ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ Νο 7

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Συστήματα διαφορικών εξισώσεων-Μέθοδος της απαλοιφής): Με χρήση της μεθόδου της απαλοιφής, να λυθούν τα κάτωθι συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (όπου $y=y(t)$, $x=x(t)$, $z=z(t)$):

(i) $\left.\begin{aligned} x' &= -2x-2y+4 \\ y' &= -5x+y \end{aligned}\right\}$

Απ. $x(t)=\dfrac{1}{3}+c_1e^{3t}+c_2e^{-4t}$, $y(t)=\dfrac{5}{3}-\dfrac{5c_1}{2}e^{3t}+c_2e^{-4t}$

(ii) $\left.\begin{aligned} x'' &= 2y \\ y'' &= -2x \end{aligned}\right\}$

Απ. $x(t)=e^{t}(c_1\sin t+c_2\cos t)+e^{-t}(c_3\sin t+c_4\cos t)$, $y(t)=e^{t}(c_1\cos t-c_2\sin t)+e^{-t}(c_4\sin t-c_3\cos t)$

(iii) $\left.\begin{aligned} x' &= -3x+2y+2z \\ y' &= -2x+3y+2z \\ z' &= x+y \end{aligned}\right\}$

Απ. $x(t)=-c_1+c_2e^{3t}-2c_3e^{-3t}$, $y(t)=c_1+c_2e^{3t}+c_3e^{-3t}$, $z(t)=-\dfrac{5c_1}{2}+c_2e^{3t}+c_3e^{-3t}$

(iv) $\left.\begin{aligned} x' &= x+2y-2z+\cos t \\ y' &= x-y+2z \\ z' &= -x-y \end{aligned}\right\}$

Απ.

$$x(t)=-\frac{3}{10}\cos t-\frac{1}{10}\sin t-2c_1e^{2t}+(3c_3-2c_2)e^{-t}-2c_3te^{-t}$$
$$y(t)=\frac{1}{2}\sin t+(3c_2-4c_3)e^{-t}+3c_3te^{-t}$$
$$z(t)=\frac{2}{5}\cos t+\frac{3}{10}\sin t+c_1e^{2t}+c_2e^{-t}+c_3te^{-t}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Συστήματα διαφορικών εξισώσεων-Επίλυση με χρήση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων): Με χρήση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, να λυθούν τα κάτωθι συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (όπου $y=y(t)$, $x=x(t)$, $z=z(t)$):

(i) $\left.\begin{aligned} x' &= x-10y \\ y' &= -7x+10y \end{aligned}\right\}$

Απ. $x(t)=c_1e^{15t}+2c_2e^{-4t}$, $y(t)=-\dfrac{7c_1}{5}e^{15t}+c_2e^{-4t}$

(ii) $\left.\begin{aligned} x' &= 6x-y \\ y' &= 5x \end{aligned}\right\}$

Απ. $x(t)=c_1e^{t}+c_2e^{5t}$, $y(t)=5c_1e^{t}+c_2e^{5t}$

(iii) $\left.\begin{aligned} x' &= 4x+z \\ y' &= -2y \\ z' &= -z \end{aligned}\right\}$

Απ. $x(t)=c_1e^{4t}+c_2e^{-t}$, $y(t)=c_3e^{-2t}$, $z(t)=-5c_2e^{-t}$

(iv) $\left.\begin{aligned} x' &= 3x-4y \\ y' &= 4x+3y \end{aligned}\right\}$

Απ. $x(t)=c_1e^{3t}\cos(4t)+c_2e^{3t}\sin(4t)$, $y(t)=-c_2e^{3t}\cos(4t)+c_1e^{3t}\sin(4t)$

(v) $\left.\begin{aligned} x' &= 2x+\frac{y}{2} \\ y' &= -\frac{x}{2}+y \end{aligned}\right\}$

Απ. $x(t)=-c_1e^{3t/2}-c_2(t+2)e^{3t/2}$, $y(t)=c_1e^{3t/2}+c_2te^{3t/2}$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Μη ομογενή συστήματα διαφορικών εξισώσεων):
Να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι μη ομογενών συστημάτων (όπου $y = y(t)$, $x = x(t)$, $z = z(t)$):

(i) $\left.\begin{aligned} x' &= 2y + e^t \\ y' &= -x + 3y - e^t \end{aligned}\right\}$ Απ. $\begin{aligned} x(t) &= 2c_1e^t + c_2e^{2t} + 3e^t + 4te^t \\ y(t) &= c_1e^t + c_2e^{2t} + 3e^t + 2te^t \end{aligned}$

(ii) $\left.\begin{aligned} x' &= x - y + e^t \cos t \\ y' &= x + y + e^t \sin t \end{aligned}\right\}$ Απ. $\begin{aligned} x(t) &= c_1e^t \cos t + c_2e^t \sin t + te^t \cos t \\ y(t) &= c_1e^t \sin t - c_2e^t \cos t + te^t \sin t \end{aligned}$

(iii) $\left.\begin{aligned} x' &= y + z + 3e^t \\ y' &= x + z - e^t \\ z' &= x + y - e^t \end{aligned}\right\}$ Απ. $\begin{aligned} x(t) &= c_1e^{2t} - c_2e^{-t} - c_3e^{-t} + e^t \\ y(t) &= c_1e^{2t} + c_3e^{-t} - e^t \\ z(t) &= c_1e^{2t} + c_2e^{-t} - e^t \end{aligned}$