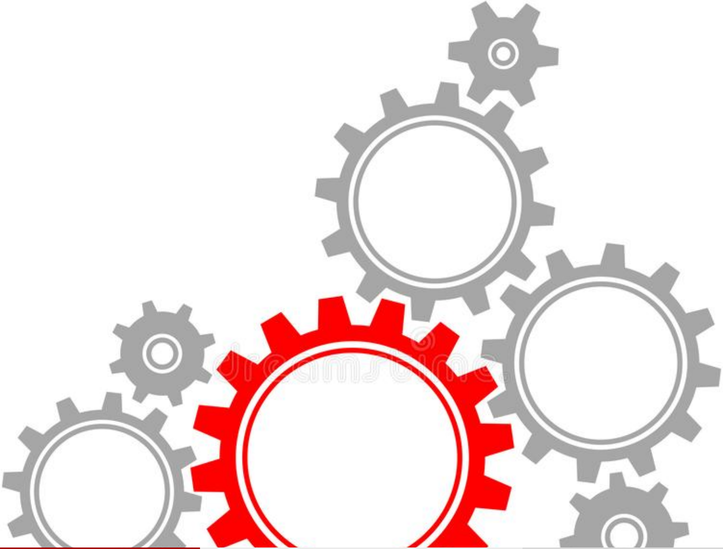
# Δέκατη εβδομάδα μαθημάτων



## Εισαγωγή στον ολοκληρωτικό λογισμό

- Αόριστο ολοκλήρωμα

Έστω ότι είναι γνωστή η παράγωγος μιας συνάρτησης (ξέρουμε δηλαδή ότι $f(x) = \frac{dy}{dx}$) και θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση που έχει παράγωγο την $f(x)$.

Για παράδειγμα

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Ποια είναι η συνάρτηση που έχει αυτή για παράγωγο;

$F(x) = x^2$ Είναι σωστό;;; **ΛΑΘΟΣ!!!**

$$F(x) = x^2 + c, \quad c: \text{ σταθερά}$$

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η $F(x)$ είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ ως προς $x$.

# Αόριστα ολοκληρώματα

**Ορισμός**

Η διαδικασία εύρεσης της $F(x)$ από την $f(x)$ λέγεται ολοκλήρωση της $f(x)$ ως προς $x$ και συμβολικά γράφουμε

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

όπου $c$ σταθερά.

# Αόριστα ολοκληρώματα

## Βασικά ολοκληρώματα

1. $\int a dx = a \int dx = ax + c$
2. $\int x^n dx = \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \;\; n \neq 1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ και $\int \cos x dx = \sin x + c$
6. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$ και $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$

# Αόριστα ολοκληρώματα

## Βασικά ολοκληρώματα

1. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = arcsinhx + c = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + c$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = arccoshx + c = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c$
5. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$
6. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = -sech^{-1}x + c$ και $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = -csch^{-1}x + c$

# Αόριστα ολοκληρώματα

## Ιδιότητες

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
2. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$
4. $\int f'(x)f(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x) + c$
5. $\int f'(x)f^n(x)dx = \frac{1}{n+1}f^{n+1}(x) + c$

# Ασκήσεις

- $\int (5x^{1/2} - x^2 + 2)dx$

- $\int \sqrt{2x+1}dx$

- $\int x \sin x^2 dx$

- $\int 2 \sin x \cos x dx$

# Άσκηση

Δείξτε ότι

$$\int \csc x \, dx = \ln(\csc x - \cot x) + C$$

**Λύση**:

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με $\csc x - \cot x$

$$\begin{aligned}
\int csc\, x\, dx &= \int \frac{csc\, x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x}\, dx \\
&= \int \frac{csc^2 x - \csc x \cdot \cot x}{\csc x - \cot x}\, dx \\
&= \int \frac{(\csc x - \cot x)'}{\csc x - \cot x}\, dx = \ln(\csc x - \cot x) + C\,.
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int \csc x\, dx = \ln \tan \frac{x}{2} + C$$

$$\int \csc x\, dx = \int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, dx$$

$$\int \csc x\, dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\, dx = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}\, dx = \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\, dx\, .$$

Αλλά $\left(\tan\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$ οπότε

$$\int \csc x\, dx = \int \frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}\, dx = \ln \tan \frac{x}{2} + C\, .$$

# Άσκηση

Δείξτε ότι

$$\int \sec\, x\, dx = \ln(\sec\, x + \tan\, x) + C$$

**Λύση**:

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με $\sec\, x + \tan\, x$

$$\begin{aligned}
\int sec\, x\, dx &= \int \frac{sec\, x(\sec\, x + \tan\, x)}{\sec\, x + \tan\, x}\, dx \\
&= \int \frac{sec^2\, x + \sec\, x \cdot \tan\, x}{\sec\, x + \tan\, x}\, dx \\
&= \int \frac{(\sec\, x + \tan\, x)'}{\sec\, x + \tan\, x}\, dx = \ln(\sec\, x + \tan\, x) + C\,.
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int \sec x\, dx = \ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή με $\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ οπότε

$$\begin{aligned}\int \sec x\, dx &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}\, dx = \int \frac{\sec^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\, dx \\ &= \int \frac{\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)'}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + C\end{aligned}$$

# Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

1. $\int \frac{1}{sin^2 x \cos^2 x} dx$
2. $\int \frac{4+7x^2}{x^2(1+x^2)} dx$
3. $\int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$
4. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$
5. $\int \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) dx$
6. $\int \frac{arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx$
7. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

# Παραγοντική ολοκλήρωση

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int f(x)dx \quad \text{οπου} \quad f(x) = h_1(x)h_2(x)$$

τοτε

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int h_1(x)h_2(x)dx = \int h_1(x)(H_2(x))'dx \\ &= h_1(x)H_2(x) - \int h_1'(x)H_2(x)dx \end{aligned}$$

Αποδείξη:

# Άσκηση

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

- $\int x^n \ln x dx$
- $\int \ln x dx$
- $\int x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx$
- $\int xe^x dx$
- $\int x \sin x dx$
- $\int \frac{x^3}{x+1} dx$
- $\int sin^2(ax)dx$
- $\int e^x sin(x)dx$
- $\int xe^x sin(x)dx$

# Αναδρομικοί τύποι για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων

Να βρεθούν οι αναδρομικοί τύποι για τον υπολογισμό των παρακάτω ολοκληρωμάτων

1. $\int \sin^n x dx$
2. $\int \tan^n x dx$
3. $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$
4. $\int \ln^n x dx$
5. $\int (a^2 - x^2)^n dx$