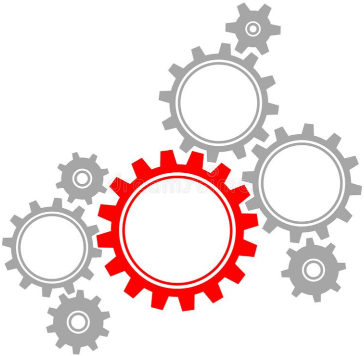
Μαθηματικά Ι

Σ. Μαλεφάκη
Τμήμα Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών Μηχανικών

2023 - 2024

Έκτη και Έβδομη εβδομάδα μαθημάτων

- Διαφορικός λογισμός συναρτήσεων μίας μεταβλητής



Παράγωγος συνάρτησης μίας μεταβλητής

Μία από τις σημαντικότερες έννοιες των Μαθηματικών είναι η παράγωγος η οποία μας δίνει το ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης.

Ορισμός

Έστω η συνάρτηση $f(x),\ x \in \mathbb{R}$. Το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

αν υπάρχει, είναι η παράγωγος της $f(x)$ στο σημείο x_0.

Σε περίπτωση που το όριο υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της $f(x)$ τότε μιλάμε για την παράγωγο συνάρτηση της $f(x)$, την οποία θα συμβολίζουμε με

$$f'(x) \text{ ή } \frac{df}{dx}.$$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = |x|$ στο $x = 0$, αν υπάρχει.
2. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) \neq 0$ τέτοια ώστε
$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, Να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$.
3. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x. Να αποδείξετε ότι
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$
4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε
$$x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2.$$
Να δειχθεί ότι η $f(x)$ έχει παράγωγο στο $x = 0$ η οποία ισούται με $f'(0) = 1$.
5. Να βρεθούν τα α και β έτσι ώστε να είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

Κανόνες Παραγώγισης

- $(f(x) \pm g(x))' =$
- $(c \cdot f(x))' =$
- $(f(x) \cdot g(x))' =$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$

$$y(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6 \Longrightarrow \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 - 5x + 6) = 3x^2 + 4x - 5$$

$$f(x) = \frac{e^x + 2\ln x}{x^2} \Longrightarrow \frac{d}{dx}(\frac{e^x + 2\ln x}{x^2}) = \frac{(x-2)e^x + 2 - 4\ln(x)}{x^3}$$

Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης

Έστω ότι η συνάρτηση $\theta = g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x και η $y = f(\theta)$ είναι παραγωγίσιμη στο θ. Τότε η σύνθετη συνάρτηση $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)\,.$$

Με χρήση του συμβολισμού d/dx, αφού $y = f(\theta)$ και $\theta = g(x)$, ο κανόνας της αλυσιδωτής παραγώγισης γράφεται και

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} \tag{1}$$

όπου βέβαια ο υπολογισμός της $\dfrac{dy}{d\theta}$ έχει γίνει στο σημείο $\theta = g(x)$.

Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων

- Παραγώγιση εκθετικής συνάρτησης $f(x) = b^x, b > 0$
- Παραγώγιση λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \log_b x$
- Λογαριθμική παραγώγιση $h(x) = f(x)^{g(x)}$

► Έστω μία σύνθετη συνάρτηση $f(\theta)$ που είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του θ και αντίστοιχα η θ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x. Τότε

$$\frac{d}{dx}(\ln\theta) = \frac{d}{d\theta}(\ln\theta)\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(a^\theta) = \frac{d}{d\theta}(a^\theta)\cdot\frac{d\theta}{dx} = a^\theta \ln a\cdot\frac{d\theta}{dx}.$$

Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης

Η παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης επεκτείνεται και για συναρτήσεις που είναι σύνθεση περισσότερων των δύο συναρτήσεων όπως για παράδειγμα αν έχουμε τις μεταβλητές x, y, θ, ϕ που συνδέονται με τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y = f(\theta)$, $\theta = g(\phi)$ και $\phi = h(x)$, τότε ο κανόνας της αλυσιδωτής παραγώγισης δίνει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dx} .$$

Συμβολισμός παραγώγου ανώτερης τάξης

Αν $y = f(x)$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x, τότε θα συμβολίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της με $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Αν θέλουμε να ‘αναλύσουμε’ τον συμβολισμό αυτό σε δύο παραγωγίσεις μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Γενικά τη n-οστή παράγωγο του y ως προς x (δηλ. $y^{(n)}$) θα τη συμβολίζουμε με

$$\frac{d^ny}{dx^n} \text{ ή } \frac{d^n}{dx^n}(y).$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ της συνάρτησης $y = x/(x-1)$.

Λύση

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

άρα θα βρούμε πρώτα την πρώτη παράγωγο,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{dx}{dx}(x-1) - x\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

οπότε τώρα ξανά παραγωγίζουμε και θα έχουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{-1}{(x-1)^2}\right] =$$

$$\frac{\frac{d}{dx}(-1)(x-1)^2 - (-1)\frac{d}{dx}\left[(x-1)^2\right]}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης
$$g(x) = (3x^2 + 5x)^{2x-1}.$$

2. Να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης
$$f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right).$$

3. Να υπολογιστή η $m-$οστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^m$

4. Τύπος του Leibniz. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι n φορές παραγωγίσιμες να δειχθεί ότι
$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

Διωνυμικός συντελεστής – Συνδυασμοί n ανά k

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ισχύει

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Διωνυμικό Ανάπτυγμα

$$(\alpha+\beta)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \alpha^k \cdot \beta^{n-k}$$

Το διωνυμικό ανάπτυγμα ήταν γνωστό στους ᾿ραβες, οι οποίοι δεν είχαν πλήρη απόδειξη αλλά, μετά από έλεγχο των πρώτων λίγων όρων, διατύπωσαν το γενικό κανόνα ακολουθώντας ατελή επαγωγή. Αργότερα το θεώρημα ανακαλύφθηκε εκ νέου και γενικεύτηκε από τον Isaac Newton (1654-1705), ο οποίος το συμπεριέλαβε στα περίφημα Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687). Για την απόδειξη χρησιμοποίησε επιχειρήματα από την Συνδυαστική. Η πρώτη επαγωγική απόδειξη οφείλεται στον Jakob Bernoulli (1654-1705), και δημοσιεύτηκε μετά τον θάνατό του στο έργο Ars Conjectkaii (1713)

Ασκήσεις

1. Αν ο πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και της παραγώγου του $P'(x)$ να δειχθεί ότι το ρ είναι διπλή ρίζα του $P(x)$ και το αντίστροφο.

2. Έστω πολυώνυμα τρίτου βαθμού με ρίζες ρ_1, ρ_2 και ρ_3. Δείξτε ότι

$$\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{P'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{P'(\rho_3)} = 0$$

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$F(x, y) = 0$$

ονομάζεται πεπλεγμένη συνάρτηση.

Παράγωγος πεπλεγμένων συναρτήσεων

Για να βρούμε την παράγωγο μιας πεπλεγμένης συνάρτησης, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της έμμεσης παραγώγισης.
Δεν ξεχνάμε ότι η y είναι συνάρτηση του x (και βέβαια η x συνάρτηση του y).

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η παράγωγος $\dfrac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y^3 + xy + y^2 - 5y - x^2 = -3$.

Λυση:

$$\frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) - 5\frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(-3) \Rightarrow$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + x + 2y - 5) = 2x - y \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{3y^2 + x + 2y - 5}, \qquad 3y^2 + x + 2y - 5 \neq 0\,.$$

Υπάρχει παράγωγος dy/dx για την $x^2 + y^2 + 1 = 0$;

Ασκήσεις:

1. Υπολογίστε την παράγωγο y' της πεπλεγμένης συνάρτησης

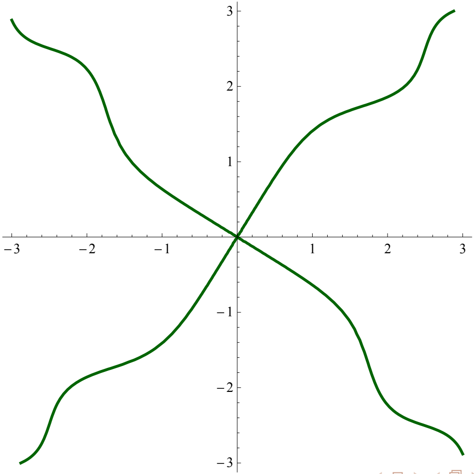
$$F(x,y) = cos(2x) + x^3 + y^3 - 4xy = 0$$

2. Υπολογίστε τη δεύτερη παράγωγο της πεπλεγμένης συνάρτησης

$$F(x,y) = x^2y + xy^2 = \alpha^2$$

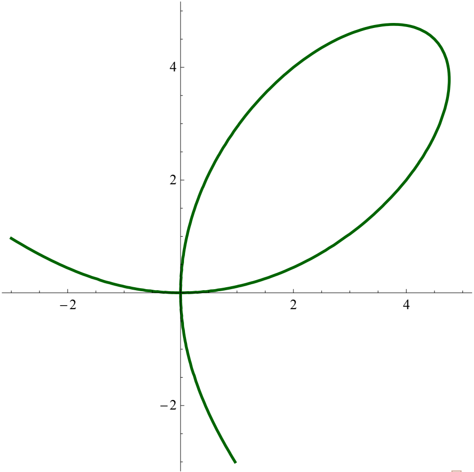
’σκηση

Υπολογίστε την παράγωγο y' της πεπλεγμένης συνάρτησης
$y^2 = x^2 + sin(xy)$



Το φύλλο του Καρτέσιου (1638)

Υπολογίστε την παράγωγο y' της πεπλεγμένης συνάρτησης $x^3 + y^3 - 9xy = 0$



Θέμα – Σεπτέμβριος 2016

Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x)$ που ορίζεται σε πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση

$$y^x - e^{y-1} + x = 2$$

στο σημείο (2, 1).

Θέμα – Σεπτέμβριος 2018

Μία σκάλα μήκους 5 μέτρων είναι τοποθετημένη σε ένα κατακόρυφο τοίχο. Εάν το κάτω μέρος (βάση) της σκάλας αρχίσει και απομακρύνεται από τον τοίχο με ρυθμό 1 μέτρο ανά δευτερόλεπτο, πόσο γρήγορα η κορυφή της σκάλας πέφτει (γλιστρώντας στον τοίχο) όταν η βάση της σκάλας απέχει 3 μέτρα από τον τοίχο;

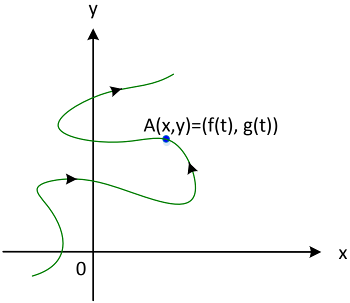
(1.5 μονάδες)

Παραμετρικές εξισώσεις

Συχνά ορίζουμε μια καμπύλη στο επίπεδο xy με τη βοήθεια εξισώσεων της μορφής

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

όπου $f(t)$ και $g(t)$ συνεχείς συναρτήσεις.



Οι $x(t)$ και $y(t)$ που είναι συναρτήσεις μίας τρίτης μεταβλητής t, περιγράφουν την C και λέγονται:

Παραμετρικές Εξισώσεις

Παράδειγμα: Τι παριστάνουν οι παραμετρικέ
$x = r\cos t, \quad y = r\sin t$;

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad \text{κύκλο}$$

Παραγώγιση παραμετρικών εξισώσεων

Πρόταση

Έστω οι παραμετρικές εξισώσεις $x = f(t)$, $y = g(t)$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $t \in (a, b)$ και ταυτόχρονα η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο ίδιο διάστημα. Τότε το y είναι συνάρτηση του x και η πρώτη παράγωγος dy/dx δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}, \qquad \frac{dx}{dt} \neq 0\,.$$

Παραγώγιση παραμετρικών εξισώσεων

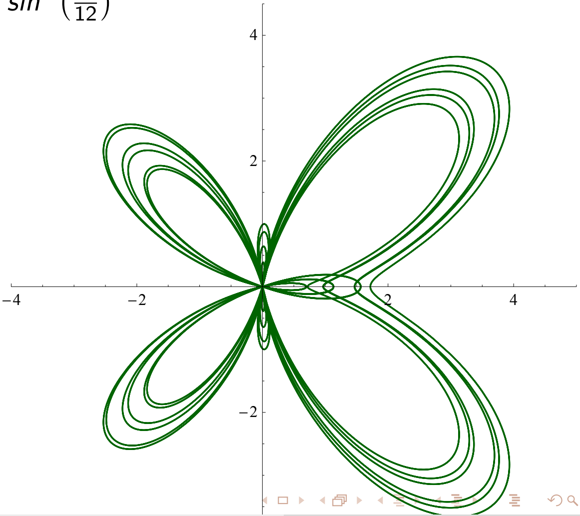
’σκηση

1. Αν η συνάρτηση $f(x) = y$ εκφράζεται με τις παραμετρικές εξισώσεις
$$x = t^3 \quad y = t^2$$
Να υπολογιστεί η dy/dx.
2. Αν η συνάρτηση $f(x) = y$ εκφράζεται με τις παραμετρικές εξισώσεις
$$x = 2\sqrt{2}\cos t \quad y = \sqrt{2}\sin t$$
Να υπολογιστεί η dy/dx.
3. Αν $x = x(t)$ και $y = y(t)$, να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο d^2y/dx^2.

Πεταλούδα...

$x(t) = r(t) \cdot cos(t),\ \ y(t) = r(t) \cdot sin(t)$ όπου

$r(t) = e^{cos(t)} - 2cos(4t) + sin^2\left(\frac{t}{12}\right)$



Θέμα – Σεπτέμβριος 2016

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ σε παραμετρική μορφή
$x = t\ln(t),\ \ y = \ln(t)/t,\ \ t > 1$. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης.

'λυτες ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί η παράγωγος dy/dx της συνάρτησης όταν $y^2 \sin x + y = \arctan x$.

   $\left(\text{Απ. } \frac{1-(1+x^2)y^2\cos x}{(1+x^2)(2y\sin x+1)}\right)$

2. Χρησιμοποιήστε λογαριθμική παραγώγιση για να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:
   - $y = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}}$

     $\left(\text{Απ. } \frac{(1-5x^2-4x^4)(1-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}\right)$
   - $y = (3+2\sin x)^{\cos 3x}$

     $(\text{Απ. } (3+2\sin x)^{\cos 3x-1}(2\cos x\cos 3x -$
     $9\ln(3+2\sin x)\sin 3x - 6\ln(3+2\sin x)\sin x\ \sin 3x)$
   - $y = x^3 e^{2x}\cos^2 x$ $(\text{Απ. } e^{2x}x^2\cos x(3\cos x + 2x\cos x - 2x\sin x)$

3. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης που δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = \sqrt{t}$, $y = t - 1/\sqrt{t}$ στο σημείο για το οποίο $t = 4$. (Απ. $17x - 4y = 20$)

4. Να εκφράσετε τη ποσότητα $\frac{d^2x}{dy^2}$ συναρτήσει των $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

   $\left(\text{Απ. } -\frac{d^2y/dx^2}{(dy/dx)^3}\right)$