Άσκηση 1. Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης γραμμής της καμπύλης $\left(x^2+y^2\right)^2=4x^2y$ (καμπύλη του δίφυλλου), στο σημείο $(-1,1)$.

Λύση

Η ζητούμενη κλίση της εφαπτομένης στο σημείο (x_0,y_0) είναι της μορφής $y'=(y-y_0)/(x-x_0)$ οπότε χρειάζεται να βρούμε την παράγωγο y' της συνάρτησης. Με έμμεση παραγώγιση θα έχουμε,

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(x^2+y^2\right)^2\right]'=\left[4x^2y\right]'\Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)\left(2x+2yy'\right)=8xy+4x^2y'\Rightarrow\\
&4x\left(x^2+y^2\right)+4yy'\left(x^2+y^2\right)=8xy+4x^2y'\Rightarrow\\
&4yy'\left(x^2+y^2\right)-4x^2y'=8xy-4x\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\\
&y'\left[4y\left(x^2+y^2\right)-4x^2\right]=8xy-4x\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\\
&y'=\frac{8xy-4x\left(x^2+y^2\right)}{4y\left(x^2+y^2\right)-4x^2}
\end{aligned}
$$

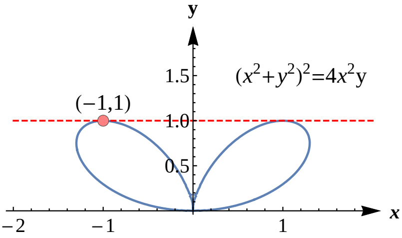
που στη θέση $(-1,1)$ γίνεται,

Επαναληπτικές ασκήσεις

που στη θέση $(-1, 1)$ γίνεται,

$$y'\big|_{(-1,1)} = \frac{8(-1)1 - 4(-1)\left((-1)^2 + 1^2\right)}{4 \cdot 1\left((-1)^2 + 1^2\right) - 4(-1)^2} = \frac{-8+8}{8-4} = 0.$$

Άρα η κλίση είναι μηδέν που σημαίνει ότι η εφαπτομένη στο σημείο $(-1, 1)$ θα είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα.



Επαναληπτικές ασκήσεις

Άσκηση 2. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$.

Λύση

Πριν την ολοκλήρωση αναλύουμε το κλάσμα σε απλούστερα και έχουμε,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-2}\,.$$

Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα στο δεύτερο μέλος και απαλείφουμε τους κοινούς παρανομαστές στα δύο μέλη, οπότε παίρνουμε τη σχέση,

$$x^2+1 = A_1(x-1)(x-2) + A_2(x-2) + A_3(x-1)^2.$$

Για $x = 1$ παίρνουμε $A_2 = -2$, για $x = 2$ αντίστοιχα $A_3 = 5$. Τέλος για $x = 0$, $A_2 = -2$ και $A_3 = 5$ η προηγούμενη σχέση δίνει $A_1 = -4$. Άρα το κλάσμα γράφεται,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-2} = -\frac{4}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-2}$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται,

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx = \int \left(-\frac{4}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-2}\right) dx =$$
$$= -4\int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 5\int \frac{dx}{x-2} =$$
$$= -4\ln|x-1| - 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 5\ln|x-2| + C_1.$$

Αν καλέσουμε $x-1=t$ τότε $dx=dt$ οπότε το ολοκλήρωμα που έχει μείνει γίνεται,

$$-2\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -2\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{t} + C_2 = \frac{2}{x-1} + C_2$$

και συνεπώς το ολοκλήρωμα μας γίνεται,

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx = -4\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + 5\ln|x-2| + C.$$

Άσκηση 3. Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}\,dx$.

Λύση

Το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα δεύτερου είδους αφού σε μία θέση του διαστήματος $[1,4]$, συγκεκριμένα στη θέση $x=3$, δεν έχει πεπερασμένη τιμή. Συνεπώς σύμφωνα με τη θεωρία θα έχουμε,

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_1^{3-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}} + \lim_{\epsilon'\to 0^+}\int_{3+\epsilon'}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}} =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{3}{2}(x-3)^{2/3}\right]_1^{3-\epsilon} + \lim_{\epsilon'\to 0^+}\left[\frac{3}{2}(x-3)^{2/3}\right]_{3+\epsilon'}^{4} =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{3}{2}(3-\epsilon-3)^{2/3} - \frac{3}{2}(-2)^{2/3}\right] + \lim_{\epsilon'\to 0^+}\left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}(3+\epsilon'-3)^{2/3}\right] =$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

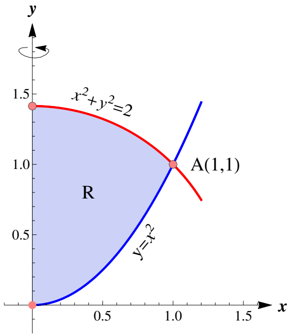
$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{3(-\epsilon)^{2/3}}{2} - \frac{3}{2}(-2)^{2/3} + \frac{3}{2} + \lim_{\epsilon'\to 0^+}\left[\frac{-3(\epsilon')^{2/3}}{2}\right] =$$

$$= 0 - \frac{3}{2}(-2)^{2/3} + \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}\left[1-(-2)^{2/3}\right] = \frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{4}\right).$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

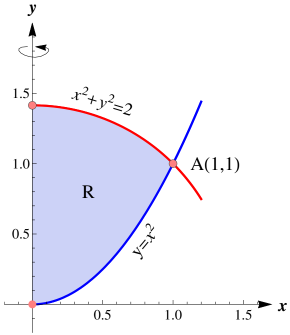
Άσκηση 4. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που δημιουργείται από την περιοχή R του πρώτου τεταρτημόριου που περικλείεται από τις καμπύλες $x = 0$, $y = x^2$ και $x^2 + y^2 = 2$, όταν η R περιστραφεί γύρω από τον $y-$άξονα.

Λύση:



Η πραγματική λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο καμπυλών $x^2 + y^2 = 2$ και $y = x^2$ μας δίνει τα σημεία τομής τους $(1, 1)$ και $(-1, 1)$ και για το πρώτο τεταρτημόριο που μας ενδιαφέρει κρατάμε το $(1, 1)$. Επίσης η τομή της $x^2 + y^2 = 2$ με τον κατακόρυφο άξονα, πάντα στο πρώτο τεταρτημόριο, είναι $0^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2}$. Αν ολοκληρώσουμε ως προς y τότε πρέπει να χωρίσουμε την περιοχή R σε δύο υποπεριοχές.

Επαναληπτικές ασκήσεις



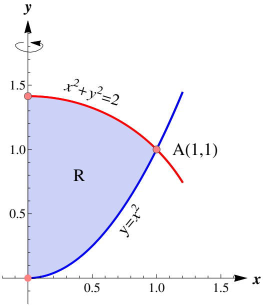
Η πρώτη κάτω από την ευθεία $y = 1$ και η δεύτερη πάνω από αυτή την ευθεία. Σε αυτή την περίπτωση ο όγκος θα δίνεται από το άθροισμα των ολοκληρωμάτων,

$$V = \int_0^1 \pi\left(\sqrt{y}\right)^2 dy + \int_1^{\sqrt{2}} \pi\left(\sqrt{2-y^2}\right)^2 dy =$$

$$= \pi \int_0^1 y\, dy + 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} dy - \pi \int_1^{\sqrt{2}} y^2\, dy =$$

$$= \left[\frac{\pi y^2}{2}\right]_0^1 + \left[2\pi y\right]_1^{\sqrt{2}} - \left[\frac{\pi y^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(8\sqrt{2} - 7\right).$$



Αν ολοκληρώσουμε ως προς x τότε δεν χρειάζεται να χωρίσουμε την περιοχή R σε υποπεριοχές και το ολοκλήρωμα που δίνει το ζητούμενο όγκο του στερεού είναι,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx = \\ &= 2\pi\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx - 2\pi\int_0^1 x^3\,dx. \end{aligned}$$

Για την επίλυση του πρώτου ολοκληρώματος θέτουμε, $2-x^2=t \Rightarrow x=(2-t)^{1/2}$ (για $x\geq 0$) οπότε $dx=-\frac{1}{2}(2-t)^{-1/2}\,dt$. Άρα το αόριστο ολοκλήρωμα,

$$\int x\sqrt{2-x^2}\,dx = \int (2-t)^{1/2}t^{1/2}\left[-\frac{1}{2}(2-t)^{-1/2}\,dt\right] = -\frac{1}{2}\int t^{1/2}\,dt =$$

Άρα το αόριστο ολοκλήρωμα,

$$\int x\sqrt{2-x^2}\,dx = \int (2-t)^{1/2} t^{1/2}\left[-\frac{1}{2}(2-t)^{-1/2}\,dt\right] = -\frac{1}{2}\int t^{1/2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} = -\frac{1}{3}\left(2-x^2\right)^{3/2}.$$

Άρα ο ζητούμενος όγκος είναι,

$$V = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx - 2\pi\int_0^1 x^3\,dx = 2\pi\left[-\frac{1}{3}\left(2-x^2\right)^{3/2}\right]_0^1 - 2\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(8\sqrt{2}-7\right).$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

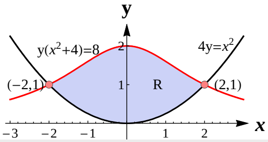
Άσκηση 5. Να βρεθεί το εμβαδόν E της περιοχής R που περικλείεται από τις καμπύλες $x^2 = 4y$ και $y(x^2+4) = 8$.

Λύση

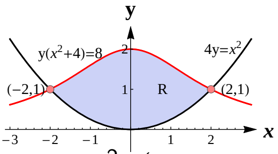
Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών λύνουμε το σύστημα,

$$\begin{array}{l} x^2 = 4y \\ y(x^2+4) = 8 \end{array} \Rightarrow x^2 = 4 \cdot \frac{8}{x^2+4} \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0,$$

που σαν διτετράγωνη εξίσωση έχει ρίζες 4 και -8. Άρα γράφεται $(x^2-4)(x^2+8) = 0$. Η δεύτερη παρένθεση δεν έχει πραγματικές ρίζες ενώ η πρώτη παρένθεση έχει $x = \pm 2$. Για $x = 2 \Rightarrow y = 1$ και για $x = -2 \Rightarrow y = 1$ και συνεπώς τα σημεία τομής των καμπυλών είναι τα $(2,1)$ και $(-2,1)$.



Επαναληπτικές ασκήσεις



Άρα η περιοχή R είναι η γκρι περιοχή του σχήματος η οποία βλέπουμε ότι χωρίζεται συμμετρικά από τον κατακόρυφο άξονα. Το εμβαδόν της R θα δίνεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα,

$$E = \int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4}-\frac{x^2}{4}\right)dx = 2\int_0^2\left(\frac{8}{x^2+4}-\frac{x^2}{4}\right)dx = 16\int_0^2\frac{dx}{x^2+4} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = 4\int_0^2\frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = 8\int_0^2\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = 8\left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8(\arctan 1 - \arctan 0) -$$

$$-\frac{4}{3} = 8\left(\frac{\pi}{4}-0\right)-\frac{4}{3} = 2\pi-\frac{4}{3}.$$

Άσκηση 6. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 4y + 2z &= 0 \\ 2x + 6y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

Λύση:
Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων και παρατηρούμε ότι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 8 - 2 - 6 = 0$$

οπότε συνεχίζουμε να ελέγξουμε τις 2×2 υποορίζουσες για να βρούμε το βαθμό του A.

Επαναληπτικές ασκήσεις

Παίρνουμε την πρώτη υποορίζουσα,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

άρα $\mathrm{rank} A = 2$. Συνεπώς το σύστημα θα είναι αδύνατο ή θα έχει άπειρες λύσεις. Οπότε χρειάζεται να βρούμε και το βαθμό του επαυξημένου πίνακα του συστήματος:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Παίρνουμε τις 4 υποορίζουσες 3×3 που έχει ο επαυξημένος πίνακας και ελέγχουμε την τιμή τους. Έτσι έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = |A| \overset{\text{άρα}}{=} 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Δηλαδή όλες οι 3×3 ορίζουσες του επαυξημένου πίνακα είναι μηδέν άρα $\text{rank}E = 2$ αφού ήδη μία υποορίζουσα 2×2 του E (η D) την έχουμε ελέγξει και έχουμε βρει ότι είναι διάφορη του μηδενός. Συνεπώς $\text{rank}A = \text{rank}E = 2 < n = 3$. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $n - \text{rank}A = 3 - 2 = 1$ παράμετρο.
Το επόμενο βήμα καθορίζεται από την υποορίζουσα $D_{2\times 2}$ που βρήκαμε ότι η τιμή της είναι διάφορη του μηδενός (ή όποια άλλη υποορίζουσα 2×2 βρούμε διάφορη του μηδενός).
Παίρνουμε τις εξισώσεις και τους αγνώστους που 'εμπλέκονται' με αυτή την υποορίζουσα. Δηλαδή:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \downarrow x & \downarrow y \end{array} \\ \text{1η εξίσωση} \rightarrow & \multirow{2}{*}{$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$} \\ \text{2η εξίσωση} \rightarrow & \end{array}$$

Η υποορίζουσα που εξετάσαμε και τη βρήκαμε διάφορη του μηδενός αφορά στις δύο πρώτες εξισώσεις και στους δύο πρώτους αγνώστους.

Έτσι παίρνουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις από το σύστημα (αγνοώντας προς το παρόν την τρίτη) και τους δύο πρώτους αγνώστους θεωρώντας τον τρίτο άγνωστο z σαν παράμετρο $z = t$ που θα πάει στο δεύτερο μέλος. Άρα θα έχουμε:

$$x + 2y = 1 - 3t$$
$$x + 4y = -2t$$

Το σύστημα αυτό είναι Cramer 2×2 και μάλιστα γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του είναι διάφορη του μηδενός αφού πρόκειται για την ορίζουσα D.
Άρα αυτό το σύστημα των δύο εξισώσεων με τους δύο αγνώστους έχει μία και μοναδική λύση μόνο που αυτή η λύση έχει μέσα μία παράμετρο t άρα ουσιαστικά πρόκειται για σύστημα με άπειρες λύσεις.

και συνεπώς η λύση του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 - 3t \\ x + 4y &= -2t \end{aligned} \quad \Rightarrow x = 2 - 4t \quad \text{και} \quad y = \frac{t-1}{2}.$$

Άρα οι άπειρες λύσεις του αρχικού συστήματος είναι:

$$x = 2 - 4t, \qquad y = \frac{t-1}{2}, \qquad z = t$$

Η λύση αυτή επαληθεύει και την τρίτη εξίσωση του συστήματος αφού,

$$\begin{aligned} 2x + 6y + 5z = 1 \quad &\Rightarrow 2(2-4t) + 6\frac{t-1}{2} + 5t = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4 - 8t + 3t - 3 + 5t = 1 \Rightarrow 1 = 1. \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Αν A^{-1} είναι ο αντίστροφος πίνακας του A να αποδείξτε ότι ισχύει $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$.

Λύση

Επειδή

$$AA^{-1} = I \Rightarrow |AA^{-1}| = |I| \Rightarrow |AA^{-1}| = 1$$

Γνωρίζουμε επίσης από τις ιδιότητες των οριζουσών ότι

$$|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$$

άρα πράγματι ισχύει

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1.$$

Άσκηση 8. Ένας τετραγωνικός πίνακας A ικανοποιεί τη σχέση $A^2 = 2A + I$. Να δειχθεί ότι ο πίνακας A έχει αντίστροφο και να βρεθεί ο A^{-1} συναρτήσει του A.

Λύση

Από τη σχέση που μας δίνει η άσκηση θα έχουμε

$$A^2 = 2A + I \Rightarrow A^2 - 2A = I \Rightarrow AA - 2IA = I \Rightarrow (A - 2I)A = I. \qquad (1)$$

Παίρνουμε ορίζουσα πρώτου και δεύτερου μέλους

$$|(A - 2I)A| = |I| \Rightarrow |(A - 2I)| \cdot |A| = |I| \Rightarrow |(A - 2I)| \cdot |A| = 1.$$

Άρα $|A| \neq 0$ και συνεπώς υπάρχει ο αντίστροφος του A.
Πολλαπλασιάζουμε την σχέση (1) από δεξιά με τον αντίστροφο A^{-1} και προκύπτει

$$(A - 2I)A = I \Rightarrow (A - 2I)AA^{-1} = IA^{-1} \Rightarrow (A - 2I)I = A^{-1} \Rightarrow$$
$$A^{-1} = A - 2I.$$

Άσκηση 9. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x + 6y + 2z - 4\omega &= \ \ 2 \\ x + 2y + 3z + 2\omega &= -1 \\ -x - \ \ y + 2z + \ \ \omega &= \ \ 2 \\ 3x + 9y + 3z - 6\omega &= \ \ 3 \end{aligned}$$

Λύση:

Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων και παρατηρούμε ότι $|A| = 0$ οπότε συνεχίζουμε να ελέγξουμε τις 3×3 υποορίζουσες για να βρούμε το βαθμό του A.

Παίρνουμε την πρώτη υποορίζουσα,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

άρα $\text{rank}A = 3$.

Για να δούμε αν έχει λύση το σύστημα πρέπει να βρούμε και το βαθμό του επαυξημένου πίνακα του συστήματος:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Παίρνουμε τις 5 υποορίζουσες 4×4 που έχει ο επαυξημένος πίνακας και ελέγχουμε την τιμή τους. Έτσι έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 3 & -6 \end{vmatrix} = |A| \overset{\text{άρα}}{=} 0\,, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Δηλαδή όλες οι 4×4 ορίζουσες του επαυξημένου πίνακα είναι μηδέν άρα $\text{rank}E = 3$ αφού ήδη μία υποορίζουσα 3×3 του E (η D) την έχουμε ελέγξει και έχουμε βρει ότι είναι διάφορη του μηδενός. Συνεπώς $\text{rank}A = \text{rank}E = 3 < n = 4$. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $n - \text{rank}A = 4 - 3 = 1$ παράμετρο.

Επαναληπτικές ασκήσεις

Το επόμενο βήμα καθορίζεται από την υποορίζουσα $D_{3\times 3}$ που βρήκαμε ότι η τιμή της είναι διάφορη του μηδενός (ή όποια άλλη υποορίζουσα 3×3 βρούμε διάφορη του μηδενός).
Παίρνουμε τις εξισώσεις και τους αγνώστους που 'εμπλέκονται' με αυτή την υποορίζουσα. Δηλαδή:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \downarrow x & \downarrow y & \downarrow z \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{1η εξίσωση} \rightarrow \\ \text{2η εξίσωση} \rightarrow \\ \text{3η εξίσωση} \rightarrow \end{array} & \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \end{array}$$

Η υποορίζουσα που εξετάσαμε και τη βρήκαμε διάφορη του μηδενός αφορά στις τρεις πρώτες εξισώσεις και στους τρεις πρώτους αγνώστους. Έτσι παίρνουμε τις τρεις πρώτες εξισώσεις από το σύστημα (αγνοώντας προς το παρόν την τέταρτη) και τους τρεις πρώτους αγνώστους θεωρώντας τον τέταρτο άγνωστο ω σαν παράμετρο $\omega = t$ που θα πάει στο δεύτερο μέλος.

Άρα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 2x + 6y + 2z &= 2 + 4t \\ x + 2y + 3z &= -1 - 2t \\ -x - \ \ y + 2z &= 2 - t \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad A^* \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^* \quad (1)$$

Το σύστημα αυτό είναι Cramer 3×3 και μάλιστα γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του είναι διάφορη του μηδενός αφού πρόκειται για την ορίζουσα D.
Άρα αυτό το σύστημα των τριών εξισώσεων με τους τρεις αγνώστους έχει μία και μοναδική λύση μόνο που αυτή η λύση έχει μέσα μία παράμετρο t άρα ουσιαστικά πρόκειται για σύστημα με άπειρες λύσεις.
Βρίσκουμε τον αντίστροφο πίνακα του A^* που είναι,

$$A^{*^{-1}} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1 \\ 5/14 & -3/7 & 2/7 \\ -1/14 & 2/7 & 1/7 \end{pmatrix} \quad \text{ενώ} \quad \mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} 2+4t \\ -1-2t \\ 2-t \end{pmatrix}$$

και συνεπώς η λύση του συστήματος (1) είναι:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1 \\ 5/14 & -3/7 & 2/7 \\ -1/14 & 2/7 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+4t \\ -1-2t \\ 2-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t-4 \\ 2(7t+6)/7 \\ (-7t-1)/7 \end{pmatrix}$$

Άρα οι άπειρες λύσεις του αρχικού συστήματος είναι:

$$x = -3t - 4, \quad y = \frac{2}{7}(7t+6), \quad z = \frac{1}{7}(-7t-1), \quad \omega = t$$

Η λύση αυτή επαληθεύει και την τέταρτη εξίσωση του συστήματος.

Άσκηση 10. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Λύση

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0$$

άρα $\lambda_1 = 2$ απλή ρίζα και $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ διπλή.
Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα για κάθε ιδιοτιμή ξεχωριστά.

Επαναληπτικές ασκήσεις

Για $\lambda_1 = 2$ θα έχουμε

$$(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rl} -2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 0x_3 &= 0. \end{array}$$

οπότε για $x_3 = t_1$ οι 2 πρώτες εξισώσεις δίνουν $x_1 = -t_1$ και $x_2 = t_1$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή είναι

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \begin{pmatrix} -t_1 \\ t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

Για $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ η σχέση $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ δίνει το σύστημα,

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε ένα ομογενές σύστημα με μία εξίσωση (και η πρώτη είναι ίδια με τις άλλες δύο) και τρεις αγνώστους οπότε ο βαθμός του είναι προφανώς 1.

Επαναληπτικές ασκήσεις

Άρα θα θεωρήσουμε δύο αγνώστους ως παραμέτρους, εδώ π.χ. $x_2 = t_2$ και $x_3 = t_3$ και συνεπώς η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -t_2 - t_3.$$

Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη διπλή ιδιοτιμή είναι

$$\boldsymbol{\delta_2} = \begin{pmatrix} -t_2 - t_3 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

Το τελευταίο αυτό διάνυσμα μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή

$$\boldsymbol{\delta_2} = \begin{pmatrix} -t_2 - t_3 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_2 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t_3 \\ 0 \\ t_3 \end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

Άρα για την διπλή ιδιοτιμή έχουμε δύο ιδιοδιανύσματα που προκύπτουν αν βάλουμε $t_3 = 0$, οπότε θα πάρουμε το $\boldsymbol{\delta_2}$, και για $t_2 = 0$ θα πάρουμε το $\boldsymbol{\delta_3}$, δηλαδή

$$\boldsymbol{\delta_2} = t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta_3} = t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

τα οποία μαζί με το $\boldsymbol{\delta_1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αφού αν πάρουμε την ορίζουσα ενός πίνακα με στήλες τα ιδιοδιανύσματα που βρήκαμε (π.χ. για $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, αλλά και για κάθε $t_1, t_2, t_3 \neq 0$), θα έχουμε

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Άρα σύμφωνα με την πρόταση 1 που παραθέσαμε νωρίτερα, τα τρία ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άσκηση 11. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί, αν υπάρχει, ορθογώνιος πίνακας Q που τον διαγωνιοποιεί.

Λύση

Παρατηρούμε ότι ισχύει $A = A^T$ και συνεπώς ο πίνακας A είναι συμμετρικός, δηλαδή διαγωνιοποιείται.

Οι ιδιοτιμές του A είναι,

$$|A - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 7, \lambda_2 = 2$$

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του είναι

$$\boldsymbol{\delta_1} = t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\delta_2} = t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

τα οποία, αφού αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Επαναληπτικές ασκήσεις

Για $t_1 = t_2 = 1$ παίρνουμε δύο ιδιοδιανύσματα και κατασκευάζουμε τον πίνακα,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ο οποίος δεν είναι ορθογώνιος $(P^{-1} \neq P^T)$ αφού

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

αλλά βέβαια διαγωνιοποιεί τον A αφού αν βρούμε και τον Δ,

$$\Delta = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

θα ισχύει η σχέση διαγωνιοποίησης,

Επαναληπτικές ασκήσεις

$$P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Κανονικοποιούμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A,

$$\boldsymbol{q_1} = \frac{\boldsymbol{\delta_1}}{||\boldsymbol{\delta_1}||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q_2} = \frac{\boldsymbol{\delta_2}}{||\boldsymbol{\delta_2}||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

οπότε παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{q_i} \cdot \boldsymbol{q_j} = 0$ αν $i \neq j$ και $\boldsymbol{q_i} \cdot \boldsymbol{q_j} = 1$ αν $i = j$ και συνεπώς ο πίνακας που κατασκευάζεται από τα $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος. Γνωρίζουμε όμως ότι $Q^{-1} = Q^T$. Ο πίνακας Q διαγωνιοποιεί τον συμμετρικό πίνακα A αφού,

$$Q\Delta Q^{-1} = Q\Delta Q^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Άσκηση 12. Να λυθεί το $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}}, \qquad -3 < x < 3$

Λύση

Έχουμε τη μορφή $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ και συνεπώς θέτουμε $\omega = \arcsin(bx/a) = \arcsin(x/3) \Rightarrow x/3 = \sin\omega \Rightarrow x = 3\sin\omega$.Άρα $dx = 3\cos\omega\, d\omega$ στο πρωτεύον τόξο $-\pi/2 < \omega < \pi/2$.

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{27\sin^3\omega \cdot 3\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{9 - 9\sin^2\omega}} = \int \frac{27\sin^3\omega \cdot 3\cos\omega\, d\omega}{3\sqrt{1-\sin^2\omega}} =$$

$$= \int \frac{27\sin^3\omega \cdot 3\cos\omega\, d\omega}{3|\cos\omega|} \overset{\cos\omega>0}{=} 27\int \sin^3\omega\, d\omega =$$

$$= 27\int \sin^2\omega\, \sin\omega\, d\omega = 27\int (1-\cos^2\omega)\sin\omega\, d\omega =$$

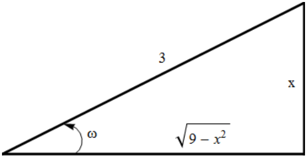
$$= 27\int \sin\omega\, d\omega - 27\int \cos^2\omega\, \sin\omega\, d\omega =$$

$$= -27\cos\omega + 9\int (\cos^3\omega)' d\omega = -27\cos\omega + 9\cos^3\omega + C$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} = -27\cos\omega + 9\cos^3\omega + C \qquad (2)$$

Από την αρχική υπόθεση έχουμε $\sin\omega = x/3$. Χρειάζεται να βρούμε και την σχέση του $\cos\omega$ με το x.



$$\cos\omega = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \quad \text{άρα}$$

$$(1) = -27 \cdot \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + 9\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right)^3 + C =$$

$$= -9\sqrt{9-x^2} + \frac{(9-x^2)^{3/2}}{3} + C\,.$$