Μαθηματικά Ι

Φυλλάδιο ασκήσεων

Άσκηση 1.

Να βρεθούν οι τιμές των οριζουσών

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$(\textbf{Απ.} \ \ |D_1| = 31, \quad |D_2| = 28, \quad |D_3| = -5)$

Άσκηση2.

Να υπολογισθεί η τιμή της ορίζουσας

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

αφού τη μετατρέψετε σε άνω τριγωνική ορίζουσα.

$(\textbf{Απ.} \ \ |D| = 58)$

Άσκηση 3.

Να υπολογισθεί η τιμή της $n \times n$ ορίζουσας όταν τα στοιχεία της a_{ij} είναι πραγματικοί αριθμοί και δίνονται από τη σχέση

$$a_{ij} = \begin{cases} n+1 & \text{όταν} \ \ i = j \\ 1 & \text{όταν} \ \ i \neq j \end{cases}$$

$(\textbf{Απ.} \ \ |D| = 2n^n)$

Άσκηση 4.

Αν $a^3 + b^3 = 1$ να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

$(\textbf{Απ.} \ \ A^{-1} = \begin{pmatrix} a^2 & -ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & -ab \\ -ab & b^2 & a^2 \end{pmatrix})$

Άσκηση 5.

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 2x - 3z &= 3 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

με τρεις τρόπους (ορίζουσες, Gauss, πίνακες).

$$(\textbf{Απ.}\ \ x=3,\quad y=2,\quad z=1)$$

Άσκηση 6.

Να λυθούν τα γραμμικά συστήματα:

$$\begin{aligned} 2x-y+3z&=2 \\ x+3y-z&=-3 \\ 3x+y+3z&=5 \end{aligned}\ ,\qquad \begin{aligned} x-2y+z&=1 \\ 2x-2y-z&=0 \\ -x+y+3z&=2 \end{aligned}$$

$$(\textbf{Απ.}\ \ x=-19,\quad y=11,\quad z=17,\quad x=3/5,\quad y=1/5,\quad z=4/5)$$

Άσκηση 7.

Να βρεθεί ο βαθμός των πινάκων:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\textbf{Απ.}\ \ \mathrm{rank}A=2,\quad \mathrm{rank}B=3,\quad \mathrm{rank}C=2)$$

Άσκηση 8.

Να βρεθεί η τιμή του x έτσι ώστε ο βαθμός του πιο κάτω πίνακα να είναι 3.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & x & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\textbf{Απ.}\ \ x=7)$$

’σκηση 9.

Να λυθούν τα ομογενή συστήματα:

$$\begin{aligned} 2x-2y+3z&=0 \\ 3x+y+4z&=0 \\ x+y+2z&=0 \end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned} x+y+3z&=0 \\ -x-2y+z&=0 \\ 3x+2y+13z&=0 \end{aligned}$$

$$(\textbf{Απ.}\ \ \text{Μηδενική λύση},\quad x=-7t, y=4t, z=t)$$

Άσκηση 10.

Να βρεθούν το λ ώστε το σύστημα να έχει μία, καμία ή άπειρες λύσεις. Σε κάθε περίπτωση να βρίσκεται η λύση.

$$\begin{aligned} x+y+\lambda z&=1 \\ x+\lambda y+z&=\lambda \\ \lambda x+y+z&=\lambda^2 \end{aligned}$$

$$(\textbf{Απ.}\ \ \text{για } \lambda\neq 1, \lambda\neq -2, \text{μία λύση},\quad \text{για } \lambda=1, \text{άπειρες},\quad \text{για } \lambda=-2, \text{αδύνατο})$$

Άσκηση 11.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\textbf{Απ.}\ A : \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -2,\ \boldsymbol{\delta_1} = t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\delta_2} = t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$B : \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 3,\ \boldsymbol{\delta_1} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\delta_2} = t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\delta_3} = t_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Άσκηση 12.

Να βρεθούν τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\textbf{Απ.}\ \boldsymbol{\delta_1} = \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\delta_2} = \pm \tfrac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix})$$

Άσκηση 13.

Να διαγωνιοποιηθεί, αν είναι εφικτό, ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

(**Απ.** Διαγωνιοποιείται)