

Μαθηματικά I

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων - Μιγαδικοί Αριθμοί

Άσκηση 1.

Να γραφτούν στη μορφή $a + bi$ οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$(1) \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i\right) i^3, \quad (2) z = \frac{\sqrt{5} + i}{\sqrt{5} - i} + \frac{\sqrt{5} - i}{\sqrt{5} + i}.$$

Άσκηση 2.

Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

$$(1) z = \frac{\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{2}}, \quad (2) z = 1 - \cos x + i \sin x.$$

Άσκηση 3.

Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $z_1 = \frac{3z}{1 + |z|^2}$ και $z_2 = \frac{3\bar{z}}{1 + |z|^2}$ είναι συζυγείς.

Άσκηση 4.

Αν $(a + bi)^2 = \frac{1 + 7i}{1 - i}$, να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a και b .

Άσκηση 5.

Αν $|z + i| = |z - i|$ να δειχθεί ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 6.

Αν $|z + 9| = 3|z + 1|$ να δειχθεί ότι $|z| = 3$.

Άσκηση 7.

Να γραφεί σε τριγωνομετρική μορφή ο αριθμός $z = -i$.

Άσκηση 8.

Να βρεθεί το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Άσκηση 9.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ που δίνει τη λύση της εξίσωσης $z^n = 1$ στο C , βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $z^3 = 1$ (τριγωνομετρική λύση).

Άσκηση 10.

Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$(1) \quad x^2 - 2x + 5 = 0,$$

$$(2) \quad z^5 + 1 = 0.$$