

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ Νο 1**

**ΑΣΚΗΣΗ 1 (Χαρακτηρισμός και ταξινόμηση συνήθων διαφορικών εξισώσεων):** Να χαρακτηρισθούν πλήρως οι κάτωθι συνήθειες διαφορικές εξισώσεις:

- |   |   |
|---|---|
| (i) $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = x^3$            | (ii) $x[y''(x)]^4 + 2y(x) = 2x$         |
| (iii) $y(x)y'(x) + [y(x)]^4 = \sin x$         | (iv) $y'(x) = x^2 \sin y(x)$            |
| (v) $y'''(x) - 2y''(x) + 5y'(x) + y(x) = e^x$ | (vi) $y'(x) = x^2 \sin x$               |
| (vii) $[y'(x)]^2 + y(x) = 0$                  | (viii) $y'(x) = y(x)$                   |
| (ix) $x^2y''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0$         | (x) $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^{y(x)}$ |

**ΑΣΚΗΣΗ 2 (Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών):** Να χαρακτηρισθούν τα κάτωθι προβλήματα, ως προβλήματα αρχικών ή συνοριακών τιμών:

- |   |  |
|---|--|
| (i) $y'(x) + 2y(x) = 0, y(0) = 2$                                 | (ii) $y''(x) - y'(x) - 12y(x) = 1,$<br>$y(0) = 0, y'(0) = 0$       |
| (iii) $y''(x) + 9y(x) = 0,$<br>$y(0) = 0, y(\pi) = 1$             | (iv) $y'''(x) - 2y''(x) = 0$<br>$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 3$  |
| (v) $y'''(x) - 4y''(x) = 0$<br>$y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(1) = 3$ | (vi) $x^2y''(x) - 12xy'(x) + 42y(x) = 0$<br>$y(1) = 1, y'(1) = -1$ |

**ΑΣΚΗΣΗ 3 (Λύσεις διαφορικών εξισώσεων, προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών):** Να εξετασθεί αν η δοθείσα κάθε φορά συνάρτηση  $y_p(x)$ , είναι λύση της εκάστοτε διαφορικής εξίσωσης ή του εκάστοτε προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών:

- |   |  |
|---|--|
| (i) $y'(x) + 2y(x) = 0$<br>$y_p(x) = e^{-2x}$                         | (ii) $y'(x) + 2y(x) = 0$<br>$y_p(x) = 5e^{-2x}$  |
| (iii) $y'(x) + 2y(x) = 0$<br>$y_p(x) = e^{3x}$                        | (iv) $y'''(x) - 2y''(x) = 0$<br>$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 3$<br>$y_p(x) = \frac{1}{4}(-3 + 3e^{2x} - 2x)$ |
| (v) $y''(x) + y(x) = 0$<br>$y(0) = 0, y'(0) = 1$<br>$y_p(x) = \sin x$ | (vi) $x^2y''(x) - 12xy'(x) + 42y(x) = 0$<br>$y(1) = 1, y'(1) = -1$<br>$y_p(x) = 8x^6 - 7x^7$                   |

**ΑΣΚΗΣΗ 4 (Σχηματισμός διαφορικών εξισώσεων):** Για κάθε μία από τις παρακάτω οικογένειες συναρτήσεων (όπου  $c_1, c_2, c_3$  παράμετροι), να σχηματισθεί η σχετική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την  $y(x)$ :

- |                                  |                               |
|----------------------------------|-------------------------------|
| (i) $y^4 - \frac{8}{7}x^3 = c_1$ | Απ. $y' = \frac{6x^2}{7y^3}$  |
| (ii) $-3\cos x = 4\sin y + c_1$  | Απ. $4y'\cos y - 3\sin x = 0$ |

(iii)  $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} + 1$  Απ.  $y'' + 5y' + 4y = 4$

(iv)  $y = c_1 x^6 + c_2 x^7$  Απ.  $x^2 y'' - 12xy' + 42y = 0$

(v)  $y = -\frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{12} + \frac{c_1}{4} e^{2x} + c_2 + c_3 x$  Απ.  $y''' - 2y'' = x$

**ΑΣΚΗΣΗ 5 (Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με άμεση ολοκλήρωση):** Να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων:

(i)  $y'(x) = (x^2 - 1)(x^3 - 3x)^3$  Απ.  $y(x) = \frac{27x^4}{4} + \frac{9x^8}{2} + \frac{x^{12}}{12} - 9x^6 - x^{10} + c$

(ii)  $y'(x) = x \ln x, x > 0$  Απ.  $y(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x + c$

(iii)  $y'(x) = \frac{1}{x \ln x}, x > 0$  Απ.  $y(x) = \ln |\ln x| + c$

(iv)  $y'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}, |x| > 4$  Απ.  $y(x) = \sqrt{x^2 - 16} + c$

**ΑΣΚΗΣΗ 6 (Επίλυση διαφορικών εξισώσεων χωριζομένων μεταβλητών):** Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων (όπου  $y = y(x)$ ):

(i)  $y' = \frac{3y^7}{x^8}, x \neq 0$  Απ.  $y^{-6} = \frac{18}{7} x^{-7} + c$

(ii)  $y' = \frac{1}{x^2(8+9y^2)}, x \neq 0$  Απ.  $8y + 3y^3 = -\frac{1}{x} + c$

(iii)  $y' = \frac{3 \cosh(3x)}{2 \sinh(4y)}, y \neq 0$  Απ.  $\cosh(4y) = 2 \sinh(3x) + c$

(iv)  $y' = e^{2y+10x}$  Απ.  $e^{-2y} = -\frac{e^{10x}}{5} + c$

(v)  $y' = \frac{1+2e^y}{e^y x \ln x}, x > 0$  Απ.  $2e^y = -1 + c \ln^2 x$