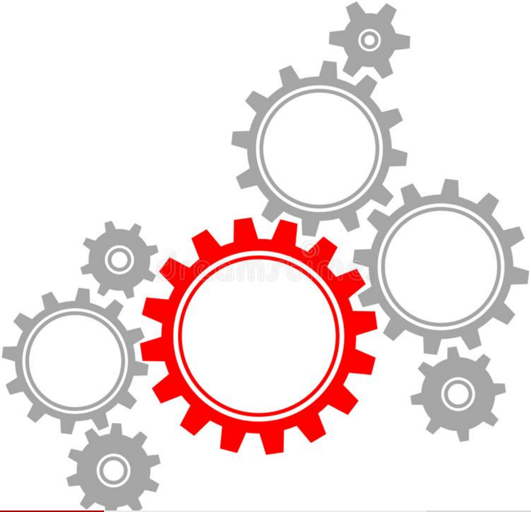
Ας ξεκινήσουμε λοιπόν...

10η - 11η εβδομάδα μαθημάτων (Μέρος Α)



Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Είναι μια γενική μέθοδος για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων. Η μέθοδος βασίζεται στην ανάλυση κλασμάτων σε απλά κλάσματα και ανάγει τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων μιας ρητής συνάρτησης στον υπολογισμό βασικών ολοκληρωμάτων.

Έστω ότι έχουμε τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, όπου $b_p < b_q$.
(Σε περίπτωση που δεν ισχύει κάτι τέτοιο κάνουμε τη διαίρεση και παίρνουμε

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \pi(x) + \frac{u(x)}{q(x)},$$

όπου $b_u < b_q$)

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Αν $b_p < b_q$ είναι γνωστό ότι μια ρητή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:

- Σε κάθε απλό γραμμικό παράγοντα της μορφής $x - r$ του παρονομαστή $q(x)$, δηλαδή σε κάθε απλή ρίζα r του $q(x)$ αντιστοιχεί ένα κλάσμα της μορφής

$$\frac{A}{x-r}$$

.

- Σε κάθε πολλαπλό γραμμικό παράγοντα της μορφής $(x-r)^{\nu}$ του παρονομαστή $q(x)$, δηλαδή σε κάθε πολλαπλή ρίζα r του $q(x)$ αντιστοιχεί ένα άθροισμα n το πλήθος κλασμάτων της μορφής

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-r)^n}.$$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

- Σε κάθε απλό τετραγωνικό παράγοντα της μορφής $x^2 + bx + c$ του παρονομαστή $q(x)$, αντιστοιχεί ένα κλάσμα της μορφής
$$\frac{Bx + C}{x^2 + bx + c}.$$
- Σε κάθε πολλαπλό τετραγωνικό παράγοντα της μορφής $(x^2 + bx + c)^n$ του παρονομαστή $q(x)$, αντιστοιχεί ένα άθροισμα n το πλήθος κλασμάτων της μορφής
$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + bx + c)^n}.$$

1η περίπτωση: η $g(x) = 0$ έχει απλές ρίζες

Αν $\rho_1, \rho_2, \ldots$ οι απλές ρίζες, τότε η $g(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$g(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2)\cdots(x - \rho_{\nu-1})(x - \rho_\nu) = 0.$$

Σε αυτή τη περίπτωση το κλάσμα $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ πάντα αναλύεται στη μορφή

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - \rho_1)} + \frac{A_2}{(x - \rho_2)} + \cdots + \frac{A_{\nu-1}}{(x - \rho_{\nu-1})} + \frac{A_\nu}{(x - \rho_\nu)}.$$

2η περίπτωση: η $g(x) = 0$ έχει απλές και πολλαπλές ρίζες

Αν $\rho_1, \rho_2, \ldots$ απλές και πολλαπλές ρίζες, τότε η $g(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$g(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)^{\kappa} \cdots (x - \rho_\mu)^{\lambda} = 0.$$

Σε αυτή τη περίπτωση το κλάσμα $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ πάντα αναλύεται στη μορφή

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{A_1}{(x-\rho_1)} + \frac{A_2}{(x-\rho_2)} + \frac{B_1}{(x-\rho_3)} + \frac{B_2}{(x-\rho_3)^2} + \cdots \\ &+ \frac{B_\kappa}{(x-\rho_3)^{\kappa}} + \cdots + \frac{M_1}{(x-\rho_\mu)} + \frac{M_2}{(x-\rho_\mu)^2} + \cdots + \frac{M_\lambda}{(x-\rho_\mu)^{\lambda}}.\end{aligned}$$

3η περίπτωση: η $g(x) = (x^2 + bx + c)^\nu$

όπου ο βαθμός του $f(x)$ είναι μικρότερος του 2ν και $b, c \in \Re$ καθώς και $b^2 - 4c < 0$.

Τότε το κλάσμα $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ αναλύεται στη μορφή:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_\nu x + B_\nu}{(x^2 + bx + c)^\nu}\,.$$

Παρατήρηση:

1) $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-\rho_1)} + \frac{A_2}{(x-\rho_2)} + \cdots + \frac{A_{\nu-1}}{(x-\rho_{\nu-1})} + \frac{A_\nu}{(x-\rho_\nu)}.$$

2) $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-\rho_1)} + \frac{A_2}{(x-\rho_2)} + \frac{B_1}{(x-\rho_3)} + \frac{B_2}{(x-\rho_3)^2} + \cdots + \frac{B_\kappa}{(x-\rho_3)^\kappa} + \cdots + \frac{M_1}{(x-\rho_\mu)} + \frac{M_2}{(x-\rho_\mu)^2} + \cdots + \frac{M_\lambda}{(x-\rho_\mu)^\lambda}.$$

3) $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_\nu x + B_\nu}{(x^2+bx+c)^\nu}.$$

Το πλήθος των αγνώστων (αλλά προσδιοριστέων) συντελεστών A_i, B_i κ.λ.π. στο δεύτερο μέλος θα πρέπει να είναι το ίδιο με το βαθμό του πολυωνύμου $g(x)$ στον παρανομαστή του πρώτου μέλους.

Προσδιορισμός των συντελεστών A_1, A_2, ...

1ος τρόπος:

Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα στη μορφή των απλών κλασμάτων, κάνουμε τις πράξεις, και εξισώνουμε συντελεστές ομοιοβάθμιων όρων. Δηλαδή για παράδειγμα

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2} =$$

Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα στο δεύτερο μέλος

$$= \frac{A_1(x-2)}{(x-3)(x-2)} + \frac{A_2(x-3)}{(x-3)(x-2)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A_1(x-2)}{(x-3)(x-2)} + \frac{A_2(x-3)}{(x-3)(x-2)} \Rightarrow$$

$$1 = A_1(x-2) + A_2(x-3) \qquad (1)$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων

Προσδιορισμός των συντελεστών A_1, A_2, ...

$$1 = A_1(x-2) + A_2(x-3) \Rightarrow$$
$$1 = A_1x - 2A_1 + A_2x - 3A_2 \Rightarrow 1 = (A_1 + A_2)x - (2A_1 + 3A_2)$$

άρα η εξίσωση των ομοιοβάθμιων όρων οδηγεί στο γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + A_2 \\ 1 &= -(2A_1 + 3A_2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= \;\; 3A_1 + 3A_2 \\ 1 &= -2A_1 - 3A_2 \end{aligned} \overset{+}{\Rightarrow} A_1 = 1$$

άρα και $A_2 = -1$.

Συνεπώς το αρχικό κλάσμα αναλύεται στα απλούστερα κλάσματα

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

Προσδιορισμός των συντελεστών $A_1, A_2, \ldots$

2ος τρόπος: Αν στην εξίσωση (1)

$$1 = A_1(x-2) + A_2(x-3)$$

αντικαταστήσουμε όπου $x = 3$, τότε

$$1 = A_1(3-2) + A_2(3-3) \Rightarrow A_1 = 1.$$

Ομοίως αν βάλουμε $x = 2$, τότε

$$1 = A_1(2-2) + A_2(2-3) \Rightarrow A_2 = -1.$$

Συνεπώς πάλι το αρχικό κλάσμα αναλύεται στα απλούστερα κλάσματα

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

Προσδιορισμός των συντελεστών A_1, A_2, ...

3ος τρόπος: Με τον τρόπο που θα αναπτύξουμε τώρα βρίσκουμε συντελεστές που αντιστοιχούν σε απλές ρίζες.

Έστω ότι το $g(x)$ έχει απλή ρίζα το a. Τότε μπορούμε να γράψουμε το κλάσμα $\frac{f(x)}{g(x)}$ ως

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x-a} + k(x) \Rightarrow f(x) = \frac{A}{x-a} g(x) + k(x)g(x)$$

Παίρνοντας όρια για $x \to a$ θα έχουμε:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{A}{x-a} g(x) + \lim_{x \to a} k(x)g(x)$$

Όμως

$$A \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{x-a} = ?, \qquad \lim_{x \to a} k(x)g(x) = ?$$

$$\lim_{x \to a} k(x)g(x) = k(a)g(a) = k(a) \cdot 0 = 0$$

Προσδιορισμός των συντελεστών A_1, A_2, ...

$$A \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{x-a} = A \lim_{x \to a} \frac{g(x)-0}{x-a} = A \lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = A g'(a),$$

και συνεπώς η αρχική μας σχέση γίνεται

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{A}{x-a} g(x) + \lim_{x \to a} k(x) g(x) \Rightarrow f(a) = A g'(a) + 0 \Rightarrow$$

$$f(a) = A g'(a) \quad \text{άρα} \quad A = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

δηλαδή υπολογίζουμε τον άγνωστο συντελεστή A της απλής ρίζας.

Παράδειγμα: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-3)(x-2)}$

Αφού $g(x) = (x-3)(x-2)$ θα έχουμε $g'(x) = 2x-5$. ’ρα θα βρούμε τον πρώτο συντελεστή από τη σχέση

$$A_1 = \frac{f(a)}{g'(a)} = \frac{f(3)}{g'(3)} = \frac{1}{6-5} = 1.$$

Ομοίως ο δεύτερος συντελεστής θα είναι

$$A_2 = \frac{f(2)}{g'(2)} = \frac{1}{4-5} = -1.$$

Συνεπώς πάλι το αρχικό κλάσμα αναλύεται στα απλούστερα κλάσματα

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

’σκηση: Να αναλυθεί το κλάσμα $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$

Έχουμε $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$ οπότε το κλάσμα γράφεται στη μορφή

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

1ος τρόπος:

$$\begin{aligned} \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} &= \frac{A(x+1)^2}{x(x+1)^2} + \frac{B_1 x(x+1)}{x(x+1)^2} + \frac{B_2 x}{x(x+1)^2} \Rightarrow \\ 5x^2+20x+6 &= A(x+1)^2 + B_1 x(x+1) + B_2 x = \\ &= Ax^2 + 2Ax + A + B_1 x^2 + B_1 x + B_2 x = \\ &= (A+B_1)x^2 + (2A+B_2+B_1)x + A \end{aligned}$$

Εξισώνουμε συντελεστές ομοιοβάθμιων όρων οπότε προκύπτει

'σκηση: Να αναλυθεί το κλάσμα $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$

$$5x^2 + 20x + 6 = (A + B_1)x^2 + (2A + B_2 + B_1)x + A$$

$$\begin{aligned} 5 &= A + B_1 \\ 20 &= 2A + B_2 + B_1 \\ 6 &= A \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 5 - 6 &= B_1 \\ 20 &= 2A + B_2 + B_1 \\ 6 &= A \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} B_1 &= -1 \\ B_2 &= 9 \\ A &= 6. \end{aligned}$$

'ρα

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}$$

2ος τρόπος:

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x+1)^2 + B_1 x(x+1) + B_2 x \tag{1}$$

Για $x = 0$ παίρνουμε

$$6 = A(0+1)^2 + 0 + 0 \Rightarrow A = 6$$

για $x = -1$ αντίστοιχα παίρνουμε

$$5 - 20 + 6 = 0 + 0 - B_2 \Rightarrow B_2 = 9.$$

Για να βρούμε το B_1 χρησιμοποιούμε οποιαδήποτε βολική τιμή του x που θα μας διευκολύνει να βρούμε τον ζητούμενο συντελεστή. Έτσι για $x = 1$ από την (1) έχουμε

$$\begin{aligned} 5 + 20 + 6 &= A(1+1)^2 + B_1(1+1) + B_2 \Rightarrow 31 = 6 \cdot 4 + 2B_1 + 9 \Rightarrow \\ -2 &= 2B_1 \Rightarrow B_1 = -1. \end{aligned}$$

'σκηση: Να αναλυθεί το κλάσμα $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$

3ος τρόπος:

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \tag{1}$$

Επειδή $g(x) = x^3+2x^2+x$ έχουμε $g'(x) = 3x^2+4x+1$ οπότε για την απλή ρίζα προκύπτει ο συντελεστής

$$A = \frac{f(0)}{g'(0)} = \frac{6}{1} \Rightarrow A = 6.$$

'ρα η (1) γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} &= \frac{6(x+1)^2}{x(x+1)^2} + \frac{B_1x(x+1)}{x(x+1)^2} + \frac{B_2x}{x(x+1)^2} \Rightarrow \\ 5x^2+20x+6 &= 6(x+1)^2 + B_1x(x+1) + B_2x = \\ &= 6x^2+12x+6+B_1x^2+B_1x+B_2x = \\ &= (6+B_1)x^2 + (12+B_2+B_1)x + 6. \end{aligned}$$

'σκηση: Να αναλυθεί το κλάσμα $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$

$$5x^2 + 20x + 6 = (6 + B_1)x^2 + (12 + B_2 + B_1)x + 6$$

δηλαδή σύστημα δύο εξισώσεων,

$$\begin{aligned} 5 &= 6 + B_1 \\ 20 &= 12 + B_2 + B_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} B_1 &= -1 \\ B_2 &= 9. \end{aligned}$$

'ρα

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}$$

’σκηση: Να αναλυθεί το κλάσμα $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}$

Έχουμε $(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x - 1)(x^2 + 4)$ οπότε το κλάσμα μπορεί να γραφεί

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1 x + B_2}{x^2+4}$$

Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{A_1(x-1)(x^2+4)}{x(x-1)(x^2+4)} + \frac{A_2 x(x^2+4)}{x(x-1)(x^2+4)} + \\ + \frac{(B_1 x + B_2)x(x-1)}{x(x-1)(x^2+4)}$$

Απαλείφουμε τους παρανομαστές,

$$2x^3 - 4x - 8 = A_1(x-1)(x^2+4) + A_2 x(x^2+4) + (B_1 x + B_2)x(x-1)$$

και θέτουμε $x = 0$ οπότε προκύπτει

$$-8 = A_1(-1)(4) + 0 + 0 \Rightarrow A_1 = 2$$

’σκηση: Να αναλυθεί το κλάσμα $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}$

Ομοίως αν βάλουμε $x = 1$ στην

$2x^3 - 4x - 8 = A_1(x-1)(x^2+4) + A_2x(x^2+4) + (B_1x + B_2)x(x-1)$

προκύπτει

$$-10 = 0 + A_2(5) + 0 \Rightarrow A_2 = -2.$$

Βρίσκουμε και τους άλλους δύο συντελεστές διαλέγοντας δύο άλλες τιμές του x. Βάζοντας $x = -1$ (και $A_1 = 2$, $A_2 = -2$) προκύπτει

$$\begin{gathered} -6 = (2)(-2)(5) + (-2)(-1)(5) + (-B_1 + B_2)(-1)(-2) \Rightarrow \\ -B_1 + B_2 = 2 \end{gathered}.$$

Ομοίως για $x = 2$ θα έχουμε

$$\begin{gathered} 0 = (2)(1)(8) + (-2)(2)(8) + (2B_1 + B_2)(-2)(1) \Rightarrow \\ 2B_1 + B_2 = 8 \end{gathered}.$$

’ρα

'ρα

$$\begin{array}{rl} -B_1 + B_2 = & 2 \\ 2B_1 + B_2 = & 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rl} B_1 = & 2 \\ B_2 = & 4. \end{array}$$

'ρα το κλάσμα γίνεται

$$\frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2x+4}{(x^2+4)} \Rightarrow$$

$$\frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2x}{x^2+4} + \frac{4}{x^2+4}.$$

1. Να αναλυθούν σε άθροισμα απλών κλασμάτων τα κλάσματα:

$$1)\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2}$$

(Απ. $A_1=3,\ A_2=-2,\ A_3=-4$).

$$2)\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3}$$

(Απ. $A_1=1,\ B_1=2,\ A_2=1,\ B_2=-3,\ A_3=-1,\ B_3=2$).

$$3)\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^3+2x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

(Απ. $A_1=-\frac{5}{8},\ A_2=\frac{19}{3},\ A_3=-\frac{49}{4},\ A_4=\frac{181}{24}$).

Υπολογισμός τριών βασικών ολοκληρωμάτων

Πρώτη περίπτωση

$$O_1(n) = \int \frac{dx}{(x-r)^n} = \begin{cases} \frac{(x-r)^{-n+1}}{-n+1} + c & \text{αν } n \neq 1 \\ \\ \ln|x-r| + c & \text{αν } n = 1 \end{cases}$$

Υπολογισμός τριών βασικών ολοκληρωμάτων

Δεύτερη περίπτωση

$$O_2(b,c,n) = \int \frac{xdx}{(x^2+bx+c)^n}$$

$$= \begin{cases} \frac{(x^2+bx+c)^{-n+1}}{2(-n+1)} - \frac{b}{2}\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n} & \text{αν } n \neq 1 \\ \frac{1}{2}\ln(x^2+bx+c) - \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c} & \text{αν } n = 1 \end{cases}$$

Υπολογισμός τριών βασικών ολοκληρωμάτων

Τρίτη περίπτωση

$$O_3(b, c, n) = \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n} =$$

Για την επίλυση του, συνήθως, πρώτα αναλύουμε το κλάσμα $f(x)/g(x)$ σε απλούστερα κλάσματα και μετά ολοκληρώνουμε.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

Το κλάσμα στην υπό ολοκλήρωση παράσταση γράφεται

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-5x+6} &= \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2} = \text{(βλ. προηγ. άσκ.)}\\ &= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-3| - \ln|x-2| + C\,.\end{aligned}$$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$

Παράδειγμα 2: Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$.

Το κλάσμα στην υπό ολοκλήρωση παράσταση γράφεται (βλ. προηγ. άσκ.)

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} = \frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}$$

άρα

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}\right) dx =$$

$$= 6\ln|x| - \ln|x+1| + 9\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C = \ln\left|\frac{x^6}{x+1}\right| - \frac{9}{x+1} + C\,.$$

Παράδειγμα 3: Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}\,dx$.

Το κλάσμα στην υπό ολοκλήρωση παράσταση γράφεται
(βλ. προηγ. άσκ.)

$$\begin{aligned}\frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)} &= \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B_1x+B_2}{x^2+4} = \\ &= \frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{2x}{x^2+4}+\frac{4}{x^2+4}\end{aligned}$$

άρα

$$\int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{2x}{x^2+4}+\frac{4}{x^2+4}\right) dx =$$

$$= 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + \ln(x^2+4) + 2\arctan\frac{x}{2} + C\,.$$

Άλυτες ασκήσεις - Φυλλάδιο 3: 2η

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$ $\quad\left(\textbf{Απ.}\ \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C\right).$
2. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$ $\quad\left(\textbf{Απ.}\ \ln\frac{|x-2|^{3/10}}{|x|^{1/6}\,|x+3|^{2/15}}+C\right).$
3. $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$ $\quad\left(\textbf{Απ.}\ -\frac{4}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C\right).$
4. $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$ $\quad\left(\textbf{Απ.}\ \frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C\right).$
5. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx$ $\quad\left(\textbf{Απ.}\ \arctan x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)+C\right).$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

1. $\int \frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}dx$
2. $\int \frac{x^3+4}{(x^2-1)(x^2+3x+2)}dx$
3. $\int \frac{x^3+2x-1}{(x^2-x+2)^2}dx$
4. $\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+3)}dx$
5. $\int \frac{5x}{(x+1)(x^2+4)}$
6. $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx$
7. $\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^3}dx$