Μαθηματικά Ι

Σ. Μαλεφάκη
Τμήμα Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών Μηχανικών

2024 - 2025

Welcome to UP

2 / 45

Ώρες Μαθήματος

Εβδομαδιαίο Πρόγραμμα	▶ Τετάρτη	11:00 -14:00*
	▶ Παρασκευή	14:00 - 16:00*
Ώρες γραφείου	▶ Τρίτη	11:00 - 13:00
	▶ Πέμπτη	11:00 - 13:00

* Αμφιθέατρο βιβλιοθήκης

Χρήσιμες πληροφορίες

☎: 2610 969486

🏭: Πολυώροφο κτήριο Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών, 1ος όροφος, ΜΗ/Π102

✉: smalefaki@upatras.gr

προσωπική σελίδα:

http://www.des.upatras.gr/amm/smalefaki/index.htm

σελίδα μαθήματος στο eclass:

https://eclass.upatras.gr/courses/MECH1220/

Ύλη Μαθήματος

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Διαφορικός Λογισμός συνάρτησης μιας Μεταβλητής (Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων, αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, πεπλεγμένων συναρτήσεων, παραμετρικών συναρτήσεων, Διαφορικό, Ανάπτυγμα Taylor)
- Ολοκληρωτικός Λογισμός συνάρτησης μιας Μεταβλητής (Ολοκληρώματα ρητών Συναρτήσεων, ολοκληρώματα ειδικής μορφής, Ορισμένα Ολοκληρώματα, Μήκος επίπεδης καμπύλης, Γενικευμένα ολοκληρώματα)
- Ακολουθίες, Σειρές αριθμών, σειρές συναρτήσεων, δυναμοσειρές
- Πίνακες, Ορίζουσες και Γραμμικά Συστήματα
- Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, διαγωνοποίηση
- Διανύσματα στο χώρο

Βιβλία Μαθήματος

Προτεινόμενα Βιβλία

- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, 2η Έκδοση
  Παπαδάκης Κ. Ε. (2021 - Εκδόσεις Τζιόλα)
- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά,
  Μάρκελλος Β. Β. (2013 - Εκδόσεις Γκότσης)

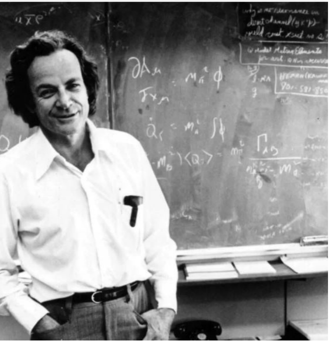
Βιβλία εκτός λίστας Εύδοξου

- Απειροστικός Λογισμός 1,
  Finney R.L., Weir M.D., Giordand F.R.
  (2011 - Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης)
- Διαφορικός και Ολοκληρωτικός λογισμός,
  Spivak M. (2011 - Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης)

- `repository.kallipos.gr`

Γιατί τόσα Μαθηματικά;

Τα μαθηματικά μας βοηθάνε να περιγράψουμε και να κατανοήσουμε τα προβλήματα που έχουμε να επιλύσουμε!



Richard Feynman (1918 – 1988)[1]
Peaple who wish to analyze nature without using mathematics must settle for a reduced understanding

(Όσοι επιθυμούν να αναλύσουν τη φύση χωρίς τα μαθηματικά πρέπει να συμβιβαστούν με μία μειωμένη αντίληψη των πραγμάτων)

[1] Αμερικανός φυσικός, ένας από τους σημαντικότερους θεωρητικούς φυσικούς, ο οποίος τιμήθηκε και με το Βραβείο Νόμπελ Φυσικής για τη δουλειά του στην Κβαντική Μηχανική, ειδικά για τη συμβολή του στην ανάπτυξη της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής.

Γιατί τόσα Μαθηματικά;

Ο μηχανικός θέλει να αποφύγει κάθε είδος αστοχίας στην κατασκευή του. Αν όμως συμβεί τότε θέλει να μάθει όσο το δυνατόν περισσότερα για αυτό ώστε να μη ξανασυμβεί.

- Πρώτο βήμα
Να καταγραφούν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες παρατηρήθηκαν οι αστοχίες στην κατασκευή.
  - κατασκευαστικά στοιχεία
  - ταχύτητα ανέμου
  - κατεύθυνση ανέμου
  - τύπος και είδος ταλάντωσης, κτλ
- Δεύτερο βήμα
Επιβεβαίωση φαινομένου μέσω πειραμάτων
- Τρίτο βήμα
Καταγραφή νέων δεδομένων που προέκυψαν από τα πειράματα
- Τέταρτο βήμα
Κατανόηση και μελέτη του φαινομένου μέσω απλών μαθηματικών μοντέλων (προτύπων).

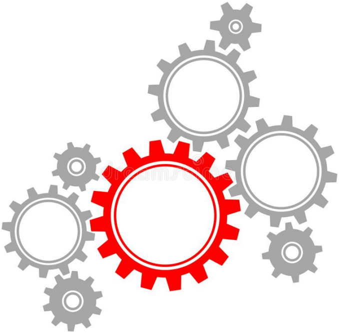
Απλά προβλήματα μηχανικών

Παράδειγμα 1^o - **Σχεδίαση φτερών**
Η σχεδίαση ενός νέου αεροσκάφους προβλέπει μια δεξαμενή καυσίμων σταθερού εμβαδού διατομής σε κάθε φτερό. Η δεξαμενή πρέπει να έχει χωρητικότητα $m\ kg$ καυσίμου πυκνότητας $k\ kg/m^2$. Ο μηχανικός σε αυτή την περίπτωση χρειάζεται να υπολογίσει το μήκος που πρέπει να έχει η δεξαμενή.

Παράδειγμα 2^o - **Κατασκευή φράγματος**
Η πίεση του νερού στο φράγμα ενός ποταμού χρησιμοποιείται για τη λειτουργία παρακείμενου υδροηλεκτρικού σταθμού. Έστω ότι το νερό διέρχεται από k υδατοφράκτες ελλειπτικού σχήματος. Το χαμηλότερο σημείο κάθε υδατοφράκτη βρίσκεται $x\ m$ πάνω από τον πυθμένα του φράγματος, ενώ το υψηλότερο σημείο βρίσκεται $y\ m$ πάνω από τον πυθμένα. Ο υδατοφράκτης είναι κατακόρυφος. Για την κατασκευή του παραπάνω φράγματος ο μηχανικός χρειάζεται να γνωρίζει τη μέγιστη δύναμη που μπορεί να ασκηθεί στους υδατοφράκτες του φράγματος.

Παράδειγμα 3^o - ... **και πολλά άλλα!**

1^{η} Εβδομάδα Μαθημάτων



- Πίνακες
- Ορίζουσες

Πίνακες

Ορισμός

Πίνακα ονομάζουμε μια ορθογώνια διάταξη $m \times n$ αριθμών σε m γραμμές και n στήλες.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

όπου a_{ij} το στοιχείο της i γραμμής και της j στήλης.

Είδη πινάκων

- Τετραγωνικός πίνακας: έχει των ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών (δηλαδή $m = n$)
  - Τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ονομάζονται στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του πίνακα.
  - Το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου ενός πίνακα ονομάζεται ίχνος του πίνακα και συμβολίζεται με $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
- Διαγώνιος πίνακας: Ένας τετραγωνικός πίνακας που τα μόνα μη μηδενικά του στοιχεία βρίσκονται πάνω στην κύρια διαγώνιο του.
- Μοναδιαίος πίνακας: Ένας διαγώνιος πίνακας του όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι μονάδες.
- Τριγωνικός άνω πίνακας: Ένας τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία του κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.
- Τριγωνικός κάτω πίνακας

Είδη πινάκων

- Υπάρχει πίνακας - γραμμή $(a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n})$.
- Υπάρχει πίνακας - στήλη $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ και συνήθως λέγεται **διάνυσμα**.
- Αν σε ένα πίνακα $A_{m\times n}$ κάνουμε τις γραμμές στήλες και τις στήλες γραμμές, τότε ορίζεται ο **ανάστροφος** πίνακας και συμβολίζεται $A^T_{n\times m}$ (Transpose).

Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Ο ανάστροφος ενός πίνακα γραμμής είναι ένας πίνακας στήλη).

- Μηδενικός ονομάζεται ο πίνακας που έχει όλα του τα στοιχεία 0.

Μορφές Πινάκων

- Αν ένας πίνακας A συμπίπτει με τον ανάστροφο του A^T, δηλαδή ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$, τότε ο πίνακας λέγεται **συμμετρικός**. Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Αν ένας πίνακας A συμπίπτει με τον $-A^T$, δηλαδή ισχύει $a_{ij} = -a_{ji}$, τότε λέγεται **αντισυμμετρικός**.

Σε κάθε αντισυμμετρικό πίνακα έχουμε τα διαγώνια στοιχεία του μηδέν. Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -6 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παραδείγματα

- Αν ο πίνακας Α

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & x^2 - y^2 & (x+y)^2 \\ (x+4)^2 & y^2 & x+2y-4 \\ y^2 - x^2 & x+y & (x-y)^2 \end{bmatrix}$$

είναι κάτω τριγωνικός να δείξετε ότι είναι και διαγώνιος.

- Βρείτε τον πίνακα $A_{n\times n}$, όπου $a_{ij} = \min\{i, j\}$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$. Έπειτα βρείτε το ίχνος αυτού του πίνακα.

Ισότητα πινάκων

Δύο πίνακες είναι ίσοι όταν έχουν την ίδια διάσταση (ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών) και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ένα προς ένα ίσα.

Πίνακες - Πράξεις Πινάκων

- **Πρόσθεση - Αφαίρεση**
  Δύο πίνακες A και B μπορούν να προστεθούν (ή να αφαιρεθούν) αν και μόνο αν έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Το άθροισμα τους (ή η διαφορά τους) είναι ένας νέος πίνακας Γ με στοιχεία το άθροισμα (ή τη διαφορά) των αντίστοιχων στοιχείων του πίνακα A και B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ιδιότητες

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$

- **Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα**
Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με ένα πίνακα A λέγεται ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του A με τον αριθμό λ.
Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 3\lambda & 4\lambda \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες

- $(\lambda+\mu)\,A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda\,(A + B) = \lambda\,A + \lambda\,B$
- $\lambda\,A = 0$ αν και μόνο αν $\lambda = 0$ ή $A = 0$

Ασκήσεις

- Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ να υπολογιστεί ο πίνακας $2A + 5B$

- Αν $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ και $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ Προσδιορίστε τους πραγματικούς αριθμούς x και y έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $2xA + yB = 3\Gamma$.

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Αν A είναι ένας πίνακας $m \times n$ και B ένας πίνακας $n \times r$ γινόμενο του πίνακα A με τον πίνακα B ονομάζεται ένας πίνακας Γ $m \times r$ του οποίο το κάθε στοιχείο προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της i γραμμής του πίνακα A με τα στοιχεία της j στήλης του πίνακα B και προσθέσουμε αυτά τα γινόμενα. Δηλαδή

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & n_{nr} \end{bmatrix} = \Gamma$$

$$\gamma_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

- $A \cdot B \neq B \cdot A$
  (μπορεί ακόμα και να μην ορίζεται η δεύτερη πράξη!)
- Ισχύουν η προσεταιριστική και η επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή
  $$(AB)C = A(BC) \tag{1}$$
  $$(A+B)C = AC + BC\,. \tag{2}$$
  Η σειρά στον πολλαπλασιασμό στις (1), (2) δεν επιτρέπεται να αλλάξει.
- Δεν μπορούμε να απλοποιήσουμε γινόμενα πινάκων, δηλαδή δεν επιτρέπεται να γράψουμε $A \cdot \cancel{B} = C \cdot \cancel{B}$ για κάθε πίνακα A, B και C.
- Αν $A \cdot B = 0$ δεν σημαίνει υποχρεωτικά ότι $A = 0$ ή $B = 0$.
  Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, και $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
  Να υπολογίσετε τα γινόμενα AB και BA.
- $A \cdot I = I \cdot A = A$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Δύναμη ενός πίνακα

- Δύναμη ενός $n \times n$ πίνακα $A^k = A \times A \times \ldots \times A$

Ιδιότητες

- $A^k A^m = A^{k+m}$
- $(A^k)^m = A^{km}$
- λ A = 0 αν και μόνο αν λ = 0 ή A = 0

Παράδειγμα: Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & ab \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Να δειχθεί ότι

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n b \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Άσκηση

- Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
  - Να υπολογίσετε τον πίνακα A^2 και A^{20}
  - Αν επιπλέον ισχύει
  $$A^{20} + aA^2 + 7bI = 0$$
  να αποδείξετε ότι $a + b + 7^9 = 0$

Αντιστρέψιμος πίνακας

Ένας πίνακας A ονομάζεται αντιστρέψιμος ή μη ιδιάζον αν υπάρχει ένας πίνακας B τέτοιος ώστε

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

Ένας τέτοιος πίνακας είναι μοναδικός αν υπάρχει.

O B ονομάζεται αντίστροφος του πίνακα A.

Αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα

Έστω ο πίνακάς $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ και έστω $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ ο αντίστροφος του τότε θα ισχύει

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

οπότε έχουμε

$$\begin{bmatrix} ax_{11} + bx_{21} & ax_{12} + bx_{22} \\ cx_{11} + dx_{21} & cx_{12} + dx_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα αρκεί να λύσουμε το σύστημα
$cx_{11} + dx_{21} = 0, \; ax_{12} + bx_{22} = 0, \; cx_{12} + dx_{22} = 1, \; ax_{11} + dx_{21} = 1$

Αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα

Εύκολα μπορούμε να λύσουμε το σύστημα και να πάρουμε

$$x_{11} = \frac{d}{ad - bc}, \; x_{12} = \frac{-b}{ad - bc}, \; x_{21} = \frac{-c}{ad - bc}, \; \text{και} \; x_{22} = \frac{a}{ad - bc}$$

Η ποσότητα $ad - bc$ ονομάζεται ορίζουσα του A και τη συμβολίζουμε με $|A|$.

Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν $|A| \neq 0$.

Αντίστροφος του A

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος του πίνακα ενός $n \times n$ πίνακα A

Κατασκευάζουμε το πίνακα S, που σαν στοιχείο του s_{ij} έχει το συμπλήρωμα A_{ij} του στοιχείου a_{ij} του πίνακα A, δηλαδή τον πίνακα

$$S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

όπου

- **Συμπληρωματική ή συμπλήρωμα του στοιχείου** a_{ij} ονομάζουμε την ποσότητα
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$
- **Ελάσσονα ορίζουσα** M_{ij} **ενός στοιχείου** a_{ij} ονομάζεται η ορίζουσα που προκύπτει αν από την αρχική ορίζουσα αγνοήσουμε τη γραμμή i και την στήλη j

Αντίστροφος του πίνακα Α

Έπειτα βρίσκουμε τον προσαρτημένο ή συμπληρωματικό πίνακα $adj(A)$ ο οποίος ισούται με τον ανάστροφο του S, δηλαδή

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

οπότε ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} του πίνακα Α θα ισούται με

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Πώς όμως υπολογίζουμε την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα;

Να υπολογισθεί η τιμή της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \tag{3}$$

όπου

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

και M_{ij} η ορίζουσα που λείπει η i γραμμή και η j στήλη.

Το δεύτερο μέλος της (3) ονομάζεται **ανάπτυγμα** της ορίζουσας κατά την πρώτη γραμμή.
Μπορώ να υπολογίσω την ορίζουσα παίρνοντας το ανάπτυγμα ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη.

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί η τιμή της ορίζουσας

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} &= 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 2 \cdot A_{23} = A_{22} + 2 \cdot A_{23} = \\
&= (-1)^{2+2} M_{22} + 2 \cdot (-1)^{2+3} M_{23} = \\
&= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = \\
&= 1(5-6) + 2(-1)(-4+4) = \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Ιδιότητες οριζουσών

• **Ιδιότητα 1.** Αν μία ορίζουσα έχει σε μία γραμμή (ή στήλη) όλα τα στοιχεία της μηδέν τότε η τιμή της ορίζουσας είναι μηδέν. Π.χ.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = 0$$

• **Ιδιότητα 2.** Η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει αν αλλάξουμε όλες τις γραμμές με τις αντίστοιχες στήλες. Δηλαδή η $1^{\underline{\eta}}$ γραμμή να γίνει $1^{\underline{\eta}}$ στήλη, η $2^{\underline{\eta}}$ γραμμή να γίνει $2^{\underline{\eta}}$ στήλη κλπ. Π.χ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

• **Ιδιότητα 3.** Το πρόσημο της ορίζουσας αλλάζει αν αλλάξουμε 2 γραμμές μεταξύ τους ή 2 στήλες μεταξύ τους. Π.χ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

• **Ιδιότητα 4.** Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) με ένα παράγοντα k, τότε η τιμή της ορίζουσας πολλαπλασιάζεται επί τον αυτόν παράγοντα. Π.χ. στην ορίζουσα $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -10$ πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί 3 οπότε,

$$\begin{vmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3(-10) = -30$$

Μπορούμε να βγάζουμε κοινό παράγοντα από μία γραμμή (ή μία στήλη) έναν αριθμό.

• **Ιδιότητα 5.** Αν δύο γραμμές (ή στήλες) μιας ορίζουσας είναι ίδιες ή ανάλογες τότε η τιμή της ορίζουσας είναι μηδέν. Π.χ.

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{ιδιοτ. } 4}{=} 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

Ιδιότητες οριζουσών

• **Ιδιότητα 6.** Αν τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) πολλαπλασιασθούν επί ένα παράγοντα k και κατόπιν προστεθούν (ή αφαιρεθούν) με τα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (ή στήλης), τότε η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει. Π.χ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί 2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη γραμμή (η πρώτη γραμμή δεν αλλάζει).

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 + 2 \cdot 3 & 4 + 2 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 10 = 14$$

Γενικά ισχύει:

$$\begin{vmatrix} a \pm k \cdot c & b \pm k \cdot d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Ιδιότητες οριζουσών

- **Ιδιότητα 7.** Ισχύουν οι σχέσεις:

$$(i) \qquad \begin{vmatrix} a \pm a' & b \pm b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$(ii) \qquad \begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + c' & d + d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c + c' & d + d' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

Άρα προσοχή:

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

Ιδιότητες οριζουσών

• **Ιδιότητα 8.** Αν τα στοιχεία μιας ορίζουσας, που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο (τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ αποτελούν την διαγώνιο μιας ορίζουσας), είναι όλα μηδέν τότε η ορίζουσα λέγεται **άνω τριγωνική**. Αντίστοιχα ορίζεται η **κάτω τριγωνική** ορίζουσα. Αν όλα τα στοιχεία μιας ορίζουσας είναι μηδέν, εκτός αυτών της διαγωνίου, τότε η ορίζουσα λέγεται **διαγώνιος**.

✓ Αν μία ορίζουσα είναι τριγωνική ή διαγώνιος, τότε η τιμή της ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων της. Π.χ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

• **Ιδιότητα 9.** Αν σε μια ορίζουσα ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$ τότε η ορίζουσα λέγεται **συμμετρική**. Αν ισχύει $a_{ij} = -a_{ji}$ τότε λέγεται **αντισυμμετρική**.
✓ Τα διαγώνια στοιχεία μιας αντισυμμετρικής ορίζουσας είναι μηδέν.
✓ Κάθε αντισυμμετρική ορίζουσα περιττής τάξης έχει τιμή μηδέν. Π.χ.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = (\text{βγάζουμε 3 φορές κοινό παράγοντα το (-1)})$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = (\text{έτσι έγιναν οι στήλες γραμμές άρα}$$

η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει) $= (-1)^3 D = -D$. ’ρα$D = 0$.

Ιδιότητες οριζουσών

- Η ορίζουσα του I ισούται με 1.
- Η ορίζουσα ενός μηδενικού πίνακα ισούται με το 0.
- $|AB| = |A||B|$
- $|A + B| \neq |A| + |B|, \quad$ γενικά για κάθε πίνακα A και B.
- $|A^k| = |A|^k$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Άσκηση:

Να υπολογισθεί η τιμή της ορίζουσας

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Λύση:
Παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε την 1η γραμμή επί -2 και την προσθέσουμε στην 2η θα προκύψει ορίζουσα με την ίδια τιμή (ιδιότ. 6), δηλαδή

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2)\gamma_1+\gamma_2\to\gamma_2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+3}\cdot 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7(-4-3) = 49$$

Άσκηση:

Να λυθεί η εξίσωση $D = 0$ όταν

$$D = \begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix} = 0\,.$$

Λύση:

Από ιδιότητες οριζουσών έχουμε

$$D \xrightarrow{\gamma_1-\gamma_2\to\gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \sin^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\gamma_2-\gamma_3\to\gamma_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix}$$ Αναπτύσσουμε κατά την 1η γραμμή

$$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \cos^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \sin^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

Άσκηση:

$$
\begin{aligned}
D &= 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \cos^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \sin^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 1+4\sin 2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 0 \Rightarrow 2(1+2\sin 2\theta) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sin 2\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\theta = -\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin 2\theta = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2\theta = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{ή} \quad 2\theta = (2k+1)\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \theta = k\pi - \frac{\pi}{12} \quad \text{ή} \quad \theta = k\pi + \frac{7\pi}{12} \quad \text{με} \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Άσκηση:

Να βρεθεί η τιμή μιας $n \times n$ ορίζουσας η οποία έχει περισσότερα από $n^2 - n$ μηδενικά στοιχεία.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Λύση:

Η ορίζουσα έχει τιμή μηδέν διότι υπάρχει τουλάχιστο μία γραμμή της η οποία αποτελείται από μηδενικά στοιχεία.
Πράγματι, γιατί αν αυτό δεν συνέβαινε, τότε κάθε γραμμή θα είχε το πολύ $n-1$ μηδενικά στοιχεία. Άρα οι n γραμμές της ορίζουσας θα είχαν το πολύ $n \cdot (n-1)$ μηδενικά στοιχεία. Όμως αυτό σημαίνει ότι η ορίζουσα θα έχει το πολύ $n \cdot (n-1) = n^2 - n$ μηδενικά στοιχεία. Άτοπο γιατί η υπόθεση λέει ότι η ορίζουσα έχει περισσότερα από $n^2 - n$ μηδενικά στοιχεία. Στο άτοπο αυτό καταλήξαμε γιατί υποθέσαμε ότι δεν υπάρχει γραμμή με όλα τα στοιχεία της μηδέν.

Ασκήσεις

- Να υπολογίζετε τις ορίζουσες των παρακάτω πινάκων
  1. $$\begin{bmatrix} a & x & 2a-x \\ b & y & 2b-y \\ c & z & 2c-z \end{bmatrix},$$
  2. $$\begin{bmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{bmatrix}.$$
- Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$,
  1. Να βρεθεί ο A^4.
  2. Να δειχθεί ότι ο A αντιστρέφεται και να βρείτε τον αντίστροφο του.
  3. Να υπολογίσετε τον πίνακα $A^{-11} + A^{-6} + I$.

Άσκηση:

Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} του πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$
Ελέγχουμε την ορίζουσα του πίνακα $|A| = -3 \neq 0$ άρα ο πίνακας είναι ομαλός. Βρίσκουμε τα A_{ij}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -20 \ , \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 13 \ ,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \ , \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7 \ ,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \ , \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \ ,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 9 \ , \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \ ,$$

Άσκηση:

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0\,.$$ Άρα ο πίνακας S θα είναι,

$$S = \begin{pmatrix} -20 & 13 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \\ 9 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$ και συνεπώς ο προσαρτημένος:

$$\mathrm{adj}(A) = S^T = \begin{pmatrix} -20 & 7 & 9 \\ 13 & -5 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

'ρα ο ζητούμενος αντίστροφος πίνακας είναι:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}A}{|A|} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -20 & 7 & 9 \\ 13 & -5 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & -\frac{7}{3} & -3 \\ -\frac{13}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Ορθογώνιος και Κανονικός Πίνακας

Ένας πραγματικός πίνακας A καλείται **ορθογώνιος**, αν $A^{-1} = A^T$, δηλαδή ισχύει $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$.

Ένας πίνακας A είναι **κανονικός** αν αντιμετατίθεται με τον αντίστροφό του, δηλαδή αν $A^T \cdot A = A \cdot A^T$.

Αν ο A είναι συμμετρικός, ή ορθογώνιος ή αντισυμμετρικός τότε είναι και κανονικός.