αυτήν $x = 0$. Παραγωγίζοντας την ίδια λύση μία φορά ως προς $x$ (μη λησμονώντας βέβαια τα της παραγωγίσεως ενός ολοκληρώματος με μεταβλητό το άνω όριο ολοκληρώσεως, εδώ το $x$), οδηγούμαστε στην παράγωγο

$$v'(x) = \theta_0 + \int_0^x \kappa(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{2.1.24}$$

που ήδη είχαμε στη σχέση (2.1.20). Από την παράγωγο αυτή διαπιστώνουμε άμεσα (θέτοντας και πάλι $x = 0$) την ισχύ και της δεύτερης αρχικής συνθήκης $v'(0) = \theta_0$. Και μία ακόμη παραγώγιση, αυτήν τη φορά της σχέσεως (2.1.24), μας οδηγεί στην τελική σχέση

$$v''(x) = \kappa(x), \tag{2.1.25}$$

δηλαδή στην ίδια τη διαφορική μας εξίσωση (2.1.16) (την πρώτη από τις εξισώσεις (2.1.22)).

Επαληθεύθηκε επομένως η λύση (2.1.23) του προβλήματος αρχικών τιμών (2.1.22) και ως προς τη διαφορική εξίσωση και ως προς τις δύο αρχικές συνθήκες. Η επαλήθευση αυτή που κάναμε ήταν αρκετά απλή ίσως με εξαίρεση την παραγώγιση του ολοκληρώματος. Εντούτοις ο Πολιτικός Μηχανικός έχοντας να επιτελέσει τόσο υπεύθυνο τεχνικό έργο πρέπει πάντοτε να επαληθεύει τις λύσεις που βρίσκει στα τεχνικά προβλήματα που αντιμετωπίζει. Η επαλήθευση αυτή μπορεί να είναι είτε άμεση, όπως έγινε εδώ, είτε με τη χρήση μιας εντελώς διαφορετικής μεθόδου επιλύσεως, που πρέπει όμως να οδηγεί ουσιαστικά στα ίδια αποτελέσματα. Η χρήση διαφορετικής μεθόδου μπορεί να αφορά, π.χ. στην επίλυση μιας γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (όπως η παρούσα) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, στην οποία όμως δεν έχουμε ακόμη αναφερθεί. Υπάρχει επίσης η δυνατότητα επιλογής και μιας άλλης εντελώς διαφορετικής μαθηματικής μοντελοποιήσεως του τεχνικού προβλήματος, π.χ. με ολοκληρωτική εξίσωση[4] αντί για διαφορική στο παρόν πρόβλημα αρχικών τιμών. Ανάλογα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων για την επαλήθευση αποτελεσμάτων που βρέθηκαν με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (ή το αντίστροφο), π.χ. σ' ένα δίσκο (επίπεδο μέσον χωρίς κάθετη φόρτιση), σε μια πλάκα (αυτή και με κάθετη φόρτιση) ή σ' ένα κέλυφος σε μια κατασκευή, κλπ.

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να κάνουμε και τις εξής τρεις παρατηρήσεις:

(α) Εννοείται ότι σε όλες τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις και τις λύσεις τους η μεταβλητή $x$ μεταβάλλεται μόνο κατά μήκος της δοκού στο διάστημα $0 \le x \le L$. Εάν έχουμε κάποια παράγωγο στα άκρα της δοκού $x = 0$ και $x = L$, πρέπει να την ερμηνεύσουμε σαν μονόπλευρη (όχι δίπλευρη όπως συνήθως) παράγωγο, δηλαδή παράγωγο από τα δεξιά στο αριστερό άκρο της δοκού $x = 0$ και παράγωγο από τα αριστερά στο δεξιό άκρο της δοκού $x = L$. Η δοκός μας είναι πεπερασμένη ($0 \le x \le L$): δεν έχει επομένως κανένα νόημα να χρησιμοποιούμε σημεία $x$ (ή $\xi$ ή $\eta$) εκτός αυτής.

(β) Παρατηρούμε επίσης ότι το διαδοχικό ολοκλήρωμα στη λύση (2.1.23) μπορεί αρκετά εύκολα να μετατραπεί σε απλό ολοκλήρωμα με τη χρήση παραγοντικής ολοκληρώσεως.

(γ) Ας σημειώσουμε τέλος ότι πέρα από τις δύο διαφορικές εξισώσεις (2.1.6) (την εξίσωση $v'(x) = \theta(x)$) και (2.1.16) (την εξίσωση $v''(x) = \kappa(x)$), ισχύει και η εξίσου απλή διαφορική εξίσωση

$$\theta'(x) = \kappa(x). \tag{2.1.26}$$

[4] Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις αποτελούν μέρος της ύλης του μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ. Η μελέτη τους και εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού περιλαμβάνονται στο Μέρος Γ των διδακτικών αυτών βιβλίων.

Η διαφορική αυτή εξίσωση προκύπτει άμεσα παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.1.6) και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα $v''(x) = \theta'(x)$ στην εξίσωση (2.1.16). Εννοείται ότι είναι και αυτή προσεγγιστική διαφορική εξίσωση, που όμως ισχύει αρκετά καλά σε προβλήματα συνήθων δοκών. Θα ήταν όμως λάθος να ισχυρισθούμε ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στον Πολιτικό Μηχανικό από πρακτικής απόψεως: δεν είναι! Εδώ την αναφέραμε απλά για λόγους πληρότητας της παραγράφου αυτής ως προς τα τρία γεωμετρικά μεγέθη: $v(x)$ (βέλος κάμψεως), $\theta(x)$ (γωνία στροφής ή γωνία κλίσεως ή στροφή) και $\kappa(x)$ (καμπυλότητα) κατά μήκος της καμφθείσας συνήθους δοκού που εξετάζουμε.

### Α2.1.4. Οι στατικές διαφορικές εξισώσεις

Θα προχωρήσουμε τώρα στη χρήση και των τριών στατικών, μηχανικών μεγεθών κατά μήκος της δοκού: της καμπτικής ροπής (ή ροπής κάμψεως) $M(x)$ (συχνά σε kN m), της τέμνουσας δύναμης $Q(x)$ (συχνά σε kN) και της κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως $p(x)$ (συχνά σε kN/m) κατά μήκος της δοκού. Οι σχετικές βασικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι γνωστές από το μάθημα της Τεχνικής Μηχανικής–Στατικής του 1ου Εξαμήνου Σπουδών. Οι εξισώσεις αυτές προέρχονται από τη στατική ισορροπία στοιχειώδους, απειροστού τμήματος d$x$ της δοκού. Πρόκειται για την εξίσωση

$$M'(x) = Q(x), \tag{2.1.27}$$

που εκφράζει την ισορροπία των καμπτικών ροπών (ροπών κάμψεως) στο στοιχείο μήκους d$x$ της δοκού, καθώς και την εξίσωση

$$Q'(x) = p(x), \tag{2.1.28}$$

που δηλώνει την ισορροπία των κάθετων δυνάμεων: της κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως $p(x)$ και των τεμνουσών δυνάμεων $Q(x)$ (ή $V(x)$) στο ίδιο στοιχειώδες μήκος d$x$ της δοκού. (Υποτίθεται βέβαια ότι δεν υπάρχει αξονική φόρτιση $N$ της δοκού ούτε εφελκυστική, αλλ' ούτε και θλιπτική.)

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές διαφορικές εξισώσεις (2.1.27) και (2.1.28), δηλαδή παραγωγίζοντας την πρώτη (ως προς τη θέση $x$ φυσικά, $0 \le x \le L$) και αντικαθιστώντας την τέμνουσα δύναμη $Q(x)$ στη δεύτερη, προκύπτει και η εξής τρίτη διαφορική εξίσωση:

$$M''(x) = p(x). \tag{2.1.29}$$

Και στους τρεις αυτούς τύπους (2.1.27), (2.1.28) και (2.1.29) υποθέτουμε βέβαια ότι η συνάρτηση στο αριστερό μέλος είναι η άγνωστη συνάρτηση και η συνάρτηση στο δεξιό μέλος η γνωστή συνάρτηση. Τότε μόνο μπορούμε να μιλάμε για διαφορικές εξισώσεις.

Και οι τρεις πιο πάνω διαφορικές εξισώσεις (2.1.27), (2.1.28) και (2.1.29) είναι απλές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που άμεσα μπορούν να επιλυθούν με μία κατευθείαν ολοκλήρωση για τις δύο πρώτες: τις (2.1.27) και (2.1.28) και με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις για την τρίτη: τη (2.1.29). Αυτά είναι εντελώς ανάλογα με ό,τι ήδη παρουσιάσθηκε στην προηγούμενη Παράγραφο Α2.1.3 εκεί για τις διαφορικές εξισώσεις (2.1.6), (2.1.26) και (2.1.16), που υπολογιστικά είναι εντελώς ανάλογες με τις (2.1.27), (2.1.28) και (2.1.29) αντίστοιχα.

### Α2.1.5. Οι τελικές διαφορικές εξισώσεις

Στο σημείο αυτό πρέπει βέβαια να σημειωθεί ότι οι τρεις διαφορικές εξισώσεις (2.1.6), (2.1.26) και (2.1.16) αφορούσαν στα γεωμετρικά μεγέθη $v(x)$, $\theta(x)$ και $\kappa(x)$ κατά μήκος της δοκού ($0 \le x \le L$). Αντίθετα οι διαφορικές εξισώσεις (2.1.27), (2.1.28) και (2.1.29) αφορούν στα μηχανικά, στατικά μεγέθη $M(x)$, $Q(x)$ και $p(x)$ κατά μήκος της ίδιας δοκού. Απομένει η σύνδεση, ο συνδετικός κρίκος μεταξύ γεωμετρικών και στατικών μεγεθών, η οποία είναι εφικτή με το θεμελιώδη τύπο

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI} \quad \Longleftrightarrow \quad M(x) = EI\,\kappa(x). \tag{2.1.30}$$

Θα ήταν ανειλικρινής ο διδάσκων, εάν ισχυριζόταν ότι ο τύπος αυτός είναι γνωστός από την Τεχνική Μηχανική–Στατική: δεν είναι! Είναι τύπος της Μηχανικής των Υλικών στο 4ο Εξάμηνο Σπουδών, αλλ' είναι τόσο απλός, ιδίως αν παραλειφθεί η μεταβλητή $x$, δηλαδή αν γράψουμε

$$\kappa = \frac{M}{EI} \qquad \Longleftrightarrow \qquad M = EI\kappa. \tag{2.1.31}$$

Πρόκειται για ένα στοιχειώδη γραμμικό τύπο (και χωρίς παραγώγους βέβαια), που μας λέει πως η καμπτική ροπή (ροπή κάμψεως) $M$ είναι ανάλογη της καμπυλότητας $\kappa$ της ελαστικής γραμμής της συνήθους δοκού που εξετάζουμε. Ο συντελεστής αναλογίας $EI$ είναι η καλούμενη δυσκαμψία (και όχι ακαμψία[5]) της ελαστικά παραμορφούμενης παρούσας συνήθους δοκού υπό συνθήκες κάμψεως. Στη Μηχανική των Υλικών αποδεικνύεται ότι η δυσκαμψία $EI$ της παρούσας συνήθους δοκού είναι το γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας $E$ (που μετριέται σε $\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$ ή σε πολλαπλάσιά του, π.χ. σε kPa) του ομογενούς, ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της επί τη ροπή αδρανείας $I$ (που μετριέται σε $\mathrm{m^4}$) της διατομής της ως προς τον ουδέτερο άξονά της κατά την κάμψη. Στις συνήθεις δοκούς η δυσκαμψία $EI$ υποτίθεται σταθερή κατά μήκος της δοκού.

Ας σημειωθεί επίσης ότι ο πιο πάνω θεμελιώδης τύπος (2.1.30) (ή (2.1.31)) προκύπτει στη Μηχανική των Υλικών υπό ορισμένες απλοποιητικές παραδοχές για τη δοκό και την καμπτική καταπόνησή της. Αυτές όμως γίνονται γενικά δεκτές στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως συνήθων δοκών από τον Πολιτικό Μηχανικό. Πολύ ακριβέστεροι τύποι προκύπτουν στην αντιμετώπιση δοκών στη Μηχανική των Υλικών μέσω της Μαθηματικής Θεωρίας της Ελαστικότητας αντί της πολύ απλούστερης Τεχνικής Θεωρίας της Κάμψεως. Δεν υπάρχει όμως λόγος στο παρόν μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙ να υπεισέλθουμε σε σχετικές λεπτομέρειες. Δε μας αφορούν!

Εν πάση περιπτώσει, χρησιμοποιώντας το γραμμικό τύπο (2.1.30) (ισοδύναμα (2.1.31)), που συνδέει την καμπυλότητα $\kappa(x)$ με την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M(x)$, μπορούμε πλέον πολύ εύκολα να κατασκευάσουμε και διαφορικές εξισώσεις που συνδέουν γεωμετρικά και στατικά μεγέθη. Η πιο σημαντική από αυτές προκύπτει, μόλις θέσουμε $\kappa(x) = M(x)/(EI)$ (τύπος (2.1.30)) στη διαφορική εξίσωση (2.1.16) ($v''(x) = \kappa(x)$) και έχει τη μορφή

$$v''(x) = \frac{M(x)}{EI}\,. \tag{2.1.32}$$

Πρόκειται για τη διαφορική εξίσωση που συνδέει το βέλος κάμψεως $v(x)$ με την καμπτική ροπή $M(x)$ και είναι πραγματικά μια πολύ σημαντική διαφορική εξίσωση. Παραγωγίζοντάς την (ως προς $x$ εννοείται) και λαμβάνοντας υπόψη τη βασική σχέση (2.1.27) ($M'(x) = Q(x)$) μεταξύ καμπτικής ροπής $M(x)$ και τέμνουσας δύναμης $Q(x)$, βρίσκουμε αμέσως ότι

$$v'''(x) = \frac{Q(x)}{EI}\,. \tag{2.1.33}$$

Με ακόμη μία παραγώγιση ως προς $x$ και παίρνοντας υπόψη και τη σχέση (2.1.28) ($Q'(x) = p(x)$), που συνδέει την τέμνουσα δύναμη $Q(x)$ με την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$, οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση

$$EIv''''(x) = p(x), \quad \text{ισοδύναμα} \quad v''''(x) = \frac{p(x)}{EI}\,. \tag{2.1.34}$$

[5] Οι λέξεις άκαμπτος και ακαμψία αναφέρονται σε ένα απόλυτα στερεό σώμα, που δε μπορεί να καμφθεί καθόλου, είναι απαραμόρφωτο. Αντίθετα, οι λέξεις δύσκαμπτος και δυσκαμψία αναφέρονται σε ένα παραμορφώσιμο στερεό σώμα, όπως η παρούσα συνήθης δόκος, που δεν είναι απόλυτα στερεό και μπορεί επομένως να καμφθεί, παρόλο βέβαια που παρουσιάζει μικρή ή μεγάλη αντίσταση στην κάμψη εξαιτίας της δυσκαμψίας του. Εδώ στην περίπτωση ενός απλού γραμμικού φορέα: της συνήθους δοκού, το μέτρο δυσκαμψίας της δοκού ισούται με το γινόμενο $EI$, που για απλότητα καλείται και αυτό δυσκαμψία (αντί μέτρο δυσκαμψίας). Χρησιμοποιείται δηλαδή ο ίδιος όρος: δυσκαμψία τόσο για την ιδιότητα της δυσκαμψίας όσο και το μέτρο της ιδιότητας αυτής, εδώ, στη δοκό, το γινόμενο $EI$. Ανάλογα και σε επιφανειακούς φορείς του Πολιτικού Μηχανικού: πλάκες και κελύφη, που παρουσιάζουν και αυτοί δυσκαμψία (με εντελώς διαφορετικά μέτρα δυσκαμψίας φυσικά!), κλπ. Ας σημειωθεί τέλος ότι στην περίπτωσή μας η κάμψη της δοκού είναι αυτή που δημιουργεί την ελαστική γραμμή της $v(x)$, δηλαδή το σχήμα της, τη μορφή της μετά την παραμόρφωση.

Φυσικά οι παράγωγοι σε όλες αυτές τις διαφορικές εξισώσεις μπορούν κάλλιστα να γραφούν και με το πιο επίσημο σύμβολο d για τη συνήθη παραγώγιση, δηλαδή

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI}, \qquad \frac{\mathrm{d}^3 v(x)}{\mathrm{d}x^3} = \frac{Q(x)}{EI}, \qquad \frac{\mathrm{d}^4 v(x)}{\mathrm{d}x^4} = \frac{p(x)}{EI}. \tag{2.1.35}$$

Εάν παραλείψουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή $x$ (που δηλώνει τη θέση κατά μήκος της δοκού: $0 \le x \le L$) στις μεταβλητές των συναρτήσεων $v = v(x)$, $M = M(x)$, $Q = Q(x)$ και $p = p(x)$, οι ίδιες διαφορικές εξισώσεις παίρνουν τις κάπως απλούστερες (αλλ' απόλυτα ισοδύναμες) μορφές τους

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI}, \qquad \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = \frac{Q}{EI}, \qquad \frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = \frac{p}{EI}. \tag{2.1.36}$$

Αυτό το κάνουμε με την ελπίδα ότι δε θα υπάρξει κάποια παρερμηνεία, π.χ. η παρερμηνεία πως η κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p = p(x)$ είναι απλά μια σταθερά στην τρίτη από τις διαφορικές αυτές εξισώσεις.

Διαθέτουμε λοιπόν τρεις διαφορικές εξισώσεις για τον προσδιορισμό του βέλους κάμψεως $v(x)$ σε συνήθη δοκό υπό κάμψη. Ποια θα πρέπει να προτιμήσει ο Πολιτικός Μηχανικός; Η γνώμη του γράφοντα είναι η εξής: εκείνη τη διαφορική εξίσωση της οποίας ξέρει το δεξιό μέλος, δηλαδή: (α) Εάν αρχικά γνωρίζει την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M(x)$ κατά μήκος της δοκού, την πρώτη διαφορική εξίσωση (2.1.32), (β) Εάν αρχικά γνωρίζει την τέμνουσα δύναμη $Q(x)$, τη δεύτερη διαφορική εξίσωση (2.1.33), και (γ) Εάν αρχικά γνωρίζει την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$, την τρίτη διαφορική εξίσωση (2.1.34). Αυτή είναι η γνώμη του γράφοντα και πολλών άλλων.

Υπάρχει ασφαλώς (και είναι και αρκετά δημοφιλής μάλιστα) και η αντίθετη γνώμη, που παροτρύνει τον Πολιτικό Μηχανικό να χρησιμοποιεί πάντοτε την πρώτη από τις τρεις αυτές διαφορικές εξισώσεις, την εξίσωση (2.1.32), γιατί είναι μόλις δευτέρας τάξεως (έναντι τρίτης και τετάρτης των επόμενων δύο αντίστοιχα). Η δεύτερη αυτή δυνατότητα απαιτεί βέβαια τον προσδιορισμό της καμπτικής ροπής $M(x)$ από την τέμνουσα δύναμη $Q(x)$ (αν είναι γνωστή) με ολοκλήρωση (αναλυτικά ή και γραφικά). Αν είναι η κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$ η αρχικά γνωστή συνάρτηση, απαιτούνται δύο ολοκληρώσεις για τον προσδιορισμό της καμπτικής ροπής $M(x)$ πριν από την πραγματική χρήση της πρώτης διαφορικής εξισώσεως (2.1.32): αυτής με την καμπτική ροπή $M(x)$ στο δεξιό μέλος της. Αυτονόητο είναι βέβαια ότι η πρώτη διαφορική εξίσωση από τις (2.1.35) ή (2.1.36) (η διαφορική εξίσωση (2.1.32)) για τον προσδιορισμό του βέλους κάμψεως (της ελαστικής γραμμής) $v(x)$ απαιτεί τη χρήση δύο συνθηκών (επειδή είναι δευτέρας τάξεως), η δεύτερη τριών συνθηκών (επειδή είναι τρίτης τάξεως) και η τρίτη τεσσάρων συνθηκών, επειδή είναι τετάρτης τάξεως. Οι συνθήκες αυτές είναι απόλυτα αναγκαίες, ώστε να έχουμε τελικά τη ζητούμενη μερική λύση (ή ειδική λύση) στο συγκεκριμένο πρόβλημα συνήθους δοκού που εξετάζουμε, και θα αναφερθούμε εκτενώς σ' αυτές αμέσως πιο κάτω.

Ας σημειωθεί επίσης ότι σε όλες τις πιο πάνω διαφορικές εξισώσεις οι θετικές φορές θεωρήθηκαν προς τα επάνω (δηλαδή χρησιμοποιήθηκε συνηθισμένο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Oxy$). Πάρα πολλές φορές όμως σε δοκούς (αλλά και σε πλάκες) ο Πολιτικός Μηχανικός θεωρεί τον άξονα $Oy$ προς τα κάτω (σε πλάκες τον άξονα $Oz$). Έτσι έχει πιο συχνά θετικά βέλη κάμψεως και επίσης η κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$ έχει θετικό πρόσημο, όταν κατευθύνεται προς τα κάτω, όπως και πραγματικά συνήθως συμβαίνει στην πράξη του Πολιτικού Μηχανικού. Ας γίνει κατανοητό ότι σ' αυτές τις περιπτώσεις ορισμένα πρόσημα στις προηγούμενες διαφορικές εξισώσεις αλλάζουν, γίνονται πλην $(-)$ αντί συν $(+)$. Εδώ τα πράγματα είναι πιο απλά από της μαθηματικής σκοπιάς (δυστυχώς όμως όχι και από της καθαρά τεχνικής σκοπιάς του Πολιτικού Μηχανικού): συνεχώς πρόσημο συν $(+)$ και συνηθισμένο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxy$, όπως το ξέρουμε στα Μαθηματικά. Αυτό προτιμήθηκε και ίσως να είναι καλύτερα έτσι!

### Α2.1.6. Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού

Σχεδόν πάντοτε (και στη Στατική πάντοτε) μια συνήθης δοκός είναι στερεωμένη, ώστε να μη μπορεί να κινηθεί. Εδώ περιοριζόμαστε στην πολύ απλή περίπτωση στηρίξεως της δοκού μόνο στα άκρα της ή με πάκτωση στο ένα άκρο της και με ελεύθερο το άλλο άκρο της. Στην περίπτωση αυτή αναφερθήκαμε ήδη προηγουμένως στην πρώτη Παράγραφο Α2.1.1 τούτης της ενότητας.

Έχουμε επομένως τρεις περιπτώσεις άκρων δοκού (θεωρώντας ενδιάμεσα τη δοκό απόλυτα ελεύθερη), είτε αριστερών είτε δεξιών άκρων στη δοκό, και τις σχετικές συνθήκες, που καλούνται ***συνοριακές συνθήκες***, εφόσον αφορούν και στα δύο άκρα (στα «όρια», στα «σύνορα») της δοκού.

1. Άκρο $x = a$ με πάκτωση (πακτωμένο άκρο), οπότε

$$v(a) = 0 \quad \text{και} \quad \theta(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v(a) = 0 \quad \text{και} \quad v'(a) = 0 \tag{2.1.37}$$

εξαιτίας του τύπου (2.1.6): $\theta(x) = v'(x)$.

2. Άκρο $x = a$ με άρθρωση (αρθρωμένο άκρο) ή με κύλιση (κυλιόμενο άκρο), οπότε

$$v(a) = 0 \quad \text{και} \quad M(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v(a) = 0 \quad \text{και} \quad v''(a) = 0 \tag{2.1.38}$$

εξαιτίας του τύπου (2.1.32): $M(x) = EIv''(x)$ με $EI$ τη δυσκαμψία της δοκού. Ας σημειωθεί εδώ ότι η άρθρωση και η κύλιση είναι ισοδύναμες από απόψεως συνοριακών συνθηκών σε δοκό που κάμπτεται, αλλά χωρίς αξονική φόρτιση.

3. Ελεύθερο άκρο $x = a$ (άκρο χωρίς καμία στήριξη)

$$M(a) = 0 \quad \text{και} \quad Q(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v''(a) = 0 \quad \text{και} \quad v'''(a) = 0 \tag{2.1.39}$$

εξαιτίας και των δύο τύπων (2.1.32): $M(x) = EIv''(x)$ και (2.1.33): $Q(x) = EIv'''(x)$. Εννοείται βέβαια ότι εάν το ένα άκρο $x = a$ μιας δοκού είναι ελεύθερο, το άλλο άκρο $x = b$ (με $b > a$ ή $b < a$) πρέπει να είναι πακτωμένο για ισοστατική δοκό. Μια τέτοια δοκός (με το ένα άκρο πακτωμένο και το άλλο ελεύθερο) καλείται πρόβολος, όπως ήδη αναφέρθηκε στην πρώτη Παράγραφο Α2.1.1 αυτής εδώ της Ενότητας Α2.1.

Αυτές είναι οι συνθήκες: συνοριακές συνθήκες που πρέπει να συνοδεύουν τη βασική διαφορική εξίσωση (2.1.34): $v''''(x) = p(x)/(EI)$ της κάμψεως συνήθους δοκού κατά την επίλυσή της και στο ένα άκρο της (έστω το $x = 0$) και στο άλλο (έστω το $x = L$). Έχουμε επομένως ένα ***πρόβλημα συνοριακών τιμών*** που αποτελείται από μία διαφορική εξίσωση και τέσσερις συνοριακές συνθήκες, ανά δύο στο κάθε άκρο της δοκού. Είναι απόλυτα σωστό αυτό, γιατί η διαφορική εξίσωση (2.1.34) είναι τετάρτης τάξεως και επομένως η γενική λύση της περιέχει τέσσερις αυθαίρετες σταθερές $C_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Άρα απαιτούνται τέσσερις συνθήκες για την επίλυσή της. Θα μπορούσαν να ήσαν τέσσερις αρχικές συνθήκες στο αριστερό άκρο της δοκού (ανάλογα και στο δεξιό). Στην πράξη όμως ο Πολιτικός Μηχανικός έχει διαθέσιμες σε συνήθεις δοκούς τέσσερις συνοριακές συνθήκες (ανά δύο και στα δύο άκρα της δοκού). Αυτές διαφέρουν μάλιστα ανάλογα με τα είδη των δύο στηρίξεων της δοκού στα άκρα της (ή της ελλείψεως στηρίξεως στο ένα από αυτά σε πρόβολο): (α) πάκτωση: συνθήκες (2.1.37) ή (β) άρθρωση ή κύλιση: συνθήκες (2.1.38) ή, τέλος, (γ) ελεύθερο άκρο (χωρίς καμία στήριξη) σε πρόβολο: συνθήκες (2.1.39).

Παραδείγματος χάρη, θεωρούμε έναν πρόβολο μήκους $L$, με σταθερή δυσκαμψία $EI$ καθ' όλο το μήκος του ($0 \leq x \leq L$), με στήριξη στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και επομένως με ελεύθερο το δεξιό άκρο του $x = L$ και υπό κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$. Τότε η βασική διαφορική εξίσωση της κάμψεως συνήθους δοκού (2.1.34)

$$EIv''''(x) = p(x) \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L \tag{2.1.40}$$

θα συνοδεύεται από τις εξής τέσσερις συνοριακές συνθήκες:

$$v(0) = 0, \qquad v'(0) = 0, \qquad v''(L) = 0, \qquad v'''(L) = 0. \tag{2.1.41}$$

Οι δύο πρώτες από τις συνθήκες αυτές αναφέρονται στο αριστερό άκρο (στο σημείο πακτώσεως) $x = 0$ του προβόλου: είναι οι συνθήκες (2.1.37) και εκφράζουν την ανυπαρξία βέλους κάμψεως $v$ και γωνίας στροφής (ή γωνίας κλίσεως ή στροφής) $\theta$ στο πακτωμένο αυτό άκρο $x = 0$. Στη συνέχεια οι δύο τελευταίες από τις συνθήκες (2.1.41) αναφέρονται στο δεξιό άκρο του προβόλου (στο ελεύθερο άκρο του) $x = L$: είναι οι συνθήκες (2.1.39) και εκφράζουν την ανυπαρξία καμπτικής ροπής $M$ και τέμνουσας δύναμης $Q$ στο ελεύθερο αυτό άκρο $x = L$.

Απαιτούνται πραγματικά τέσσερις συνθήκες είτε αρχικές είτε συνοριακές (εδώ έχουμε διαθέσιμες συνοριακές συνθήκες, όχι αρχικές), επειδή η διαφορική αυτή εξίσωση της κάμψεως (2.1.40) είναι τετάρτης τάξεως. Έχει επομένως τέσσερις προς προσδιορισμό σταθερές $C_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) στη γενική λύση της. Από τη γενική λύση ο Πολιτικός Μηχανικός επιθυμεί να πάρει τη μερική λύση (ή ειδική λύση) που αντιστοιχεί στις πραγματικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της δοκού, εδώ στον παρόντα πρόβολο στις συνοριακές συνθήκες (2.1.41). Με κανέναν τρόπο δεν είναι επιθυμητό στην τελική λύση ενός τεχνικού προβλήματος (εν προκειμένω ενός προβλήματος συνήθους προβόλου σε κάμψη) να είναι ακόμη παρούσες αυθαίρετες σταθερές, έστω και μία.

### *Α2.1.7. Δοκός επί ελαστικής βάσεως*

Σε ορισμένες περιπτώσεις (όπως σε επιφανειακές θεμελιώσεις στις Θεμελιώσεις και σε σιδηροτροχιές στη Σιδηροδρομική) μια συνήθης δοκός μήκους $L$ ($0 \le x \le L$) υποστηρίζεται από ελαστική βάση (ή θεμελίωση, ισοδύναμα θεμέλιο, όπως είναι το έδαφος σε μια επιφανειακή θεμελίωση). Στις περιπτώσεις αυτές μιλάμε για ***δοκό επί ελαστικής βάσεως (beam on elastic foundation)***, που παρουσιάζει και αυτή αρκετό ενδιαφέρον στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Ειδικότερα στις Θεμελιώσεις μιλάμε για ***πεδιλοδοκό*** (ή σπάνια για ***θεμελιοδοκό***, που είναι ισοδύναμος όρος).

Η θεωρία για τη δοκό επί ελαστικής βάσεως βασίζεται και σήμερα συνήθως στην κλασική ***υπόθεση του Winkler*** (1867). Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή σε μια δοκό επί ελαστικής βάσεως η αντίδραση της βάσεως (συνήθως του εδάφους) σε κάθε σημείο $x$ της ελαστικής γραμμής της παραμορφωθείσας δοκού (λόγω της κάμψεώς της εξαιτίας της κάθετης φορτίσεώς της $p(x)$) είναι ανάλογη του βέλους κάμψεως $v(x)$ στο σημείο αυτό. Επομένως στην παρούσα περίπτωση δοκού η θεμελιώδης διαφορική εξίσωση της κάμψεως συνήθους δοκού (2.1.34) τροποποιείται στη μορφή

$$v''''(x) = \frac{p(x) - kv(x)}{EI} \quad \Longleftrightarrow \quad EIv''''(x) + kv(x) = p(x) \quad \text{με} \quad 0 \le x \le L. \tag{2.1.42}$$

Ο νέος όρος στη διαφορική αυτή εξίσωση (που παραμένει γραμμική και τετάρτης τάξεως) είναι ο όρος $kv(x)$ της αντιδράσεως της ελαστικής βάσεως (συνήθως του εδάφους). Είναι και αυτή μια κατανεμημένη κάθετη φόρτιση πάνω στη δοκό (στην κάτω πλευρά της φυσικά) όπως και η κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$ (στην πάνω πλευρά της). Η σταθερά αναλογίας $k$ είναι σταθερά του εδάφους, που εξαρτάται από τις ιδιότητές του. Είναι επίσης ανάλογη προς το πάχος $b$ της δοκού.

Η υπόθεση του Winkler είναι μια απλή υπόθεση που μοντελοποιεί την ελαστική βάση σαν ένα συνεχές σύνολο ελατηρίων, κάτι που δεν είναι βέβαια απόλυτα ακριβές σύμφωνα με τη Θεωρία της Ελαστικότητας. Είναι εντούτοις επαρκώς ακριβές για τον Πολιτικό Μηχανικό.[6] Επομένως η διαφορική εξίσωση (2.1.42) είναι αυτή που χρησιμοποιείται σχεδόν πάντοτε στην πράξη. Μερικές φορές βέβαια είναι δυνατόν η δοκός να μην εφάπτεται σε ορισμένα τμήματά της επί της ελαστικής βάσεως εξαιτίας της φορτίσεώς της $p(x)$ (ίσως κάπου προς τα επάνω, όχι προς την ελαστική

[6] Με τον τρόπο αυτό το έδαφος δε θεωρείται συνεχές μέσον *(ενώ είναι!)*, αλλ' απλά ένα σύνολο (σύστημα) κατακόρυφων ελατηρίων παράλληλων το ένα στο άλλο που δεν αλληλοεπηρεάζονται. Εντούτοις η προσέγγιση αυτή του Winkler (η υπόθεση του Winkler, όπως συνήθως λέγεται) δίνει αρκετά καλά αποτελέσματα στην πράξη και σπάνια απαιτείται η χρήση των ακριβών εξισώσεων της Θεωρίας της Ελαστικότητας σε προβλήματα δοκών επί ελαστικής βάσεως.