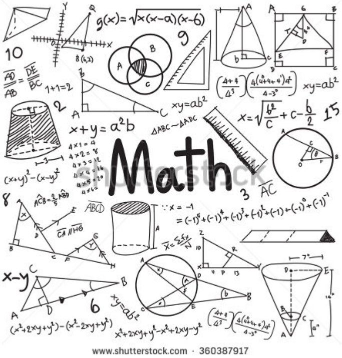
Ας ξεκινήσουμε λοιπόν...

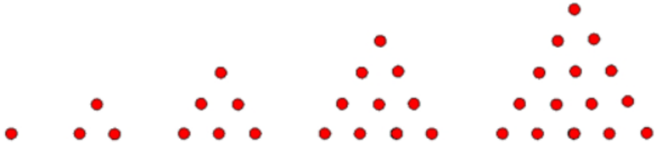
13η εβδομάδα μαθημάτων



- Ακολουθίες
- Σειρές
- Δυναμοσειρές

Ακολουθίες

Με τον όρο ακολουθία εννοούμε μία συγκεκριμένη διάταξη αριθμών (ή εν γένει πραγμάτων) όπου με σαφήνεια έχουν ορισθεί οι διαδοχικοί της όροι.



Έχει ορισθεί ο πρώτος, ο δεύτερος, ο νιοστός όρος κλπ.

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε μία συγκεκριμένη διαδικασία (αλγόριθμος) που μας δημιουργεί τους όρους της ακολουθίας και συνεπώς και τη σειρά τους.

Ακολουθίες

Ορισμός

Ακολουθία αριθμών με άπειρους όρους ορίζεται η συνάρτηση που έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών συμπεριλαμβανομένου και του μηδενός.

Συμβολισμός: η ακολουθία συνήθως συμβολίζεται ως $\{a_n\}$.

Το n μπορεί να ξεκινά από το 0 ή από το 1 ή από ένα μεγαλύτερο ακέραιο αροθμό n_0.

Ακολουθίες

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι πρώτοι όροι της ακολουθίας $\{a_n\} = \left\{\frac{n+1}{n^2}\right\}$.

Οι όροι της ακολουθίας θα είναι:

$$
\begin{aligned}
n = 1 \quad a_1 &= \frac{1+1}{1^2} = 2, \\
n = 2 \quad a_2 &= \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4}, \\
n = 3 \quad a_3 &= \frac{3+1}{3^2} = \frac{4}{9}, \\
n = 4 \quad a_4 &= \frac{4+1}{4^2} = \frac{5}{16} \\
n = 5 \quad a_5 &= \frac{5+1}{5^2} = \frac{6}{25} \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}
$$

Ορισμός - Όριο Ακολουθίας

Θα λέμε ότι μία ακολουθία $\{a_n\}$ **συγκλίνει** στον αριθμό L (**όριο**) αν για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει θετικός ακέραιος αριθμός N που εξαρτάται από το ϵ τέτοιος ώστε για κάθε $n > N$ να μπορούμε να έχουμε όσους όρους θέλουμε όσο κοντά θέλουμε στον αριθμό L, δηλαδή,

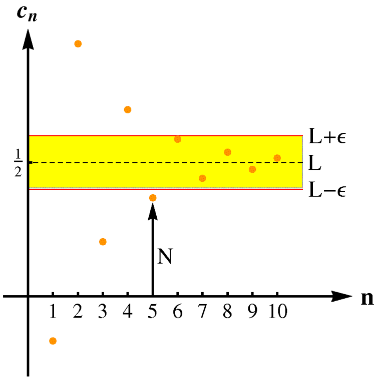
$$\text{η } \{a_n\} \text{ συγκλίνει στο } L \text{ αν } \forall \epsilon > 0 \;\; \exists\, N(\epsilon) : \forall\, n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

Αν υπάρχει ο αριθμός L τότε θα λέμε ότι το όριο της ακολουθίας είναι το L και θα γράφουμε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Διαφορετικά λέμε ότι η ακολουθία **αποκλίνει**.

Όριο Ακολουθίας - Παραδείγματα

Να δειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $c_n = \dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ συγκλίνει στον αριθμό $1/2$.



Λύση:
Σύμφωνα με τον ορισμό για να αποδείξουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει στο $L = 1/2$ θα πρέπει για $\epsilon > 0$ να δείξουμε,

$$\forall\ n > N \Rightarrow |c_n - L| < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\right| < \epsilon \Rightarrow \left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right| < \epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \epsilon\,.$$

Παίρνοντας τους λογαρίθμους των δύο θετικών μελών βρίσκουμε,

$$\ln\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] < \ln(\epsilon) \Rightarrow n \ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln(\epsilon)\,.$$

Όμως $\ln(2/3) < 0$ και συνεπώς,

$$n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \quad \text{που σημαίνει ότι για κάθε} \quad N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

η ακολουθία με γενικό όρο $c_n = \dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ θα συγκλίνει στον αριθμό $1/2$.

Όριο Ακολουθίας - Παραδείγματα

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \dfrac{1}{n}$ συγκλίνει στο μηδέν.

Λύση:

Σύμφωνα με τον ορισμό θα πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\ N(\epsilon) : \forall\ n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

'ρα η $a_n = 1/n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ συγκλίνει στο 0 όταν,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Συνεπώς για κάθε ακέραιο θετικό $N > 1/\epsilon$ η ακολουθία $a_n = 1/n$ συγκλίνει στο μηδέν.

Κάθε ακολουθία που συγκλίνει στο μηδέν λέγεται **μηδενική** ακολουθία.

Όριο Ακολουθίας

Ιδιότητες ορίων ακολουθιών:

Αν τα όρια των ακολουθιών $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ και $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$ τότε,

- $\lim_{n\to\infty}(c\, a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n = c\, L_1$, όταν c πραγματικός αριθμός
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 \pm L_2$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = L_1\, L_2$
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}$ με $L_2 \neq 0$
- αν $a_n \geq 0$ τότε $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$
- αν $a_n \geq b_n$ τότε $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$.

Ακολουθίες

Θεώρημα: Έστω τρεις συγκλίνουσες ακολουθίες a_n, b_n και c_n. Αν για κάθε $n > N$ ισχύει $a_n \leq b_n \leq c_n$ τότε,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n \, .$$

Στην περίπτωση δε που έχουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ τότε και

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L \, .$$

Θεώρημα:Αν το όριο της απόλυτης τιμής μίας ακολουθία a_n να είναι μηδέν τότε και το όριο της ίδιας της a_n είναι μηδέν, δηλαδή,

$$\text{αν} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \, .$$

Ακολουθίες

Θεώρημα: Έστω η ακολουθία a_n συγκλίνει στο L και έστω f συνεχής συνάρτηση στο L και ορισμένη για κάθε a_n τότε,

$$f(a_n) \Rightarrow f(L).$$

Θεώρημα: Έστω συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη για κάθε $x \geq n_0$ και a_n ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n = f(n)$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε

$$\text{αν} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = L\,.$$

Ακολουθίες - Άσκηση

Χρησιμοποιώντας προηγούμενο θεώρημα εξετάστε αν η ακολουθία με γενικό όρο $b_n = \dfrac{\cos\ n}{3n}$ συγκλίνει.

Λύση:

Επειδή γνωρίζουμε ότι $-1 \leq \cos n \leq 1$ διαιρούμε όλα τα μέλη με $3n$ χωρίς να αλλάξει η φορά των ανισοτήτων αφού $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Συνεπώς προκύπτει

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{3n} \leq \frac{\cos n}{3n} \leq \frac{1}{3n}\,.$$

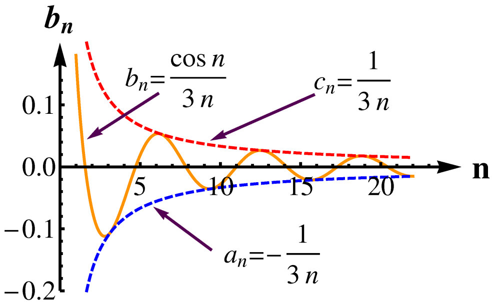
Ας ονομάσουμε $a_n = \dfrac{-1}{3n}$ και $c_n = \dfrac{1}{3n}$. Από προηγούμενη άσκηση όμως έχουμε αποδείξει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ και συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Ακολουθίες - Άσκηση

Άρα λόγω του πρώτου προηγούμενου θεωρήματος βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η ακολουθία b_n συγκλίνει και το όριο της είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{3n} = 0\,.$$



Ακολουθίες - Άσκηση

Χρησιμοποιώντας προηγούμενο θεώρημα εξετάστε αν η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ συγκλίνει.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ που ορίζεται για κάθε $n \geq 1$, τότε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Άρα η $\{a_n\}$ συγκλίνει στο 0.

Ορισμός

Μία ακολουθία $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ λέγεται **αύξουσα** όταν ισχύει

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

και **φθίνουσα** όταν αντίστοιχα

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

Κάθε αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία λέγεται **μονότονη**.

Στην περίπτωση όπου οι πιο πάνω ανισότητες δεν περιέχουν το ίσον τότε οι ακολουθίες ονομάζονται γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα αντίστοιχα (και βέβαια γνησίως μονότονες).

Παράδειγμα:Εξετάστε ως προς τη μονοτονία την ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ όταν $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Λύση:
Παίρνουμε την ανισότητα $a_{n+1} > a_n$ δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας,

$$\begin{aligned} a_{n+1} > a_n \quad &\Rightarrow \quad \frac{n+1}{n+1+1} > \frac{n}{n+1} \Rightarrow (n+1)^2 > n(n+2) \\ &\Rightarrow \quad n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \Rightarrow 1 > 0\,. \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα είναι αληθής συνεπώς και η πρώτη ανισότητα θα είναι αληθής δηλαδή η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

Ορισμός

Μία ακολουθία $\{a_n\}$ θα λέμε ότι είναι **άνω φραγμένη** αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε να ισχύει $a_n \leq M$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ο αριθμός M ονομάζεται **άνω φράγμα** της ακολουθίας.

Μία ακολουθία $\{a_n\}$ θα λέμε ότι είναι **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός N τέτοιος ώστε να ισχύει $a_n \geq N$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ο αριθμός N ονομάζεται **κάτω φράγμα** της ακολουθίας.

Μία ακολουθία θα λέγεται **φραγμένη** αν είναι συγχρόνως άνω και κάτω φραγμένη.

Παράδειγμα:Εξετάστε αν η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 3 - n^2$, όταν $n = 1, 2, 3, \dots,$ έχει κάποιο είδος φράγματος.

Λύση:
Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας $\{a_n\}$ είναι

$$a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = -6, \cdots$$

δηλαδή φαίνεται ότι $a_n \leq 2$ για κάθε n. Πράγματι επειδή για κάθε ακέραιο θετικό $n = 1, 2, 3, \dots$ έχουμε

$$n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq 1 \Rightarrow -n^2 \leq -1 \Rightarrow 3 - n^2 \leq 3 - 1 \Rightarrow a_n \leq 2$$

και συνεπώς η ακολουθία είναι άνω φραγμένη με άνω φράγμα τον αριθμό 2. Κάθε αριθμός μεγαλύτερος του 2 είναι ένα άνω φράγμα της ακολουθίας $\{a_n\}$.

Ακολουθίες

Θεώρημα: Κάθε ακολουθία αύξουσα και άνω φραγμένη ή φθίνουσα και κάτω φραγμένη είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

Παράδειγμα:Εξετάστε αν η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \dfrac{1}{n}$ συγκλίνει.

Λύση:

Αν γράψουμε τους πρώτους όρους της ακολουθίας $\{a_n\}$,

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$$

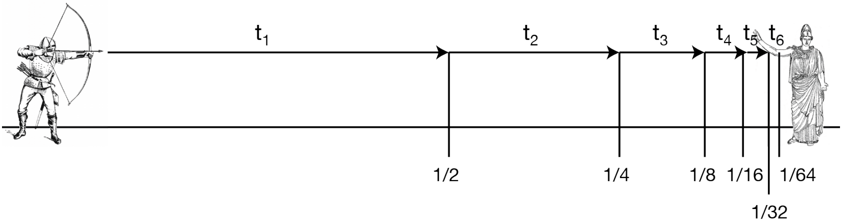
διαπιστώνουμε αμέσως ότι είναι φραγμένη αφού όλοι οι όροι της βρίσκονται στο διάστημα $0 < a_n \leq 1$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ταυτόχρονα είναι φθίνουσα γιατί ισχύει, για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$n + 1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} < a_n \,.$$

Άρα σύμφωνα με το τελευταίο θεώρημα, η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει. (Έχουμε αποδείξει ότι η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 1/n$ συγκλίνει στο μηδέν.)

Το παράδοξο του Ζήνωνα...



Σειρές

Ορισμός

Θα ονομάζουμε **άπειρη σειρά** ή απλώς **σειρά** κάθε άθροισμα που μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ονομάζοντας τους αριθμούς $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ **όρους** της σειράς. Η $\{a_n\}$ μπορεί να θεωρηθεί μία ακολουθία αριθμών.

Ο δείκτης n μπορεί να ξεκινά από το μηδέν ή άλλο ακέραιο αριθμό και ο όρος a_n ονομάζεται ο n-**ιοστός όρος** της σειράς.

Ο συμβολισμός της σειράς πολλές φορές απλοποιείται και γράφεται $\sum a_n$.

Σειρές

Για να αναφερθούμε στην έννοια του αθροίσματος και της σύγκλισης μιας σειράς θα χρειαστεί πρώτα να ορίσουμε τα μερικά αθροίσματα της.

Έστω ότι έχουμε τη σειρά $\sum a_n$ και παίρνουμε τα πεπερασμένα αθροίσματα $s_n,\ \ n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

τα οποία τα ονομάζουμε **μερικά αθροίσματα** της σειράς και αποτελούν μία ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Σειρές

Ορισμός

Αν έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ μία σειρά και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\{s_n\}$ συγκλίνει στο S, τότε θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Το όριο S θα λέγεται το **άθροισμα της σειράς** και θα γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_{n\to\infty} s_n = S\,.$$

Αν η ακολουθία $\{s_n\}$ αποκλίνει τότε θα λέμε ότι η σειρά $\sum a_n$ **αποκλίνει**.

Σειρές

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι η σειρά

$$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots$$

συγκλίνει και έχει άθροισμα $1/9$.

Λύση:

Η σειρά είναι ουσιαστικά ο δεκαδικός

$$0.1111\ldots = 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} 0.1111\ldots &= 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots \end{aligned}$$

οπότε αν δημιουργήσουμε τα μερικά αθροίσματα της σειράς θα έχουμε:

Σειρές

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{10} = 0.1 \\
s_2 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} = 0.11 \\
s_3 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} = 0.111 \\
&\vdots \\
s_n &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n} = 0.\underbrace{111\ldots1}_{n} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Διαιρούμε τον n-ιοστό όρο των μερικών αθροισμάτων με το 10 οπότε προκύπτει η σχέση

$$\frac{1}{10}s_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}}$$

Σειρές

$$s_n - \frac{1}{10}s_n = \frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}} \Rightarrow \frac{9s_n}{10} = \frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$
$$\Rightarrow s_n = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Όμως το όριο του $1/10^n$ είναι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ και συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{9}$$

δηλαδή το άθροισμα της σειράς είναι

$$\begin{aligned} 0.1111\ldots &= 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

και γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}$.

Σειρές

Ορισμός

Κάθε σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots, \quad a \neq 0$$

ονομάζεται **γεωμετρική σειρά**.

Παρατηρήστε ότι κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο αν πολλαπλασιαστεί με μία σταθερά r. Την σταθερά r την λέμε **λόγο** της γεωμετρικής σειράς.

Σειρές

Θεώρημα: Κάθε γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots\,, \quad a \neq 0$$

με λόγο r συγκλίνει αν $|r| < 1$ και αποκλίνει αν $|r| \geq 1$.

Αν η σειρά συγκλίνει τότε το άθροισμα της θα δίνεται από την σχέση

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}\,, \quad |r| < 1\,.$$

Σειρές

Παράδειγμα: Να βρεθεί, αν υπάρχει, το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Λύση:
Η σειρά έχει όρους

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = 2(1) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots$$

δηλαδή πρόκειται για γεωμετρική σειρά με λόγο $r = 1/3$ και $a = 2$. Επειδή $|r| < 1$ σύμφωνα με το τελευταίο θεώρημα η σειρά συγκλίνει και το άθροισμα της είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3\,.$$

Σειρές

Ορισμός

Κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, της οποίας ο γενικός όρος μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$a_n = f(n) - f(n+1)$$

ονομάζεται **τηλεσκοπική σειρά**.

τότε το άθροισμά δίνεται από τον τύπο

$$s_n = f(1) - f(n+1).$$

Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, της οποίας ο γενικός όρος μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$a_n = Af(n) + Bf(n+1) + Cf(n+2), \; A+B+C=0$$

τότε το άθροισμα δίνεται από τον τύπο

$$s_n = A(f(1) - f(n+1)) - C(f(2) - f(n+2)).$$

Ασκήσεις:

Να βρεθούν τα αθροίσματα των παρακάτω σειρών

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+2}{k(k+1)(k+2)}$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

Σειρές

Θεώρημα: Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Παρατήρηση: Η αντίστροφη πρόταση δεν ισχύει. Δηλαδή, αν το $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ τότε δεν σημαίνει κατά ανάγκη ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Κριτήριο n-ιοστού όρου απόκλισης

Θεώρημα: Αν το $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Σειρές

Παραδείγματα: Εξετάστε, με το κριτήριο του n-ιοστού όρου απόκλισης, αν οι σειρές (α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, και (β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, συγκλίνουν.

Λύση:

(α) Ο n-ιοστός όρος της πρώτης σειράς έχει όριο

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

και συνεπώς σύμφωνα με το κριτήριο του n-ιοστού όρου συμπεραίνουμε ότι η σειρά αποκλίνει.

(β) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ και σύμφωνα με το κριτήριο του n-ιοστού όρου και την παρατήρηση που είδαμε δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν η συγκεκριμένη σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει.

Σειρές

Ιδιότητες συγκλινουσών σειρών

Έστω οι συγκλίνουσες σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} = B$. Αν A, B και c πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c\, A$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$.
4. αν c_1, c_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 A + c_2 B.$$

Επίσης

5. Αν μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι αποκλίνουσα, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι αποκλίνουσα.

6. Αν μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι αποκλίνουσα ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι συγκλίνουσα, τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ είναι αποκλίνουσες.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{3^{n+1}}{4^n}\right)$ συγκλίνει και βρείτε το άθροισμα της.

Λύση:

Ο γενικός όρος της σειράς γράφεται

$$\frac{2}{3^n}+\frac{3^{n+1}}{4^n}=2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{3^{n+1}}{4^n}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

αρκεί οι επί μέρους σειρές να είναι συγκλίνουσες.

Όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ είναι γεωμετρική αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots$$

με πρώτο όρο $a = 1/3$ και ακτίνα $r = 1/3$.

Άρα η σειρά είναι συγκλίνουσα (αφού $|r| < 1$) και το άθροισμα της είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Σειρές

Ομοίως η $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ είναι επίσης συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά με $a = 3/4$ και $r = 3/4$ και συνεπώς έχει άθροισμα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 3\,.$$

Άρα τελικά το ζητούμενο άθροισμα είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{3^{n+1}}{4^n}\right) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 3\\ &= 1+9\\ &= 10\,.\end{aligned}$$

Κριτήριο ολοκληρώματος

Θεώρημα: Αν $f(x)$ είναι μία συνεχής, θετική και φθίνουσα συνάρτηση για κάθε $x \in [1, \infty)$ και a_n μία ακολουθία με $a_n = f(n)$, τότε

η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα συγκλίνει αν το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ συγκλίνει, ενώ

η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα αποκλίνει αν το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ αποκλίνει.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Παράδειγμα: Με χρήση του κριτηρίου του ολοκληρώματος ελέγξτε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+1}$ συγκλίνει.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$. Παρατηρούμε ότι για $x \geq 1$ αυτή είναι συνεχής, θετική και φθίνουσα οπότε ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες του κριτηρίου του ολοκληρώματος.
Άρα για να αποφανθούμε αν η σειρά συγκλίνει ή όχι αρκεί να υπολογίσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

και να ελέγξουμε την σύγκλιση του.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{4}{x^2+1}\,dx$$

θέτουμε $\omega = \arctan x$ τότε $x = \tan\omega \Rightarrow dx = \sec^2\omega\, d\omega$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{4}{x^2+1}\,dx = 4\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sec^2\omega\, d\omega}{1+\tan^2\omega}\\ &= \frac{4\pi}{2}-\frac{4\pi}{4}\\ &= \pi\end{aligned}$$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει σε πεπερασμένο αριθμό συνεπώς σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος η σειρά συγκλίνει.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Παράδειγμα: Με χρήση του κριτηρίου του ολοκληρώματος αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει (**αρμονική σειρά**).

Λύση:

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ για $x \geq 1$ είναι συνεχής, θετική και φθίνουσα και συνεπώς υπολογίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} [\log x]_1^n = \lim_{n\to\infty} (\log n - \log 1)\\ &= \infty - 0 = \infty\end{aligned}$$

δηλαδή μη πεπερασμένος αριθμός οπότε το ολοκλήρωμα αποκλίνει και συνεπώς σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Ορισμός

Η γενίκευση της αρμονικής σειράς ονομάζεται **γενικευμένη αρμονική σειρά** ή **σειρά-p** και ορίζεται ως $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Παράδειγμα: Με χρήση του κριτηρίου του ολοκληρώματος αποδείξτε ότι η γενικευμένη αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει όταν $0 < p \leq 1$.

Λύση:
Η συνάρτηση $f(x) = 1/x^p$ για $x \geq 1$ και $p \geq 0$ είναι συνεχής, θετική και φθίνουσα και συνεπώς πληρεί όλες τις συνθήκες εφαρμογής του κριτηρίου.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{αν } \ p > 1, \ \ \text{δηλαδή συγκλίνει} \\ \text{αποκλίνει} & \text{αν } \ 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

και συνεπώς σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος η γενικευμένη αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $0 < p \leq 1$.

Κριτήριο σύγκρισης

Θεώρημα: Έστω οι σειρές θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

- Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι συγκλίνουσα και $a_n \leq b_n$ για όλα τα n, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι επίσης συγκλίνουσα.
- Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι αποκλίνουσα και $a_n \geq b_n$ για όλα τα n, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι επίσης αποκλίνουσα.

Παράδειγμα: Με χρήση του κριτηρίου σύγκρισης ελέγξτε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3n+5}$ συγκλίνει.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι αν μειώσουμε τον παρανομαστή κατά τους δύο τελευταίους όρους θα ισχύει

$$\frac{2}{n^2+3n+5} < \frac{2}{n^2}$$

αφού ο παρανομαστής στο αριστερό μέλος είναι μεγαλύτερος για κάθε $n \geq 1$. Ονομάζουμε το αριστερό μέλος της ανισότητας a_n και το δεξιό b_n. Γνωρίζουμε όμως ότι,

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

συγκλίνει γιατί είναι η γενικευμένη αρμονική σειρά για $p = 2$.

Άρα αφού $a_n \leq b_n$ και $\sum b_n$ συγκλίνει σύμφωνα με την πρώτη πρόταση του κριτηρίου σύγκρισης και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 3n + 5}$$

συγκλίνει.

Κριτήριο οριακής σύγκρισης

Θεώρημα: Έστω οι σειρές θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = K$$

όπου K πεπερασμένος θετικός αριθμός.

Τότε και οι δύο σειρές $\sum a_n$, $\sum b_n$ θα είναι ταυτόχρονα συγκλίνουσες ή αποκλίνουσες.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Παράδειγμα: Ελέγξτε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n - 5}$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

Λύση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n - 5} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 5}$$

οπότε αν ονομάσουμε

$$a_n = \frac{1}{3^n - 5} \qquad \text{και} \qquad b_n = \frac{1}{3^n}$$

και πάρουμε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n - 5}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{5}{3^n}} = 1$$

παρατηρούμε ότι αυτό είναι πεπερασμένος θετικός αριθμός. Επίσης η σειρά $\sum b_n = \sum 1/3^n$ είναι συγκλίνουσα και συνεπώς σύμφωνα με το κριτήριο της οριακής σύγκρισης και η σειρά $\sum a_n = \sum 2/(3^n - 5)$ θα είναι συγκλίνουσα.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Κριτήριο του λόγου

Θεώρημα: Έστω η σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ για την οποία έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = k$$

όπου $k \geq 0$. Τότε:

- η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει αν $k < 1$
- η σειρά $\sum a_n$ αποκλίνει αν $k > 1$
- η σειρά $\sum a_n$ δεν γνωρίζουμε αν συγκλίνει ή όχι αν $k = 1$.

Παράδειγμα: Ελέγξτε αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

Λύση:

Ονομάζουμε $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$ οπότε εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\, n!}{3^n\,(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\,3^n\, n!}{3^n\, n!\,(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = 0$$

δηλαδή μικρότερο της μονάδας άρα η σειρά συγκλίνει.

Κριτήριο της ρίζας

Θεώρημα: Έστω η σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ για την οποία έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

τότε:

- η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει αν $k < 1$
- η σειρά $\sum a_n$ αποκλίνει αν $k > 1$
- η σειρά $\sum a_n$ δεν γνωρίζουμε αν συγκλίνει ή όχι αν $k = 1$.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Παράδειγμα: Ελέγξτε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n^n}$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

Λύση:

Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n/n}}{n^{n/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n} = 0 < 1$$

οπότε βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η σειρά συγκλίνει.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Ασκήσεις: Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k+1}{k^3}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}$

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Ασκήσεις: Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+4^k}{4^k+5^k}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x \ln x}$

Εναλλασσόμενες σειρές

Σειρές με ετερόσημους όρους

Εναλλασσόμενες σειρές (οι όροι τους εναλλάσσουν πρόσημα)

Παράδειγμα

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

είναι μία εναλλασσόμενη σειρά.

Εναλλασσόμενες σειρές

Θεώρημα: Έστω $a_n > 0$. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ και ταυτόχρονα $a_{n+1} \leq a_n$ για κάθε $n \geq N$ με N ακέραιο, τότε οι εναλλασσόμενες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

συγκλίνουν.

Εναλλασσόμενες σειρές

Παράδειγμα: Ελέγξτε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $a_n > 0$ και $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Άρα η πρώτη συνθήκη του προηγούμενου θεωρήματος ικανοποιείται. Επίσης και η δεύτερη συνθήκη ικανοποιείται αφού

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n$$

για όλα τα n. Άρα μπορούμε, σύμφωνα με το τελευταίο θεώρημα να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι η σειρά συγκλίνει.

Απόλυτη σύγκλιση

Θεώρημα: Αν η σειρά $\sum |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum a_n$ επίσης συγκλίνει.

Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει **απολύτως**.

Απόλυτη σύγκλιση

Παράδειγμα: Βρείτε αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n^2}$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

Λύση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

είναι συγκλίνουσα αφού πρόκειται για την αρμονική σειρά με $p = 2 > 1$. Άρα η δοσμένη σειρά συγκλίνει απολύτως και συνεπώς σύμφωνα με το τελευταίο θεώρημα είναι συγκλίνουσα.

Απόλυτη σύγκλιση

Παρατήρηση: Αν μία σειρά συγκλίνει δεν σημαίνει κατ΄ ανάγκη ότι συγκλίνει και απολύτως.

Θεώρημα: Αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει αλλά η σειρά $\sum |a_n|$ αποκλίνει, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει **υπό συνθήκη**.

Απόλυτη σύγκλιση

Παράδειγμα: Ελέγξτε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

Λύση:

Η σειρά είναι εναλλασσόμενη και γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1/3}}$$

$a_n = \frac{1}{n^{1/3}}$ για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{1/3}} \leq \frac{1}{n^{1/3}} = a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = 0\,.$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα που αναφέραμε στις εναλλασσόμενες σειρές η σειρά συγκλίνει. Όμως η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$$

αποκλίνει αφού είναι η αρμονική σειρά με $p = 1/3 < 1$. 'ρα σύμφωνα με το τελευταίο θεώρημα η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη.

Ορισμός

Αν x είναι μία μεταβλητή, τότε κάθε σειρά απείρων όρων της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-k)^n = a_0 + a_1(x-k) + a_2(x-k)^2 + \cdots + a_n(x-k)^n + \cdots$$

λέγεται **δυναμοσειρά με κέντρο k**, όπου a_n και k σταθεροί αριθμοί.

Δυναμοσειρές

• Στην περίπτωση όπου το κέντρο της σειράς k είναι το μηδέν τότε η δυναμοσειρά απλοποιείται στη μορφή:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Έτσι για παράδειγμα η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n = 1 + (x-1) + 2(x-1)^2 + 6(x-1)^3 + 24(x-1)^4 + \cdots$$

έχει κέντρο το 1, ενώ η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

έχει κέντρο το μηδέν.

Δυναμοσειρές

Στις δυναμοσειρές για κάθε τιμή του x παίρνουμε και μία διαφορετική αριθμητική σειρά. Στην ουσία δηλαδή κάθε δυναμοσειρά είναι μία ολόκληρη οικογένεια από αριθμητικές σειρές.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

Είναι προφανές ότι η σύγκλιση ή η απόκλιση μιας δυναμοσειράς εξαρτάται άμεσα από τη τιμή που παίρνει η μεταβλητή x.

Δυναμοσειρές

Έτσι, στο εν λόγω παράδειγμα μας, για $x = 1$ η δυναμοσειρά

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

ως γενικευμένη αρμονική σειρά $\sum \frac{1}{n^p}$ με $p = 1$ αποκλίνει,ενώ για $x = -1$ η δυναμοσειρά

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$$

ως εναλλασσόμενη σειρά, με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ και $a_{n+1} < a_n$, συγκλίνει.

Δυναμοσειρές

Ορισμός

Αν R είναι ένας θετικός αριθμός και $x \in \mathbb{R}$, τότε θα λέμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει αν $|x-k| < R$ ενώ αν $|x-k| > R$ θα λέμε ότι η σειρά αποκλίνει.

Αν $|x-k| = R$ τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την σύγκλιση της.

Το διάστημα $|x-k| < R$ ονομάζεται **διάστημα σύγκλισης** και ο αριθμός R **ακτίνα σύγκλισης**

Παρατήρηση: Αν $R = \infty$ η δυναμοσειρά θα συγκλίνει για κάθε x. Αν $R = 0$ η δυναμοσειρά θα συγκλίνει για $x = k$ και θα αποκλίνει σε όλα τα άλλα σημεία.

Παράδειγμα: Βρείτε το διάστημα σύγκλισης και την ακτίνα σύγκλισης της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Λύση:

Θα αποδείξουμε ότι η σειρά των απολύτων τιμών συγκλίνει οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα της απόλυτης σύγκλισης, και η απλή σειρά (χωρίς απόλυτα) θα συγκλίνει. Αν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του λόγου με απόλυτες τιμές θα έχουμε

$$k = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1.$$

Άρα αφού $k < 1$ για κάθε x, η σειρά απολύτως (και απλά) συγκλίνει για όλα τα x. ’ρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $(-\infty, +\infty)$ και συνεπώς η ακτίνα σύγκλισης της είναι $R = +\infty$.

Δυναμοσειρές

Παράδειγμα: Βρείτε το διάστημα σύγκλισης των σειρών

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$.
- Έστω η συνάρτηση $\dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$. Να κατασκευάσετε τη σειρά MacLaurin και να βρεθεί το πλήρες διάστημα σύγκλισης της.