ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ Νο 9

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Επίλυση Π.Α.Τ.): Με χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace, να λυθούν τα κάτωθι προβλήματα αρχικών τιμών (όπου $y = y(t)$):

(i) $y''+11y'+24y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$ Απ. $y(t)=\frac{3}{5}e^{-8t}-\frac{8}{5}e^{-3t}$

(ii) $16y''+8y'+65y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$ Απ. $y(t)=e^{-t/4}\sin(2t)$

(iii) $y'''-4y''-9y'+36y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-1$

Απ. $y(t)=-\frac{10}{7}e^{4t}+\frac{13}{6}e^{3t}+\frac{11}{42}e^{-3t}$

(iv) $y''-y'-2y=e^{-t}$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$ Απ. $y(t)=\frac{8}{9}e^{-t}+\frac{10}{9}e^{2t}-\frac{1}{3}te^{-t}$

(v) $y''+5ty'-10y=2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $\lim_{s\to+\infty}Y(s)=0$ Απ. $y(t)=6t^2+1$

(vi) $y''+ty'-2y=4$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $\lim_{s\to+\infty}Y(s)=0$ Απ. $y(t)=2t^2$

(vii) $y''+6y'+8y=f(t)$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$

Απ. $y(t)=-e^{-4t}+2e^{-2t}+\frac{1+e^{4-4t}-2e^{2-2t}}{8}H(t-1)$

(viii) $y''+9y=\cos t+\delta(t-\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

Απ. $y(t)=\frac{\cos t}{8}-\frac{\cos(3t)}{8}-\frac{1}{3}\sin(3t)H(t-\pi)$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Επίλυση Σ.Σ.Δ.Ε.): Με χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace, να λυθούν τα κάτωθι συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (όπου $y = y(t)$, $x = x(t)$, $z = z(t)$):

(i) $\left.\begin{aligned}x'-2x+3y=0\\ y'+9x+4y=0\end{aligned}\right\}$, $x(0)=0,\ y(0)=4$ Απ. $\begin{aligned}x(t)&=e^{-7t}-e^{5t}\\ y(t)&=3e^{-7t}+e^{5t}\end{aligned}$

(ii) $\left.\begin{aligned}x'-x-3y=e^{4t}\\ y'-5x+y=0\end{aligned}\right\}$, $x(0)=0,\ y(0)=0$ Απ. $\begin{aligned}x(t)&=\frac{40te^{4t}+3e^{4t}-3e^{-4t}}{64}\\ y(t)&=\frac{40te^{4t}-5e^{4t}+5e^{-4t}}{64}\end{aligned}$

(iii) $\left.\begin{aligned}x'-5x+4y-2z=0\\ y'+2x+2y+2z=0\\ z'-z=0\end{aligned}\right\}$, $x(0)=0,\ y(0)=0,\ z(0)=15$ Απ. $\begin{aligned}x(t)&=\frac{5e^{-3t}+16e^{6t}-21e^{t}}{2}\\ y(t)&=-3e^{t}+5e^{-3t}-2e^{6t}\\ z(t)&=15e^{t}\end{aligned}$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (*Επίλυση Ο.Ε. τύπου συνελίξεως*): Να επιλυθούν οι κάτωθι ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου συνελίξεως με χρήση του μετασχηματισμού Laplace:

(i) $\int_0^x e^{2(x-t)}\phi(t)dt=\sin x$ Απ. $\phi(x)=\cos x-2\sin x$

(ii) $\phi(x)=x+\int_0^x\phi(t)\sin(x-t)dt$ Απ. $\phi(x)=x+\frac{x^3}{6}$

(iii) $\int_0^x\phi(t)\phi(x-t)dt=\frac{x^3}{6}$ Απ. $\phi(x)=\pm x$

(iv) $\phi(x)=\sin x+2\int_0^x\phi(t)\cos(x-t)dt$ Απ. $\phi(x)=xe^{x}$

(v) $\int_0^x\phi(t)\sinh(x-t)dt=x^3e^{-x}$ Απ. $\phi(x)=6(x-x^2)e^{-x}$