

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ Νο 2**

**ΑΣΚΗΣΗ 1 (Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης):** Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς (όπου  $y = y(x)$ ):

(i)  $x + 2y - 5xy' = 0$

(ii)  $y^2 - x^2 + 3xyy' = 0$

(iii)  $y' \sqrt{x^2 + xy} - 10xy = 0$

(iv)  $2 + (x + y)y' = 0$

(v)  $\sin\left(\frac{x}{x+y}\right) + e^{-2y/x}y' = 0$

(vi)  $x \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{x+y}y' = 0$

(vii)  $2 \ln x - y' \ln y^2 = 0$

(viii)  $\frac{2}{y} + \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2}y' = 0$

(ix)  $\frac{\cos y}{\sin x} + \frac{\ln x}{\ln y}y' = 0$

(x)  $\sqrt{x^2 + 2} + 2yy' = 0$

**ΑΣΚΗΣΗ 2 (Επίλυση ομογενών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης):** Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων ή η λύση των αντίστοιχων προβλημάτων αρχικών τιμών (όπου  $y = y(x)$ ):

(i)  $y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy}, y(1) = 1$

Απ.  $2y^2 = x^2 + x^4$

(ii)  $x - 2yy' \ln \frac{y}{x} = 0$

Απ.  $\frac{x}{\sqrt{1 - 2 \ln y + 2 \ln x}} = c$

(iii)  $xy' - y - \sqrt{x^2 + y^2} = 0, y(1) = 0$

Απ.  $\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2} = c$

(iv)  $x^2 + y\sqrt{x^2 + y^2}(y - xy') = 0$

Απ.  $(x^2 + y^2)^{3/2} + 3x^2 + cx^3 = 0$

(v)  $x^2ye^{x/y} - (x^3e^{x/y} + y^3)y' = 0$

Απ.  $e^{x/y} \left( \frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + 2 \right) = \ln|y| + c$

**ΑΣΚΗΣΗ 3 (Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης):** Να λυθούν τα κάτωθι προβλήματα αρχικών τιμών (όπου  $y = y(x)$ ), με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης:

(i)  $y' - 2y = 0, y(1) = -1$

Απ.  $y(x) = -e^{2x-2}$

(ii)  $y' + y = 0, y(0) = 1$

Απ.  $y(x) = e^{-x}$

(iii)  $y' + 5y = 0, y(0) + y'(0) = 4$

Απ.  $y(x) = -e^{-5x}$

**ΑΣΚΗΣΗ 4 (Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης):** Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων (όπου  $y = y(x)$ ), με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα:

(i)  $y' + \frac{y}{x} = \sin x$  Απ.  $y(x) = \frac{\sin x - x \cos x + c}{x}$

(ii)  $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 2x$  Απ.  $y(x) = (x^2 + 1) \left[ c + \ln(x^2 + 1) \right]$

(iii)  $y' - y \tan x = e^{-2x}$  Απ.  $y(x) = \frac{e^{-2x}}{5} (-2 + \tan x) + \frac{c}{\cos x}$

(iv)  $(16x^2 + 25) dy - x(16y + 16x^2 + 25) dx = 0$  Απ.  $y(x) = \frac{(16x^2 + 25 + c)\sqrt{16x^2 + 25}}{16}$

(v)  $y dx - (x + 3y^2) dy = 0$  Απ.  $x = 3y^2 + cy$

**ΑΣΚΗΣΗ 5 (Επίλυση διαφορικών εξισώσεων Bernoulli):** Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων (όπου  $y = y(x)$ ):

(i)  $y' + x^{-1}y = x^{-1}y^{-2}$  Απ.  $y^3 = 1 + cx^{-3}$

(ii)  $y' - x^{-1}y = y^3 \sin x$  Απ.  $y^{-2} = x^{-2} (2x^2 \cos x - 4 \cos x - 4x \sin x + c)$

(iii)  $y' - \frac{y}{2x} = y^3 \cos x$  Απ.  $y^{-2} = -\frac{2 \cos x + 2x \sin x + c}{x}$

(iv)  $y' + 3y = \sqrt{y} \cos x$  Απ.  $\sqrt{y} = \frac{3}{13} \cos x + \frac{2}{13} \sin x + ce^{-3x/2}$

(v)  $y' - 2y = \frac{\cos x}{\sqrt{y}}$  Απ.  $y^{3/2} = -\frac{9}{20} \cos x + \frac{3}{20} \sin x + ce^{3x}$