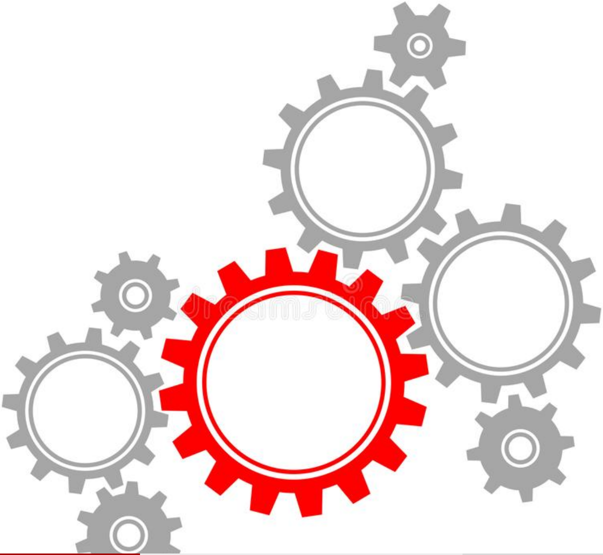
8η - 9η εβδομάδα μαθημάτων



Ορισμένα ολοκληρώματα

- Έστω μια συνάρτηση f και έστω D ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της (π.χ. $D = (a, b)$).
- Έστω P μια διαμέριση του D σε n κομμάτια. (Διαμέριση λέγεται οποιοσδήποτε τρόπος χωρισμού του D σε n κομμάτια)
- Έστω $a = x'_0 < x'_1 < \ldots < x'_n = b$ μια τέτοια διαμέριση.
- Σε κάθε διάστημα $[x'_{i-1}, x'_i)$ επιλέγουμε ένα σημείο x_i και υπολογίζουμε την τιμή της f στο σημείο αυτό.
- $f(x_i)\delta(x_i)$ όπου $\delta(x_i) = x'_i - x'_{i-1}$ Τι εκφράζει αυτό;
- $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta(x_i)$ Τι εκφράζει αυτό;

Ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\lim_{\delta(x)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta(x) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ορισμένα ολοκληρώματα

Ιδιότητες

Για τα ορισμένα ολοκληρώματα ισχύουν όλες οι ιδιότητες που ισχύουν για τα αόριστα ολοκληρώματα.

Επίσης, ισχύουν και οι παρακάτω ιδιότητες

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Αν $f(x) \geq 0$ για $a \leq x \leq b$ τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Αν $f(x) \leq g(x)$ για $a \leq x \leq b$ τότε $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \;\; a \leq c \leq b$

Με τι όμως ισούται το ορισμένο ολοκλήρωμα...

- Για κάθε σημείο γ τέτοιο ώστε $a < \gamma < b$ ισχύει $\int_a^b f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^b f(x)dx$ $(E_a^b = E_a^\gamma + E_\gamma^b)$.
- $E_a^b = f(\gamma)(b-a)$ (1)
- Έστω x ένα τυχαίο σημείο του (a, b), τότε θα ισχύει $E_a^x + E_x^{x+\Delta x} = E_a^{x+\Delta x} \Rightarrow E_a^{x+\Delta x} - E_a^x = E_x^{x+\Delta x}$
- $\frac{E_a^{x+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{E_a^x}{\Delta x} = \frac{E_x^{x+\Delta x}}{\Delta x}$
- Από τη σχέση (1) έχουμε $\frac{E_x^{x+\Delta x}}{\Delta x} = f(x')$ άρα $\frac{E_a^{x+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{E_a^x}{\Delta x} = f(x')$
- $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{E_a^{x+\Delta x} - E_a^x}{\Delta x} = \lim_{x' \to x} f(x') = f(x)$$

Με τι ισούται

- Άρα
$$(E_a^x)' = f(x)$$
- $E_a^x = \int f(x)dx = F(x) + c$
- Όμως $E_a^a = 0$ άρα $F(a) + c = 0 \Rightarrow c = -F(a)$
- άρα $E_a^x = \int f(x)dx = F(x) - F(a)$

Επομένως
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ασκήσεις

Υπολογίστε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα

- $\int_0^2 (x^2 - 4) dx =$
- $\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx =$
- $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx =$
- Δείξτε ότι
$$\int_1^e \ln t dt = \int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt$$

Ορισμός συναρτήσεων μέσω ορισμένων ολοκληρωμάτων

Το ορισμένο ολοκλήρωμα προσφέρει έναν νέο τρόπο ορισμού συνάρτησης αφού το ορισμένο ολοκλήρωμα μια συνεχούς συνάρτησης $f(t)$, $a \leq t \leq x$ ορίζει τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Θεώρημα:

Αν η f είναι συνεχής στο $[a,\ b]$ τότε η συνάτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

είναι παραγωγίσιμη στο $[a,\ b]$ και

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Ορισμός συναρτήσεων μέσω ορισμένων ολοκληρωμάτων

Κανόνας του Leibniz:

Έστω η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a. b]$ και οι $u(x)$ και $v(x)$ είναι παραγωγίσιμές συναρτήσεις του x των οποίων οι τιμές βρίσκονται στο διάστημα $[a, \ b]$, τότε

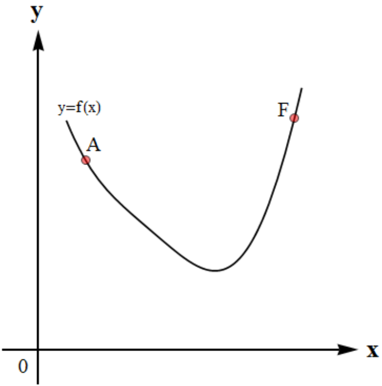
$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων

- $F(x) = \int_x^2 e^{2t}dt$
- $F(x) = \int_1^{\sin x} \frac{1}{1+t}dt$
- $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^2 t\cos(t^2)dt$
- $F(x) = \int_{\sin x}^{x^2}(1+t)dt$

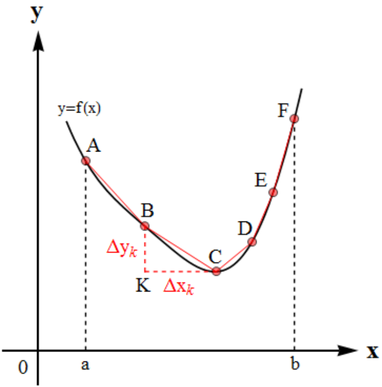
Μήκος καμπύλης

Έστω $y = f(x)$ μία καλά ορισμένη συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$.
Ζητάμε να βρούμε το μήκος της καμπύλης AF.



Μήκος καμπύλης

Έστω $y = f(x)$ μία καλά ορισμένη συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Ζητάμε να βρούμε το μήκος της καμπύλης AF.



$$BC = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$L_{AF} \cong \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

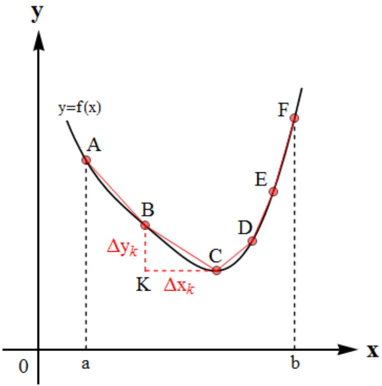
$$L_{AF} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \quad (1)$$

Θεώρημα μέσης τιμής: $\exists\, c \in (B, C)$

$$f'(c) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \Longrightarrow \Delta y_k = f'(c)\Delta x_k$$

οπότε η (1) γράφεται

Μήκος καμπύλης



$$L_{AF} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c)\Delta x_k)^2} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \left(\sum_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(c))^2}\, \Delta x_k \right)$$

$$L_{AF} =$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx == \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

ή $\left(\int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \right)$

Παραμετρικές εξισώσεις:

$$L_{AF} = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Πολικές συντεταγμένες:

$$L_{AF} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Άσκηση 1.

Να βρεθεί ακριβώς το μήκος της καμπύλης $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1$ για $0 \leq x \leq 1$.

Λύση:

Από τη σχέση $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, χρειάζεται να υπολογίσουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2}$$

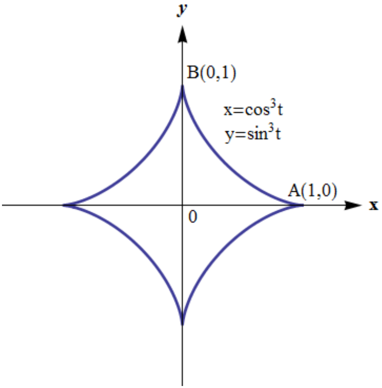
και συνεπώς

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(2\sqrt{2}x^{1/2})^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+8x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left.\frac{(1+8x)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 = \left.\frac{1}{12}(1+8x)^{3/2}\right|_0^1 = \frac{13}{6}.$$

Άσκηση 2.

Να υπολογισθεί το μήκος της καμπύλης $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ όταν $0 \leq t \leq 2\pi$.



Αστροειδής ή υποκυκλοειδής καμπύλη.

Άσκηση 2.

Λύση:

Από τη σχέση $L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$, χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ποσότητες:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = [3\cos^2 t(-\sin t)]^2 = 9\cos^4 t\, \sin^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = [3\sin^2 t(\cos t)]^2 = 9\sin^4 t\, \cos^2 t$$

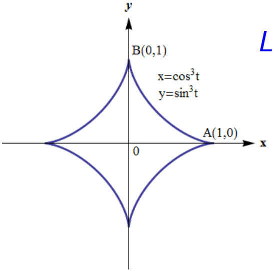
άρα

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9\cos^2 t\, \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} =$$

$$= \sqrt{9\cos^2 t\, \sin^2 t} = 3|\cos t\, \sin t|\,.$$

Συνεπώς το ζητούμενο μήκος θα είναι

Άσκηση 2.



$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} 3|\cos t\ \sin t|\, dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 3\cos t\ \sin t\, dt = 12\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2t\, dt =$$

$$= 6\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, d(2t) =$$

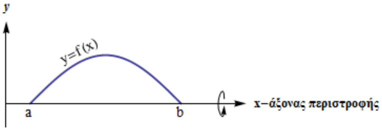
$$= -\frac{6}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = 6\,.$$

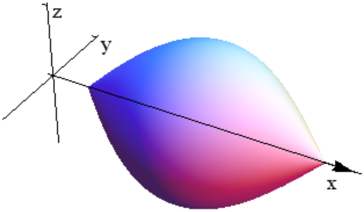
Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί το μήκος της καμπύλης $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ αν $1 \leq x \leq 2$.
   $\left(\textbf{Απ.}\ L = \frac{2}{3}\left(3^{3/2} - 2^{3/2}\right)\right)$.
2. Βρείτε την απόσταση που διανύει ένα σημείο $P(x, y)$, του οποίου η θέση κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τις σχέσεις $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$ με το t από $t = 0$ έως $t = \pi/2$. $(\textbf{Απ.}\ L = \sqrt{2})$.
3. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $y = \ln(\sin x)$ όταν $\pi/4 < x < \pi/2$. $\left(\textbf{Απ.}\ L = -\ln(\tan\frac{\pi}{8})\right)$.
4. Να υπολογιστεί το μήκος τόξου της καρδιοειδούς καμπύλης $\rho = a \cdot (1 + cos\phi)$, $a > 0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. $(\textbf{Απ.}\ L = 8a)$.

Υπολογισμός όγκου στερεού από περιστροφή

Έστω μία συνεχής μη αρνητική συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$, η οποία περιστρέφεται κατά 2π γύρω από τον οριζόντιο $x-$άξονα.



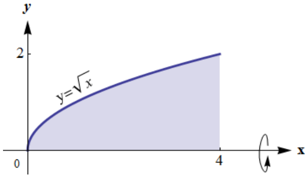


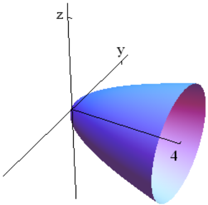
Όγκος στερεού: $V = \displaystyle\int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx$

Άσκηση:

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, γύρω από τον $x-$άξονα.

Λύση:
Σχεδιάζουμε την καμπύλη και την περιστρέφουμε γύρω από τον $x-$άξονα.

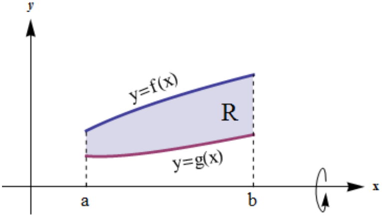


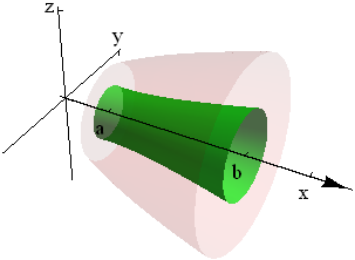


Όγκος στερεού:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx = \int_0^4 \pi \left[\sqrt{x}\right]^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi$$

Έστω δύο συνεχείς καμπύλες $y = f(x)$ και $y = g(x)$ θετικές, ορισμένες στο κοινό διάστημα $[a, b]$ και έστω ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, που περιστρέφονται γύρω από τον $x-$άξονα.





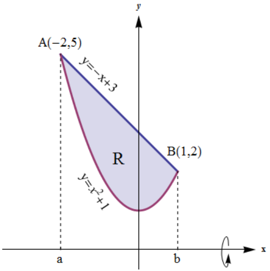
Όγκος στερεού:

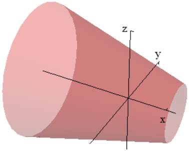
$$V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)dx \rightarrow \text{Εξωτερικό} - \text{Εσωτερικό}$$

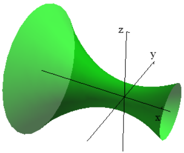
Άσκηση:

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της περιοχής R που ορίζεται από τις καμπύλες $f(x) = -x + 3$ και $g(x) = x^2 + 1$, γύρω από τον $x-$άξονα.

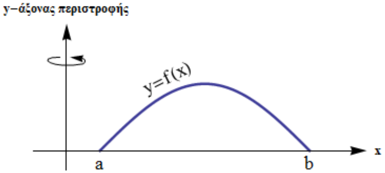
Λύση:
Σχεδιάζουμε τις καμπύλες που περιστρέφουμε γύρω από τον $x-$άξονα.
Βρίσκουμε τα σημεία τομής τους.

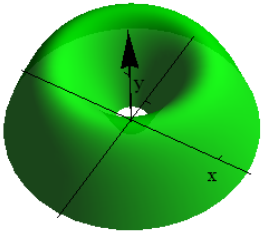






Περιστροφή γύρω από τον $y-$άξονα.





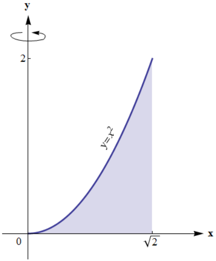
Όγκος στερεού:

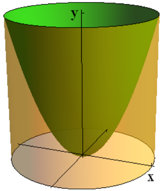
$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

Άσκηση:

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y = x^2$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, γύρω από τον $y-$άξονα.

Λύση:
Σχεδιάζουμε την καμπύλη και την περιστρέφουμε γύρω από τον $y-$άξονα.





$$V = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x\, x^2\, dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x^3\, dx = 2\pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi$$

Συμπερασματικά:

Ολοκλήρωση ως προς x:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx\,, \qquad V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

Ολοκλήρωση ως προς y:

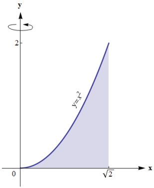
$$V = \int_c^d \pi[f^{-1}(y)]^2\,dy\,, \qquad V = \int_c^d 2\pi y f^{-1}(y)\,dy$$

Κριτήριο:

- Περιστροφή ως προς ένα άξονα και ολοκλήρωση ως προς την "ίδια" μεταβλητή.
- Περιστροφή ως προς ένα άξονα και ολοκλήρωση ως προς την "άλλη" μεταβλητή.

Άσκηση:

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y = x^2$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, γύρω από τον $y-$άξονα.



1ος τρόπος:

$$V = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x\, x^2\, dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x^3\, dx = 2\pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi$$

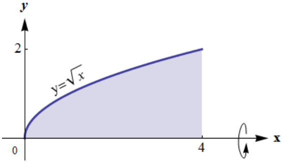
2ος τρόπος:

$$V = \int_c^d \pi[f^{-1}(y)]^2\, dy = \int_0^2 \pi \left[(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{y})^2\right] dy = \pi \int_0^2 (2-y)\, dy =$$

$$= \pi \left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 2\pi$$

Άσκηση:

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, γύρω από τον $x-$άξονα.



1ος τρόπος:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx = \int_0^4 \pi \left[\sqrt{x}\right]^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi$$

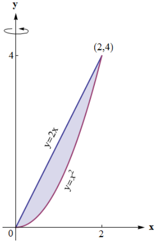
2ος τρόπος:

$$V = \int_c^d 2\pi \, y \, f^{-1}(y) \, dy = \int_0^2 2\pi y \left(4 - y^2\right) \, dy = 8\pi \int_0^2 y \, dy - 2\pi \int_0^2 y^3 \, dy =$$

$$= \; 8\pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 - 2\pi \frac{y^4}{4}\Big|_0^2 = 16\pi - 8\pi = 8\pi$$

Άσκηση:

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της περιοχής που ορίζεται από τις καμπύλες $y = 2x$ και $y = x^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο, γύρω από τον $y-$άξονα.



$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi\, x\, f(x)\, dx = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = \\ &= 4\pi \int_0^2 x^2 dx - 2\pi \int_0^2 x^3 dx = 4\pi \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - \\ &- 2\pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{3} - \frac{32\pi}{4} = \frac{8\pi}{3} \qquad \text{ή} \end{aligned}$$

$$V = \int_c^d \pi \left([f^{-1}(y)]^2 - [g^{-1}(y)]^2\right) dy = \pi \int_0^4 \left([\sqrt{y}]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right) dy =$$

$$= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8\pi}{3}$$

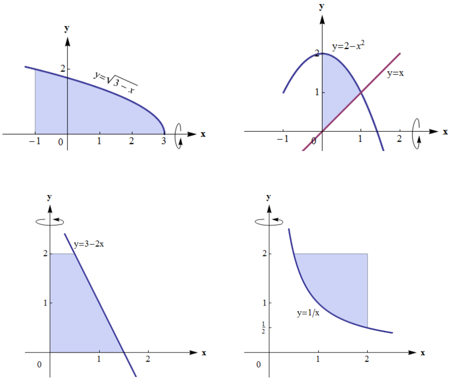
Άλυτες ασκήσεις

4. Βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει όταν περιστρέψουμε την $x^2 + y^2 = r^2$ με $x, y > 0$, γύρω από τον άξονα xx'.
5. Βρείτε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται όταν η περιοχή που περικλείεται από τις $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ και $x = 0$, περιστραφεί γύρω από τον $y-$άξονα.
6. Βρείτε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται όταν η περιοχή R κάτω από την $y = x^2$ και στο διάστημα [0,2], περιστραφεί γύρω από τον $x-$άξονα.
7. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από περιστροφή της περιοχής που ορίζεται από την παραβολή $y^2 = 8x$ και της ευθείας $x = 0$, γύρω από τον άξονα y όταν το $x \in [0, 2]$.
8. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από περιστροφή, της παραβολής $y^2 = 8x$ και της ευθείας $x = 2$, γύρω από τον άξονα y.
9. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από περιστροφή, της παραβολής $y^2 = 8x$ του άξονα x και της ευθείας $x = 2$, γύρω από τον άξονα x.

Άλυτες ασκήσεις

10. Βρείτε τον όγκο του στερεού από περιστροφή, που προκύπτει όταν ο τόπος που περιορίζεται από τις $y = -x^2 - 3x + 6$ και $x + y - 3 = 0$ περιστρέφεται γύρω από την ευθεία $y = 0$.

11. Βρείτε τον όγκο των στερεών που προκύπτουν όταν η γραμμοσκιασμένη περιοχή περιστραφεί γύρω από τον άξονα όπως σημειώνεται στα παρακάτω σχήματα.



Γενικευμένα ολοκληρώματα

Ορισμός:

Το $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ θα ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** αν :

• Το ένα ή και τα δύο άκρα της ολοκλήρωσης είναι άπειρο, δηλαδή της μορφής:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

• Η συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει πεπερασμένη τιμή σε ένα ή περισσότερα σημεία του διαστήματος ολοκλήρωσης $a \leq x \leq b$, δηλαδή είναι της μορφής:

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{όταν στο σημείο } a \text{ ή στο } b \text{ ή στο } c, \text{ με } a < c < b, \text{ η } f(x) \text{ δεν έχει πεπερασμένη τιμή.} \tag{2}$$

• Όταν συμβαίνουν ταυτόχρονα οι (1) και (2).

Συχνά τα ολοκληρώματα της μορφής (1) ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου είδους**, τα (2) ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα δεύτερου είδους** και αν συμβαίνουν ταυτόχρονα τα δύο προηγούμενα ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα τρίτου είδους**.

Γενικευμένα ολοκληρώματα 1ου είδους.

• Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο διάστημα $a \leq x < \infty$. Ορίζουμε τότε την ισότητα,

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx \tag{3}$$

και λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει ή αποκλίνει αν το όριο στο δεύτερο μέλος είναι πεπερασμένο ή όχι αντίστοιχα.

Γενικευμένα ολοκληρώματα

• Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο διάστημα $-\infty < x \leq b$. Ορίζουμε τότε την ισότητα,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{4}$$

και λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει ή αποκλίνει αν το όριο είναι πεπερασμένο ή όχι αντίστοιχα.

• Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο διάστημα $-\infty < x < \infty$. Ορίζουμε τότε την ισότητα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx \tag{5}$$

όπου c τυχαίος αριθμός. Θα λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα, αριστερά της ισότητας, συγκλίνει ή αποκλίνει αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα, δεξιά της ισότητας, συγκλίνουν (και τα δύο) ή αποκλίνουν (τουλάχιστον το ένα) αντίστοιχα.

Γενικευμένα ολοκληρώματα 2ου είδους.

• Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο διάστημα $a \leq x < b$ (δηλαδή η συνάρτηση δεν έχει πεπερασμένη τιμή στο άκρο b). Ορίζουμε τότε την ισότητα,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx \tag{6}$$

και λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει ή αποκλίνει αν το όριο στο δεύτερο μέλος είναι πεπερασμένο ή όχι αντίστοιχα.

Γενικευμένα ολοκληρώματα

• Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο διάστημα $a < x \leq b$ (η f δεν έχει πεπερασμένη τιμή στο άκρο a). Ορίζουμε τότε την ισότητα,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx \tag{7}$$

και λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει ή αποκλίνει αν το όριο είναι πεπερασμένο ή όχι αντίστοιχα.

• Τέλος, έστω μία συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο διάστημα $a \leq x \leq b$ εκτός από ένα σημείο c του διαστήματος όπου δεν έχει πεπερασμένη τιμή. Ορίζουμε τότε την ισότητα,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\rho \to 0^+} \int_{c+\rho}^b f(x)\,dx \tag{8}$$

και λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και τα δύο όρια είναι πεπερασμένα ή λέμε ότι αποκλίνει αρκεί το ένα από τα όρια του δεύτερου μέλους να μην έχει πεπερασμένη τιμή.

Γενικευμένα ολοκληρώματα

Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$
- $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$
- $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$
- $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Άσκηση:

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Λύση:
Ολοκλήρωμα 1ου είδους.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{όμως}$$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \arctan x \Big|_{0}^{b} = \\ &= \lim_{b\to\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \lim_{b\to\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2} \quad \text{και}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \arctan x \Big|_{a}^{0} = \\ &= \lim_{a\to-\infty} (\arctan 0 - \arctan a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{άρα}\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Άσκηση:

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$.

Λύση:
Ολοκλήρωμα 2ου είδους.

$$
\begin{aligned}
\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{2+\epsilon}^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} 2\sqrt{x-2}\Big|_{2+\epsilon}^5 = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2+\epsilon-2}\right) = \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Άσκηση:

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$.

Λύση:
Ολοκλήρωμα 2ου είδους.

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{x-1} + \lim_{\rho\to 0^+} \int_{1+\rho}^3 \frac{dx}{x-1}$$

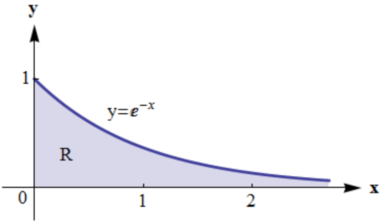
Αλλά

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{x-1} &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \ln|x-1|\Big]_0^{1-\epsilon} = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\ln|1-\epsilon-1| - \ln|-1|\right) = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\ln|-\epsilon| - \ln|-1|\right) = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} \ln(\epsilon) = -\infty
\end{aligned}$$

Άρα το ολοκλήρωμα αποκλίνει (δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα).

Άσκηση:

Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής R του παρακάτω σχήματος.



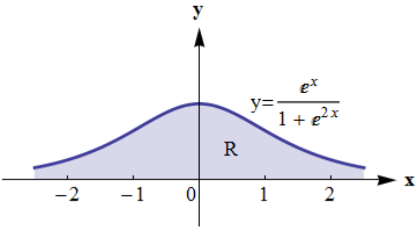
$$E = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx =$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b =$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) =$$
$$= 1$$

Άλυτες ασκήσεις

1. Να λυθούν τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \qquad I_2 = \int_0^2 \frac{dx}{x-2}, \qquad I_3 = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής R του παρακάτω σχήματος.



3. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής R του παρακάτω σχήματος.