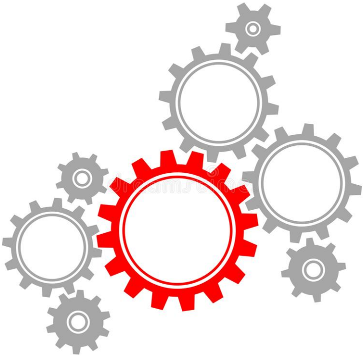
Δέκατη εβδομάδα μαθημάτων



Διαφορικό

Ορίζουμε τη διαφορά

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Η παράγωγός ορίζεται ως το όριο

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + a \quad \text{με την προϋπόθεση} \quad a \to 0 \text{ , όταν το } \Delta x \to 0$$

$$\Rightarrow \Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + a \cdot \Delta x$$

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Διαφορικό

Ορισμός Διαφορικού

Το γινόμενο $f'(x) \cdot \Delta x$ θα το ονομάζουμε **Διαφορικό** της συνάρτησης $y = f(x)$ και θα το συμβολίζουμε με dy, δηλαδή

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Ειδικά για την συνάρτηση $y = x$, θα έχουμε

$$dy = dx = f'(x) \cdot \Delta x = x' \cdot \Delta x = \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε για κάθε συνάρτηση $y = f(x)$

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Συγκρίνοντας το dy με το Δy...

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $y = x^2$. Βρείτε το dy και το Δy, όταν $x = 1$ και $\Delta x = 0.01$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

Το διαφορικό της συνάρτησης, σύμφωνα με τον ορισμό, θα είναι:

$$dy = f'(x) \cdot dx = 2x \cdot dx = 2 \cdot 1 \cdot 0.01 = 0.02$$

ενώ η μεταβολή του y θα είναι,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1 + 0.01) - f(1) = 1.01^2 - 1^2 = 0.0201$$

οπότε έχουμε

$$\Delta y - dy = 0.0001$$

δηλαδή διαφέρουν μία μονάδα στη τέταρτη δεκαδική θέση.

Διαφορικό

Παρατήρηση

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + a \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta y = dy + a \cdot \Delta x$$

αφού $a \to 0$, όταν το $\Delta x \to 0$ έχουμε

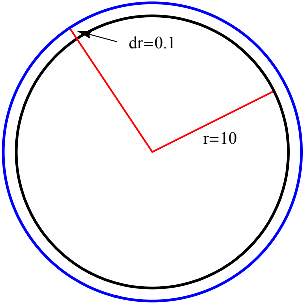
$$\begin{aligned} &\Delta y \cong dy \Longrightarrow \\ &f(x + \Delta x) - f(x) \cong f'(x) \cdot \Delta x \Longrightarrow \\ &f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Εφαρμογή Διαφορικού: Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η $\sqrt{50}$

Άσκηση:

Η ακτίνα r ενός κύκλου αυξάνει από $r = 10$ m σε $r = 10.1$ m. Να βρεθεί προσεγγιστικά η μεταβολή του εμβαδού E του κυκλικού δίσκου και να συγκρίνετε την εκτίμηση αυτή με την πραγματική μεταβολή ΔE.

Λύση:



Γνωρίζουμε ότι $E = \pi r^2$ και συνεπώς μία προσέγγιση του εμβαδού (αφού η μεταβολή της ακτίνας dr είναι μικρή σχετικά με την ακτίνα r) θα είναι,

$$dE = E'(r)dr = 2\pi r\, dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi\ m^2$$

Η πραγματική μεταβολή είναι,

$$\Delta E = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi =$$
$$= (2\pi + 0.01\pi)\ m^2 \text{ δηλαδή σφάλμα: } 0.01\pi.$$

Άσκηση:

Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται η πλευρά ενός τετραγώνου, όταν το εμβαδόν του από 9μ^2 γίνει 9.1μ^2.

Λύση:
Αν x το εμβαδόν και y η πλευρά του τετραγώνου, τότε $y = \sqrt{x}$.

$$\Delta y \cong dy = y' \cdot \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x$$

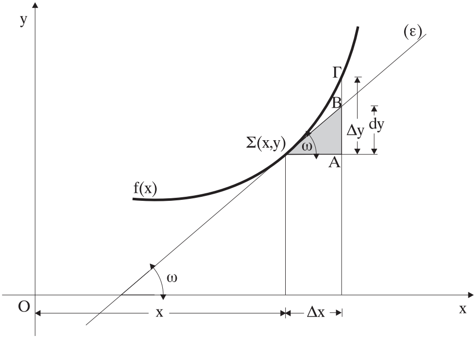
Άρα

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{9}}(0.1) = 0.0166$$

Άρα η μεταβολή της πλευράς του τετραγώνου είναι, κατά προσέγγιση, 0.0166 μ.

Γεωμετρική ερμηνεία Διαφορικού

Έστω $y = f(x)$ μία καμπύλη και Σ(x, y) ένα σημείο της.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΣ έχουμε

$$\tan\omega = \frac{AB}{A\Sigma} \Rightarrow AB = (A\Sigma)\tan\omega = (\Delta x)\cdot f'(x)$$

άρα $AB = dy$

Είναι πάντα το $\Delta y > dy$;

Ιδιότητες διαφορικού

- $dc = 0$
- $dx = \Delta x$
- $d(cf) = c \cdot df$
- $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$
- $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - dg \cdot f}{g^2}$
- $d(f(g)) = f'(g) \cdot dg$

Διαφορικό ανώτερης τάξης

Διαφορικό πρώτης τάξης:

$$dy = f'(x)\, dx$$

Το διαφορικό δεύτερης τάξης συμβολίζεται d^2y και σημαίνει

$$d^2y = d(dy)$$

Ο συμβολισμός γενικεύεται σε d^ny όταν αναφερόμαστε σε διαφορικό n τάξης και ισχύει

$$d^ny = f^{(n)}(x) \cdot dx^n \Longleftrightarrow \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)\,.$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί το διαφορικό πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης $y = x^3$.

Λύση:
Το διαφορικό της συνάρτησης θα είναι

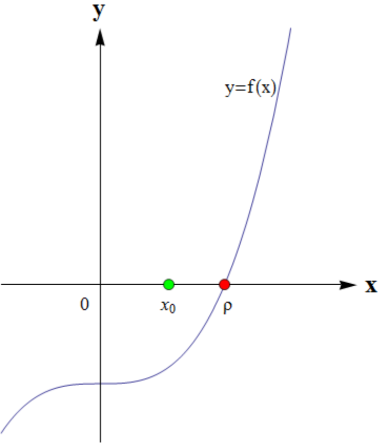
$$dy = f'(x) \cdot dx \Rightarrow dy = \left(x^3\right)' \cdot dx \Rightarrow dy = 3x^2 \cdot dx$$

Το διαφορικό δεύτερης τάξης αντίστοιχα θα είναι

$$d^2y = f^{(2)}(x) \cdot dx^2 = (x^3)'' \cdot dx^2 = 6x \cdot dx^2$$

Μία σπουδαία εφαρμογή του διαφορικού

Έστω η συνάρτηση $y = f(x)$ με $y_0 = f(x_0) \neq 0$ της οποίας θέλουμε να βρούμε μία πραγματική ρίζα ρ.



$$\Delta y \cong dy = f'(x)\,dx \Rightarrow$$
$$\Delta y_0 = y - y_0 \cong dy_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

όταν $x = \rho$ τότε $y = 0$, άρα

$$\Delta y_0 = -y_0 \cong f'(x_0)(\rho - x_0) \Rightarrow$$
$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \rho - x_0 \Rightarrow$$
$$\rho \cong x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad , \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Τύπος Newton-Raphson (N-R)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \qquad n = 0, 1, \ldots$$

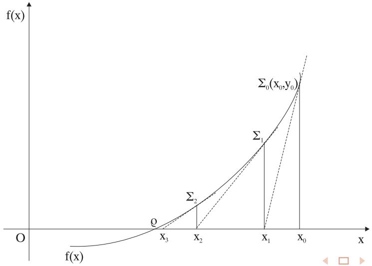
Γεωμετρική ερμηνεία της N-R

Εξίσωση εφαπτομένης στο (x_n, y_n):

$$\frac{y - y_n}{x - x_n} = f'(x_n) \Rightarrow y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

όπου για $y = 0$ βρίσκουμε την τομή της εφαπτομένης με τον $x-$άξονα, άρα παίρνουμε τη σχέση

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Άσκηση:

Να βρεθεί, με N-R, μία πραγματική ρίζα της εξίσωσης
$f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ κοντά στη τιμή -1.

Λύση:
Από τον τύπο της μεθόδου N-R έχουμε:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^3 + x_n^2 - x_n + 1}{6x_n^2 + 2x_n - 1}$$

άρα

$$\begin{aligned}
\text{για} \quad n &= 0: & x_1 &= (-1) - \frac{2(-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1}{6(-1)^2 + 2(-1) - 1} = -1.33333 \\
\text{για} \quad n &= 1: & x_2 &= (x_1) - \frac{2(x_1)^3 + (x_1)^2 - (x_1) + 1}{6(x_1)^2 + 2(x_1) - 1} = -1.24339 \\
\text{για} \quad n &= 2: & x_3 &= (x_2) - \frac{2(x_2)^3 + (x_2)^2 - (x_2) + 1}{6(x_2)^2 + 2(x_2) - 1} = -1.23386 \\
\text{για} \quad n &= 3: & x_4 &= (x_3) - \frac{2(x_3)^3 + (x_3)^2 - (x_3) + 1}{6(x_3)^2 + 2(x_3) - 1} = -1.23375 \\
\text{για} \quad n &= 4: & x_5 &= (x_4) - \frac{2(x_4)^3 + (x_4)^2 - (x_4) + 1}{\dots} = -1.23375
\end{aligned}$$

Άσκηση:

Να βρεθεί, με N-R, μία πραγματική ρίζα της εξίσωσης
$f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ κοντά στη τιμή -1.

Λύση:

$$
\begin{aligned}
\text{για} \quad n = 0: &\quad x_1 = -1.33333 \\
\text{για} \quad n = 1: &\quad x_2 = -1.24339 \\
\text{για} \quad n = 2: &\quad x_3 = -1.23386 \\
\text{για} \quad n = 3: &\quad x_4 = -1.23375 \\
\text{για} \quad n = 4: &\quad x_5 = -1.23375
\end{aligned}
$$

άρα η ζητούμενη ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι $\rho = -1.23375$ με ακρίβεια 6 σημαντικών ψηφίων.

Ανάπτυγμα Taylor.

Θεώρημα

Αν η f έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το a, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n και για κάθε x στο εν λόγω διάστημα θα ισχύει

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + R_{n+1}\,,$$

όπου R_{n+1} λέγεται υπόλοιπο Lagrange και ισούται με

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,,$$

για κάποιο ξ στο διάστημα (a, x).

Ανάπτυγμα Taylor.

Παρατήρηση:

Αν στο τύπο του Taylor αντικαταστήσουμε το a με μηδέν τότε προκύπτει η σχέση:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

με το ξ σημείο μεταξύ του 0 και του x. Ο τύπος αυτός λέγεται τύπος του Maclaurin.

Άσκηση:

Να δοθεί το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το μηδέν της συνάρτησης $f(x) = \cos x$, μέχρι όρους 8ης τάξης.

Λύση:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

$$f(x) = \cos x = \cos(0) + x\left[\cos(x)'\right]_{x=0} + \frac{x^2}{2}\left[\cos(x)''\right]_{x=0} + \cdots +$$

$$+\frac{x^8}{8!}\left[\cos(x)^{(8)}\right]_{x=0} =$$

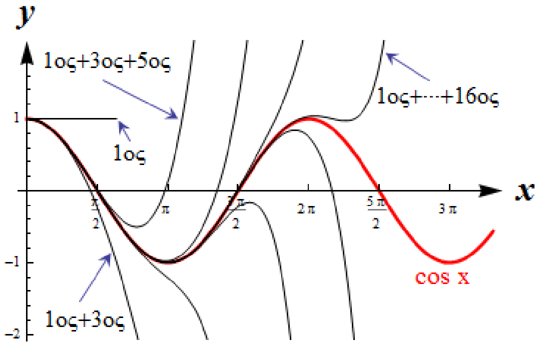
$$= 1 + x(0) + \frac{x^2}{2}(-1) + \frac{x^3}{3!}(0) + \frac{x^4}{4!}(1) + \cdots + \frac{x^8}{8!}(1) \Longrightarrow$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}.$$

π.χ. $\cos[0.3] = 1 - \frac{(0.3)^2}{2} + \frac{(0.3)^4}{4!} - \frac{(0.3)^6}{6!} + \frac{(0.3)^8}{8!} = 0.955336$

Γεωμετρική εικόνα του αναπτύγματος $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{16}}{16!} + \cdots$$



Άσκηση:

Με χρήση του αναπτύγματος Maclaurin να υπολογίσετε το e με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων. Υπολογίζουμε ξεχωριστά τους όρους του αναπτύγματος e :

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &\Rightarrow f(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = e^x &\Rightarrow f'(0) = e^0 = 1 \\ f''(x) = e^x &\Rightarrow f''(0) = e^0 = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

άρα το ανάπτυγμα Maclaurin του e^x γίνεται

$$e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots \Rightarrow$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

δηλαδή για $x = 1$ θα έχουμε

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Άσκηση:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Αν πάρουμε αυθαίρετα 4 όρους (δηλαδή μέχρι x^4) θα έχουμε

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2.70833 \simeq 2.71$$

Αν πάρουμε 5 όρους

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.71667 \simeq 2.72$$

Αν πάρουμε 6 όρους

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2.71806 \simeq 2.72$$

Από τα πιο πάνω αποτελέσματα είναι προφανές ότι αν πάρουμε 5 όρους του αναπτύγματος (δηλ. μέχρι x^5) θα έχουμε το e με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων ($e = 2.71828$ ακριβής τιμή)

Άσκηση:

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ με χρήση της σειράς Maclaurin.
Γνωρίζουμε ότι

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad \forall x \in \Re$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Άλυτες ασκήσεις

1. Βρείτε το dy για καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις :
   - $y = \frac{x^3+2x+1}{x^2+3}$ Απ. $dy = \frac{x^4+7x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}dx$
   - $y = \cos^2 2x + \sin 3x$ Απ. $dy = (-2\sin 4x + 3\cos 3x)dx$
   - $y = e^{3x} + \arcsin 2x$ Απ. $dy = (3e^{3x} + 2/\sqrt{1-4x^2})dx$
2. Βρείτε κατά προσέγγιση τη μεταβολή του όγκου ενός κύβου πλευράς x εκ. που προκύπτει από μεταβολή της πλευράς του κατά 1%
3. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο N-R βρείτε την ποσότητα $\sqrt[6]{2}$ με ακρίβεια 8 σημαντικών ψηφίων.
4. Να υπολογισθούν τα αναπτύγματα Maclaurin των συναρτήσεων $\sin \alpha x$ και $\arctan x$.
5. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $\cos x$ γύρω από το α.

Άλυτες ασκήσεις

7. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Maclaurin υπολογίστε το όριο
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ Απ. 2
8. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Maclaurin υπολογίστε το όριο
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$ Απ. 1
9. Έστω $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x$. Βρείτε τους συντελεστές a_0, a_1, a_2, a_3 και a_4 έτσι ώστε η $f(x)$ να γραφεί στη μορφή
$f(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_4(x-1)^4$.
Απ. $a_0 = 2, a_1 = -3, a_2 = -6, a_3 = 0, a_4 = 1$
10. Βρείτε τους 3 πρώτους όρους (μέχρι x^3) της σειράς Taylor γύρω από το μηδέν της συνάρτησης $f(x) = e^x \arctan x$. Απ. $x + x^2 + x^3/6$.