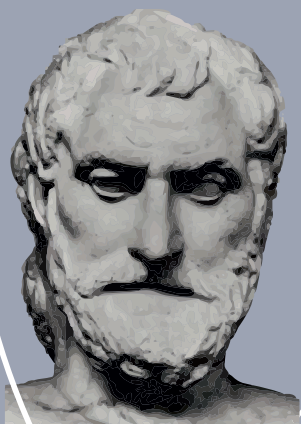


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

# Μαθηματικά



Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ  
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών  
και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

### ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός  
Κατσαργύρης Βασίλειος  
Μέτης Στέφανος  
Μπρουχούτας Κων/νος  
Παπασταυρίδης Σταύρος  
Πολύζος Γεώργιος

- Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
- Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης
- Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης
- Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης
- Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
- Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

### ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Θωμαΐδης Ιωάννης

- Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

### ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός  
Κατσαργύρης Βασίλειος  
Μέτης Στέφανος  
Μπρουχούτας Κων/νος  
Πολύζος Γεώργιος

### ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ

Αδαμόπουλος Λεωνίδας

- Επίτιμος Σύμβουλος του Π.Ι.

Δακτυλογράφηση:  
Σχήματα:

Γαρδέρη Ρόζα  
Μπούτσικας Μιχάλης

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
ανάπτυξη των αριστερών της γνώσης



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι αλλαγές που ενσωματώθηκαν στην παρούσα επανέκδοση έγιναν με βάση τις διορθώσεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Γ' Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών  
και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

**Ανδρεαδάκης Στυλιανός**  
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

**Κατσαργύρης Βασίλειος**  
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

**Μέτης Στέφανος**  
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

**Μπρουχούτσας Κων/νος**  
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

**Παπασταυρίδης Σταύρος**  
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

**Πολύζος Γεώργιος**  
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε  
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου





---

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών, όπως προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ' τάξης του Ενιαίου Λυκείου.

Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση του βιβλίου των Μαθηματικών της 2ης και της 4ης δέσμης της Γ' τάξης του Γενικού Λυκείου και αποτελείται από δύο μέρη.

- Το πρώτο μέρος, που φέρει τον τίτλο ΑΛΓΕΒΡΑ, αποτελείται από δυο κεφάλαια. — Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια εισαγωγή στη Θεωρία των Πινάκων, η οποία μεταξύ άλλων είναι ένα εργαλείο για τη μελέτη των Γεωμετρικών Μετασχηματισμών και των Γραμμικών Συστημάτων, τα οποία μελετώνται στο ίδιο κεφάλαιο.

- Το δεύτερο κεφάλαιο εισάγει στους Μιγαδικούς Αριθμούς, οι οποίοι είναι προέκταση των Πραγματικών Αριθμών. Οι Μιγαδικοί Αριθμοί ανακαλύφθηκαν την περίοδο της Αναγέννησης στην προσπάθεια επίλυσης εξισώσεων τρίτου βαθμού. Όμως, στους αιώνες που ακολούθησαν αποδείχτηκε η μεγάλη σημασία τους για πάρα πολλά προβλήματα της μαθηματικής επιστήμης και των εφαρμογών της.

Το κεφάλαιο αυτό έχει ληφθεί από το βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής Κατεύθυνσης Β' τάξης Ενιαίου Λυκείου των συγγραφέων: Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α.

- Το δεύτερο μέρος, που φέρει τον τίτλο ΑΝΑΛΥΣΗ, αποτελείται από τρία κεφάλαια.

- Το πρώτο κεφάλαιο σηματοδοτεί ένα νέο ξεκίνημα. Είναι το πέρασμα από τις πεπερασμένες πράξεις στις «άπειρες διαδικασίες». Τα σπέρματα της έννοιας του ορίου υπάρχουν ασφαλώς με πολύ σαφή και συγκεκριμένο τρόπο στα γραπτά του Αρχιμήδη. Η ανάπτυξη, όμως, αυτής της έννοιας έγινε στα χρόνια της Αναγέννησης και έκτοτε κατέχει κεντρική θέση στον κόσμο των μαθηματικών εννοιών.

Κατ' αρχάς στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται βασικές – και ήδη γνωστές στους μαθητές – έννοιες των συναρτήσεων, καθώς και μερικές ακόμη βασικές έννοιες της Ανάλυσης. Στη συνέχεια εισάγεται η έννοια του ορίου στο  $x_0 \in \mathbb{R}$ , η έννοια του ορίου στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$  και δίνονται οι πιο χαρακτηριστικές ιδιότητές του. Τέλος, δίνεται η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης και παρουσιάζονται οι βασικότερες ιδιότητές της.

- Στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος αντιστοίχως και γίνεται χρήση των εννοιών αυτών σε πολλές

εφαρμογές. Η παράγωγος και το ολοκλήρωμα είναι κατά κάποιο τρόπο οι δύο διαφορετικές όψεις του ίδιου νομίσματος. Σε μια έκφρασή τους είναι η κλίση της εφαπτομένης και το εμβαδόν, σε άλλη η ταχύτητα και το μήκος της τροχιάς ενός κινητού κτλ.

Αυτό το βιβλίο ως ανθρώπινο δημιούργημα δεν είναι τέλειο. Ο μόνος τρόπος για να έχουμε στα σχολεία μας ύστερα από μερικά χρόνια ένα καλύτερο μέσο διδασκαλίας είναι ο νηφάλιος και ελεύθερος διάλογος, τον οποίο η επιστημονική παράδοση έχει καθιερώσει για αιώνες τώρα. Γι' αυτό το λόγο η συγγραφική ομάδα με ιδιαίτερη ικανοποίηση θα δέχεται σχόλια και παρατηρήσεις για το βιβλίο από οποιονδήποτε – συνάδελφο, μαθητή ή άλλο πολίτη – ενδιαφέρεται για τα ζητήματα της παιδείας. Τα σχόλια και οι παρατηρήσεις μπορούν να αποστέλλονται στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μεσογείων 396, 153 10 Αγία Παρασκευή.

Οι Συγγραφείς

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

## A' ΜΕΡΟΣ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα</b>	Σελ.
1.1 Η έννοια του πίνακα	11
1.2 Πρόσθεση πινάκων - Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα	16
1.3 Πολλαπλασιασμός πινάκων	24
1.4 Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί	37
1.5 Η έννοια του γραμμικού συστήματος	50
1.6 Επίλυση γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss	52
1.7 Επίλυση γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο των οριζουσών	63

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Μιγαδικοί Αριθμοί

2.1 Η Έννοια του Μιγαδικού Αριθμού	85
2.2 Πράξεις στο Σύμπλοκο $\mathbb{C}$ των Μιγαδικών	88
2.3 Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού	97
2.4 Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού	103
2.5 Πολυωνυμικές Εξισώσεις στο $\mathbb{C}$	112

## B' ΜΕΡΟΣ (ΑΝΑΛΥΣΗ)

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: Όριο - συνέχεια συνάρτησης</b>	Σελ.
1.1 Πραγματικοί Αριθμοί	129
1.2 Συναρτήσεις	132
1.3 Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση	148
1.4 Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$	157
1.5 Ιδιότητες των ορίων	165
1.6 Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$	176
1.7 Όριο συνάρτησης στο άπειρο	182
1.8 Συνέχεια συνάρτησης	188

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Διαφορικός Λογισμός**

2.1	Η έννοια της παραγώγου	209
2.2	Παραγωγίσιμες συναρτήσεις - Παράγωγος συνάρτησης	222
2.3	Κανόνες παραγώγισης	229
2.4	Ρυθμός μεταβολής	241
2.5	Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού	245
2.6	Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής	250
2.7	Τοπικά ακρότατα συνάρτησης	258
2.8	Κυρτότητα - σημεία καμψής συνάρτησης	272
2.9	Ασύμπτωτες - Κανόνες De L' Hospital	279
2.10	Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης	287

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Ολοκληρωτικός Λογισμός**

3.1	Αόριστο ολοκλήρωμα	303
3.2	Μέθοδοι ολοκλήρωσης	309
3.3	Διαφορικές εξισώσεις	318
3.4	Ορισμένο ολοκλήρωμα	326
3.5	Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$	333
3.6	Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού	340
3.7	Εμβαδόν επιπέδου χωρίου	342

## **ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

365

# *ΑΛΓΕΒΡΑ*

*Α΄ ΜΕΡΟΣ*



# 1 ΠΙΝΑΚΕΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

## 1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

### Γενικά

Τέσσερα εργοστάσια παραγωγής αυτοκινήτων *A*, *B*, *Γ* και *Δ* δίνουν για το τελευταίο μοντέλο τους ως προς πέντε τεχνικά χαρακτηριστικά τις εξής πληροφορίες:

Εργοστάσιο *A*: Ισχύς 97 DIN, χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h 10,7 sec, τελική ταχύτητα 180 km/h, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 9,5 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 10.

Εργοστάσιο *B*: Ισχύς 100 DIN, χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h 12,9 sec, τελική ταχύτητα 191 km/h, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 11 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 11.

Εργοστάσιο *Γ*: Ισχύς 45 DIN, χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h 17,9 sec, τελική ταχύτητα 140 km/h, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km, 7,1 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 6.

Εργοστάσιο *Δ*: Ισχύς 174 DIN, χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h 7,6 sec, τελική ταχύτητα 225 km/h, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 12,5 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 20.

Τις πληροφορίες αυτές μπορούμε να τις παρουσιάσουμε πιο οργανωμένα ως εξής:

Τεχνικά Χαρακτηρ. Εργοστάσιο	Ισχύς DIN	Χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h	Τελική Ταχύτητα km/h	Κατανάλωση στην πόλη lit ανά 100 km	Φορολογήσι- μοι ίπποι
<i>A</i>	97	10,7	180	9,5	10
<i>B</i>	100	12,9	191	11	11
<i>Γ</i>	45	17,9	140	7,1	6
<i>Δ</i>	174	7,6	225	12,5	20



Τα αριθμητικά δεδομένα της ορθογώνιας αυτής διάταξης, κλεισμένα μέσα σε αγκύλες,

$$\begin{bmatrix} 97 & 10,7 & 180 & 9,5 & 10 \\ 100 & 12,9 & 191 & 11 & 11 \\ 45 & 17,9 & 140 & 7,1 & 6 \\ 174 & 7,6 & 225 & 12,5 & 20 \end{bmatrix}$$

λέμε ότι σχηματίζουν έναν **πίνακα με 4 γραμμές και 5 στήλες** ή, συντομότερα, έναν πίνακα **τύπου  $4 \times 5$**  ή ακόμα έναν  **$4 \times 5$  πίνακα**.

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - \omega = 1 \\ 5x - 2z + \omega = 2 \\ y - 7z + 3\omega = 3 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό θα μπορούσε να παρασταθεί ως εξής:

Συντελεστής Εξίσωση	Συντελεστής				σταθ. όρος
	του $x$	του $y$	του $z$	του $\omega$	
1η	1	-3	2	-1	1
2η	5	0	-2	1	2
3η	0	1	-7	3	3

Έτσι οι συντελεστές των αγνώστων σχηματίζουν τον  **$3 \times 4$  πίνακα**

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

και οι συντελεστές των αγνώστων μαζί με τους σταθερούς όρους τον  **$3 \times 5$  πίνακα**

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια διάταξη  $\mu \cdot \nu$  το πλήθος αριθμών σε μορφή ορθογωνίου σχήματος με  $\mu$  γραμμές και  $\nu$  στήλες, λέγεται **πίνακας τύπου  $\mu \times \nu$**  ή απλούστερα  **$\mu \times \nu$  πίνακας**.

Τους πίνακες τους συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα  $A, B, \Gamma$  κτλ.

Οι αριθμοί με τους οποίους σχηματίζουμε έναν πίνακα λέγονται **στοιχεία** του πίνακα.

Το στοιχείο ενός  $\mu \times \nu$  πίνακα  $A$  που ανήκει στην  $i$ -γραμμή και  $j$ -στήλη συμβολίζεται με  $a_{ij}$ .

Έτσι ο  $\mu \times \nu$  πίνακας  $A$  γράφεται:

$$\begin{matrix} & & & j \text{ στήλη} & & \\ & & & \left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{i\nu} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu j} & \cdots & a_{\mu \nu} \end{array} \right] & i \text{ γραμμή} & \end{matrix}$$

ή συντομογραφικά  $[a_{ij}]$ ,  $1 \leq i \leq \mu$ ,  $1 \leq j \leq \nu$ .

Για παράδειγμα, ο  $2 \times 2$  πίνακας  $[a_{ij}]$  με  $a_{ij} = i - j$  έχει στοιχεία  $a_{11} = 1 - 1 = 0$ ,  $a_{12} = 1 - 2 = -1$ ,  $a_{21} = 2 - 1 = 1$  και  $a_{22} = 2 - 2 = 0$ . Επομένως, ο πίνακας αυτός γράφεται

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η ισότητα μεταξύ των πινάκων ορίζεται ως εξής:

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο πίνακες  $A, B$  λέμε ότι είναι **ίσοι**, όταν έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών, τον ίδιο αριθμό στηλών (δηλαδή αν είναι του ίδιου τύπου) και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

Για να δηλώσουμε ότι δύο πίνακες είναι ίσοι γράφουμε  $A = B$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι δύο πίνακες διαφορετικού τύπου δεν μπορεί να είναι ίσοι.

Αν ένας πίνακας έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών, δηλαδή είναι τύπου  $\nu \times \nu$  για κάποιο  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , τότε ο πίνακας αυτός λέγεται **τετραγωνικός πίνακας**.

Τα στοιχεία  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{\nu\nu}$  ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$ , λέμε ότι σχηματίζουν την **κύρια διαγώνιο** του  $A$ .

Αν τα στοιχεία ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  που δεν βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο είναι όλα 0, τότε ο  $A$  λέγεται **διαγώνιος πίνακας**.

Για παράδειγμα, οι πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

είναι διαγώνιοι πίνακες.

Ένας πίνακας που έχει μία μόνο γραμμή, όπως ο  $[2 \ 0 \ 1 \ 3]$  λέγεται **πίνακας γραμμή**,

ενώ ένας πίνακας που έχει μία μόνο στήλη, όπως ο  $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  λέγεται **πίνακας στήλη**. Ένας

πίνακας που έχει ένα μόνο στοιχείο, όπως ο  $[-3]$  λέγεται **πίνακας στοιχείο**.

Τέλος, ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **τριγωνικός άνω**, όταν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά και **τριγωνικός κάτω**, όταν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

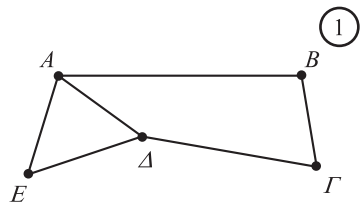
είναι τριγωνικοί άνω, ενώ οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι τριγωνικοί κάτω.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1** Το διπλανό σχήμα παριστάνει το οδικό δίκτυο που συνδέει τις πόλεις  $A, B, \Gamma, \Delta$  και  $E$ . Να παρασταθεί το δίκτυο αυτό με έναν πίνακα του οποίου κάθε στοιχείο να φανερώνει το πλήθος των δυνατών τρόπων μετάβασης από πόλη σε πόλη, (όχι οπωσδήποτε διαφορετική πόλη), αφού προηγουμένως περάσουμε από μία μόνο πόλη, π.χ.  $ABA$  κτλ.



### ΛΥΣΗ

Από την πόλη  $A$  στην  $A$  υπάρχουν 3 τρόποι:  $ABA, A\Delta A, AEA$ , από την  $A$  στην  $B$  δεν υπάρχει τρόπος, αφού πρέπει να περάσουμε από μία μόνο πόλη, από την  $A$  στην  $\Gamma$  υπάρχουν 2 τρόποι  $A\Delta\Gamma, AB\Gamma$ , από την  $A$  στη  $\Delta$  υπάρχει ένας τρόπος  $AED$ , από την  $A$  στην  $E$  υπάρχει 1 τρόπος  $AEE$  κτλ.

Έτσι το οδικό δίκτυο μπορεί να παρασταθεί με τον πίνακα διπλής εισόδου.

ΣΤΗΝ	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>Γ</i>	<i>Δ</i>	<i>E</i>	
ΑΠΟ	<i>A</i>	3	0	2	1	1
	<i>B</i>	0	2	0	2	1
	<i>Γ</i>	2	0	2	0	1
	<i>Δ</i>	1	2	0	3	1
	<i>E</i>	1	1	1	1	2

ή απλά με τον  
5×5 πίνακα

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**2. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές των  $x, y$  για τις οποίες ισχύουν:**

i)  $\begin{bmatrix} x(3x+5) & 1 \\ 3x-1 & 16x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3x^2+5 \end{bmatrix}$       ii)  $\begin{bmatrix} 3x-5 & 2y+6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & x+4 \\ x-2y & 7 \end{bmatrix}$

**ΛΥΣΗ**

i) Η ισότητα  $\begin{bmatrix} x(3x+5) & 1 \\ 3x-1 & 16x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3x^2+5 \end{bmatrix}$  ισχύει, αν και μόνο αν συναληθεύουν οι

$$\text{ισότητες} \begin{cases} x(3x+5) = 2 \\ 1 = 1 \\ 3x - 1 = 0 \\ 16x = 3x^2 + 5 \end{cases}$$

Η τρίτη ισότητα αληθεύει για  $x = \frac{1}{3}$ . Η τιμή αυτή του  $x$  επαληθεύει και τις άλλες δύο ισότητες. Επομένως, οι παραπάνω ισότητες συναληθεύουν για  $x = \frac{1}{3}$ .

ii) Η ισότητα  $\begin{bmatrix} 3x-5 & 2y+6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & x+4 \\ x-2y & 7 \end{bmatrix}$  ισχύει, αν και μόνο αν συναληθεύουν οι

$$\text{ισότητες} \begin{cases} 3x - 5 = -11 \\ 2y + 6 = x + 4 \\ 6 = x - 2y \\ 7 = 7 \end{cases}$$

Η δεύτερη και τρίτη ισότητα γράφονται  $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$  και προφανώς δεν συναληθεύουν για καμία τιμή των  $x$  και  $y$ . Επομένως, δεν υπάρχουν τιμές των  $x, y$  για τις οποίες οι πίνακες αυτοί να είναι ίσοι.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο διπλανός πίνακας δείχνει για τρεις ΟΜΑΔΕΣ  $A$ ,  $N$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $E$ ,  $A$ ,  $B$  ομάδες ποδοσφαίρου τους αγώνες  $A$ , ΝΙΚΗ  $\begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & 3 & 13 & 6 & 15 \\ 12 & 7 & 2 & 3 & 10 & 4 & 17 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 4 & 11 & 11 \end{bmatrix}$  τις νίκες  $N$ , τις ήττες  $H$ , τις ισοπαλίες  $I$ , τα τέρματα  $E$  που πέτυχε η ομάδα, τα τέρματα  $A$  που δέχτηκε η ομάδα ΔΑΦΝΗ και τους βαθμούς  $B$  που έχει.

Αν  $A = [a_{ij}]$  είναι ο πίνακας αυτός, τότε να βρείτε:

- i) Ποιος είναι ο τύπος του πίνακα.
  - ii) Ποιες πληροφορίες μας δίνουν τα στοιχεία  $a_{12}$ ,  $a_{15}$ ,  $a_{24}$  και  $a_{37}$ .
2. Δίνεται συντομογραφικά ο  $4 \times 4$  πίνακας  $A = [a_{ij}]$  όπου  $a_{ij} = |i - j|$ .  
Να παραστήσετε τον πίνακα αυτόν, αφού βρείτε τα στοιχεία του.

3. Να βρείτε τα  $x$ ,  $y$  για τα οποία ισχύει:

$$\text{i) } \begin{bmatrix} 2x-1 & 1 & 0 \\ x-y & 3 & 2x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 & x+y \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ii) } \begin{bmatrix} x^2+y & y \\ -x^2+x & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & y \end{bmatrix}.$$

4. Για ποια τιμή του θετικού αριθμού  $x$  ο πίνακας  $\begin{bmatrix} 1 & \ln^2 x - 1 \\ \ln^2 x - \ln x & 2 \end{bmatrix}$  είναι διαγώνιος.

5. Να βρεθούν οι τιμές των  $x \in [0, 2\pi)$  για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{bmatrix} 2\eta\mu^2 x & \eta\mu 2x \\ \epsilon\phi x & \sigma\upsilon\nu 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ- ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΠΙΝΑΚΑ

### Πρόσθεση πινάκων

Μία εταιρεία πουλάει τηλεοράσεις, ψυγεία, κουζίνες και πλυντήρια σε Αθήνα, Θεσσαλονίκη και Πάτρα. Οι πωλήσεις τους μήνες Σεπτέμβριο και Οκτώβριο παρουσίασαν την εξής κίνηση:

	Σεπτέμβριος			Οκτώβριος		
	Αθήνα	Θεσ/κη	Πάτρα	Αθήνα	Θεσ/κη	Πάτρα
Τηλεοράσεις	18	16	13	20	18	15
Ψυγεία	12	10	9	15	13	12
Κουζίνες	9	11	8	13	10	10
Πλυντήρια	14	12	10	17	16	8

Επομένως, τους δυο αυτούς μήνες οι συνολικές πωλήσεις της εταιρείας ήταν οι εξής:

	Αθήνα	Θεσ/νίκη	Πάτρα
Τηλεοράσεις	(18+20)	(16+18)	(13+15)
Ψυγεία	(12+15)	(10+13)	( 9+12)
Κουζίνες	( 9+13)	(11+10)	( 8+10)
Πλυντήρια	(14+17)	(12+16)	(10+8)

Αν τώρα θεωρήσουμε τους πίνακες των παραπάνω πωλήσεων έχουμε:

$$\text{Για το Σεπτέμβριο: } A = \begin{bmatrix} 18 & 16 & 13 \\ 12 & 10 & 9 \\ 9 & 11 & 8 \\ 14 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Για τον Οκτώβριο: } B = \begin{bmatrix} 20 & 18 & 15 \\ 15 & 13 & 12 \\ 13 & 10 & 10 \\ 17 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

και για τις συνολικές πωλήσεις:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 18+20 & 16+18 & 13+15 \\ 12+15 & 10+13 & 9+12 \\ 9+13 & 11+10 & 8+10 \\ 14+17 & 12+16 & 10+ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 34 & 28 \\ 27 & 23 & 21 \\ 22 & 21 & 18 \\ 31 & 28 & 18 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $\Gamma$  λέγεται **άθροισμα** των πινάκων  $A$  και  $B$  και συμβολίζεται με  $A + B$ , δηλαδή  $\Gamma = A + B$ .

Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

### ΟΡΙΣΜΟΣ

**Άθροισμα** δυο  $\mu \times \nu$  πινάκων  $A = [\alpha_{ij}]$  και  $B = [\beta_{ij}]$  λέγεται ο  $\mu \times \nu$  πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των  $A$  και  $B$ . Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με  $A + B$ . Δηλαδή,

$$A + B = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]$$

Δεν ορίζουμε άθροισμα πινάκων διαφορετικού τύπου.

Για παράδειγμα, οι πίνακες  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 8 & 4 & 5 \\ 5 & -7 & -2 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$  που είναι του ίδιου

τύπου  $3 \times 3$ , με βάση τον παραπάνω ορισμό, μπορούν να προστεθούν και το άθροισμά τους είναι

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 8 & 4 & 5 \\ 5 & -7 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 12 \\ 8 & 13 & 11 \\ 11 & -11 & 0 \end{bmatrix},$$

ενώ οι πίνακες  $\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$  και  $\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ , που δεν είναι του ίδιου τύπου δεν

μπορούν να προστεθούν.

Η πράξη με την οποία βρίσκουμε το άθροισμα δύο πινάκων λέγεται *πρόσθεση πινάκων*.

### Ιδιότητες της πρόσθεσης των πινάκων

Η πρόσθεση των πινάκων έχει ιδιότητες ανάλογες με την πρόσθεση των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα:

- Αν  $A, B, \Gamma$  είναι  $\mu \times \nu$  πίνακες, τότε

$$\begin{array}{l} A + B = B + A \quad \text{αντιμεταθετική} \\ A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma \quad \text{προσεταιριστική} \end{array}$$

- Αν  $\mathcal{O}$  είναι ο  $\mu \times \nu$  πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν, τότε για κάθε  $\mu \times \nu$  πίνακα  $A$  ισχύει

$$A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$$

Ο πίνακας  $\mathcal{O}$  λέγεται **μηδενικός πίνακας**.

Για παράδειγμα, οι πίνακες  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  είναι μηδενικοί.

- Αν με  $-A$  συμβολίσουμε τον πίνακα του οποίου όλα τα στοιχεία είναι αντίθετα των αντίστοιχων στοιχείων ενός πίνακα  $A$ , τότε ισχύει

$$A + (-A) = (-A) + A = \mathcal{O}$$

Ο πίνακας  $-A$  λέγεται **αντίθετος του πίνακα  $A$** .

Για παράδειγμα, ο αντίθετος του πίνακα  $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$  είναι ο πίνακας  $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 \\ -7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να γράφουμε  $A + B + \Gamma$  για καθένα από τα ίσα αθροίσματα  $A + (B + \Gamma)$ ,  $(A + B) + \Gamma$ . Ομοίως, αν  $A, B, \Gamma, \Delta$  είναι πίνακες του ίδιου τύπου, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} [(A + B) + \Gamma] + \Delta &= (A + B) + (\Gamma + \Delta) = [A + (B + \Gamma)] + \Delta = A + [B + (\Gamma + \Delta)] \\ &= A + [(B + \Gamma) + \Delta] = [(B + A) + \Gamma] + \Delta \text{ κτλ.} \end{aligned}$$

και επομένως, μπορούμε να γράφουμε  $A + B + \Gamma + \Delta$  για καθένα από τα αθροίσματα αυτά. Γενικά, επειδή ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα, μπορεί να αποδειχθεί ότι το άθροισμα τριών ή περισσότερων πινάκων  $A_1, A_2, \dots, A_n$  είναι το ίδιο κατά οποιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεστεί η πρόσθεση και συμβολίζεται με  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ .

### Αφαίρεση πινάκων

Όπως και στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών, έτσι και στους πίνακες η αφαίρεση ορίζεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης. Συγκεκριμένα, αν  $A, B$  είναι δύο  $\mu \times \nu$  πίνακες, τότε η διαφορά  $A - B$  ορίζεται ως εξής:

$$A - B = A + (-B)$$

Για παράδειγμα, αν  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , τότε

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή, ο πίνακας  $A - B$  προκύπτει με αφαίρεση των στοιχείων του  $B$  από τα αντίστοιχα στοιχεία του  $A$ .

Από τους παραπάνω ορισμούς της πρόσθεσης και της αφαίρεσης προκύπτει ότι:

$$X + B = A \Leftrightarrow X = A - B$$

Πράγματι:

— Αν  $X + B = A$ , τότε  $X + B - B = A - B$ , οπότε  $X = A - B$ , ενώ

— Αν  $X = A - B$ , τότε  $X + B = A - B + B$ , οπότε  $X + B = A$ .

### Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Ο παρακάτω πίνακας  $A$  περιγράφει τις τιμές πώλησης σε ευρώ τριών ηλεκτρικών ειδών μιας βιομηχανίας σε δυο υποκαταστήματα.



Τηλεορ.    Βίντεο    Στερεοφ.

$$A = \begin{bmatrix} 500 & 300 & 600 \\ 450 & 280 & 550 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1^\circ \text{ υποκατάστημα} \\ 2^\circ \text{ υποκατάστημα} \end{matrix}$$

Αν κατά την περίοδο των εκπτώσεων, ο βιομήχανος προτίθεται να κάνει έκπτωση 20% στα προϊόντα του, τότε πρέπει να διαμορφώσει τις νέες τιμές στο 80% των προηγούμενων. Οι νέες τιμές πώλησης θα προκύψουν αν πολλαπλασιάσουμε τις παλιές τιμές με 0,8, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

$$B = \begin{bmatrix} 0,8 \cdot 500 & 0,8 \cdot 300 & 0,8 \cdot 600 \\ 0,8 \cdot 450 & 0,8 \cdot 280 & 0,8 \cdot 550 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & 240 & 480 \\ 360 & 224 & 440 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $B$  λέγεται **γινόμενο του αριθμού 0,8 με τον πίνακα  $A$**  και συμβολίζεται με  $0,8 \cdot A$ , δηλαδή είναι  $B = 0,8A$ . Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

### ΟΡΙΣΜΟΣ

**Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού  $\lambda$  με έναν πίνακα  $A = [a_{ij}]$** , λέγεται ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του  $A$  με  $\lambda$ . Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με  $\lambda \cdot A$  ή  $\lambda A$ . Δηλαδή,

$$\lambda \cdot A = [\lambda a_{ij}]$$

Η πράξη με την οποία βρίσκουμε το γινόμενο αριθμού με πίνακα λέγεται *πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα*.

Για παράδειγμα, το γινόμενο του αριθμού  $\lambda = -3$  με τον πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$  είναι ο πίνακας:

$$-3A = -3 \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \cdot 2 & (-3) \cdot (-5) & -3 \cdot 1 \\ (-3) \cdot (-2) & (-3) \cdot (-1) & -3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 15 & -3 \\ 6 & 3 & -12 \end{bmatrix}$$

### Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα

Αν  $A, B$  είναι  $\mu \times \nu$  πίνακες και  $\kappa, \lambda$  πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού:

1.  $(\kappa + \lambda)A = \kappa A + \lambda A$
2.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
3.  $\kappa(\lambda A) = (\kappa \lambda)A$
4.  $1A = A$

Επιπλέον, ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lambda A = \mathbf{O} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } A = \mathbf{O}$$

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

Να βρεθεί ο πίνακας  $X$  για τον οποίο ισχύει:

$$2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3X = 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(Μια τέτοια ιδότητα είναι μια εξίσωση με πίνακες).

**ΛΥΣΗ**

Έχουμε

$$\begin{aligned} 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3X &= 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -3X = 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow -3X &= \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -10 & 0 \\ 20 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -10 & 14 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -3X = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ -20 & 14 \\ 20 & -7 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3}(-3)X &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ -20 & 14 \\ 20 & -7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{17}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{20}{3} & -\frac{14}{3} \\ -\frac{20}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

- 1 Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε το άθροισμα  $A + B$  και την διαφορά  $A - B$ , εφόσον φυσικά ορίζονται:

i)  $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

ii)  $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$\text{iii) } A = [4 \ 5 \ 6], \quad B = [-4 \ -5 \ -6]$$

$$\text{iv) } A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{v) } A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & \omega \\ \kappa & \lambda & \mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta & -\gamma \\ -x & 1-y & -\omega \\ -\kappa & -\lambda & 1-\mu \end{bmatrix}.$$

2. Αν είναι  $A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$  και  $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  
να βρείτε το άθροισμα  $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ .

3. Να βρείτε τα  $x, y, \omega$  για τα οποία ισχύει η ισότητα:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2-x \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \\ y-3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & \omega-5 \\ 1 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}.$$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\text{i) } 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ii) } 4 \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii) } \lambda \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 2\lambda \\ 3\lambda & -\lambda & \lambda \end{bmatrix}.$$

5. Αν  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ , να βρείτε τους πίνακες:

$$\text{i) } 2A \quad \text{ii) } 2(-3A) \quad \text{iii) } 5B - 2A \quad \text{iv) } 3A - \frac{1}{2}B.$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } 3X + \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii) } 6 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 7X = 5 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

7. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα

$$\sigma\upsilon\nu\alpha \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & -\eta\mu\alpha \\ \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha \end{bmatrix} + \eta\mu\alpha \begin{bmatrix} \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha \\ -\sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \end{bmatrix}$$

είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

8. Αν  $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$  και  $Y = \begin{bmatrix} -\alpha & 2\beta \\ -\gamma & 3\delta \end{bmatrix}$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ώστε να ισχύει:

$$2X - 5Y = \begin{bmatrix} 14 & -8 \\ 21 & 13 \end{bmatrix}.$$

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα  $x, y$  για τα οποία ισχύει:

$$\text{i) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x+y & 3y \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ii) } \begin{bmatrix} x^2-3x & x+y \\ -1 & y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Να βρείτε τους πίνακες  $X, Y$  για τους οποίους ισχύει:

$$3X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad 5X + 2Y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Αν  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ , να λύσετε την εξίσωση

$$3(X + B) = 2\left(\frac{1}{2}X + A\right) - 5B.$$

4. Μια βιομηχανία που κατασκευάζει τηλεοράσεις, βίντεο και φωτογραφικές μηχανές έχει δύο εργοστάσια παραγωγής  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ . Το κόστος παραγωγής ανά συσκευή δίνεται σε δεκάδες ευρώ στους παρακάτω πίνακες:

Φωτ. Μηχ.	Βιντ.	Τηλεορ.		Φωτ. Μηχ.	Βιντ.	Τηλεορ.
$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 30 & 28 & 40 \\ 25 & 32 & 36 \end{bmatrix}$	Υλικά	Εργασία		$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 38 & 30 & 42 \\ 23 & 28 & 38 \end{bmatrix}$	Υλικά	Εργασία

Να βρείτε τον πίνακα  $\frac{1}{2}(\Pi_1 + \Pi_2)$  και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

5. Μια βιομηχανία έχει τέσσερα εργοστάσια παραγωγής  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  και  $\Pi_4$ , καθένα από τα οποία παράγει δύο προϊόντα  $E_1$  και  $E_2$ . Το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής σε μονάδες προϊόντων δίνεται στον επόμενο πίνακα:

$$A = \begin{array}{cccc|c} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 & \\ \hline 200 & 180 & 140 & 60 & E_1 \\ 80 & 40 & 120 & 120 & E_2 \end{array}$$

- i) Να βρείτε το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής, αν αυτή αυξηθεί κατά 10%.
- ii) Να βρείτε το σύνολο της παραγωγής ανά προϊόν σε 5 μήνες, αν υποθεθεί ότι τα εργοστάσια δούλεψαν 2 μήνες με το προηγούμενο επίπεδο και 3 μήνες με το νέο επίπεδο παραγωγής (1 μήνας = 30 μέρες).

### 1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

#### Ορισμός του γινομένου δύο πινάκων

Ας υποθέσουμε ότι για την κατασκευή δύο ειδών γλυκισμάτων  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  χρειαζόμαστε τα υλικά σε kg που φαίνονται στον παρακάτω  $2 \times 3$  πίνακα:

$$A = \begin{array}{ccc|c} \text{Αλεύρι} & \text{Ζάχαρη} & \text{Βούτυρο} & \\ \hline 1,2 & 0,6 & 0,3 & \Gamma_1 \text{ γλύκισμα} \\ 1,4 & 0,8 & 0,4 & \Gamma_2 \text{ γλύκισμα} \end{array}$$

Έστω επίσης ότι το κόστος σε ευρώ των υλικών αυτών ανά κιλό, για τα έτη 2001 και 2002, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας:

$$B = \begin{array}{cc|c} 2001 & 2002 & \\ \hline 1 & 1,2 & \text{αλεύρι} \\ 0,8 & 1 & \text{ζάχαρη} \\ 3 & 4 & \text{βούτυρο} \end{array}$$

Για να βρούμε το κόστος σε ευρώ των υλικών του γλυκίσματος  $\Gamma_1$  πολλαπλασιάζουμε τις ποσότητες των υλικών με τις αντίστοιχες τιμές και προσθέτουμε τα γινόμενα αυτά. Δηλαδή το κόστος του  $\Gamma_1$  το 2001 ήταν

$$1,2 \cdot 1 + 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 3 = 2,58$$

Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη βοήθεια των πινάκων ως εξής:

$$[1,2 \quad 0,6 \quad 0,3] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8 \\ 3 \end{bmatrix} = [1,2 \cdot 1 + 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 3] = [2,58]$$

Ο  $1 \times 1$  πίνακας  $[2,58]$  λέγεται **γινόμενο** της πρώτης γραμμής του  $A$  επί την πρώτη στήλη του  $B$ . Αναλόγως, το κόστος του  $\Gamma_1$  το 2002 ήταν:

$$1,2 \cdot 1,2 + 0,6 \cdot 1 + 0,3 \cdot 4 = 3,24$$

Δηλαδή παριστάνεται με το γινόμενο της πρώτης γραμμής του  $A$  επί την δεύτερη στήλη του  $B$ .

$$[1,2 \quad 0,6 \quad 0,3] \cdot \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [3,24]$$

Ομοίως, το κόστος του  $\Gamma_2$  το 2001 ήταν:

$$1,4 \cdot 1 + 0,8 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 3 = 3,24 \text{ ή}$$

$$[1,4 \quad 0,8 \quad 0,4] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8 \\ 3 \end{bmatrix} = [3,24]$$

ενώ το 2002 ήταν:

$$1,4 \cdot 1,2 + 0,8 \cdot 1 + 0,4 \cdot 4 = 4,08 \text{ ή}$$

$$[1,4 \quad 0,8 \quad 0,4] \cdot \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [4,08]$$

Ο πίνακας  $\Gamma = \begin{bmatrix} 2,58 & 3,24 \\ 3,24 & 4,08 \end{bmatrix}$  δείχνει το κόστος των γλυκισμάτων κατά τα έτη 2001 και

2002. Ο πίνακας  $\Gamma$  που προκύπτει με τον πιο πάνω τρόπο λέγεται **γινόμενο του πίνακα  $A$  με τον πίνακα  $B$**  και συμβολίζεται με  $A \cdot B$  ή  $AB$ , δηλαδή

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,6 & 0,3 \\ 1,4 & 0,8 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1,2 \\ 0,8 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,58 & 3,24 \\ 3,24 & 4,08 \end{bmatrix}$$

## ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν  $A = [\alpha_{ik}]$  είναι ένας  $\mu \times \nu$  πίνακας και  $B = [\beta_{kj}]$  είναι ένας  $\nu \times \rho$  πίνακας, τότε ορίζουμε ως **γινόμενο του πίνακα  $A$  με τον πίνακα  $B$**  και το συμβολίζουμε με  $A \cdot B$  ή με  $AB$  τον  $\mu \times \rho$  πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο  $\gamma_{ij}$  είναι το άθροισμα των γινομένων των  $\nu$  στοιχείων της  $i$ -γραμμής του  $A$  με τα αντίστοιχα  $\nu$  στοιχεία της  $j$ -στήλης του  $B$ . Δηλαδή,

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \dots + \alpha_{i\nu}\beta_{\nu j}$$

Σχηματικά

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 i\text{-γραμμή}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{i\nu} \\
 \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\
 \vdots & & & \\
 \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{i\nu} \\
 \vdots & & & \\
 \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu \nu}
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 j\text{-στήλη}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1\rho} \\
 \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2\rho} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & & \beta_{\nu j} & & \beta_{\nu \rho}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1j} & \dots & \gamma_{1\rho} \\
 \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2j} & \dots & \gamma_{2\rho} \\
 \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
 \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \dots & \gamma_{ij} & \dots & \gamma_{i\rho} \\
 \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
 \gamma_{\mu 1} & \gamma_{\mu 2} & \dots & \gamma_{\mu j} & \dots & \gamma_{\mu \rho}
 \end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα, το γινόμενο  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  βρίσκεται ως εξής:

$$\gamma_{11} = 2 \cdot 4 + 1(-1) + (-3) \cdot 1 = 4, \quad \text{και} \quad \gamma_{12} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 = 9$$

$$\gamma_{21} = 3 \cdot 4 + 0(-1) + 1 \cdot 1 = 13 \quad \gamma_{22} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 6$$

Επομένως,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}.$$

Τονίζεται ότι το γινόμενο  $AB$  ορίζεται όταν ο αριθμός των στηλών του πίνακα  $A$  είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα  $B$ .

Σχηματικά:

$$\begin{array}{ccc}
 (A & , & B) \rightarrow AB \\
 \mu \times \nu & & \nu \times \rho \quad \mu \times \rho
 \end{array}$$

Για παράδειγμα, αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  και  $\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,

τότε, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ορίζονται τα γινόμενα  $AB$ ,  $BA$ ,  $A\Gamma$  και είναι

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$A\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 13 & 5 & 8 \\ -14 & 3 & -6 & 8 \end{bmatrix},$$

ενώ δεν ορίζονται τα γινόμενα  $B\Gamma$ ,  $\Gamma B$  και  $\Gamma A$ .

### Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των πινάκων

- Αν  $\lambda, \mu$  είναι πραγματικοί αριθμοί και  $A, B$  είναι πίνακες, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι πράξεις που σημειώνονται.

$$\begin{aligned} A(B\Gamma) &= (AB)\Gamma && \text{προσεταιριστική} \\ A(B + \Gamma) &= AB + A\Gamma \quad \text{και} \quad (B + \Gamma)A = BA + \Gamma A && \text{επιμεριστική} \\ (\lambda A)(\mu B) &= (\lambda\mu)AB \end{aligned}$$

- Αν με  $I_n$  συμβολίσουμε τον  $n \times n$  διαγώνιο πίνακα  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$  του οποίου κάθε

στοιχείο της κυρίας διαγωνίου είναι ίσο με 1, τότε για κάθε τετραγωνικό  $n \times n$  πίνακα  $A$  ισχύει:

$$AI_n = I_n A = A$$

Ο πίνακας αυτός λέγεται **μοναδιαίος πίνακας**.

Για παράδειγμα, οι πίνακες  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  είναι μοναδιαίοι.

Τον πίνακα  $I_n$  θα τον συμβολίζουμε απλούστερα με  $I$ , όταν είναι προφανής ο τύπος του. Αν τώρα  $A$  είναι ένας  $m \times n$  πίνακας, τότε ισχύουν

$$AI_n = A \quad \text{και} \quad I_m A = A.$$

Για παράδειγμα



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να γράφουμε  $AB\Gamma$  για καθένα από τα ίσα γινόμενα  $A(B\Gamma)$ ,  $(AB)\Gamma$ . Ομοίως, αν  $A, B, \Gamma, \Delta$  είναι πίνακες τέτοιοι, ώστε να ορίζονται τα γινόμενα  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$  τότε έχουμε

$$[(AB)\Gamma]\Delta = (AB)(\Gamma\Delta) = A[B(\Gamma\Delta)] = A[(B\Gamma)\Delta] = [A(B\Gamma)]\Delta$$

και μπορούμε να γράφουμε  $AB\Gamma\Delta$  για καθένα από τα γινόμενα αυτά.

Γενικά, επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, μπορεί να αποδειχτεί ότι όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό πινάκων  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , το γινόμενο θα είναι το ίδιο κατά οποιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεστεί ο πολλαπλασιασμός, χωρίς όμως να αλλάξει η σειρά των παραγόντων και συμβολίζεται με  $A_1 A_2 \dots A_n$ .

Αν ο  $A$  είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε ορίζονται τα γινόμενα  $AA, AAA, AAAA$ , κτλ. και τα συμβολίζουμε με μορφή δυνάμεων ως εξής:  $A^2, A^3, A^4, \dots$ , αντιστοίχως. Ορίζουμε επίσης  $A^1 = A$ .

Αν  $p, q$  είναι θετικοί ακέραιοι, και  $\kappa$  πραγματικός αριθμός, αποδεικνύεται ότι:

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q}, \quad (A^p)^q = A^{pq} \quad \text{και} \quad (\kappa A)^p = \kappa^p A^p.$$

## ΣΧΟΛΙΟ

Γνωρίζουμε ότι για τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών ισχύει, επιπλέον, και η αντιμεταθετική ιδιότητα. Δηλαδή, ισχύει  $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$  για οποιουσδήποτε  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ . Η ιδιότητα, όμως, αυτή **δεν** ισχύει για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων, αφού υπάρχουν πίνακες  $A, B$  με  $AB \neq BA$ . Για παράδειγμα, αν  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , τότε  $AB \neq BA$ , αφού:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \text{ ενώ } BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Επειδή, λοιπόν, δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα οι ισότητες:

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2, \quad (A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3,$$

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B), \quad A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2) \text{ κτλ.}$$

**δεν ισχύουν πάντοτε.** Στην περίπτωση, όμως, που  $AB = BA$  οι παραπάνω ισότητες ισχύουν.

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνονται οι πίνακες  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ . Να αποδειχτεί ότι:

- i)  $A^2 = I$ ,  $B^2 = -I$  και  $A^2 + B^2 = O$
- ii)  $AB + BA = I$
- iii)  $(A + B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$ .

### ΛΥΣΗ

$$\text{i) Είναι } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

Άρα  $A^2 + B^2 = O$ .

$$\text{ii) Είναι } AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα  $AB + BA = I$ .

iii) Είναι

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = I + AB + BA - I$$

$$= AB + BA = I \quad (\text{λόγω της ii})$$

$$A^2 + B^2 + 2AB = 2AB = 2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{λόγω της ii}).$$

Άρα,  $(A + B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$ .

### Αντιστρέψιμοι πίνακες

- Γνωρίζουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό  $a$  με  $a \neq 0$  υπάρχει ο αντίστροφός του, που συμβολίζεται με  $\frac{1}{a}$  ή  $a^{-1}$ , για τον οποίο ισχύει  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ .

Είναι λογικό τώρα να ρωτήσουμε: “Αν δοθεί ένας πίνακας  $A$  μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα  $B$  τέτοιοι ώστε να ισχύει  $AB = BA = I$ ;

Σύμφωνα με τον πολλαπλασιασμό που ορίσαμε μια τέτοια ερώτηση έχει νόημα μόνο αν ο  $A$  είναι ένας τετραγωνικός πίνακας. Οδηγούμαστε έτσι στον εξής ορισμό:

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω  $A$  ένας τετραγωνικός πίνακας τύπου  $n \times n$ . Αν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας  $B$  τύπου  $n \times n$ , τέτοιος ώστε να ισχύει  $AB = BA = I$ , τότε ο  $A$  λέγεται **αντιστρέψιμος πίνακας** και ο  $B$  **αντίστροφος** του  $A$ .

Αν ένας πίνακας  $A$  έχει αντίστροφο, τότε αποδεικνύεται ότι αυτός είναι μοναδικός και συμβολίζεται με  $A^{-1}$ . Έτσι έχουμε:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε έχουμε:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ και } BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Άρα, ο  $B$  είναι ο αντίστροφος του  $A$ .

• Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ο πίνακας  $B$  είναι αντίστροφος του  $A$ , όταν  $AB = I$  και  $BA = I$ . Αποδεικνύεται, όμως, ότι:

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν για δυο  $n \times n$  πίνακες  $A, B$  ισχύει μια από τις ισότητες

$$AB = I \text{ και } BA = I,$$

τότε θα ισχύει και η άλλη.

Με βάση αυτό το θεώρημα, για να αποδείξουμε ότι ένας  $n \times n$  πίνακας  $B$  είναι αντίστροφος ενός  $n \times n$  πίνακα  $A$ , αρκεί να αποδείξουμε μία μόνο από τις ισότητες  $AB = I$  και  $BA = I$ .

• Τέλος, αν ένας πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\text{i) } AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\text{ii) } XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$$

Πράγματι, για την (i) έχουμε:

— Αν  $AX = B$ , τότε  $A^{-1}AX = A^{-1}B$ , οπότε  $X = A^{-1}B$ .

— Αν  $X = A^{-1}B$ , τότε  $AX = AA^{-1}B$ , οπότε  $AX = B$ .

Ομοίως αποδεικνύεται και η ii).

### ΣΧΟΛΙΟ

Γνωρίζουμε ότι για τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών ισχύει επιπλέον και η ιδιότητα: “αν  $a \cdot \beta = 0$ , τότε  $a = 0$  ή  $\beta = 0$ ”. Η ιδιότητα, όμως, αυτή **δεν ισχύει** για τον

πολλαπλασιασμό των πινάκων, αφού π.χ. για τους πίνακες  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  ισχύει  $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  χωρίς, ωστόσο, να είναι  $A = \mathbf{O}$  ή  $B = \mathbf{O}$ . Δηλαδή:

**“Μπορεί ένα γινόμενο πινάκων να ισούται με το μηδενικό πίνακα, χωρίς κανένας να είναι μηδενικός”.**

Στην περίπτωση όμως που ισχύει  $AB = \mathbf{O}$  και ο ένας από τους πίνακες είναι αντιστρέψιμος, τότε ο άλλος είναι μηδενικός. Πράγματι, αν ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$AB = \mathbf{O}$$

$$A^{-1}AB = A^{-1}\mathbf{O}$$

$$IB = \mathbf{O}$$

$$B = \mathbf{O}.$$

### Αντίστροφος ενός $2 \times 2$ πίνακα

Έστω  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$  ένας  $2 \times 2$  πίνακας. Θα εξετάσουμε πότε αυτός αντιστρέφεται και θα βρούμε τον αντίστροφο του.

Για να αντιστρέφεται ο  $A$ , πρέπει και αρκεί να υπάρχει πίνακας  $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$  τέτοιος, ώστε να ισχύει  $AX = I$  ή, ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta \omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta z = 1 \\ \gamma x + \delta z = 0 \end{cases} (\Sigma_1) \quad \text{και} \quad \begin{cases} \alpha y + \beta \omega = 0 \\ \gamma y + \delta \omega = 1 \end{cases} (\Sigma_2)$$

Αρκεί, επομένως, τα συστήματα  $(\Sigma_1)$  και  $(\Sigma_2)$  να έχουν λύση. Τα συστήματα αυτά έχουν

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

και

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \delta \end{vmatrix} = \delta, \quad D_z = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} = -\gamma, \quad D_y = \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix} = -\beta, \quad D_\omega = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} = \alpha.$$

Επομένως:

- Αν  $D \neq 0$ , τότε τα συστήματα  $(\Sigma_1)$  και  $(\Sigma_2)$  έχουν μοναδική λύση, οπότε ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται. Η λύση του  $(\Sigma_1)$  είναι το ζεύγος  $(x, z)$  με

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\delta}{D} \quad \text{και} \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-\gamma}{D},$$

ενώ η λύση του  $(\Sigma_2)$  είναι το ζεύγος  $(y, \omega)$  με

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-\beta}{D} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{D_\omega}{D} = \frac{\alpha}{D}.$$

Άρα  $X = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{D} & \frac{-\beta}{D} \\ \frac{-\gamma}{D} & \frac{\alpha}{D} \end{bmatrix}$ , οπότε ο αντίστροφος του  $A$  είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

- Αν  $D = 0$ , τότε ένα τουλάχιστον από τα συστήματα  $(\Sigma_1)$  και  $(\Sigma_2)$  είναι αδύνατο, οπότε ο πίνακας  $A$  δεν αντιστρέφεται. Πράγματι

α) Αν  $D_x \neq 0$  ή  $D_y \neq 0$  ή  $D_z \neq 0$  ή  $D_\omega \neq 0$ , τότε ένα τουλάχιστον από τα συστήματα  $(\Sigma_1)$  και  $(\Sigma_2)$  θα είναι αδύνατο.

β) Αν  $D_x = D_y = D_z = D_\omega = 0$ , τότε  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ , οπότε και πάλι τα δύο συστήματα θα είναι αδύνατα.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

• Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ .

• Ο αντίστροφος ενός πίνακα  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ , αν υπάρχει, δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}, \quad \text{όπου} \quad D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

Για παράδειγμα:

α) Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  αντιστρέφεται, γιατί  $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$  και ο αντίστροφός του είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

β) Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  δεν αντιστρέφεται, γιατί  $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ .

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνονται οι πίνακες  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 22 & -1 \end{bmatrix}$

i) Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα  $A$

ii) Να λυθεί η εξίσωση  $AX = B$

#### ΛΥΣΗ

i) Για τον πίνακα  $A$  έχουμε  $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$ . Άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ii) Επειδή ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος, έχουμε:

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 22 & -1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

#### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα γινόμενα  $AB$  και  $BA$  σε όποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ορίζονται:

i)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$       ii)  $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\text{iii) } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv) } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2. \text{ Αν } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε τους πίνακες: i)  $AB$       ii)  $AB - \Gamma$       iii)  $AB\Gamma$ .

3. Τα στοιχεία για τις αμοιβές και τον αριθμό των εργατών σε δύο οικοδομικές εταιρείες  $A$  και  $B$  έχουν με μορφή πινάκων ως εξής:

Αριθμός εργατών	Ημερήσιες αποδοχές
Ειδικευμένοι    Ανειδίκευτοι	(σε ευρώ)
$A \begin{bmatrix} 60 & 75 \\ 30 & 60 \end{bmatrix}$	Ειδικευμένοι $\begin{bmatrix} 50 \\ 40 \end{bmatrix}$ . Ανειδίκευτοι

Να εκφράσετε με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού των πινάκων το σύνολο των αμοιβών των εργατών στις δύο εταιρείες.

4. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι ο πίνακας  $B$  είναι αντίστροφος του  $A$ .

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ii) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Να βρείτε τον αντίστροφο, εφόσον υπάρχει, καθενός από τους παρακάτω πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{bmatrix}.$$

- 6 i) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα  $\begin{bmatrix} \eta\mu\alpha & -\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \end{bmatrix}$ .

ii) Να λύσετε την εξίσωση: 
$$\begin{bmatrix} \eta\mu\alpha & -\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha \\ -\eta\mu\alpha & -\sigma\upsilon\nu\alpha \end{bmatrix}.$$

**Β' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ , τότε:

i) Να βρείτε τις τιμές των  $x, y \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $A^2 = xA + yI$ .

ii) Να υπολογίσετε τους πίνακες  $A^3$  και  $A^4$ .

2. Αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ , να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $x$ , ώστε να ισχύει  $A^3 - 10A - xI = O$ .

3. Να βρείτε τους πίνακες  $X = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τους οποίους ισχύει  $X^2 = I$ .

4. Αν  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ , να αποδείξετε ότι:

i)  $A^2 = I$ ,  $B^2 = I$  ii)  $(A - B)^2 = O$ ,  $(A + B)^2 = 4I$ .

iii)  $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$

5. Αν  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ , να αποδείξετε ότι:

i) Ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται και να βρείτε τον  $A^{-1}$ .

ii)  $(A + A^{-1})^v = 2^v I$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$ .

6. Αν  $A(x) = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu x & -\eta\mu x \\ \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \end{bmatrix}$ ,  $B(x) = \begin{bmatrix} \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \\ -\sigma\upsilon\nu x & \eta\mu x \end{bmatrix}$ , τότε:

i) Να αποδείξετε ότι  $A^2(x) = A(2x)$ ,  $B^2(x) = -A(2x)$

ii) Να αποδείξετε ότι  $A^2(x) + B^2(x) = O$

iii) Να λύσετε την εξίσωση  $A^2(x) - B^2(x) = 2I$ .

7. Μια βιομηχανία επίπλων κουζίνας έχει δύο εργοστάσια  $E_1$  και  $E_2$ . Οι πίνακες  $M$  και  $N$  δίνουν τις ώρες εργασίας που απαιτούνται για την κατασκευή κάθε επίπλου και τις ωριαίες αμοιβές του προσωπικού σε ευρώ αντιστοίχως.



Κατασκευή	Βάψιμο	Συσκευασία	$E_1$	$E_2$
$M = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,2 \\ 1 & 0,9 & 0,3 \\ 1,5 & 1,2 & 0,4 \end{bmatrix}$	0,6	0,2	$N = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	Κατασκευή
	0,9	0,3		Βάψιμο
	1,2	0,4		Συσκευασία

- i) Να βρείτε τον πίνακα  $MN$  και να εξηγήσετε τι εκφράζει.  
 ii) Ποιο είναι το κόστος εργασίας για την παραγωγή μιας καρέκλας στο εργοστάσιο  $E_1$  και ενός πάγκου στο εργοστάσιο  $E_2$ ;

8. Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ , να αποδείξετε ότι:

i)  $A^3 = O$  και γενικά  $A^v = O$ ,  $v \geq 3$

ii)  $B^2 = I$ ,  $B^3 = B$  και γενικά  $B^v = \begin{cases} I & \text{αν } v \text{ άρτιος θετικός} \\ B & \text{αν } v \text{ περιττός θετικός} \end{cases}$ .

9. Δίνεται ο πίνακας  $A(x) = \frac{1}{\sin x} \begin{bmatrix} 1 & \eta\mu x \\ \eta\mu x & 1 \end{bmatrix}$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

i) Να αποδείξετε ότι  $A^{-1}(x) = A(-x)$ .

ii) Να λύσετε την εξίσωση  $A(x) = I$ .

10. Αν  $A(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

i) Να αποδείξετε ότι  $A(x)A(y) = A(x+y)$

ii) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των  $x, y$  ώστε ο πίνακας  $A(y)$  να είναι αντίστροφος του  $A(x)$ .

iii) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα  $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

11. Αν  $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1+\lambda \\ 1-\lambda & -\lambda \end{bmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ , τότε:

i) Να αποδείξετε ότι  $A^2 = I$ ,  $A^3 = A$  και γενικά ότι  $A^v = \begin{cases} I & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ A & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$

ii) Αν  $\lambda = 2$ , να βρείτε τον πίνακα  $X$  για τον οποίο ισχύει  $A^{1993}X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$I + A + A^2 + \dots + A^{10}.$$

2. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

i) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα  $A$

ii) Να βρείτε τον πίνακα  $X$  σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α)  $AX = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  β)  $AXA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  γ)  $AX = A^2 + 2A$ .

3. Αν  $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ , τότε:

i) Να αποδείξετε ότι  $A^3 = -I$  και γενικά ότι  $A^{3v} = \begin{cases} I, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -I, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$ .

ii) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει

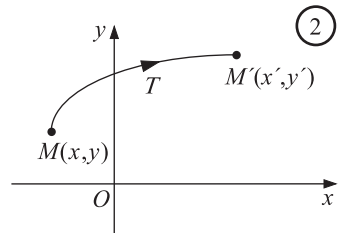
$$x^2 A^{1992} + (x+2)A^{1989} = O.$$

## 1.4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

### Η Έννοια του Γεωμετρικού Μετασχηματισμού

• Γνωρίζουμε από την Α' Λυκείου ότι συνάρτηση από ένα σύνολο  $A$  σε ένα σύνολο  $B$  είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του  $A$  αντιστοιχίζεται σε ένα και μοναδικό στοιχείο του  $B$ . Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις για τις οποίες τα  $A$  και  $B$  συμπίπτουν με το σύνολο  $\mathcal{E}$  των σημείων ενός καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$ . Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο επίπεδο** ή, απλά, **γεωμετρικοί μετασχηματισμοί**. Δηλαδή, γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι οποιαδήποτε συνάρτηση

$$T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}.$$



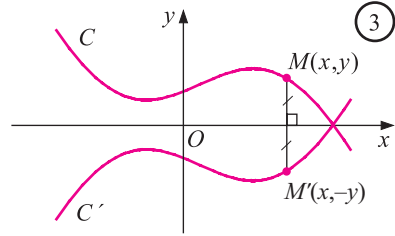
Ως προς τη συνάρτηση αυτή η εικόνα,  $T(M)$ , του σημείου  $M(x, y)$  θα συμβολίζεται με  $M'(x', y')$ .

Ένα παράδειγμα γεωμετρικού μετασχηματισμού είναι η συνάρτηση

$$T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$M(x, y) \rightarrow M'(x, -y),$$

η οποία αντιστοιχίζει κάθε σημείο  $M$  στο συμμετρικό του  $M'$  ως προς τον άξονα  $x'x$ .



• Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που απεικονίζουν τα σημεία  $M(x, y)$  στα  $M'(x', y')$  των οποίων οι συντεταγμένες δίνονται από ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \mu \\ y' = \gamma x + \delta y + \nu \end{cases}$$

ή, ισοδύναμα, από μια εξίσωση της μορφής

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix} \quad (1)$$

όπου  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$  πραγματικοί αριθμοί.

Αν  $\mu = 0$  και  $\nu = 0$ , τότε η εξίσωση (1) παίρνει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2)$$

Στην περίπτωση αυτή ο γεωμετρικός μετασχηματισμός λέγεται **γραμμικός μετασχημα-**

**τισμός** και ο πίνακας  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$  λέγεται **πίνακας** του γραμμικού μετασχηματισμού.

Για παράδειγμα, ο γεωμετρικός μετασχηματισμός που ορίζεται από το σύστημα

$\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$  ή, ισοδύναμα, από την εξίσωση  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  είναι ένας γραμμικός

μετασχηματισμός με πίνακα τον  $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ . Με αυτόν τον μετασχηματισμό το σημείο  $A(1, 2)$  απεικονίζεται στο  $A'(13, 6)$ , ενώ το σημείο  $B(1, -2)$  στο  $B'(1, -2)$ , δηλαδή στον εαυτό του.

• Ας θεωρήσουμε τώρα το γραμμικό μετασχηματισμό

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

και τα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{i} = (1,0)$  και  $\vec{j} = (0,1)$ .

Τότε, η εικόνα  $A'$  του πέρατος  $A(1,0)$  του διανύσματος  $\vec{i}$  έχει συντεταγμένες  $(\alpha, \gamma)$ , αφού

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix},$$

ενώ η εικόνα  $B'$  του πέρατος  $B(0,1)$  του διανύσματος  $\vec{j}$  έχει συντεταγμένες  $(\beta, \delta)$ , αφού

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι:

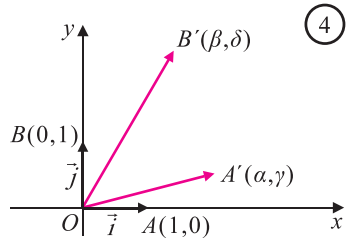
**Οι συντεταγμένες της εικόνας του πέρατος,  $A(1,0)$ , του διανύσματος  $\vec{i} = (1,0)$  είναι η πρώτη στήλη, ενώ οι συντεταγμένες της εικόνας του πέρατος,  $B(0,1)$ , του διανύσματος  $\vec{j}$  είναι η δεύτερη στήλη του πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού.**

Για παράδειγμα, ο γραμμικός μετασχηματισμός, που απεικονίζει τα πέρατα  $A(1,0)$  και  $B(0,1)$  των διανυσμάτων  $\vec{i} = (1,0)$  και  $\vec{j} = (0,1)$  στα σημεία  $A'(3,1)$  και  $B'(1,2)$

αντιστοίχως, έχει πίνακα  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

Τέλος, είναι προφανές ότι:

**Ο γραμμικός μετασχηματισμός  $T$  απεικονίζει το σημείο  $O(0,0)$  στο  $O(0,0)$ .**




---

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### 1. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

i) Να βρεθούν οι εικόνες  $A'(x'_1, y'_1)$  και  $B'(x'_2, y'_2)$  των σημείων  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  αντιστοίχως.

ii) Να αποδειχτεί ότι  $(A'B') = (AB)$ .

**ΛΥΣΗ**

i) Έχουμε

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$$

Επομένως, οι εικόνες των  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  είναι τα σημεία  $A'(-y_1, x_1)$  και  $B'(-y_2, x_2)$  αντιστοίχως.

ii) Είναι

$$(A'B') = \sqrt{(-y_2 + y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = (AB).$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός διατηρεί τις αποστάσεις. Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί που διατηρούν τις αποστάσεις λέγονται **ισομετρίες**.

**2. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:**

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί:

i) Το πρότυπο του σημείου  $A'(2,0)$ , δηλαδή το σημείο  $A(x, y)$  που απεικονίζεται στο  $A'(2, 0)$

ii) Η εικόνα της ευθείας  $\varepsilon: y = -2x + 1$ .

**ΛΥΣΗ**

i) Ισχύει

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Επειδή ο πίνακας  $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον αντίστροφό του, που είναι ο πίνακας  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$  και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

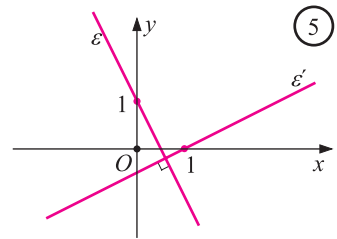
Άρα το σημείο  $A$  έχει συντεταγμένες  $(2, -2)$ .

ii) Αρκεί να βρούμε την εξίσωση η οποία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των εικόνων των σημείων της ευθείας  $\varepsilon$  και μόνο απ' αυτές. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' - 3y' \\ -x' + 4y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 3y' \\ y = -x' + 4y' \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Επομένως, αν το σημείο  $M(x, y)$  ανήκει στην  $\varepsilon$ , τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} y &= -2x + 1 \\ -x' + 4y' &= -2x' + 6y' + 1 \\ -2y' &= -x' + 1 \\ y' &= \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Άρα, το σημείο  $M'(x', y')$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon'$ :  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ .

Αλλά και *αντιστρόφως*, αν το σημείο  $M'(x', y')$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon'$ :  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ , τότε το  $M(x, y)$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ :  $y = -2x + 1$ .

Συνεπώς, η εικόνα της ευθείας  $\varepsilon$ :  $y = -2x + 1$  είναι η ευθεία  $\varepsilon'$ :  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ .

### ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός, του οποίου ο πίνακας **αντιστρέφεται**, απεικονίζει:

- ευθείες σε ευθείες
- ευθύγραμμα τμήματα σε ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τις εικόνες των άκρων
- πολύγωνα σε πολύγωνα με κορυφές τις εικόνες των κορυφών.

Για παράδειγμα, με το μετασχηματισμό

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(1,0)$ ,  $B(-1,3)$  και  $\Gamma(0,3)$  απεικονίζεται στο τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$  που έχει ως κορυφές τις εικόνες  $A'(2,-1)$ ,  $B'(1,1)$  και  $\Gamma'(3,0)$  των κορυφών του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Είναι βολικό, πολλές φορές, ένα πολύγωνο  $A_1A_2 \dots A_n$  να το παριστάνουμε με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix},$$

που έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των κορυφών του. Τον πίνακα αυτόν θα τον λέμε

**πίνακα του πολυγώνου.** Έτσι, ο πίνακας του  $AB\Gamma$  είναι ο  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ , ενώ του  $A'B'\Gamma'$  ο  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Είναι φανερό ότι

$$\begin{bmatrix} A' & B' & \Gamma' \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & \Gamma \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Άρα ο πίνακας του τριγώνου  $A'B'\Gamma'$  προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού με τον πίνακα του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Αυτό ισχύει και για οποιοδήποτε πολύγωνο.

### Βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

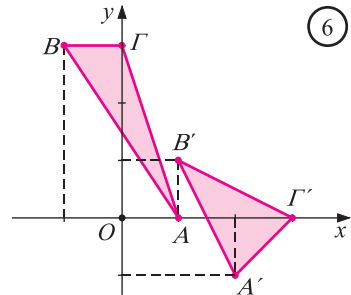
#### 1. Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων

Καλούμε συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων το γεωμετρικό εκείνο μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο  $M(x, y)$  του καρτεσιανού επιπέδου απεικονίζεται στο συμμετρικό του  $M'(x', y')$  ως προς την αρχή των αξόνων. Όπως γνωρίζουμε από την Α' Λυκείου ισχύει

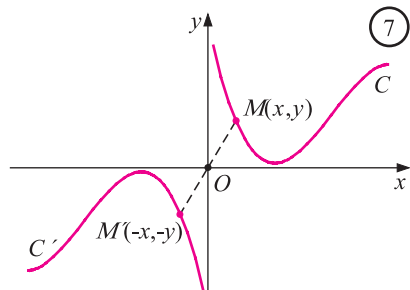
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1x + 0y \\ y' = 0x - 1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, η συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I.$$



6

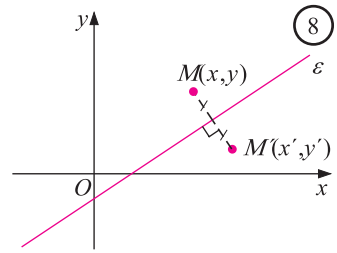


7

**2. Συμμετρία ως προς άξονα μια ευθεία ε.**

Καλούμε συμμετρία ως προς άξονα μια ευθεία ε, το γεωμετρικό εκείνο μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο  $M(x, y)$  του καρτεσιανού επιπέδου απεικονίζεται στο συμμετρικό του,  $M'(x', y')$ , ως προς την ευθεία ε.

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τη συμμετρία ως προς τον άξονα  $x'x$ , τη συμμετρία ως προς τον άξονα  $y'y$  και τη συμμετρία ως προς την ευθεία  $y = x$ .

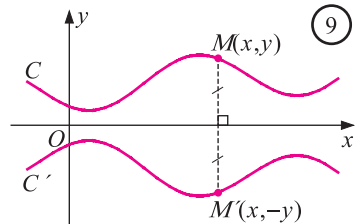


**2α. Συμμετρία ως προς τον άξονα x'x.**

Όπως γνωρίζουμε από την Α' Λυκείου ισχύει:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1x + 0y \\ y' = 0x - 1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, η συμμετρία ως προς τον άξονα  $x'x$  είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

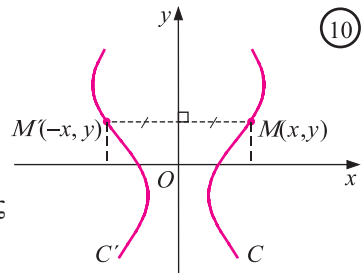


**2β. Συμμετρία ως προς τον άξονα y'y.**

Όπως γνωρίζουμε από την Α' Λυκείου ισχύει:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1x + 0y \\ y' = 0x + 1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα η συμμετρία ως προς τον άξονα  $y'y$  είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

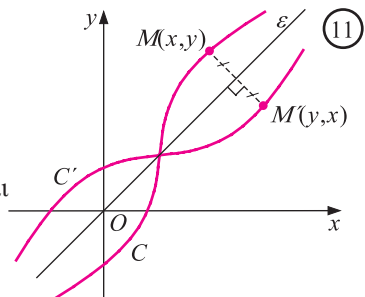


**2γ. Συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία y = x.**

Όπως γνωρίζουμε από την Α' Λυκείου ισχύει:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0x + 1y \\ y' = 1x + 0y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, η συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία  $y = x$  είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .



Οι παραπάνω γραμμικοί μετασχηματισμοί είναι όλοι **ισομετρίες**.



### 3. Στροφή με κέντρο $O$ και γωνία $\theta$ .

Έστω  $Oxy$  ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και  $\theta$  μια θετική ή αρνητική γωνία. Καλούμε στροφή με κέντρο  $O$  και γωνία  $\theta$  το γεωμετρικό εκείνο μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο  $M(x, y)$  του επιπέδου αντιστοιχίζεται στο πέρας  $M'(x', y')$ , του διανύσματος  $\overrightarrow{OM'}$  που είναι η τελική θέση του  $\overrightarrow{OM}$ , αν αυτό στραφεί γύρω από το  $O$  κατά γωνία  $\theta$ .

Αν  $\varphi$  είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\overrightarrow{OM}$  με τον άξονα  $x'x$  και  $\rho$  το μέτρο του διανύσματος  $\overrightarrow{OM}$ , τότε θα ισχύει:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (1) \quad \text{και} \quad \begin{cases} x' = \rho \cos(\varphi + \theta) \\ y' = \rho \sin(\varphi + \theta) \end{cases} \quad (2).$$

Έτσι, θα ισχύει

$$\begin{cases} x' = \rho(\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) \\ y' = \rho(\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = (\rho \cos \varphi) \cos \theta - (\rho \sin \varphi) \sin \theta \\ y' = (\rho \sin \varphi) \cos \theta + (\rho \cos \varphi) \sin \theta \end{cases}$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, η στροφή με κέντρο  $O$  και γωνία  $\theta$  είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \text{ Ειδικότερα:}$$

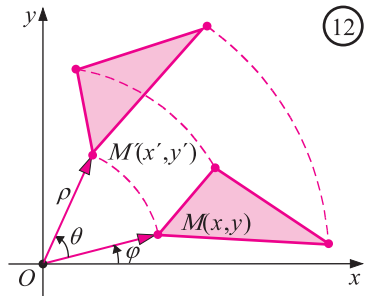
α) Η στροφή με κέντρο  $O$  και γωνία  $\theta = \frac{\pi}{2}$  έχει πίνακα  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

β) Η στροφή με κέντρο  $O$  και γωνία  $\theta = \pi$  έχει πίνακα  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$  και είναι η συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων.

γ) Η στροφή με κέντρο  $O$  και γωνία  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  έχει πίνακα  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

δ) Τέλος, η στροφή με κέντρο  $O$  και γωνία  $\theta = 2\pi$  έχει πίνακα  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$  και είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι και η στροφή είναι μια ισομετρία.

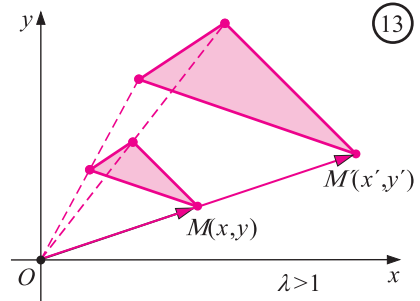


**4. Ομοιοθεσία.**

Καλούμε **ομοιοθεσία** με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$  και λόγο  $\lambda \in \mathbf{R}^*$  το μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο  $M(x, y)$  του επιπέδου αντιστοιχίζεται στο σημείο  $M'(x', y')$  που ορίζεται από την ισότητα

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}.$$

Επειδή  $\overrightarrow{OM} = (x, y)$  και  $\overrightarrow{OM'} = (x', y')$ , έχουμε:



$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow (x', y') = \lambda(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda x + 0y \\ y' = 0x + \lambda y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, η ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων και λόγο  $\lambda \neq 0$  είναι ένας γραμμικός

μετασχηματισμός με πίνακα  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I$ .

**ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ**

Για να θυμόμαστε τον πίνακα των παραπάνω γραμμικών μετασχηματισμών, αρκεί να θυμόμαστε ότι η πρώτη στήλη του είναι οι συντεταγμένες της εικόνας του σημείου  $A(1,0)$ , ενώ η δεύτερη στήλη του είναι οι συντεταγμένες της εικόνας του  $B(0,1)$ .

Για παράδειγμα, ο πίνακας της συμμετρίας ως προς τον άξονα  $x'x$  είναι ο  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  που

έχει για πρώτη και δεύτερη στήλη τις συντεταγμένες των συμμετρικών ως προς τον άξονα  $x'x$  των σημείων  $A(1,0)$  και  $B(0,1)$  αντιστοίχως.

**5. Παράλληλη μεταφορά.**

Έστω  $\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$  ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$ . Καλούμε παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα  $\vec{\delta}$  το γεωμετρικό εκείνο μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο  $M(x,y)$  του επιπέδου αντιστοιχίζεται στο σημείο  $M'(x',y')$  που ορίζεται από την ισότητα  $\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}$  (Σχ. 14).

Επειδή  $\overrightarrow{MM'} = (x' - x, y' - y)$ , έχουμε

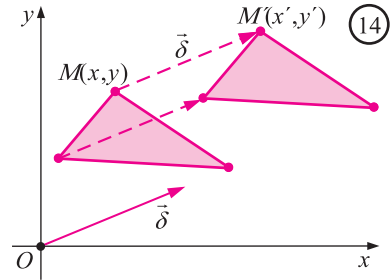
$$\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta} \Leftrightarrow (x' - x, y' - y) = (\delta_1, \delta_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \delta_1 \\ y' - y = \delta_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \delta_1 \\ y' = y + \delta_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}.$$



Άρα, η παράλληλη μεταφορά **δεν** είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Είναι, όμως, **ισομετρία**.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1** Έστω  $T$  ο μετασχηματισμός “στροφή με κέντρο  $O$  και γωνία  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ”. Να βρεθεί η εικόνα  $C'$  της καμπύλης  $C: y = \frac{1}{x}$  ως προς το μετασχηματισμό  $T$ .

### ΛΥΣΗ

Έστω  $M(x, y)$  ένα σημείο του επιπέδου και  $M'(x', y')$  η εικόνα του ως προς το μετασχηματισμό  $T$ . Τότε θα ισχύει

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} & \eta\mu\frac{\pi}{4} \\ -\eta\mu\frac{\pi}{4} & \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

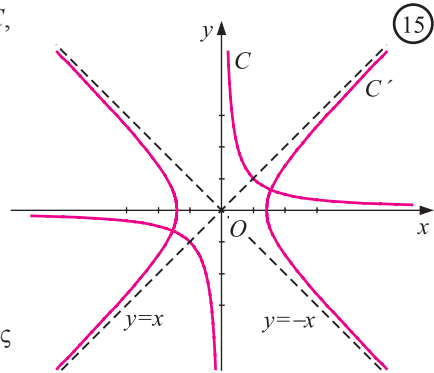
$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}. \quad (1)$$

Επομένως, αν το  $M(x, y)$  ανήκει στην καμπύλη  $C$ , τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} xy &= 1 \\ \frac{1}{2}[(x')^2 - (y')^2] &= 1 \\ \frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2} &= 1, \end{aligned}$$

οπότε το σημείο  $M'(x', y')$  θα είναι σημείο της ισοσκελούς υπερβολής



$$C': \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν το  $M'(x', y')$  ανήκει στην καμπύλη  $C'$ , τότε το  $M(x, y)$  θα ανήκει στην  $C$ .

Άρα, η εικόνα της  $C: y = \frac{1}{x}$ , ως προς τη στροφή με κέντρο  $O$  και γωνία  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ , είναι η

υπερβολή  $C': \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ . Συνεπώς, η καμπύλη  $C: y = \frac{1}{x}$  είναι μια υπερβολή που

προκύπτει αν στρέψουμε την  $C'$  κατά γωνία  $-\theta = \frac{\pi}{4}$ .

**2. Έστω  $T_1$  και  $T_2$  οι γραμμικοί μετασχηματισμοί με πίνακες**

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

αντιστοίχως. Να βρεθεί ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού που προκύπτει, αν εφαρμόσουμε πρώτα τον  $T_1$  και έπειτα τον  $T_2$ , δηλαδή του μετασχηματισμού  $T_2 \circ T_1$ .

**ΛΥΣΗ**

Έστω  $M(x, y)$  ένα σημείο του επιπέδου. Αν  $M'(x', y')$  είναι η εικόνα του  $M$  μέσω του μετασχηματισμού  $T_1$  και  $M''(x'', y'')$  η εικόνα του  $M'$  μέσω του μετασχηματισμού  $T_2$ , τότε θα ισχύει

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

οπότε θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, ο πίνακας του  $T_2 \circ T_1$  είναι ο  $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  που είναι το γινόμενο  $A_2 \cdot A_1$  των πινάκων των μετασχηματισμών  $T_2$  και  $T_1$ . Γενικά:

“Αν  $A_1, A_2$  είναι πίνακες δύο γραμμικών μετασχηματισμών,  $T_1$  και  $T_2$  αντιστοίχως, τότε ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού  $T_2 \circ T_1$  είναι ο  $A_2 \cdot A_1$ , ενώ του  $T_1 \circ T_2$  είναι ο  $A_1 \cdot A_2$ .”

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε τους πίνακες των γραμμικών μετασχηματισμών:

$$T_1: \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}, \quad T_2: \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}, \quad T_3: \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$$

και να βρείτε τις εικόνες των σημείων  $A(1,0)$  και  $B(0,1)$ .

2. Να βρείτε το γραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα πέρατα  $A(1,0)$  και  $B(0,1)$  των μοναδιαίων διανυσμάτων  $\vec{i}$  και  $\vec{j}$  στα σημεία i)  $(1,2)$  και  $(-1,3)$  αντιστοίχως, ii)  $(-1,1)$  και  $(2,1)$  αντιστοίχως.
3. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε τις εικόνες των σημείων  $O(0,0)$  και  $A(3,4)$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι ο  $T$  δεν είναι ισομετρία.

- 4 Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- i) Να βρείτε την εικόνα  $A'B'T'A'$  του τετραγώνου  $ABTA$  που έχει πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ii) Να αποδείξετε ότι το  $A'B'T'A'$  είναι πλάγιο παραλληλόγραμμο.

5. Δίνεται ο μετασχηματισμός:

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε

- i) το πρότυπο του σημείου  $A'(0,5)$
- ii) την εικόνα της ευθείας  $\varepsilon: y = x + 1$ .

6. Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι γραμμικοί μετασχηματισμοί που έχουν πίνακα:

i)  $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix},$

ii)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

iii)  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$

iv)  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

v)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$

vi)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1 Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- i) Να αποδείξετε ότι ο  $T$  απεικονίζει όλα τα σημεία του επιπέδου στην ευθεία  $\varepsilon: y = 2x$ .
- ii) Να βρείτε τα πρότυπα του σημείου  $O(0,0)$ .
- iii) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $A'(1,1)$  δεν έχει πρότυπο.

2. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

και δύο οποιαδήποτε σημεία  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι

- i) Ο  $T$  δεν είναι ισομετρία, δηλαδή ότι  $(A'B') \neq (AB)$ .
- ii) Ο  $T$  απεικονίζει το μέσο του ευθ. τμήματος  $AB$  στο μέσο της εικόνας του  $A'B'$ .
- iii) Το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$  είναι ίσο με το εμβαδό της εικόνας του  $O'A'B'$ .

3. Να βρείτε το γραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα σημεία  $A(1,1)$  και  $B(1,-1)$  στα σημεία:

i)  $A'(0,1)$  και  $B'(2,1)$  αντιστοίχως

ii)  $A'(6,3)$  και  $B'(2,1)$  αντιστοίχως.

Σε καθεμιά περίπτωση να βρείτε την εικόνα της ευθείας  $\varepsilon: y = -2x$ .

4. Να αποδείξετε ότι καθένας από τους παρακάτω γεωμετρικούς μετασχηματισμούς είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

i) Η συμμετρία ως προς την ευθεία  $y = -x$ .

ii) Η προβολή πάνω στον άξονα  $x'x$ .

iii) Η προβολή πάνω στον άξονα  $y'y$ .

iv) Η προβολή πάνω στην ευθεία  $y = x$ .

Στη συνέχεια να βρείτε σε καθεμιά περίπτωση την εικόνα του τετραγώνου  $OAGB$

με πίνακα  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  και να επιβεβαιώσετε γεωμετρικά την απάντησή σας.

5. Δίνεται ο μετασχηματισμός  $T$  με πίνακα  $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ , όπου  $\alpha > \beta > 0$ .

i) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = 1$  είναι η έλλειψη

$$C': \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

ii) Αφού βρείτε την εικόνα  $O'A'G'B'$  του τετραγώνου  $OAGB$ , που έχει πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ να δείξετε ότι } (O'A'G'B') = \alpha\beta \cdot (OAGB).$$

## 1.5 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

• Κάθε εξίσωση της μορφής  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \beta$ , όπου  $a_1, a_2, \dots, a_n, \beta$  είναι πραγματικοί αριθμοί και  $x_1, x_2, \dots, x_n$  άγνωστοι, λέγεται **γραμμική εξίσωση με  $n$  αγνώστους**. Οι αριθμοί  $a_1, a_2, \dots, a_n$  λέγονται **συντελεστές των αγνώστων** και ο  $\beta$  **σταθερός όρος**.

Για παράδειγμα, η εξίσωση  $x - 3y = -3$  είναι μια γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους.

Επίσης, η  $x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 - 5x_4 = 1$  είναι γραμμική εξίσωση με τέσσερις αγνώστους,





Το 1ο μέλος όμως της ισότητας αυτής είναι το γινόμενο του  $2 \times 3$  πίνακα  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$  των συντελεστών των αγνώστων με τον  $3 \times 1$  πίνακα στήλη  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix}$  των αγνώστων.

Επομένως το σύστημα  $(\Sigma_1)$  γράφεται

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Γενικότερα, το  $\mu \times \nu$  γραμμικό σύστημα  $(\Sigma_2)$  γράφεται

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}.$$

Αν τώρα συμβολίσουμε με  $A$  τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, με  $X$  τον πίνακα-στήλη των αγνώστων και με  $B$  τον πίνακα-στήλη των σταθερών όρων, τότε το  $(\Sigma_2)$  γράφεται  $AX = B$ .

Αν οι σταθεροί όροι ενός γραμμικού συστήματος είναι όλοι ίσοι με το μηδέν, τότε το σύστημα λέγεται **ομογενές** και σύντομα γράφεται  $AX = \mathbf{0}$ .

Τέλος ο πίνακας

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} & \beta_\mu \end{array} \right]$$

που αποτελείται από τον πίνακα  $A$  των συντελεστών των αγνώστων, συμπληρωμένο με τη στήλη των σταθερών όρων λέγεται **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο πίνακας αυτός παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση του συστήματος. Η κατακόρυφη διακεκομμένη γραμμή στον επαυξημένο πίνακα προστίθεται απλώς για να ξεχωρίζει τη στήλη των σταθερών όρων.

---

## 1.6 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΤΟΥ GAUSS

---

Αποδεικνύεται ότι, αν σε ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόσουμε μια από τις επόμενες διαδικασίες, τότε προκύπτει ισοδύναμο σύστημα:

— Εναλλαγή της θέσης δύο εξισώσεων

— Πολλαπλασιασμός των μελών μιας εξίσωσης με ένα μη μηδενικό αριθμό.

— Πρόσθεση των μελών μιας εξίσωσης (πολλαπλασιασμένων με έναν αριθμό) στα μέλη μιας άλλης.

Έτσι, όταν έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα προσπαθούμε, εφαρμόζοντας τις προηγούμενες διαδικασίες, να το μετασχηματίσουμε σε ένα άλλο ισοδύναμο σύστημα του οποίου η λύση να είναι προφανής.

Ας δούμε τώρα με ένα παράδειγμα πως εφαρμόζονται και πως συμβολίζονται οι τρεις αυτές διαδικασίες.

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ 2x - y + 5\omega = -3 \\ 3x + y + 2\omega = 1 \end{cases} \quad (\Sigma_1)$$

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της 1ης εξίσωσης  $E_1$  του  $(\Sigma_1)$  με  $-2$  και τα προσθέτουμε στα αντίστοιχα μέλη της 2ης εξίσωσης  $E_2$  του  $(\Sigma_1)$ . Έτσι, απαλείφεται από την  $E_2$  ο άγνωστος  $x$ .

$$E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1 \quad \begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ 3y + 3\omega = -3 \\ 3x + y + 2\omega = 1 \end{cases} \quad (\Sigma_2)$$

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της  $E_1$  του  $(\Sigma_2)$  με  $-3$  και τα προσθέτουμε στα μέλη της  $E_3$ . Έτσι, απαλείφεται από την  $E_3$  ο άγνωστος  $x$ .

$$E_3 \rightarrow E_3 - 3E_1 \quad \begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ 3y + 3\omega = -3 \\ 7y - \omega = 1 \end{cases} \quad (\Sigma_3)$$

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της  $E_2$  του  $(\Sigma_3)$  με  $\frac{1}{3}$ . Έτσι, ο συντελεστής του  $y$  γίνεται 1.

$$E_2 \rightarrow \frac{1}{3}E_2 \quad \begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ y + \omega = -1 \\ 7y - \omega = 1 \end{cases} \quad (\Sigma_4)$$

Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας τις παραπάνω διαδικασίες που παριστάνουμε πλέον μόνο συμβολικά:

$$E_3 \rightarrow E_3 - 7E_2 \quad \begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ y + \omega = -1 \\ -8\omega = 8 \end{cases} \quad (\Sigma_5)$$

$$E_3 \rightarrow -\frac{1}{8}E_3 \quad \begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ y + \omega = -1 \\ \omega = -1 \end{cases} \quad (\Sigma_6)$$

$$E_2 \rightarrow E_2 - E_3 \quad \begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases} \quad (\Sigma_7)$$

$$E_1 \rightarrow E_1 - E_3 \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases} \quad (\Sigma_8)$$

$$E_1 \rightarrow E_1 + 2E_2 \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases} \quad (\Sigma_9)$$

Επειδή το σύστημα  $(\Sigma_9)$  είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα  $(\Sigma_1)$ , συμπεραίνουμε ότι η λύση του συστήματος είναι η τριάδα  $(1, 0, -1)$ .

Μπορούμε να περιγράψουμε απλούστερα τη διαδικασία επίλυσης ενός  $\mu \times \nu$  γραμμικού συστήματος, αν σκεφτούμε ως εξής: Αφού κάθε εξίσωση παριστάνεται με μια γραμμή του επαυξημένου πίνακα, αρκεί οι παραπάνω μετατροπές των εξισώσεων να γίνονται στις γραμμές  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\mu$  του επαυξημένου πίνακα. Οι μετατροπές αυτές λέγονται **γραμμοπράξεις** και είναι οι εξής:

### Γραμμοπράξη

### Συμβολισμός

1. *Εναλλαγή της θέσης δύο γραμμών*

$$\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$$

2. *Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με ένα μη μηδενικό αριθμό*

$$\Gamma_i \rightarrow \lambda \Gamma_i, \quad \lambda \neq 0$$

3. *Πρόσθεση των στοιχείων μιας γραμμής, πολλαπλασιασμένων με έναν αριθμό, στα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής.*

$$\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \lambda \Gamma_j$$

Όταν έχουμε δύο πίνακες  $A, B$  που ο ένας προκύπτει από τον άλλο με γραμμοπράξεις, τότε οι πίνακες αυτοί λέγονται **γραμμοϊσοδύναμοι** ή απλώς **ισοδύναμοι** και γράφουμε  $A \sim B$ . Είναι προφανές ότι, αν οι επαυξημένοι πίνακες δύο συστημάτων είναι ισοδύναμοι, τότε και τα συστήματα είναι ισοδύναμα, αφού καθεμιά γραμμοπράξη ξεχωριστά οδηγεί σε σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό.

Έτσι, η επίλυση του προηγούμενου συστήματος μπορεί να γίνει ως εξής:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \end{array} \right] \quad \Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{3}\Gamma_2 \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \end{array} \right] \quad \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 7\Gamma_2$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_3 \rightarrow -\frac{1}{8}\Gamma_3 \\ \sim \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3 \\ \sim \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 2\Gamma_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases}$ .

Επομένως, η λύση του συστήματος είναι η τριάδα  $(1, 0, -1)$ .

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι ο μοναδιαίος  $3 \times 3$  πίνακας. Έτσι μπορούμε να “διαβάσουμε” αμέσως τη λύση του συστήματος.

Για να απλοποιήσουμε και να συντομεύσουμε ακόμη περισσότερο τη διαδικασία επίλυσης ενός συστήματος, πολλές φορές στο ίδιο βήμα εφαρμόζουμε περισσότερες από μία γραμμοπράξεις.

Ας λύσουμε τώρα και το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 10 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα και έχουμε διαδοχικά:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \\ \sim \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -9 & -14 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 4\Gamma_2 \\ \sim \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_3 \rightarrow -\Gamma_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_3 \\ \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 6\Gamma_3 \\ \sim \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 5\Gamma_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \end{array} \right].$$

Έτσι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 3 \\ & x_4 = -1. \\ & x_5 = 2 \end{cases}$$

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς έναν άγνωστο, π.χ. ως προς  $x_1$  (αυτό μας διευκολύνει, αφού ο συντελεστής του αγνώστου αυτού είναι 1) και έχουμε

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 + x_3 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 2 \end{cases}.$$

Επειδή ο άγνωστος  $x_1$  εκφράζεται ως συνάρτηση των  $x_2, x_3$ , αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετως τις τιμές των  $x_2, x_3$ . Δηλαδή, το γραμμικό σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, τις διατεταγμένες πεντάδες  $(3 - 2x_2 + x_3, x_2, x_3, -1, 2)$ , όπου οι  $x_2, x_3$  μπορούν να πάρουν οποιοσδήποτε πραγματικές τιμές.

Π.χ. για  $x_2 = 1, x_3 = 0$  έχουμε τη λύση  $(1, 1, 0, -1, 2)$  του συστήματος.

Ο τελευταίος από τους παραπάνω ισοδύναμους επαυξημένους πίνακες είναι, όπως λέμε, ένας **ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας**. Γενικά, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

## ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας  $\mu \times \nu$  πίνακας λέγεται **ανηγμένος κλιμακωτός**<sup>(1)</sup>, αν ισχύουν συγχρόνως τα παρακάτω:

- α) Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν από τις μηδενικές.
- β) Το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1 και βρίσκεται δεξιότερα του αντίστοιχου 1 της προηγούμενης γραμμής.
- γ) Το πρώτο από αριστερά 1 κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

Έτσι π.χ. οι πίνακες

<sup>(1)</sup> Ένας  $\mu \times \nu$  πίνακας λέγεται, απλώς, **κλιμακωτός**, αν

- α) Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν από τις μηδενικές και
- β) Το πρώτο από τα αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το αντίστοιχο στοιχείο της προηγούμενης γραμμής, χωρίς να είναι κατανάγκη ίσο με 1.

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί, ενώ οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί.

Σχετικά με τους ανηγμένους κλιμακωτούς πίνακες ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε πίνακας μετατρέπεται σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα με την εκτέλεση ενός πεπερασμένου πλήθους γραμμοπράξεων.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος με έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτός ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι και μοναδικός.

Ο παρακάτω αλγόριθμος μας δίνει μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να βρούμε κάθε φορά το μοναδικό αυτόν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

### ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

- ΒΗΜΑ 1ο:** Βρίσκουμε την πρώτη στήλη του πίνακα που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο.
- ΒΗΜΑ 2ο:** Μεταφέρουμε στον πίνακα πρώτη τη γραμμή που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο της στήλης (γραμμοπράξη 1).
- ΒΗΜΑ 3ο:** Κάνουμε το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης μονάδα (γραμμοπράξη 2).
- ΒΗΜΑ 4ο:** Κάνουμε όλα τα στοιχεία της στήλης που είναι κάτω από τη μονάδα μηδενικά (γραμμοπράξη 3).
- ΒΗΜΑ 5ο:** Αγνοούμε την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 4 για τις επόμενες γραμμές του πίνακα. Αν όμως οι γραμμές που απέμειναν είναι μηδενικές, πηγαίνουμε στο 6ο βήμα.
- ΒΗΜΑ 6ο:** Από γραμμή σε γραμμή χρησιμοποιώντας το πρώτο από αριστερά 1 κάθε γραμμής και τη γραμμοπράξη 3 κάνουμε μηδέν όλα τα στοιχεία της στήλης στην οποία βρίσκεται η μονάδα αυτή.

Ο παραπάνω αλγόριθμος, που ονομάζεται και **αλγόριθμος του Gauss**, ολοκληρώνεται όταν σε κάθε μη μηδενική γραμμή του πίνακα το πρώτο από αριστερά 1 είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

Έτσι για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με τον αλγόριθμο του Gauss, μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακά του σε έναν ισοδύναμο ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

Για παράδειγμα, ας λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = -4 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right]$$

και έχουμε διαδοχικά:

$$\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3 \quad (\text{βήμα 2ο}) \quad \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & -4 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &\rightarrow \Gamma_2 - 3\Gamma_1 & (\text{βήμα 4ο}) \\ \Gamma_3 &\rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_1 \end{aligned} \quad \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 7 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} &\text{Αγνοούμε την 1η γραμμή (βήμα 5ο)} \\ \Gamma_2 &\leftrightarrow \Gamma_3 & (\text{βήμα 2ο}) \end{aligned} \quad \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & -1 \end{array} \right]$$

$$\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{7}\Gamma_2 \quad (\text{βήμα 3ο}) \quad \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & -1 \end{array} \right]$$

$$\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 7\Gamma_2 \quad (\text{βήμα 4ο}) \quad \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{Αγνοούμε τη 2η γραμμή (βήμα 5ο)} \\ \Gamma_3 \rightarrow -\Gamma_3 \text{ (βήμα 3ο)} \end{array} \quad \left[ \begin{array}{cccc|c|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3 \\ \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 3\Gamma_3 \end{array} \text{ (βήμα 6ο)} \quad \left[ \begin{array}{cccc|c|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2 \text{ (βήμα 6ο)} \quad \left[ \begin{array}{cccc|c|c} \textcircled{1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \end{array} \right].$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός και αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = & 1 \\ & x_3 - x_4 & = & -1 \\ & & x_5 & = & 1 \end{cases}$$

που είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ x_3 = -1 + x_4 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής

$$(1 + x_2, x_2, -1 + x_4, x_4, 1), \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

• Ας λύσουμε τώρα και το σύστημα: 
$$\begin{cases} x + 2y - 3z + \omega = 1 \\ 2x - y + 2z - \omega = 1 \\ 4x + 3y - 4z + \omega = 2 \end{cases}$$

Σχηματίζουμε τον επανζημένο πίνακα του συστήματος και έχουμε διαδοχικά:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 4\Gamma_1 \end{array} \sim \left[ \begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{5}\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 5\Gamma_2 \end{array} \sim \left[ \begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$



Από την 3η γραμμή του τελευταίου πίνακα έχουμε ότι  $0x + 0y + 0z + 0\omega = -1$  ή  $0 = -1$ , που σημαίνει ότι το σύστημα είναι αδύνατο. Γενικά,

**Αν κατά την επίλυση ενός συστήματος με τη βοήθεια του επαυξημένου πίνακα παρουσιαστεί μια γραμμή της μορφής  $0 \ 0 \dots \ 0 \mid \alpha$ , με  $\alpha \neq 0$ , τότε το σύστημα είναι αδύνατο.**

### ΣΧΟΛΙΟ

Από τα συστήματα που λύσαμε μέχρι τώρα, παρατηρούμε ότι, όσα από αυτά είναι συμβαστά, ή έχουν μία μοναδική λύση ή έχουν άπειρο πλήθος λύσεων. Δηλαδή, δεν εμφανίστηκε σύστημα που να έχει περισσότερες από μία αλλά πεπερασμένου πλήθους λύσεις. Αποδεικνύεται ότι αυτό ισχύει γενικά για τα γραμμικά συστήματα.

---



---

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί το σύστημα**

$$\begin{cases} \kappa x + y = 1 \\ x + \kappa y = 1, \kappa \in \mathbb{R}. \\ x + y = 1 \end{cases}$$

### ΛΥΣΗ

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{bmatrix} \kappa & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & \kappa & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{matrix} \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2 - \Gamma_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & \kappa & \vdots & 1 \\ \kappa & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{matrix} \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \kappa - 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 - \kappa \end{bmatrix}.$$

- Αν  $\kappa \neq 1$ , τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

- Αν  $\kappa = 1$ , τότε ο τελευταίος πίνακας γράφεται  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ .

Επομένως, το σύστημα ισοδυναμεί με την εξίσωση

$$x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$$

και έτσι έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής  $(x, 1 - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

1. Να γράψετε τα συστήματα

$$i) \begin{cases} 2x - 3y + 5\omega = 1 \\ x - 2y + \omega = -2 \end{cases} \quad \text{και} \quad ii) \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y + 6\omega = 12 \\ y + 3\omega = 6 \end{cases}$$

στη μορφή  $AX = B$ , όπου  $A$  ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων,  $X$  ο πίνακας των αγνώστων και  $B$  ο πίνακας των σταθερών όρων.

2. Να γράψετε τα γραμμικά συστήματα που περιγράφουν οι ιδιότητες:

$$i) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad ii) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια να γράψετε τους επαυξημένους πίνακες των συστημάτων αυτών.

3. Να λύσετε τα συστήματα που αντιστοιχούν στους ανηγμένους κλιμακωτούς πίνακες:

$$i) \left[ \begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \end{array} \right] \quad ii) \left[ \begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 0 & 3 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 4 \end{array} \right]$$

$$iii) \left[ \begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 \end{array} \right]$$

4. Με τον αλγόριθμο του Gauss να λύσετε τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 4x - y + 3z = 1 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = -3 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

5. Ομοίως τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} x + y + z + 2\omega = 2 \\ 2x - y - z + \omega = 1 \\ x + 2y + 2z - \omega = 3 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} x - y + 2z - \omega = 1 \\ x - 2y + z + \omega = -1 \\ -2x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{iii) } \begin{cases} 2x - y + 3z - \omega = 0 \\ x + y - 2z + \omega = 2 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

6. Ομοίως τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 4y = 4 \\ x - 6y = -1 \\ 3x + 14y = 13 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - 2y = 1 \\ x - 10y + 4z = 1 \end{cases}$$

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα  $\alpha, \beta, \gamma$  ώστε το σύστημα  $\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma \omega = 0 \\ \alpha x + 2y - \gamma \omega = 1 \\ 3x - \beta y + \gamma \omega = 3 \end{cases}$  να έχει ως λύση την  $(x, y, \omega) = (1, -1, 1)$ .

2. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής  $y = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ , που διέρχεται από τα σημεία  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$  και  $(-1, 6)$ .

3. Αν  $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$  και  $\begin{cases} 2\eta\mu\alpha + 4\sigma\upsilon\nu\beta - \epsilon\phi\gamma = 2 \\ 4\eta\mu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\beta + \epsilon\phi\gamma = 3\sqrt{3} - 1, \\ 2\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta - \epsilon\phi\gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$

να αποδείξετε ότι  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ .

4. Αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$  και  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix}$ , να λύσετε το γραμμικό σύστημα  $AX = 4X$ .

5. Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ , να βρείτε όλους τους πίνακες  $X$  για τους οποίους ισχύει:

$$AX = XA.$$

6. Να λύσετε τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} x + y + \omega = 1 \\ x + 2y + 4\omega = \alpha \\ x + 4y + 10\omega = \alpha^2 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} x + y + \omega = 6 \\ x + 2y + 3\omega = 10 \\ x + 2y + \lambda\omega = \mu \end{cases} \quad iii) \begin{cases} x + y = 1 \\ x + \kappa y = \kappa, \quad \kappa \in \mathbf{R}. \\ 2x + (\kappa + 1)y = 3 \end{cases}$$

## 1.7 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

### Εισαγωγή

Στην προηγούμενη παράγραφο περιγράψαμε μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να βρισκουμε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος.

Όμως, όπως έχουμε δει στα γραμμικά συστήματα με δύο αγνώστους, είναι χρήσιμο να έχουμε και έναν τύπο, ο οποίος να εκφράζει τις λύσεις ενός γραμμικού συστήματος ως συνάρτηση των συντελεστών του.

Οι τύποι που θα βρούμε γενικεύουν τους τύπους που ήδη ξέρουμε για την περίπτωση ενός γραμμικού συστήματος  $2 \times 2$ .

Θα προχωρήσουμε στην αναζήτηση ενός τέτοιου τύπου που τα εργαλεία για την ανεύρεσή του είναι οι **ορίζουσες**.

### Ορίζουσα ενός $2 \times 2$ πίνακα

Έστω ο  $2 \times 2$  πίνακας  $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ .

Ο αριθμός  $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$  λέγεται **ορίζουσα του πίνακα  $A$**  και συμβολίζεται με  $|A|$  ή με

$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ . Δηλαδή,

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

Επειδή η ορίζουσα αυτή αντιστοιχεί σε έναν  $2 \times 2$  πίνακα, λέγεται **ορίζουσα 2ης τάξης**.

Για παράδειγμα, η ορίζουσα

— του πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$  είναι  $|A| = 3(-2) - (-1)2 = -6 + 2 = -4$

— του πίνακα  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  είναι  $|I| = 1 - 0 = 1$

— του πίνακα  $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  είναι  $|O| = 0$ .

### Ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα

Η ορίζουσα ενός  $3 \times 3$  πίνακα ορίζεται με την βοήθεια της ορίζουσας 2ης τάξης ως εξής:

$$\text{Έστω ο } 3 \times 3 \text{ πίνακας } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Ο αριθμός  $a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$  λέγεται **ορίζουσα του πίνακα  $A$**

και συμβολίζεται με  $|A|$  ή με  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ .

Δηλαδή

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Επειδή η ορίζουσα αυτή αντιστοιχεί σε έναν  $3 \times 3$  πίνακα, λέγεται **ορίζουσα 3ης τάξης**.

Για παράδειγμα, αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ , τότε

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-6) + 1(-3) + 5(-1) = -20$$

Η παράσταση (1) με την οποία ορίζεται η  $|A|$  λέγεται **ανάπτυγμα της  $|A|$  ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής**.

Με εκτέλεση των πράξεων στο ανάπτυγμα αυτό έχουμε:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Η παράσταση (2) λέγεται **ανάπτυγμα της  $|A|$  ως προς τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής**.

Ομοίως, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει και

$$|A| = \alpha_{31} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} - \alpha_{32} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} + \alpha_{33} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

που λέγεται **ανάπτυγμα**  $|A|$  ως προς τα στοιχεία της τρίτης γραμμής.

Παρατηρούμε ότι σε καθένα από τα αναπτύγματα της  $|A|$ , κάθε στοιχείο  $\alpha_{ij}$  της αντίστοιχης γραμμής πολλαπλασιάζεται με την ορίζουσα 2ης τάξης του πίνακα που προκύπτει από τον  $A$ , αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου  $\alpha_{ij}$ . Η ορίζουσα αυτή λέγεται **ελλάσων ορίζουσα του στοιχείου  $\alpha_{ij}$**  και συμβολίζεται με  $M_{ij}$ .

Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε όρος ενός αναπτύγματος της  $|A|$  έχει πρόσημο  $+$  ή  $-$ , ίδιο με το πρόσημο του  $(-1)^{i+j}$ . Το γινόμενο  $(-1)^{i+j} M_{ij}$  λέγεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου  $\alpha_{ij}$**  και συμβολίζεται με  $A_{ij}$ .

Δηλαδή

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Με τους συμβολισμούς αυτούς τα αναπτύγματα (1), (2) και (3) γράφονται:

$$|A| = \alpha_{11} A_{11} + \alpha_{12} A_{12} + \alpha_{13} A_{13}$$

$$|A| = \alpha_{21} A_{21} + \alpha_{22} A_{22} + \alpha_{23} A_{23}$$

$$|A| = \alpha_{31} A_{31} + \alpha_{32} A_{32} + \alpha_{33} A_{33}.$$

Με εκτέλεση των πράξεων προκύπτουν

$$|A| = \alpha_{11} A_{11} + \alpha_{21} A_{21} + \alpha_{31} A_{31}$$

$$|A| = \alpha_{12} A_{12} + \alpha_{22} A_{22} + \alpha_{32} A_{32}$$

$$|A| = \alpha_{13} A_{13} + \alpha_{23} A_{23} + \alpha_{33} A_{33}$$

που είναι ανάπτυγμα της  $|A|$  ως προς τα στοιχεία της 1ης, της 2ης και της 3ης στήλης αντιστοίχως.

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην πράξη το ανάπτυγμα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας είναι ως προς τη γραμμή ή στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά.

Για παράδειγμα, αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , τότε

$$|A| = 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1.$$

### Ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα

Ορίσαμε μέχρι τώρα την ορίζουσα ενός  $2 \times 2$  πίνακα και με τη βοήθειά της την ορίζουσα ενός  $3 \times 3$  πίνακα.

Ορίζουμε επίσης ως ορίζουσα ενός πίνακα με ένα στοιχείο  $[a_{11}]$ , να είναι το ίδιο το στοιχείο.

Γενικά, μπορούμε να ορίσουμε την ορίζουσα  $n$  τάξης  $n \geq 3$  με τη βοήθεια του ορισμού της ορίζουσας  $n-1$  τάξης. Ένας τέτοιος ορισμός λέγεται **επαγωγικός**.

Συγκεκριμένα, έστω ο  $n \times n$  πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ονομάζουμε ορίζουσα του πίνακα  $A$  και τη συμβολίζουμε με  $|A|$  ή

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

τον αριθμό

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

όπου  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  και  $M_{ij}$ , η  $(n-1)$  τάξης ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον  $A$ , αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου  $a_{ij}$ .

Όπως και στις ορίζουσες 3ης τάξης, η ορίζουσα  $M_{ij}$  λέγεται **ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου  $a_{ij}$**  και το γινόμενο  $(-1)^{i+j} M_{ij}$  λέγεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου  $a_{ij}$** .

Η παράσταση  $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$ , με την οποία ορίσαμε την  $|A|$  λέγεται, όπως και στις ορίζουσες 3ης τάξης, **ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής**.

Αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα:

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Για οποιαδήποτε γραμμή  $i$  ή στήλη  $j$  ενός  $n \times n$  πίνακα  $A$  ισχύει:

α)  $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$  και

β)  $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$

Η παράσταση (α) λέγεται **ανάπτυγμα της ορίζουσας** ως προς τα στοιχεία της  $i$  γραμμής, ενώ η (β) **ανάπτυγμα της ορίζουσας** ως προς τα στοιχεία της  $j$  στήλης.

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1) Είναι φανερό ότι αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης ενός πίνακα  $A$  είναι όλα μηδέν, τότε  $|A| = 0$ .
- 2) Αν ένας πίνακας είναι τριγωνικός άνω ή κάτω, τότε αποδεικνύεται ότι η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου. Για παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ln 3 \\ 0 & -3 & \kappa^5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 1(-3)\frac{1}{3} = -1.$$

- 3) Αποδεικνύεται επίσης ότι, αν δύο γραμμές (δύο στήλες) ενός πίνακα είναι ίσες ή ανάλογες, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.  
Για παράδειγμα,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 10 & 12 & 15 \end{vmatrix} = 0,$$

αφού  $\Gamma_2 = 3\Gamma_1$ .

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της 2ης στήλης της ορίζουσας των πινάκων

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ii) } B = \begin{bmatrix} 4\eta\mu^2\alpha & 0 & -\sigma\upsilon\nu 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha & 0 & \sigma\upsilon\nu^2\alpha \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια να υπολογισθούν οι  $|A|$ ,  $|B|$ .

### ΛΥΣΗ

i) Έχουμε



$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-2-6) = 8$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+3 = 4$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(2-2) = 0.$$

Επομένως,  $|A| = 2A_{12} + 0A_{22} + 1A_{32} = 2 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 = 16$ .

ii) Έχουμε

$$B_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha & \sigma\upsilon\nu^2 \alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4\eta\mu^2 \alpha & -\sigma\upsilon\nu 2\alpha \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha & \sigma\upsilon\nu^2 \alpha \end{vmatrix} = 4\eta\mu^2 \alpha \sigma\upsilon\nu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha$$

$$= (2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha = \eta\mu^2 2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha = 1$$

$$B_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4\eta\mu^2 \alpha & -\sigma\upsilon\nu 2\alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Επομένως

$$|B| = 0 \cdot B_{12} + 1B_{22} + 0 \cdot B_{32} = 1.$$

### Επίλυση $n \times n$ γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο του Cramer

Όπως είδαμε στα προηγούμενα, ένα γραμμικό  $m \times n$  σύστημα μπορεί να έχει μοναδική λύση ή άπειρο πλήθος λύσεων ή να είναι αδύνατο. Στην ειδική περίπτωση που το σύστημα είναι  $n \times n$ , το επόμενο θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, μας πληροφορεί τότε το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση και τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων ή είναι αδύνατο.

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω το  $n \times n$  γραμμικό σύστημα  $AX = B$ .

- Αν  $|A| \neq 0$ , τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  με

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D}, x_2 = \frac{Dx_2}{D}, \dots, x_n = \frac{Dx_n}{D}$$

όπου  $D$  είναι η ορίζουσα  $|A|$  των συντελεστών των αγνώστων και  $Dx_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την  $D$  αν αντικαταστήσουμε την  $i$  στήλη των συντελεστών του αγνώστου  $x_i$  με τη στήλη των σταθερών όρων.

- Αν  $|A| = 0$ , τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι:

**ΠΟΡΙΣΜΑ**

Το ομογενές σύστημα  $AX = \mathbf{0}$ ,

- έχει μόνο τη μηδενική λύση, αν και μόνο αν  $|A| \neq 0$ .
- έχει και μη μηδενικές λύσεις (άπειρο πλήθος), αν και μόνο αν  $|A| = 0$ .

**ΣΧΟΛΙΑ**

1) Ένα  $n \times n$  γραμμικό σύστημα  $AX = B$  με  $|A| \neq 0$ , λέγεται και **σύστημα Cramer**, η δε επίλυση του συστήματος αυτού αναφέρεται και ως **κανόνας του Cramer**. Ο κανόνας του Cramer δεν είναι αποδοτική μέθοδος για να χρησιμοποιηθεί στη λύση συστημάτων με ένα μεγάλο αριθμό εξισώσεων, γιατί πρέπει να υπολογιστούν πολλές ορίζουσες μεγάλης τάξης. Γι' αυτό στη συνέχεια με τον κανόνα αυτόν θα επιλύουμε μόνο  $2 \times 2$  και  $3 \times 3$  γραμμικά συστήματα.

Ως προς τους αριθμητικούς υπολογισμούς η μέθοδος επίλυσης συστήματος με τον αλγόριθμο του Gauss υπερτερεί του κανόνα του Cramer. Όμως, ο κανόνας του Cramer είναι ιδιαίτερα χρήσιμος σε θεωρητικά ζητήματα.

- 2) Για την επίλυση ενός  $n \times n$  γραμμικού συστήματος  $AX = B$  με  $|A| = 0$  εργαζόμαστε συνήθως με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.
- 3) Αν ένα  $n \times n$  γραμμικό σύστημα είναι ομογενές, τότε  $Dx_1 = Dx_2 = \dots = Dx_n = 0$ , αφού όλες οι ορίζουσες έχουν μια μηδενική στήλη.

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

**1** Να λυθεί το σύστημα 
$$\begin{cases} x & -\omega & = & 1 \\ 2x & +y & -\omega & = & 1 \\ x & +2y & +5\omega & = & 2 \end{cases}$$

**ΛΥΣΗ**

Έχουμε  $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \quad Dx = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$

$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -7$  και  $D\omega = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer, είναι

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{7}{4}, \quad y = \frac{Dy}{D} = -\frac{7}{4}, \quad \omega = \frac{D\omega}{D} = \frac{3}{4}$$

δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση  $\left(\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$ .

**2. Να λυθεί το σύστημα** 
$$\begin{cases} \lambda x + y - \omega = 1 \\ x + \lambda y - \omega = 1 \\ -x + y + \lambda \omega = 1 \end{cases}$$

### ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 + 1) - 1(\lambda - 1) - 1(1 + \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1) - 1(\lambda + 1) - 1(1 - \lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$Dy = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1) - (\lambda - 1) - 1(1 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$D\omega = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - (1 + 1) + 1(1 + \lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Οι τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  που μηδενίζουν την ορίζουσα  $D = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$  είναι οι 0, -1, 1.

— Για  $\lambda \neq 0$  και  $\lambda \neq -1$  και  $\lambda \neq 1$  είναι  $D \neq 0$  και επομένως

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = \frac{1}{\lambda}, \quad y = \frac{Dy}{D} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{D\omega}{D} = \frac{1}{\lambda}$$

δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση  $\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right)$ .

— Για  $\lambda = 0$ , το σύστημα γίνεται 
$$\begin{cases} y - \omega = 1 \\ x - \omega = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$
. Αν προσθέσουμε κατά μέλη

τις δύο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε το σύστημα  $\begin{cases} y - \omega = 1 \\ x - \omega = 1, \text{ το οποίο προφανώς} \\ y - \omega = 2 \end{cases}$  είναι αδύνατο.  
 — Για  $\lambda = 1$ , το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - \omega = 1 \\ x + y - \omega = 1 \\ -x + y + \omega = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \omega = 1 \\ -x + y + \omega = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \omega = 1 \\ 2y = 2 \end{cases} && \left( \begin{array}{l} \text{προσθέσαμε κατά} \\ \text{μέλη τις εξισώσεις} \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \omega \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής  $(\omega, 1, \omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ .

— Για  $\lambda = -1$ , το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + y - \omega = 1 \\ x - y - \omega = 1 \\ -x + y - \omega = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - \omega = 1 \\ x - y - \omega = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - \omega = 1 \\ -2\omega = 2 \end{cases} && \left( \begin{array}{l} \text{προσθέσαμε κατά} \\ \text{μέλη τις εξισώσεις} \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \omega = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής  $(y, y, -1)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

**3. Να λυθεί το ομογενές σύστημα**  $\begin{cases} \lambda x + y + \omega = 0 \\ x + \lambda y + \omega = 0 \\ x + y + \lambda \omega = 0 \end{cases}$

**ΛΥΣΗ**

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 1) - (\lambda - 1) + (1 - \lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Οι τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  που μηδενίζουν την ορίζουσα  $D$  είναι οι 1 και  $-2$ .

— Για  $\lambda \neq 1$  και  $\lambda \neq -2$  είναι  $D \neq 0$  και επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική  $(0, 0, 0)$ .

$$\text{— Για } \lambda = 1 \text{ το σύστημα γίνεται } \begin{cases} x + y + \omega = 0 \\ x + y + \omega = 0 \\ x + y + \omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + \omega = 0$$

και έχει άπειρες λύσεις της μορφής  $(-y - \omega, y, \omega), y, \omega \in \mathbb{R}$ .

— Για  $\lambda = -2$  το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -2x + y + \omega = 0 \\ x - 2y + \omega = 0 \\ x + y - 2\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + \omega = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3\omega = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} \text{αφαιρέσαμε την πρώτη εξίσωση} \\ \text{από τις άλλες δύο} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \omega = x \end{cases}$$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής  $(x, x, x), x \in \mathbb{R}$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \begin{vmatrix} 30 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix}, \quad \text{ii)} \quad \begin{vmatrix} e^2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ e^3 & e & 8 \end{vmatrix}, \quad \text{iii)} \quad \begin{vmatrix} \eta\mu\theta & 2 - \sigma\upsilon\nu\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sigma\upsilon\nu\theta & 2 & \eta\mu\theta \end{vmatrix} \\ \text{iv)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \\ \alpha^2 & \beta^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{v)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \log 5 \\ -1 & 0 & \log 2 \end{vmatrix}, \quad \text{vi)} \quad \begin{vmatrix} e & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ e^2 & 0 & e \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 2 & x & -1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ii)} \quad \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ x & 1 & x \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{iii) } \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & x & 3 \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{iv) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \eta\mu x & 1 & -1 \\ \eta\mu^2 x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i) } \begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ -x + 3y = -7 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} 3x + 4y + 4\omega = 11 \\ 4x - 4y + 6\omega = 11 \\ 6x - 6y = 3 \end{cases}$$

$$\text{iii) } \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 7x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{iv) } \begin{cases} 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ 3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x = 2 \end{cases}, x \in [0, 2\pi).$$

4. Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$  για τις οποίες τα παρακάτω συστήματα έχουν και μη μηδενικές λύσεις.

$$\text{i) } \begin{cases} (2 - \kappa)x + y = 0 \\ -x - \kappa y + \omega = 0 \\ x + 3y + (1 - \kappa)\omega = 0 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} \kappa x + y + \omega = 0 \\ x + \kappa y + \omega = 0 \\ x + y + \kappa\omega = 0 \end{cases}$$

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές των  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} x + y + \omega = 1 \\ \kappa x + \kappa y + \omega = \kappa + 1 \\ \kappa x + 2y + 2\omega = 2 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} \lambda x + y - \omega = 1 \\ \lambda x + y + \lambda\omega = \lambda - 1 \\ 3x + 3y + \lambda\omega = 1 \end{cases}$$

2. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + \lambda(y + \omega) = 0 \\ \lambda x + 2y = \omega \\ \lambda x + y + \omega = 0 \end{cases}$$

3. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών

$$\text{i) } \begin{cases} \varepsilon_1: x + 2y = -1 \\ \varepsilon_2: 2x + y = 1 \\ \varepsilon_3: 3x - 2y = 5 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} \varepsilon_1: x + 2y = 5 \\ \varepsilon_2: 2x + 5y = 1 \\ \varepsilon_3: -x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\text{iii) } \begin{cases} \varepsilon_1: 2x + y = 0 \\ \varepsilon_2: 4x + 2y = 3 \\ \varepsilon_3: x + y = 1 \end{cases} \quad \text{iv) } \begin{cases} \varepsilon_1: 3x + 9y = 1 \\ \varepsilon_2: x + 3y = 0 \\ \varepsilon_3: 2x + 6y = 5 \end{cases}$$

4. Θεωρούμε την εξίσωση  $at^2 + bt + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  και το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \beta x + 2\alpha y = 0 \\ 2\gamma x + \beta y = 0 \end{cases}$$

- i) Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.  
 ii) Αν η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα, να εξετάσετε πόσες λύσεις έχει το σύστημα.
5. Αν για τους  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  υπάρχουν  $x, y, \omega \in \mathbb{R}$ , που δεν είναι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$x = \gamma y + \beta \omega, \quad y = \alpha \omega + \gamma x \quad \text{και} \quad \omega = \beta x + \alpha y$$

να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma = 1.$$

6. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} (\lambda+1)x + y = \lambda+1 \\ x + (\lambda+1)y = 1 \\ x + y = 2\lambda+1 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{ii) } \begin{cases} 2x - y + \lambda = 0 \\ \lambda x + y + 5 = 0 \\ x - y - \lambda = 0 \end{cases}$$

7 Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ .

- i) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες υπάρχει μη μηδενικός πίνακας

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ τέτοιος, ώστε } AX = \lambda X \quad (1).$$

- ii) Για τις τιμές του  $\lambda$  που θα βρείτε να λύσετε την εξίσωση (1).

## ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Γ' ΟΜΑΔΑΣ

- 1 Δίνεται ο πίνακας

$$A(x) = \begin{bmatrix} \sigma\eta\chi & -\eta\mu\chi \\ \eta\mu\chi & \sigma\eta\chi \end{bmatrix}.$$

Να αποδείξετε ότι

- i)  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$
- ii)  $[A(x)]^{-1} = A(-x)$
- iii)  $[A(x)]^v = A(vx)$  για κάθε  $v \in \mathbb{N}^*$ .

2. Δίνεται ο πίνακας  $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

i) Να αποδείξετε ότι  $M^3 = \mathbf{O}$  και γενικά  $M^v = \mathbf{O}$  για κάθε  $v \geq 3$ .

ii) Αν  $A = \alpha M^2 + \alpha M + I$  και  $B = \alpha(\alpha - 1)M^2 - \alpha M + I$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , τότε να βρείτε το γινόμενο  $AB$  και να αποδείξετε ότι  $B^{-1} = A$ .

3. Αν  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  και  $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  τότε να αποδείξετε ότι:

i)  $J^2 = -I$

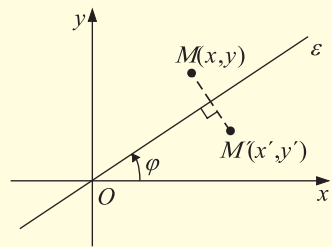
ii) Το άθροισμα και το γινόμενο πινάκων της μορφής  $\alpha I + \beta J$ , όπου  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί είναι επίσης πίνακες της ίδιας μορφής.

iii) Ο πίνακας  $\alpha I + \beta J$  έχει αντίστροφο, αν και μόνο αν  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ .

4. Να αποδείξετε ότι η συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία  $\varepsilon$  του διπλανού σχήματος είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu 2\varphi & \eta\mu 2\varphi \\ \eta\mu 2\varphi & -\sigma\upsilon\nu 2\varphi \end{bmatrix}$$

Μπορείτε από τον πίνακα  $A$  να βρείτε τους πίνακες των συμμετριών ως προς τον άξονα  $x'x$ , τον άξονα  $y'y$ , την ευθεία  $y = x$  και την ευθεία  $y = -x$ ;



5. Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ με } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι ο  $T$  είναι συνάρτηση "1-1".
- ii) Να βρείτε τον αντίστροφο του μετασχηματισμού  $T$ .



iii) Να βρείτε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς των συμμετριών της στροφής και της ομοιοθεσίας.

6. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \alpha x + \beta y = 0, \\ \alpha^2 x + \beta^2 y = 0 \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*.$$

7. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in [0, \pi)$  το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y + \omega = 0 \\ (\eta\mu\alpha)x + (\sigma\upsilon\nu\alpha)y + \omega = 0. \\ (\eta\mu^2\alpha)x + (\sigma\upsilon\nu^2\alpha)y + \omega = 0 \end{cases}$$

8. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$  τις σχετικές θέσεις των ευθειών

$$\varepsilon_1: x + y = 1, \quad \varepsilon_2: x + y = \kappa \quad \varepsilon_3: \kappa x + y = 1.$$

9. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + y + \omega = 0 \\ \lambda y - \omega = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ y + \lambda\omega = 0 \end{cases}$$

10. Έστω ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 3 & -\alpha \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}$ . Αν υπάρχουν μη μηδενικός πίνακας  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

και πραγματικός αριθμός  $\lambda$  τέτοιοι, ώστε να ισχύει  $AX = \lambda X$ , να αποδείξετε ότι  $-2 \leq \alpha \leq 2$ .

11. i) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5\lambda + 4 \\ x + 2y = 3\lambda + 2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ii) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες οι εξισώσεις:

$$2t^2 + 3t - (5\lambda + 4) = 0$$

$$t^2 + 2t - (3\lambda + 2) = 0$$

έχουν κοινή ρίζα. Ποια είναι η κοινή ρίζα σε κάθε μια περίπτωση;

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

**I.**

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν  $(\lambda^2 + 1)A = \mathcal{O}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε  $A = \mathcal{O}$ . Α Ψ
2. Αν  $(\lambda^2 - 4)A = \mathcal{O}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε κατ' ανάγκη είναι  $A = \mathcal{O}$ . Α Ψ
3. Αν  $(\lambda^2 + \lambda + 1)(A - B) = \mathcal{O}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε  $A = B$ . Α Ψ
4. Αν  $AB = 2I$ , όπου  $A, B$  τετραγωνικοί πίνακες, τότε οι  $A, B$  είναι αντιστρέψιμοι πίνακες. Α Ψ
5. Αν  $AB = 2I$ , όπου  $A, B$  τετραγωνικοί πίνακες, τότε  $BA = 2I$ . Α Ψ
6. Αν  $(A - I)^2 = \mathcal{O}$  τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $A = I$ . Α Ψ
7. Αν  $A^2 = I$  τότε κατ' ανάγκη θα είναι  

$$A = I \quad \text{ή} \quad A = -I.$$
Α Ψ
8. Αν  $A^2 = \mathcal{O}$  τότε ο  $A$  δεν είναι αντιστρέψιμος. Α Ψ
9. Ισχύει πάντοτε  $(AB)^2 = A^2B^2$ . Α Ψ
10. Αν  $AX = BX$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $A = B$ . Α Ψ
11. Ο αντίστροφος του πίνακα  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  είναι ο πίνακας  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ . Α Ψ
12. Τα συστήματα  

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 5z = -1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + 2z = -1 \end{cases}$$
είναι ισοδύναμα. Α Ψ
13. Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δυο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρες λύσεις. Α Ψ

14. Ένα ομογενές σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο. A Ψ
15. Το σύστημα 
$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda - 1)y = 0 \\ x + \lambda y = 0 \end{cases}$$
 έχει και μη μηδενικές λύσεις. A Ψ
16. Αν η εξίσωση  $at^2 + \beta t + \gamma = 0$ , με  $a \neq 0$ , είναι αδύνατη στο  $\mathbf{R}$ , τότε το σύστημα 
$$\begin{cases} \beta x + 2\gamma y = \alpha \\ 2\alpha x + \beta y = \beta \end{cases}$$
 έχει μοναδική λύση. A Ψ
17. Το σύστημα 
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + \kappa y = 2, \kappa \neq -2, \text{ είναι αδύνατο.} \\ \kappa x + y = \kappa \end{cases}$$
 A Ψ
18. Έστω ( $\Sigma$ ) ένα  $3 \times 3$  γραμμικό σύστημα.
- i) Αν  $|D_x| + |D_y| + |D_z| > 0$ , τότε το σύστημα είναι ομογενές. A Ψ
- ii) Αν  $D_x^2 + (D_y - 1)^2 + D_z^2 = 0$ , τότε το σύστημα είναι ομογενές. A Ψ

## II.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Ο πίνακας 
$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - 4\lambda + 4 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 3 \end{bmatrix}$$
 είναι ο μοναδιαίος, αν  
 A)  $\lambda = 2$ , B)  $\lambda = 0$ , Γ)  $\lambda = 1$ , Δ)  $\lambda = 3$ .
2. Έστω  $A$  ένας  $2 \times n$  πίνακας. Αν υπάρχει πίνακας  $X$  τέτοιος, ώστε  $AX = XA$ , τότε ο  $X$  είναι τύπου  
 A)  $2 \times 2$ , B)  $2 \times 3$ , Γ)  $3 \times 2$ , Δ)  $3 \times 3$ .
3. Έστω  $A$  ένας αντιστρέψιμος πίνακας και  $\kappa \neq 0$ . Ο αντίστροφος του πίνακα  $\kappa A$  είναι ο πίνακας  
 A)  $\frac{1}{\kappa} A$ , B)  $\kappa A^{-1}$ , Γ)  $\frac{1}{\kappa} A^{-1}$ , Δ)  $-\kappa A^{-1}$ .

4. Το σύστημα  $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$  είναι αδύνατο, αν  
 Α)  $\lambda = 0$ ,                      Β)  $\lambda = 1$ ,                      Γ)  $\lambda = -1$ ,                      Δ)  $\lambda \neq 0, -1, 1$ .

5. Οι ευθείες

$$\sqrt{2}x + y = 1, \quad 2x + \sqrt{2}y = 2, \quad x + \sqrt{2}y = \sqrt{2}.$$

- Α) Περνούν από το ίδιο σημείο.  
 Β) Σχηματίζουν τρίγωνο.  
 Γ) Είναι παράλληλες ανά δύο.  
 Δ) Οι δύο είναι παράλληλες και η τρίτη τις τέμνει.  
 Ε) Οι δύο συμπίπτουν και η τρίτη τις τέμνει.

### III.

Να αντιστοιχίσετε κάθε μετασχηματισμό της πρώτης στήλης στον πίνακά του της δεύτερης στήλης

#### ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

1. Στροφή κατά γωνία  $90^\circ$  και στη συνέχεια συμμετρία ως προς την ευθεία  $y = x$ .
2. Συμμετρία ως προς τον άξονα  $x'x$  και στη συνέχεια συμμετρία ως προς την ευθεία  $y = x$ .
3. Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια συμμετρία ως προς την ευθεία  $y = x$ .

#### ΠΙΝΑΚΑΣ

- α.  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$   
 β.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$   
 γ.  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$   
 δ.  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$   
 ε.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

## ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

**Οι “γραμμοπράξεις” σ’ ένα κινέζικο πρόβλημα του 3ου αιώνα π.Χ.**

Το επόμενο πρόβλημα προέρχεται από μια αρχαία κινεζική συλλογή προβλημάτων με τίτλο “Εννέα κεφάλαια στη μαθηματική τέχνη”. Η λύση που δίνεται εκεί συμπίπτει ουσιαστικά με τη σύγχρονη μέθοδο του “επαυξημένου πίνακα” και των “γραμμοπράξεων”.

*3 δεμάτια μιας καλής συγκομιδής, 2 δεμάτια μιας μέτριας συγκομιδής και 1 δεμάτι μιας κακής συγκομιδής δίνουν 39 δου σιτάρι.*

*2 δεμάτια της καλής, 3 δεμάτια της μέτριας και 1 δεμάτι της κακής συγκομιδής δίνουν 34 δου σιτάρι.*

*1 δεμάτι της καλής, 2 δεμάτια της μέτριας και 3 δεμάτια της κακής συγκομιδής δίνουν 26 δου σιτάρι.*

*Να βρεθεί πόσο σιτάρι δίνει ένα δεμάτι από κάθε είδος συγκομιδής.*

Το πρόβλημα αυτό ανάγεται σήμερα στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

Στο αρχαίο κείμενο, στο οποίο δεν υπάρχουν καθόλου σύμβολα, δίνονται οδηγίες για την τοποθέτηση των αριθμών στις κατακόρυφες στήλες ενός άβακα σύμφωνα με τον εξής τρόπο:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Η παραπάνω διάταξη μετασχηματίζεται στη συνέχεια ως εξής:

Η 2η στήλη πολλαπλασιάζεται επί 3 και κατόπιν αφαιρείται απ’ αυτήν 2 φορές η 3η στήλη, με αποτέλεσμα:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array}$$

Κατόπιν η 1η στήλη πολλαπλασιάζεται επί 3 και απ' αυτήν αφαιρείται η 3η στήλη, με αποτέλεσμα:

$$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ & 4 & 5 & 2 \\ & 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 & \end{array}$$

Τέλος, η 1η στήλη πολλαπλασιάζεται επί 5 και απ' αυτήν αφαιρείται 4 φορές η 2η στήλη, με αποτέλεσμα

$$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ & & 5 & 2 \\ 36 & & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 & \end{array}$$

Το αρχικό σύστημα έχει λοιπόν μετασχηματιστεί στο

$$\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 36z = 99 \end{array}$$

από το οποίο υπολογίζεται αμέσως ο  $z$  και με διαδοχικές αντικαταστάσεις, οι  $x, y$ . Στο αρχαίο κείμενο, με μια ανάλογη διαδικασία που εκτελείται πάνω στον άβακα, προσδιορίζεται η λύση του προβλήματος:

1 δεμάτι της κακής συγκομιδής δίνει  $2\frac{3}{4}$  δου σιτάρι

1 δεμάτι της μέτριας συγκομιδής δίνει  $4\frac{1}{4}$  δου σιτάρι

1 δεμάτι της καλής συγκομιδής δίνει  $9\frac{1}{4}$  δου σιτάρι.

Στο έργο “Αριθμητικά”, του Έλληνα μαθηματικού της Αλεξανδρινής περιόδου Διόφαντου, υπάρχουν πολλά προβλήματα που ανάγονται στην επίλυση γραμμικών συστημάτων. Στο επόμενο, που είναι το πρόβλημα 19 του πρώτου βιβλίου, ο τρόπος επίλυσης βρίσκεται πολύ κοντά προς το σύγχρονο αλγεβρικό τρόπο σκέψης:

*Ευρείν τέσσαρας αριθμούς όπως οι τρεις λαμβανόμενοι του λοιπού υπερέχουσιν επιταχθέντι αριθμῷ. (Να βρεθούν 4 αριθμοί έτσι ώστε λαμβανόμενοι ανά τρεις να ξεπερνούν τον άλλο κατά δοθέντα αριθμῷ).*

Ο Διόφαντος παρουσιάζει τη λύση του προβλήματος μέσα από μια ειδική περίπτωση (που γενικεύεται άμεσα). Έστω, γράφει, ότι οι  $\alpha, \beta, \gamma$  ξεπερνούν τον  $\delta$  κατά 20, οι  $\beta, \gamma, \delta$  ξεπερνούν τον  $\alpha$  κατά 30, οι  $\gamma, \delta, \alpha$  ξεπερνούν τον  $\beta$  κατά 40 και οι  $\delta, \alpha, \beta$  ξεπερνούν τον  $\gamma$  κατά 50. Το πρόβλημα, όπως είναι φανερό, ανάγεται στην επίλυση του γραμμικού συστήματος:

$$\alpha + \beta + \gamma = \delta + 20$$

$$\beta + \gamma + \delta = \alpha + 30$$

$$\gamma + \delta + \alpha = \beta + 40$$

$$\delta + \alpha + \beta = \gamma + 50$$

Ο Διόφαντος, ο οποίος δε χρησιμοποιεί ειδικά σύμβολα για την πρόσθεση και την ισότητα, λύνει το πρόβλημα με την εισαγωγή ενός βοηθητικού αγνώστου, που εκφράζει το άθροισμα των 4 ζητούμενων αριθμών. Η μέθοδός του, με σύγχρονο συμβολισμό, συνοψίζεται ως εξής:

Αν  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2x$ , τότε από την  $\alpha + \beta + \gamma = \delta + 20$  έχουμε  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\delta + 20$  ή  $2x = 2\delta + 20$  ή  $\delta = x - 10$ . Όμοια, από τις άλλες εξισώσεις παίρνουμε  $\alpha = x - 15$ ,  $\beta = x - 20$  και  $\gamma = x - 25$ . Από τις 4 τελευταίες ισότητες, με πρόσθεση παίρνουμε  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4x - 70$  ή  $2x = 4x - 70$  ή  $x = 35$  και άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$\alpha = 35 - 15 = 20, \quad \beta = 35 - 20 = 15, \quad \gamma = 35 - 25 = 10, \quad \delta = 35 - 10 = 25$$

### **Η πρώτη εμφάνιση μιας “οριζουσας” σε πρόβλημα απαλοιφής**

Ο G.W. Leibniz, σε μια επιστολή του προς τον l' Hospital στις 28-4-1693, πρότεινε μια μέθοδο χρησιμοποίησης των αριθμών για την έκφραση γενικών σχέσεων, όπως ακριβώς γίνεται με τη χρήση των γραμμμάτων. Ως παράδειγμα έδωσε ένα γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 2 αγνώστους, γραμμένο στη μορφή:

$$10 + 11x + 12y = 0$$

$$20 + 21x + 22y = 0 \quad (1)$$

$$30 + 31x + 32y = 0$$

Οι συντελεστές του συστήματος δεν εκφράζουν εδώ αριθμούς αλλά λειτουργούν όπως και οι διπλοί δείκτες που χρησιμοποιούνται σήμερα για την παράσταση των στοιχείων ενός πίνακα. Αυτοί οι “ψευδοαριθμοί” (όπως τους αποκαλεί ο Leibniz) δείχνουν με το πρώτο ψηφίο τους την εξίσωση στην οποία βρίσκονται και με το δεύτερο, το γράμμα στο οποίο ανήκουν. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, ο Leibniz απαλείφει τον άγνωστο  $y$ , αρχικά από την 1η και 2η εξίσωση και κατόπιν από την 1η και 3η. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$10.22 + 11.22x - 12.20 - 12.21x = 0$$

$$10.32 + 11.32x - 12.30 - 12.31x = 0$$

Στη συνέχεια απαλείφει το  $x$  από τις δυο τελευταίες εξισώσεις (λύνοντας καθεμιά ως προς  $x$  και εξισώνοντας τα αποτελέσματα) και φτάνει στην ισότητα:

$$10.21.32 + 11.22.30 + 12.20.31 = 10.22.31 + 11.20.32 + 12.21.30$$

ή

$$10.21.32 + 11.22.30 + 12.20.31 - 10.22.31 - 11.20.32 - 12.21.30 = 0.$$

Δηλαδή σ' αυτό που σήμερα αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση το σύστημα (1) (ο μηδενισμός της ορίζουσας του επαυξημένου πίνακα του συστήματος).

Το προηγούμενο αποτέλεσμα του Leibniz έχει κυρίως τη σημασία της **απαλείφουσας** ενός γραμμικού συστήματος, δηλαδή της σχέσης μεταξύ των συντελεστών η οποία προκύπτει όταν γίνεται απαλοιφή όλων των αγνώστων. Στην ίδια επιστολή ο Leibniz δίνει και ένα γενικό κανόνα για τον υπολογισμό της απαλείφουσας ενός οποιουδήποτε γραμμικού συστήματος, που έχει επαρκή αριθμό εξισώσεων για την απαλοιφή όλων των αγνώστων.

### Οι ορίζουσες και οι πίνακες ως ανεξάρτητες έννοιες

Η χρησιμοποίηση των οριζουσών για την επίλυση γραμμικών συστημάτων έγινε πρώτη φορά από τον C. MacLaurin το 1729, αλλά η μέθοδος αυτή έμεινε γνωστή με το όνομα του G. Cramer, ο οποίος την παρουσίασε στο βιβλίο του “Εισαγωγή στην ανάλυση των αλγεβρικών καμπύλων γραμμών” (1750). Θέλοντας να προσδιορίσει μια καμπύλη που διέρχεται από 5 γνωστά σημεία και έχει εξίσωση της μορφής

$$A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$$

ο Cramer καταλήγει σ' ένα γραμμικό σύστημα 5 εξισώσεων με αγνώστους τα  $A, B, C, D, E$ . Για να λύσει αυτό το σύστημα, περιγράφει μια μέθοδο υπολογισμού των αγνώστων με κατασκευή κλασμάτων, των οποίων ο κοινός παρονομαστής και οι αριθμητές προσδιορίζονται από τους συντελεστές του συστήματος σύμφωνα με γενικούς κανόνες. Αυτή είναι ουσιαστικά η σημερινή μέθοδος των οριζουσών αλλά ο Cramer δε χρησιμοποιεί κάποιο ειδικό όνομα ή σύμβολο για την έννοια της ορίζουσας.

Ο λατινικός όρος **determinantem** (ορίζουσα) χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον C.F. Gauss το 1801 αλλά όχι με τη σημερινή σημασία.

Η πρώτη συστηματική διαπραγμάτευση της θεωρίας των οριζουσών έγινε από τον A.L. Cauchy σε μια εργασία του που δημοσιεύτηκε το 1815. Η λέξη “ορίζουσα” χρησιμοποιείται εκεί με τη σημερινή σημασία ενώ εισάγεται και η τετραγωνική διάταξη των στοιχείων της με τη βοήθεια των διπλών δεικτών:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{matrix}$$

(οι 2 κάθετες γραμμές για το συμβολισμό μιας ορίζουσας, χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά από τον A. Cayley το 1841).

Σε αντίθεση από τη σημερινή λογική σειρά παρουσίασης, η έννοια του πίνακα υπήρξε, ιστορικά, μεταγενέστερη από την έννοια της ορίζουσας.



Το γεγονός ότι η ορίζουσα δεν είναι μόνο ένας αριθμός αλλά συσχετίζει αυτόν τον αριθμό με μια τετραγωνική διάταξη στοιχείων, οδήγησε βαθμιαία στη μελέτη αυτής της ίδιας της διάταξης, ανεξάρτητα από την τιμή της ορίζουσας. Ο όρος **matrix** (μήτρα, καλούπι), που σήμερα χρησιμοποιείται διεθνώς για την έννοια του πίνακα, πρωτοεμφανίστηκε σε μια εργασία του J.J. Sylvester το 1850, για να διαχωριστεί η έννοια της ορίζουσας από την τετραγωνική διάταξη των στοιχείων που την παράγει. Το 1855 ο A. Cayley εισήγαγε για πρώτη φορά τους πίνακες στη μελέτη των γραμμικών μετασχηματισμών, ενώ το 1858 στην εργασία του “Μια πραγματεία στη θεωρία των μητρών”, ανέπτυξε συστηματικά όλη τη βασική θεωρία. Όπως γράφει ο Cayley, στην ιδέα του πίνακα έφτασε τόσο από την έννοια της ορίζουσας όσο και από την ανάγκη ενός βολικού τρόπου έκφρασης των εξισώσεων  $x' = ax + by$ ,  $y' = cx + dy$  ενός μετασχηματισμού, ο οποίος απεικονίζει το σημείο  $(x, y)$  στο σημείο  $(x', y')$ . Ως ένα τέτοιο τρόπο έκφρασης, ο Cayley εισάγει τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

και με βάση τις ιδιότητες των μετασχηματισμών ορίζει τις πράξεις των πινάκων και προσδιορίζει τις ιδιότητές τους. Π.χ., αν τον προηγούμενο μετασχηματισμό από το  $(x, y)$  στο  $(x', y')$  ακολουθήσει ένας νέος μετασχηματισμός από το  $(x', y')$  στο  $(x'', y'')$  και με εξισώσεις  $x'' = ex' + fy'$ ,  $y'' = gx' + hy'$  τότε, όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί, ισχύει:

$$x'' = (ea + fc)x + (eb + fd)y$$

$$y'' = (ga + hc)x + (gb + hd)y.$$

Έτσι ο Cayley ορίζει τον πολλαπλασιασμό πινάκων, με βάση το πρότυπο της διαδοχικής εκτέλεσης των δυο μετασχηματισμών, ως εξής:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}.$$

Στην ίδια εργασία επισημαίνει επίσης ότι αυτός ο πολλαπλασιασμός είναι μια πράξη **μη αντιμεταθετική** καθώς και το γεγονός ότι υπάρχουν μη μηδενικοί πίνακες που έχουν ως γινόμενο το μηδενικό πίνακα.

Ο λογισμός των πινάκων αναπτύχθηκε τα επόμενα χρόνια σε μια αυτοτελή μαθηματική θεωρία, που αποτελεί μέρος ενός ευρύτερου κλάδου των Μαθηματικών, της Γραμμικής Άλγεβρας. Το 1925, ο W. Heisenberg (βραβείο Νόμπελ Φυσικής 1932) χρησιμοποίησε τη θεωρία των πινάκων για να εκφράσει τα μη αντιμεταθετικά Μαθηματικά που περιγράφουν τα φαινόμενα της κβαντικής μηχανικής, ενώ αργότερα η χρήση των πινάκων επεκτάθηκε και σε άλλες επιστήμες.

# 2 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ<sup>(1)</sup>

## 2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

### Εισαγωγή

Η δημιουργία των μιγαδικών αριθμών οφείλεται στην προσπάθεια επίλυσης των εξισώσεων 3ου βαθμού. Αν στην  $ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta = 0$  θέσουμε  $x = y - \frac{\beta}{3a}$  και εκτελέσουμε τις πράξεις, τότε προκύπτει μια εξίσωση της μορφής  $x^3 = px + q$ . Στις αρχές του 16ου αιώνα οι Ιταλοί αλγεβριστές S. del Ferro και N. Tartaglia ανακάλυψαν μια μέθοδο επίλυσης τέτοιων εξισώσεων, που με σημερινό συμβολισμό ισοδυναμεί με τον τύπο

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \text{ όπου } D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Στην περίπτωση που η “διακρίνουσα”  $D$  είναι θετική, ο τύπος αυτός δίνει αμέσως μια ρίζα της εξίσωσης. Για παράδειγμα, στην  $x^3 = 9x + 28$  είναι  $D = 169$  και ο τύπος δίνει  $x = 4$ , που είναι η μοναδική πραγματική ρίζα. Διαπιστώθηκε, όμως, τότε ένα φαινόμενο τελείως διαφορετικό από την περίπτωση των εξισώσεων 2ου βαθμού: Υπάρχουν εξισώσεις με πραγματικές ρίζες, όπως, για παράδειγμα, η  $x^3 = 15x + 4$ , που έχει μια προφανή ρίζα το 4 (οι άλλες δύο είναι οι  $-2 + \sqrt{3}$ ,  $-2 - \sqrt{3}$ ), αλλά η διακρίνουσα  $D$  είναι αρνητική! Ο τύπος στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνει

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \quad (1)$$

Όπως είναι φανερό, οι μαθηματικοί βρέθηκαν, εδώ, μπροστά σε ένα δίλημμα: ή θα έπρεπε να εγκαταλείψουν τη μέθοδο των Ferro-Tartaglia ως γενική μέθοδο επίλυσης εξισώσεων 3ου βαθμού ή να δεχτούν ότι ένας συγκεκριμένος αριθμός, όπως το 4, μπορεί να εκφραστεί με παραστάσεις που περιέχουν τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών. Η δεύτερη άποψη φαινόταν αδιανόητη αλλά αυτό δεν εμπόδισε την εφαρμογή των αλγεβρικών πράξεων σε τέτοιες παραστάσεις. Στα μέσα του 16ου αιώνα ο R. Bombelli, κάνοντας τολ-

<sup>(1)</sup> Το κεφάλαιο αυτό έχει ληφθεί από το βιβλίο: «Μαθηματικά Β΄ Τάξης Ενιαίου Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης» των: Αδαμόπουλου Α., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α.

μηρές υποθέσεις, βρήκε ότι ισχύει  $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$  και  $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$ . Αντικαθιστώντας αυτές τις ισότητες στην (1) προκύπτει αμέσως ότι  $x = 4$ , δηλαδή το αδιανόητο γίνεται πραγματικότητα! Οι αριθμοί της μορφής  $a + \beta i$  με  $i = \sqrt{-1}$ , που ονομάστηκαν αρχικά φανταστικοί και αργότερα μιγαδικοί, έγιναν από τότε αναπόσπαστο εργαλείο των Μαθηματικών και των εφαρμογών τους στις άλλες επιστήμες. Ο J. Hadamard, ο οποίος το 1896 απέδειξε με χρήση της μιγαδικής ανάλυσης το “θεώρημα των πρώτων αριθμών”, έγραψε ότι:

*“Ο συντομότερος δρόμος ανάμεσα σε δύο αλήθειες στο πεδίο των πραγματικών περνά μέσα από το πεδίο των μιγαδικών”.*

### Το Σύνολο $\mathbb{C}$ των Μιγαδικών Αριθμών

Γνωρίζουμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση με αρνητική διακρίνουσα δεν έχει λύση στο σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών. Ειδικότερα η εξίσωση  $x^2 = -1$  δεν έχει λύση στο σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών, αφού το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός. Για να ξεπεράσουμε την “αδυναμία” αυτή, διευρύνουμε το σύνολο  $\mathbb{R}$  σε ένα σύνολο  $\mathbb{C}$ , το οποίο να έχει τις ίδιες πράξεις με το  $\mathbb{R}$ , τις ίδιες ιδιότητες των πράξεων αυτών και στο οποίο να υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $x^2 = -1$ , δηλαδή ένα στοιχείο  $i$ , τέτοιο, ώστε  $i^2 = -1$ . Σύμφωνα με τις παραδοχές αυτές το διευρυμένο σύνολο  $\mathbb{C}$  θα έχει ως στοιχεία:

- Όλους τους πραγματικούς αριθμούς
- Όλα τα στοιχεία της μορφής  $\beta i$ , που είναι γινόμενα των στοιχείων του  $\mathbb{R}$  με το  $i$  και
- Όλα τα αθροίσματα της μορφής  $a + \beta i$ , με  $a$  και  $\beta$  πραγματικούς αριθμούς.

Τα στοιχεία του  $\mathbb{C}$  λέγονται **μιγαδικοί αριθμοί** και το  $\mathbb{C}$  **σύνολο των μιγαδικών αριθμών**. Επομένως:

Το σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

- Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο  $\mathbb{R}$ , με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού,
- Υπάρχει ένα στοιχείο  $i$  τέτοιο, ώστε  $i^2 = -1$ ,
- Κάθε στοιχείο  $z$  του  $\mathbb{C}$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή  $z = a + \beta i$ , όπου  $a, \beta \in \mathbb{R}$ .

Η έκφραση  $a + \beta i$ ,  $a, \beta \in \mathbb{R}$  είναι ακριβώς ό,τι λέμε **μιγαδικό αριθμό**. Είναι η σύνθεση δύο αριθμών, του πραγματικού  $a$  και του  $\beta i$ , τον οποίο ονομάζουμε **φανταστικό αριθμό**. Ο  $a$  λέγεται **πραγματικό μέρος** του  $z$  και σημειώνεται  $\text{Re}(z)$ , ενώ ο  $\beta$  λέγεται **φανταστικό μέρος** του  $z$  και σημειώνεται  $\text{Im}(z)$ . Επιπλέον, στο  $\mathbb{C}$  κάθε πραγματικός αριθμός  $a$  εκφράζεται ως  $a + 0i$ , ενώ κάθε φανταστικός αριθμός  $\beta i$ , εκφράζεται ως  $0 + \beta i$ . Στη συνέχεια, όταν λέμε ο μιγαδικός  $z = a + \beta i$ , εννοούμε ότι οι  $a$  και  $\beta$  είναι πραγματικοί αριθμοί και το γεγονός αυτό δε θα τονίζεται ιδιαίτερα.

### Ισότητα Μιγαδικών Αριθμών

Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός  $z$  γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή  $a + \beta i$ , δύο μιγαδικοί αριθμοί  $a + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι ίσοι, αν και μόνο αν  $a = \gamma$  και  $\beta = \delta$ .

Δηλαδή ισχύει:

$$a + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow a = \gamma \text{ και } \beta = \delta.$$

Επομένως, επειδή  $0 = 0 + 0i$ , έχουμε

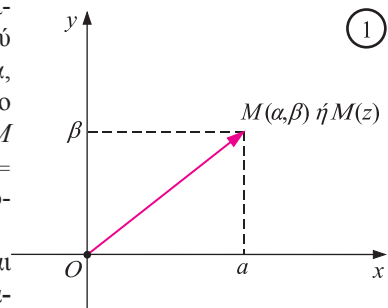
$$a + \beta i = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } \beta = 0.$$

Μετά τον ορισμό της ισότητας μιγαδικών αριθμών δημιουργείται το ερώτημα αν διατάσσονται οι μιγαδικοί αριθμοί. Γνωρίζουμε ότι, κατά την επέκταση από το  $\mathbb{N}$  στο  $\mathbb{Z}$ , οι πράξεις, η διάταξη και οι ιδιότητες αυτών οι οποίες ισχύουν στο  $\mathbb{N}$ , μεταφέρονται και στο  $\mathbb{Z}$ . Τα ίδια συμβαίνουν και για τις επεκτάσεις από το  $\mathbb{Z}$  στο  $\mathbb{Q}$  και από το  $\mathbb{Q}$  στο  $\mathbb{R}$ . Στην επέκταση, όμως, από το  $\mathbb{R}$  στο  $\mathbb{C}$ , ενώ οι πράξεις και οι ιδιότητες αυτών που ισχύουν στο  $\mathbb{R}$  εξακολουθούν να ισχύουν και στο  $\mathbb{C}$ , εν τούτοις η διάταξη και οι ιδιότητές της δε μεταφέρονται.

### Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών

Κάθε μιγαδικό αριθμό  $a + \beta i$  μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο  $M(a, \beta)$  ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και αντιστρόφως, κάθε σημείο  $M(a, \beta)$  του καρτεσιανού αυτού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο μιγαδικό  $a + \beta i$ . Το σημείο  $M$  λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού  $a + \beta i$ . Αν θέσουμε  $z = a + \beta i$ , τότε το σημείο  $M(a, \beta)$  μπορούμε να το συμβολίζουμε και με  $M(z)$ .

Ένα καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα αναφέρεται ως **μιγαδικό επίπεδο**. Ο άξονας  $x'x$  λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία  $M(a, 0)$  που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών  $a = a + 0i$ , ενώ ο άξονας  $y'y$  λέγεται **φανταστικός άξονας**, αφού ανήκουν σε



αυτόν τα σημεία  $M(0, \beta)$  που είναι εικόνες των φανταστικών  $\beta i = 0 + \beta i$ .

Ένας μιγαδικός  $z = a + \beta i$  παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα,  $\overrightarrow{OM}$ , του σημείου  $M(\alpha, \beta)$ .

## 2.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{C}$ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τον ορισμό του  $\mathbb{C}$ , η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι αντίστοιχες πράξεις με διώνυμα  $a + \beta x$  στο  $\mathbb{R}$ , όπου βέβαια αντί για  $x$  έχουμε το  $i$ . Έτσι:

- Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών  $a + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  έχουμε:

$$(a + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (a + \gamma) + (\beta + \delta)i.$$

Για παράδειγμα,  $(3 + 4i) + (5 - 6i) = (3 + 5) + (4 - 6)i = 8 - 2i$ .

- Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού  $\gamma + \delta i$  από τον  $a + \beta i$ , επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού  $\gamma + \delta i$  είναι ο μιγαδικός  $-\gamma - \delta i$ , έχουμε:

$$(a + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (a + \beta i) + (-\gamma - \delta i) = (a - \gamma) + (\beta - \delta)i.$$

Δηλαδή

$$(a + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (a - \gamma) + (\beta - \delta)i.$$

Για παράδειγμα

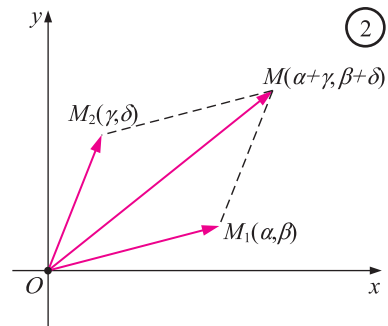
$$(3 + 4i) - (5 - 6i) = (3 - 5) + (4 + 6)i = -2 + 10i.$$

Αν  $M_1(\alpha, \beta)$  και  $M_2(\gamma, \delta)$  είναι οι εικόνες των  $a + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$$(a + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (a + \gamma) + (\beta + \delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο  $M(a + \gamma, \beta + \delta)$ .

Επομένως,  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ , δηλαδή:



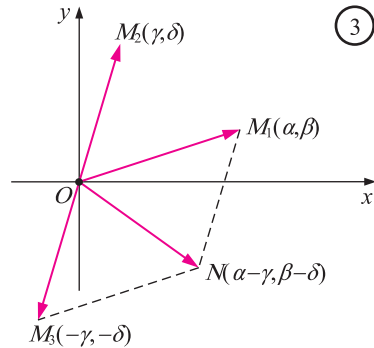
“Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών  $a + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους”.

Επίσης, η διαφορά

$$(a + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (a - \gamma) + (\beta - \delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο  $N(a - \gamma, \beta - \delta)$ .

Επομένως,  $\vec{ON} = \vec{OM}_1 - \vec{OM}_2$ , δηλαδή:



“Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών  $a + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους”.

- Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών  $a + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  έχουμε:

$$\begin{aligned} (a + \beta i)(\gamma + \delta i) &= a(\gamma + \delta i) + \beta i(\gamma + \delta i) = a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i + (\beta i)(\delta i) = \\ &= a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i + \beta\delta i^2 = a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i - \beta\delta = (a\gamma - \beta\delta) + (a\delta + \beta\gamma)i. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$(a + \beta i)(\gamma + \delta i) = (a\gamma - \beta\delta) + (a\delta + \beta\gamma)i.$$

Για παράδειγμα,

$$(3 + 4i) \cdot (5 - 6i) = 15 - 18i + 20i - 24i^2 = (15 + 24) + (20 - 18)i = 39 + 2i.$$

Ειδικότερα, έχουμε:  $(a + \beta i)(a - \beta i) = a^2 + \beta^2$ . Ο αριθμός  $a - \beta i$  λέγεται **συζυγής** του  $a + \beta i$  και συμβολίζεται με  $\overline{a + \beta i}$ . Δηλαδή,

$$\overline{a + \beta i} = a - \beta i.$$

Επειδή είναι και  $\overline{a - \beta i} = a + \beta i$ , οι  $a + \beta i$ ,  $a - \beta i$  λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

- Τέλος, για να εκφράσουμε το **πηλίκο**  $\frac{a + \beta i}{\gamma + \delta i}$ , όπου  $\gamma + \delta i \neq 0$ , στη μορφή  $\kappa + \lambda i$ , **πολλαπλασιάζουμε** τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{a + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{(a + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{(a\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - a\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{a\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - a\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i.$$

Για παράδειγμα:  $\frac{2+i}{1-3i} = \frac{(2+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{2+6i+i+3i^2}{1+9} = \frac{-1+7i}{10} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$

### Δύναμη Μιγαδικού

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού αριθμού  $z$  με εκθέτη ακέραιο ορίζονται ακριβώς όπως και στους πραγματικούς, δηλαδή ορίζουμε:

$$z^1 = z, z^2 = z \cdot z, \dots, \text{και γενικά } z^v = z^{v-1} \cdot z,$$

για κάθε θετικό ακέραιο  $v$ , με  $v > 1$ . Επίσης, αν  $z \neq 0$ , ορίζουμε

$$z^0 = 1, \quad z^{-v} = \frac{1}{z^v} \text{ για κάθε θετικό ακέραιο } v.$$

Για τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν και για τις δυνάμεις των πραγματικών αριθμών. Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις του  $i$  έχουμε:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι είναι:

$$i^4 = i^2 i^2 = 1, \quad i^5 = i^4 i = 1 \cdot i = i, \quad i^6 = i^4 i^2 = 1 \cdot i^2 = -1, \quad i^7 = i^4 i^3 = 1 \cdot i^3 = -i,$$

δηλαδή, μετά το  $i^4$  οι τιμές του  $i^v$  επαναλαμβάνονται. Άρα, για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του  $i$ , γράφουμε τον εκθέτη  $v$  στη μορφή  $v = 4\rho + \nu$ , όπου  $\rho$  το πηλίκο και  $\nu$  το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του  $v$  με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^v = i^{4\rho + \nu} = i^{4\rho} i^\nu = (i^4)^\rho i^\nu = 1^\rho i^\nu = i^\nu = \begin{cases} 1, & \text{αν } \nu = 0 \\ i, & \text{αν } \nu = 1 \\ -1, & \text{αν } \nu = 2 \\ -i, & \text{αν } \nu = 3 \end{cases}$$

Για παράδειγμα:

$$i^{14} = i^{3 \cdot 4 + 2} = i^2 = -1$$

$$i^{19} = i^{4 \cdot 4 + 3} = i^3 = -i$$

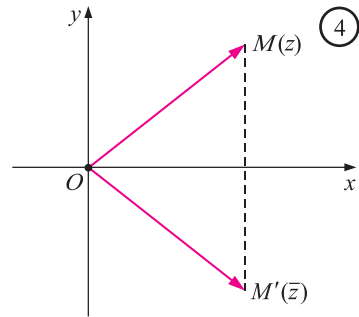
$$i^{16} = i^{4 \cdot 4 + 0} = i^0 = 1$$

$$i^{21} = i^{4 \cdot 5 + 1} = i^1 = i.$$

### Ιδιότητες Συζυγών

Επειδή οι συζυγείς μιγαδικοί, όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, μας διευκολύνουν στη μελέτη των μιγαδικών αριθμών, θα αναφερθούμε ιδιαίτερος σε αυτούς.

• Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες  $M(\alpha, \beta)$  και  $M'(\alpha, -\beta)$  δύο συζυγών μιγαδικών  $z = \alpha + \beta i$  και  $\bar{z} = \alpha - \beta i$  είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.



• Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς  $z = \alpha + \beta i$  και  $\bar{z} = \alpha - \beta i$  μπορούμε εύκολα, με εκτέλεση των πράξεων, να διαπιστώσουμε ότι:

$$z + \bar{z} = 2\alpha$$

$$z - \bar{z} = 2\beta i.$$

• Αν  $z_1 = \alpha + \beta i$  και  $z_2 = \gamma + \delta i$  είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

$$1. \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$2. \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$3. \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$4. \quad \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα έχουμε:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i} \\ &= (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)i = (\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

Οι παραπάνω ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για περισσότερους από δυο μιγαδικούς αριθμούς. Είναι δηλαδή:

$$\overline{\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_v} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_v,$$

$$\overline{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_v} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_v.$$

Ιδιαίτερα, αν είναι  $z_1 = z_2 = \dots = z_v = z$ , τότε η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$\overline{(z^v)} = (\bar{z})^v$$

Για παράδειγμα, 
$$\overline{\left[ \left( \frac{2-3i}{4+5i} \right)^3 \right]} = \left[ \overline{\left( \frac{2-3i}{4+5i} \right)} \right]^3 = \left( \frac{2+3i}{4-5i} \right)^3.$$



### Επίλυση της Εξίσωσης $az^2 + bz + \gamma = 0$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$

Επειδή  $i^2 = -1$  και  $(-i)^2 = i^2 = -1$ , η εξίσωση  $x^2 = -1$  έχει στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις  $x_1 = i$  και  $x_2 = -i$ . Ομοίως, η εξίσωση  $x^2 = -4$  έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις  $x_1 = 2i$  και  $x_2 = -2i$ , αφού

$$z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 = i^2 \cdot 4 \Leftrightarrow z^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ή } z = -2i.$$

Εύκολα, όμως, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο  $\mathbb{C}$ . Πράγματι, έστω η εξίσωση

$$az^2 + bz + \gamma = 0, \text{ με } a, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ και } a \neq 0.$$

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο  $\mathbb{R}$  και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z + \frac{\beta}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2},$$

όπου  $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$  η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$ . Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις:  $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

- $\Delta = 0$ . Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση:  $z = \frac{-\beta}{2a}$

- $\Delta < 0$ . Τότε, επειδή  $\frac{\Delta}{4a^2} = \frac{(-1)(-\Delta)}{4a^2} = \frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2a)^2} = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$ , η εξίσωση γράφεται:

$$\left(z + \frac{\beta}{2a}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2.$$

Άρα οι λύσεις της είναι:

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad (1)$$

οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Για παράδειγμα, η εξίσωση  $z^2 - 5z + 6 = 0$  έχει  $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$  και οι λύσεις της είναι:

$$z_1 = \frac{5+1}{2} = 3, \quad z_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Όμως, η εξίσωση  $z^2 - 2z + 2 = 0$  έχει  $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$  και οι λύσεις της είναι οι συζυγείς

$$\text{μιγαδικοί αριθμοί: } z_1 = \frac{2+i\sqrt{4}}{2} = 1+i, \quad z_2 = \frac{2-i\sqrt{4}}{2} = 1-i.$$

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι και εδώ ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad z_1 z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1** Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου  $n$  να υπολογιστεί το άθροισμα

$$S = i + i^2 + i^3 + \dots + i^n.$$

#### ΛΥΣΗ

Οι προσθετέοι του αθροίσματος έχουν πλήθος  $n$  και είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο  $i$  και λόγο επίσης  $i$ . Επομένως,  $S = i \frac{i^n - 1}{i - 1}$ , οπότε, λόγω της ισότητας  $n = 4\rho + \nu$  της ευκλείδειας διαίρεσης του  $n$  με το 4, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\nu = 0$ . Τότε  $n = 4\rho$ , οπότε  $S = i \frac{1-1}{i-1} = 0$
- $\nu = 1$ . Τότε  $n = 4\rho + 1$ , οπότε  $S = i \frac{i-1}{i-1} = i$
- $\nu = 2$ . Τότε  $n = 4\rho + 2$ , οπότε  $S = i \frac{-1-1}{i-1} = \frac{-2i}{i-1} = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{2} = -1+i$
- $\nu = 3$ . Τότε  $n = 4\rho + 3$ , οπότε  $S = i \frac{-i-1}{i-1} = \frac{1-i}{i-1} = -1$ .

**2.** Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών  $z$  στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός  $\frac{z-1}{z-2i}$  είναι α) φανταστικός β) πραγματικός.

#### ΛΥΣΗ

Αν  $z = x + yi$ , τότε:

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z-2i} &= \frac{(x-1)+yi}{x+(y-2)i} \\ &= \frac{(x^2-x+y^2-2y)+i(2x+y-2)}{x^2+(y-2)^2} \\ &= \frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} + \frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2}i.\end{aligned}$$

Επομένως:

α) Ο αριθμός  $\frac{z-1}{z-2i}$  είναι φανταστικός, αν και μόνο αν  $\frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} = 0$ ,

δηλαδή, αν και μόνο αν  $x^2-x+y^2-2y=0$  και  $x^2+(y-2)^2 \neq 0$  ή, ισοδύναμα,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4} \text{ και } (x, y) \neq (0, 2).$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του  $z$  είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο  $K = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

και ακτίνα  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , με εξαίρεση το σημείο  $A(0, 2)$ .

β) Ο αριθμός  $\frac{z-1}{z-2i}$  είναι πραγματικός, αν και μόνο αν  $\frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2} = 0$ , δηλαδή, αν και μόνο αν

$$2x+y-2=0 \text{ και } x^2+(y-2)^2 \neq 0.$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του  $z$  είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση  $2x+y-2=0$ , με εξαίρεση το σημείο  $A(0, 2)$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε ο  $z = (\lambda + 3i)(2 - i)$  να είναι:
  - α) πραγματικός αριθμός
  - β) φανταστικός αριθμός.
2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  για τους οποίους ισχύει:
  - α)  $(x+y) + (x-y)i = 3 - i$
  - β)  $\sqrt{3x^2+x-6} + (x^2-3)i = 2+i$
  - γ)  $9 - 27i = (3x+2y) - yi$ .



10. Με ποιες συμμετρίες μπορούν να προκύψουν από την εικόνα του μιγαδικού  $z = x + yi$  οι εικόνες των μιγαδικών  $\bar{z}$ ,  $-z$  και  $-\bar{z}$ ;
11. Αν  $z_1 = \frac{5-9i}{7+4i}$  και  $z_2 = \frac{5+9i}{7-4i}$ , να δείξετε ότι ο  $z_1 + z_2$  είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο  $z_1 - z_2$  φανταστικός αριθμός.
12. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:
- α)  $z - \bar{z} = 6i$       β)  $z^2 = \bar{z}^2$       γ)  $\bar{z}^2 = -z^2$       δ)  $\bar{z} = 2 - z$
13. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:
- α)  $x^2 - 3x + 2 = 0$       β)  $x^2 - 2x + 3 = 0$       γ)  $x + \frac{1}{x} = 1$ .
14. Αν μια ρίζα της εξίσωσης  $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , όπου  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , είναι  $3 + 2i$ , να βρείτε τις τιμές των  $\beta$  και  $\gamma$ .

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  και  $\delta$  είναι πραγματικοί αριθμοί, να εξετάσετε τότε το πηλίκο  $\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$  είναι πραγματικός αριθμός.
2. Αν  $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $\frac{1}{z^2 - z}$ .
3. Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $(1 + i)^{20} - (1 - i)^{20}$ .
4. Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση  $i^v + i^{-v}$ ;
5. Να λύσετε τις εξισώσεις  
α)  $\bar{z} = z^2$       β)  $\bar{z} = z^3$ .
6. Έστω ο μιγαδικός  $z$  με  $z \neq 0$ . Να δείξετε ότι ο  $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$  είναι πραγματικός και ότι  
 $-2 \leq \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \leq 2$ .
7. Να αποδείξετε ότι  $(\alpha + \beta i)^{10} + (\beta - \alpha i)^{10} = 0$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
8. α) Για ένα μιγαδικό αριθμό  $z$  να αποδείξετε ότι:
- Ο  $z$  είναι πραγματικός, αν και μόνο αν  $z = \bar{z}$

- Ο  $z$  είναι φανταστικός, αν και μόνο αν  $z = -\bar{z}$ .

β) Αν  $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$  και  $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$  και  $z_1 \cdot z_2 \neq -1$ , να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$u = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$  είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός  $v = \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2}$  είναι φανταστικός.

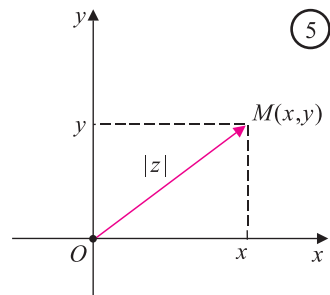
9. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha) \operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 5 \operatorname{Re}(z) \quad \beta) \operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = -3 \operatorname{Im}(z) .$$

## 2.3 ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Έστω  $M(x, y)$  η εικόνα του μιγαδικού  $z = x + yi$  στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του  $z$  την απόσταση του  $M$  από την αρχή  $O$ , δηλαδή

$$|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Για παράδειγμα,  $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ .

Όταν ο μιγαδικός  $z$  είναι της μορφής  $z = x + 0i = x \in \mathbf{R}$ , τότε  $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$ , που είναι η γνωστή μας απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού  $x$ .

Αν  $z = x + yi$ , τότε  $\bar{z} = x - yi$  και  $-z = -x - yi$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} \bullet & |z| = |\bar{z}| = |-z| \\ \bullet & |z|^2 = z \cdot \bar{z} \end{aligned}$$

Οι επόμενες ιδιότητες αναφέρονται στις σχέσεις που συνδέουν το γινόμενο και το πηλίκο μιγαδικών με τα μέτρα τους και είναι ίδιες με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απόλυτων τιμών πραγματικών αριθμών.

Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

$$\bullet |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\bullet \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Πράγματι, έχουμε:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.  
Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ιδιότητα.

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

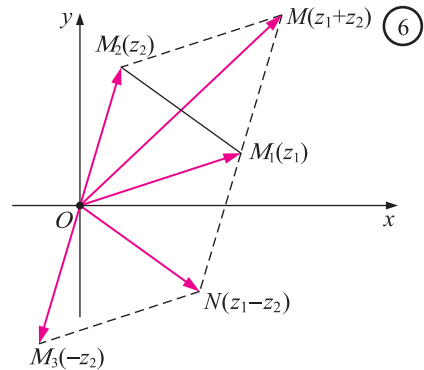
$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$$

και ειδικότερα

$$|z^n| = |z|^n.$$

Τέλος, από τη γνωστή μας τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος  $z_1 + z_2$  και της διαφοράς  $z_1 - z_2$  δύο μιγαδικών προκύπτει ότι:

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



Επίσης, είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύ-

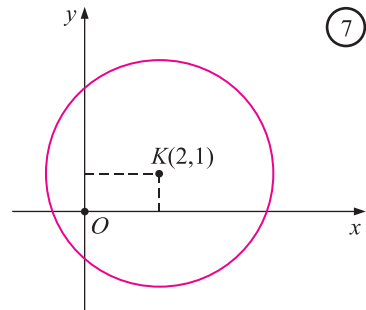
σματος  $\overrightarrow{ON}$  είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος  $\overrightarrow{M_2M_1}$ . Επομένως:

**“Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους”.**

Δηλαδή:

$$(M_1M_2) = |z_1 - z_2|$$

Έτσι, για παράδειγμα, η εξίσωση  $|z - (2 + i)| = 3$  επαληθεύεται μόνο από τους μιγαδικούς  $z$  που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από την εικόνα του μιγαδικού  $2 + i$ , δηλαδή από το σημείο  $K(2,1)$ , απόσταση 3 μονάδες. Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο  $K(2,1)$  και ακτίνα  $\rho = 3$ .

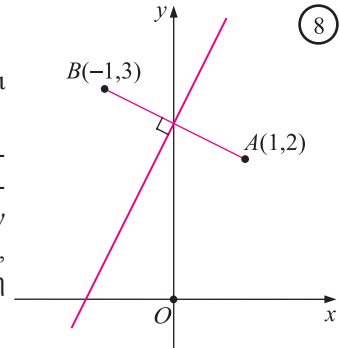


Γενικά, η εξίσωση

$$|z - z_0| = \rho, \quad \rho > 0$$

παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο  $K(z_0)$  και ακτίνα  $\rho$ .

Επίσης, η εξίσωση  $|z - (1 + 2i)| = |z - (-1 + 3i)|$  επαληθεύεται μόνο από τους μιγαδικούς  $z$  που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να ισαπέχουν από τις εικόνες των μιγαδικών  $1 + 2i$  και  $-1 + 3i$ , δηλαδή από τα σημεία  $A(1, 2)$  και  $B(-1, 3)$ . Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος  $KA$ .



Γενικά, η εξίσωση

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα σημεία  $A(z_1)$  και  $B(z_2)$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1** Αν για τους μιγαδικούς  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ισχύει

$$\left| \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \right| + \left| \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \right| + \dots + \left| \frac{z_n - i}{z_n + i} \right| < 1,$$

να αποδειχτεί ότι κανένας από αυτούς δεν είναι πραγματικός αριθμός.

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ένας από τους  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , για παράδειγμα ο  $z_k$ , ήταν πραγματικός, τότε οι μιγαδικοί

$$z_k - i \text{ και } z_k + i \text{ θα ήταν συζυγείς και επομένως } \left| \frac{z_k - i}{z_k + i} \right| = \left| \frac{z_k - i}{z_k + i} \right| = 1,$$

αφού τα μέτρα δύο συζυγών μιγαδικών είναι ίσα. Τότε όμως θα είχαμε

$$\left| \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \right| + \left| \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \right| + \dots + \left| \frac{z_k - i}{z_k + i} \right| + \dots + \left| \frac{z_n - i}{z_n + i} \right| \geq 1,$$

που είναι άτοπο.

**2.** Αν για το μιγαδικό  $z$  ισχύει  $|z - (2 + 2i)| = \sqrt{2}$ , να βρεθεί:



α) Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο.

β) Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του  $|z|$ .

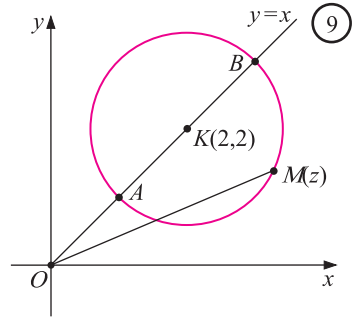
### ΛΥΣΗ

α) Η ισότητα  $|z - (2+2i)| = \sqrt{2}$  επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς  $z$  που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από το σημείο  $K(2,2)$  σταθερή απόσταση ίση με  $\sqrt{2}$  και μόνο από αυτούς. Επομένως, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο  $K(2,2)$  και ακτίνα  $\rho = \sqrt{2}$ , δηλαδή ο κύκλος

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2.$$

β) Το  $|z|$  είναι η απόσταση της εικόνας  $M(z)$  από την αρχή  $O(0,0)$ , δηλαδή το μήκος  $(OM)$ . Από τη Γεωμετρία, όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία  $OK$  τέμνει τον κύκλο στα  $A$  και  $B$ , τότε  $(OA) \leq (OM) \leq (OB)$ , που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του  $|z|$  είναι το μήκος  $(OB)$  και η ελάχιστη το μήκος  $(OA)$ .

Η εξίσωση, όμως, της ευθείας  $OK$  είναι η  $y = x$ . Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων  $A$  και  $B$  θα είναι οι λύσεις του συστήματος



$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$$

που είναι τα ζεύγη  $(1,1)$  και  $(3,3)$ . Άρα, η μέγιστη τιμή του  $|z|$  είναι ίση με  $(OB) = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$  και η ελάχιστη ίση με  $(OA) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

$$1+i, \quad 1-i, \quad 3+4i, \quad 3-4i, \quad -5i, \quad -4, \quad \frac{1+i}{1-i},$$

$$(1-i)^2 \cdot (1+i)^4, \quad (2-i) \cdot (1+2i) \quad \text{και} \quad \frac{3+i}{4-3i}.$$

2. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

$$(1+i)^2, \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2, \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2, \left(\frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2, \text{ όπου } \lambda, \mu \in \mathbf{R} \text{ με } |\lambda|+|\mu| \neq 0.$$

3. Να βρείτε τους μιγαδικούς  $z = x + yi$  για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha) |z^2| = z^2 \quad \beta) |z-1| = z \quad \gamma) |z+i| = 2\bar{z}.$$

4. Να βρείτε πού ανήκουν οι μιγαδικοί  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha) |z| = 1 \quad \beta) |z-i| = 1$$

$$\gamma) |z+1+2i| = 3 \quad \delta) 1 < |z| < 2$$

$$\epsilon) |z| \geq 2.$$

5. Να βρείτε πού ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha) |z+1| = |z-2i| \quad \beta) |z-i| > |z+1|$$

6. Αν  $x \in \mathbf{R}$ , να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού  $z = \frac{1+xi}{x+i}$  ανήκει στον κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

7. Από τους μιγαδικούς  $z$ , για τους οποίους ισχύει  $|z-4i| = 2$ , ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο;

8. Αν για τους μιγαδικούς  $z$  ισχύει  $|z| = 1$ , να βρείτε πού ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών  $w$  με  $w = 2z + 1$ .

9. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς  $z_1$  και  $z_2$  να αποδείξετε ότι

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό  $z$  ισχύει:

$$\sqrt{2} \cdot |z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$

2. Έστω ο μιγαδικός  $z$ , για τον οποίο ισχύει  $z \neq -1$ . Να αποδείξετε ότι:

$$\text{Αν } |z| = 1, \text{ τότε ο } w = \frac{z-1}{z+1} \text{ είναι φανταστικός αριθμός και αντιστρόφως.}$$

3. Έστω ο μιγαδικός  $z$  με  $z \neq 0$ . Να αποδείξετε ότι: Ο  $w = z + \frac{1}{z}$  είναι πραγματικός, αν και μόνο αν ο  $z$  είναι πραγματικός ή  $|z| = 1$ .

4. Έστω ο μιγαδικός  $z$  με  $z \neq ai$ , όπου  $a \in \mathbb{R}^*$ . Να αποδείξετε ότι: ο  $w = \frac{z + ai}{iz + a}$  είναι φανταστικός, αν και μόνο αν ο  $z$  είναι φανταστικός.
5. Αν η εικόνα του μιγαδικού  $z$  ανήκει στον κύκλο κέντρου  $O(0,0)$  και ακτίνας  $\rho = 1$ , να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού  $w = \frac{2z - i}{iz + 2}$ .
6. Αν για το μιγαδικό  $z$  ισχύει  $|2z - 1| = |z - 2|$ , να δείξετε ότι η εικόνα του  $z$  ανήκει στον κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .
7. Αν για το μιγαδικό  $z$  ισχύει  $|z| = 1$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = |1 + z|^2 + |1 - z|^2$ . Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.
8. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων  $M$  των μιγαδικών  $z$ , για τους οποίους ισχύει:  $|z + 1| = |z + 4i|$ . Ποιο από τα σημεία  $M$  απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή  $O(0,0)$ .
9. Αν  $M_1$  και  $M_2$  είναι οι εικόνες των μιγαδικών  $z_1$  και  $z_2$  αντιστοίχως και  $z_2 = z_1 + \frac{4}{z_1}$ , να αποδείξετε ότι: Όταν το  $M_1$  κινείται σε κύκλο κέντρου  $O(0,0)$  και ακτίνας 4, τότε το  $M_2$  κινείται σε μια έλλειψη.
10. α) Αν  $|z| = 1$ , να δείξετε ότι  $\bar{z} = \frac{1}{z}$ .
- β) Αν για τους μιγαδικούς  $z_1, z_2, \dots, z_k$  ισχύει  $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_k| = 1$ , να αποδείξετε ότι:  $|z_1 + z_2 + \dots + z_k| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_k} \right|$ .

## 2.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

### Εισαγωγή

Η αποδοχή των μιγαδικών αριθμών, εκτός από τις δυνατότητες που άνοιξε στην επίλυση των εξισώσεων, έδωσε μεγάλη ευελιξία στον αλγεβρικό λογισμό. Για παράδειγμα, η παράσταση  $x^2 + y^2$  μπορεί τώρα να παραγοντοποιηθεί στη μορφή  $(x + yi)(x - yi)$ . Οι μαθηματικοί εκμεταλλεύτηκαν αυτό το γεγονός σε πολλά ζητήματα, όπως είναι, για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση των τόξων ενός κύκλου. Το 1739 ο A. de Moivre, συνδυάζοντας τον υπολογισμό των κυβικών ριζών παραστάσεων της μορφής  $a + i\sqrt{b}$  (που εμφανίζονται στον τύπο επίλυσης της  $x^3 = px + q$ ) με την τριγωνομετρική ταυτότητα  $3\eta\mu\theta - 4\eta\mu^3\theta = \eta\mu 3\theta$ , έδωσε τις πρώτες ιδέες για την τριγωνομετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών. Το 1748 ο L. Euler, ξεκινώντας από την ανάλυση της ισότητας  $\sin^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$  στη μορφή  $(\sin\theta + i\eta\mu\theta)(\sin\theta - i\eta\mu\theta) = 1$ , τόνισε τη σημασία των παραστάσεων της μορφής  $\sin\theta + i\eta\mu\theta$  και έδειξε ότι  $(\sin x + i\eta\mu x)(\sin y + i\eta\mu y) = \sin(x + y) + i\eta\mu(x + y)$ . Γενικεύοντας έφτασε στη σχέση  $(\sin z \pm i\eta\mu z)^n = \sin nz \pm i\eta\mu nz$  (που σήμερα φέρει το όνομα του de Moivre), από την οποία, με χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος, βρήκε τύπους για τα  $\eta\mu nz$  και  $\sin z$ .

Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις οι μιγαδικοί αντιμετώπιζονταν ως καθαρά συμβολικές παραστάσεις, που δεν απεικόνιζαν κάποια συγκεκριμένη πραγματικότητα. Η τριγωνομετρική παράσταση έδωσε όμως τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν (από τον C. Wessel το 1799 και τον R. Argand το 1806) για την αναλυτική έκφραση της διεύθυνσης στο επίπεδο, ακριβώς όπως οι θετικοί και αρνητικοί χρησιμοποιούνται για τη διάκριση της φοράς στην ευθεία. Αυτές οι εξελίξεις διέυρυναν τις εφαρμογές των μιγαδικών και άνοιξαν το δρόμο για τη γεωμετρική ερμηνεία τους, την οποία καθιέρωσε ο C.F. Gauss το 1831.

### Ορίσμα Μιγαδικού

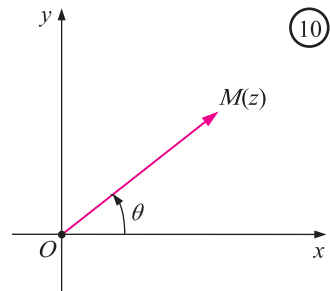
Έστω ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός  $z = x + yi$  και  $\overline{OM}$  η αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα του.

Ονομάζουμε **όρισμα** του μιγαδικού  $z$  καθεμιά από τις γωνίες που έχουν αρχική πλευρά την ημιευθεία  $Ox$  και τελική πλευρά την ημιευθεία  $OM$ .

Από όλα τα ορίσματα του  $z$  ένα ακριβώς βρίσκεται στο διάστημα  $[0, 2\pi)$ . Αυτό λέγεται **πρωτεύον όρισμα** του μιγαδικού  $z$  και συμβολίζεται με  $\text{Arg}(z)$ .

Είναι φανερό ότι:

- Το  $\text{Arg}(z)$  είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού  $z$  με τον άξονα  $x'$ .
- Δυο ορίσματα του  $z$  διαφέρουν κατά γωνία  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



Για το μιγαδικό  $z = 0$  δεν ορίζεται όρισμα. Γι' αυτό, στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε όρισμα μιγαδικού, θα εννοούμε ότι  $z \neq 0$ .

### Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού

Έστω ο μιγαδικός  $z = x + yi \neq 0$ , που έχει μέτρο  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Αν  $\theta$  είναι ένα όρισμα του  $z$ , τότε, από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθοκανονικό σύστημα, έχουμε

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}$$

οπότε

$$x = \rho \cos\theta \quad \text{και} \quad y = \rho \sin\theta.$$

Επομένως, ο μιγαδικός  $z$  γράφεται

$$z = x + yi = \rho \cos\theta + \rho \sin\theta \cdot i,$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Ο τρόπος αυτός γραφής του μιγαδικού  $z$  λέγεται **τριγωνομετρική ή πολική μορφή του  $z$** .

Για παράδειγμα, αν  $z = -\sqrt{3} + i$ , τότε το μέτρο του  $z$  είναι  $\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$  και για κάθε όρισμα του  $\theta$  ισχύουν:

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{1}{2}.$$

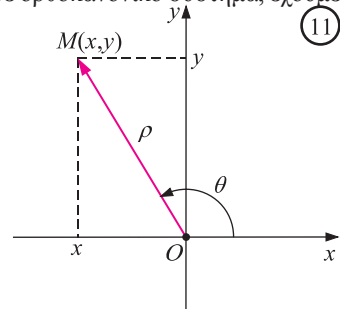
Επομένως, μια τιμή του ορίσματος είναι η  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ . Άρα, έχουμε  $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$  ή γενικότερα:

$$z = 2\left[\cos\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Αποδεικνύεται ότι, αν για έναν μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ , όπου  $r > 0$  και  $\theta \in \mathbb{R}$ , τότε η παράσταση  $r(\cos\theta + i\sin\theta)$  είναι τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού  $z$ .

Επειδή ίσοι μιγαδικοί αριθμοί έχουν την ίδια εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο και αντιστρόφως, έχουμε το ακόλουθο κριτήριο ισότητας μιγαδικών:

**“Δυο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ ”.**



Δηλαδή:

Αν  $z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$  και  $z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$  είναι τριγωνομετρικές μορφές των μιγαδικών  $z_1$  και  $z_2$ , τότε:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\rho_1 = \rho_2 \text{ και } \theta_1 - \theta_2 = \kappa \cdot 2\pi, \kappa \in \mathbb{Z}).$$

### Τριγωνομετρική Μορφή Γινομένου Μιγαδικών

Αν  $z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$  και  $z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$  είναι οι τριγωνομετρικές μορφές δύο μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$ , τότε για το γινόμενό τους έχουμε:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 (\cos\theta_1 + i\eta\mu\theta_1) \cdot \rho_2 (\cos\theta_2 + i\eta\mu\theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\cos\theta_1 + i\eta\mu\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)] \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \eta\mu\theta_1 \eta\mu\theta_2) + i(\eta\mu\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \eta\mu\theta_2)] \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Ομοίως, για το πηλίκο τους  $\frac{z_1}{z_2}$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 (\cos\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)}{\rho_2 (\cos\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{(\cos\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)(\cos\theta_2 - i\eta\mu\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)(\cos\theta_2 - i\eta\mu\theta_2)} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{(\cos\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)[\cos(-\theta_2) + i\eta\mu(-\theta_2)]}{\cos^2\theta_2 + \eta\mu^2\theta_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Αν  $z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$  και  $z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$  είναι δυο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2)] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν  $z_1 = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i\eta\mu \frac{2\pi}{3} \right)$  και  $z_2 = 3 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i\eta\mu \frac{11\pi}{6} \right)$ ,

τότε έχουμε:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \left[ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) \right] = 6 \left( \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{2} + i\eta\mu\frac{5\pi}{2} \right) = 6i$$

και

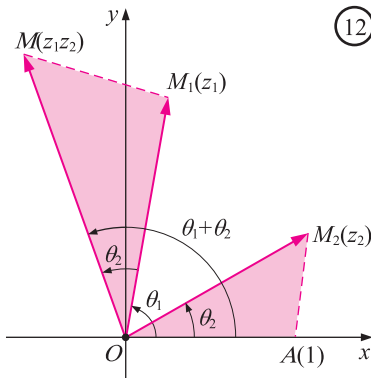
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{3} \left[ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) \right] = \frac{2}{3} \left[ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{-7\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(\frac{-7\pi}{6}\right) \right] \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{-\sqrt{3}}{3} + i \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Από τις τριγωνομετρικές μορφές του γινομένου και του πηλίκου μιγαδικών προκύπτουν οι ιδιότητες

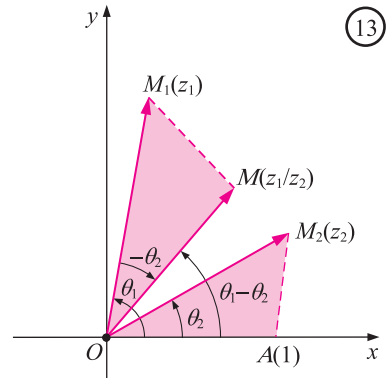
$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{και} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

τις οποίες έχουμε συναντήσει και στην § 2.3.

Η γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Τα τρίγωνα  $OAM_2$  και  $OM_1M$  είναι όμοια



Τα τρίγωνα  $OAM_2$  και  $OMM_1$  είναι όμοια

Σύμφωνα με τα παραπάνω:

- Ο πολλαπλασιασμός του μιγαδικού  $z_1 = \rho_1 (\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$  με το μιγαδικό  $z_2 = \rho_2 (\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$  σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του  $z_1$  κατά γωνία  $\theta_2$  και μετά πολλαπλασιασμό της με  $\rho_2$  (Σχ. 12). Επομένως, ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού  $z$  με το μιγαδικό  $\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$  στρέφει μόνο τη διανυσματική ακτίνα του  $z$  κατά γωνία  $\theta$ , αφού  $|\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta| = 1$ . Ειδικότερα, ο πολλαπλασιασμός του  $z$  με  $i$  στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του  $z$  κατά γωνία  $\frac{\pi}{2}$ , αφού  $i = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}$ .

• Η διαίρεση του μιγαδικού  $z_1 = (\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$  με το μιγαδικό  $z_2 = \rho_2 (\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$  σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του  $z_1$  κατά γωνία  $-\theta_2$  και μετά πολλαπλασιασμό της με  $\frac{1}{\rho_2}$  (Σχ. 13).

### Θεώρημα του De Moivre

Αν  $z = \rho (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$  είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή, σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$z^2 = z \cdot z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = \rho^2(\sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta).$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^2(\sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta)\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = \rho^3(\sigma\upsilon\nu 3\theta + i\eta\mu 3\theta).$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι

$$z^4 = \rho^4(\sigma\upsilon\nu 4\theta + i\eta\mu 4\theta).$$

$$z^5 = \rho^5(\sigma\upsilon\nu 5\theta + i\eta\mu 5\theta).$$

Γενικά, ισχύει το επόμενο θεώρημα:

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν  $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$  είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή και  $n$  είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε

$$z^n = \rho^n[\sigma\upsilon\nu(n\theta) + i\eta\mu(n\theta)].$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω  $P(n)$  η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για  $n = 1$  η ισότητα γίνεται  $z^1 = \rho^1[\sigma\upsilon\nu(1 \cdot \theta) + i\eta\mu(1 \cdot \theta)]$  ή, ισοδύναμα,  $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ , που ισχύει. Άρα η  $P(1)$  είναι αληθής.
- Θα αποδείξουμε ότι, αν  $P(n)$  αληθής, τότε  $P(n+1)$  αληθής δηλαδή, αν  $z^n = \rho^n[\sigma\upsilon\nu(n\theta) + i\eta\mu(n\theta)]$ , τότε  $z^{n+1} = \rho^{n+1}[\sigma\upsilon\nu(n+1)\theta + i\eta\mu(n+1)\theta]$ .

Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = \rho^n[\sigma\upsilon\nu(n\theta) + i\eta\mu(n\theta)] \cdot \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) \\ &= \rho^{n+1}[\sigma\upsilon\nu(n+1)\theta + i\eta\mu(n+1)\theta]. \end{aligned}$$

Άρα, η  $P(n)$  αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους  $n$ . ■



Για παράδειγμα, αν  $z = \sqrt{3} + i$ , επειδή  $z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} z^{1998} &= \left[ 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^{1998} = 2^{1998} \left( \cos \frac{1998\pi}{6} + i \sin \frac{1998\pi}{6} \right) \\ &= 2^{1998} (\cos 333\pi + i \sin 333\pi) = 2^{1998} (\cos \pi + i \sin \pi) = -2^{1998}. \end{aligned}$$

Το προηγούμενο θεώρημα αποδίδεται στο μαθηματικό **De Moivre** και γι' αυτό φέρει το όνομά του.

Το Θεώρημα του De Moivre ισχύει και όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός ακέραιος.

Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} [\rho(\cos \theta + i \sin \theta)]^{-\nu} &= \frac{1}{\rho^{\nu} (\cos \theta + i \sin \theta)^{\nu}} \\ &= \frac{1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)}{\rho^{\nu} \cdot (\cos(\nu\theta) + i \sin(\nu\theta))} \\ &= \rho^{-\nu} [\cos(0 - \nu\theta) + i \sin(0 - \nu\theta)] \\ &= \rho^{-\nu} [\cos(-\nu\theta) + i \sin(-\nu\theta)]. \end{aligned}$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1.** Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών  $z$ , για τους οποίους ισχύει  $\text{Arg} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{\pi}{6}$ .

### ΛΥΣΗ

Αν  $z = x + yi$ , τότε  $\frac{z-1}{z+1} = \frac{(x-1) + yi}{(x+1) + yi} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} i$ .

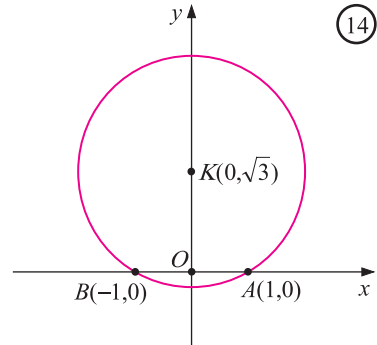
Άρα,

$$\frac{z-1}{z+1} = A + Bi, \text{ όπου } A = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} \text{ και } B = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}.$$

Επομένως, η συνθήκη  $\text{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{6}$  είναι  
ισοδύναμη με τις σχέσεις:

$$\begin{cases} \frac{B}{A} = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} \\ B > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 2^2 \\ y > 0 \end{cases}$$



Άρα, το σύνολο των εικόνων του  $z$  είναι το τόξο του κύκλου κέντρου  $K(0, \sqrt{3})$  και ακτίνας  $\rho = 2$  που είναι πάνω από τον άξονα  $x'$ .

**2.** Αν  $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = 0$  και  $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = 0$ , να αποδειχτεί ότι

**α)**  $\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\beta + \sigma\upsilon\nu 3\gamma = 3\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma)$

**β)**  $\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 3\beta + \eta\mu 3\gamma = 3\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)$ .

### ΛΥΣΗ

Έστω οι μιγαδικοί  $a = \sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha$ ,  $b = \sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta$ ,  $c = \sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma$ . Έχουμε

$$a + b + c = (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma) + i(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma) = 0 + 0i = 0$$

και επομένως,  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .

Με αντικατάσταση των  $a$ ,  $b$  και  $c$  έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} (\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)^3 + (\sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta)^3 + (\sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma)^3 &= \\ &= 3(\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta)(\sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma\upsilon\nu 3\alpha + i\eta\mu 3\alpha) + (\sigma\upsilon\nu 3\beta + i\eta\mu 3\beta) + (\sigma\upsilon\nu 3\gamma + i\eta\mu 3\gamma) &= \\ &= 3[\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma) + i\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\beta + \sigma\upsilon\nu 3\gamma) + i(\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 3\beta + \eta\mu 3\gamma) &= \\ &= 3\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma) + i3\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των δύο μελών έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\beta + \sigma\upsilon\nu 3\gamma = 3\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma) \text{ και}$$

$$\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 3\beta + \eta\mu 3\gamma = 3\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma).$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς:

$$\alpha) 1 + \sqrt{3}i$$

$$\beta) 1 - \sqrt{3}i$$

$$\gamma) -1 - \sqrt{3}i$$

$$\delta) -1 + \sqrt{3}i$$

$$\epsilon) 4$$

$$\sigma\tau) -4.$$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) 4(\sigma\upsilon\nu 15^\circ + i\eta\mu 15^\circ) \cdot 6(\sigma\upsilon\nu 30^\circ + i\eta\mu 30^\circ)$$

$$\beta) 5\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8} + i\eta\mu \frac{\pi}{8}\right) \cdot 2\left(\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{8} + i\eta\mu \frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\gamma) \left(\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{10} + i\eta\mu \frac{2\pi}{10}\right) \cdot \left(\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{10} + i\eta\mu \frac{3\pi}{10}\right).$$

3. Να κάνετε τις πράξεις

$$\alpha) \frac{25(\sigma\upsilon\nu 160^\circ + i\eta\mu 160^\circ)}{5(\sigma\upsilon\nu 100^\circ + i\eta\mu 100^\circ)}$$

$$\beta) \frac{6\left(\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} + i\eta\mu \frac{5\pi}{6}\right)}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} + i\eta\mu \frac{\pi}{3}}$$

$$\gamma) \frac{7(\sigma\upsilon\nu 130^\circ + i\eta\mu 130^\circ)}{14(\sigma\upsilon\nu(-20^\circ) + i\eta\mu(-20^\circ))}.$$

4. Να βρείτε τις δυνάμεις

$$\alpha) [2(\sigma\upsilon\nu 20^\circ + i\eta\mu 20^\circ)]^3$$

$$\beta) \left[3\left(\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{4} + i\eta\mu \frac{5\pi}{4}\right)\right]^8$$

$$\gamma) \left(\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{16}.$$

5. Να υπολογίσετε την παράσταση  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-6}$ .

6. Αν  $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ , να υπολογίσετε τον  $z^{2000}$ .

7. Αν  $z_1 = \sqrt{3} + i$  και  $z_2 = \sqrt{3} - i$ , να υπολογίσετε την παράσταση  $z_1^v + z_2^v$ , όπου  $v$  θετικός ακέραιος.
8. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη διαίρεση ενός μιγαδικού  $z$  με  $i$ .
9. Αν  $z = 1 + i\sqrt{3}$  και  $w = 1 + i$ , να δείξετε ότι  $\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\pi}{12}$  και να βρείτε το ημ  $\frac{\pi}{12}$  και το συν  $\frac{\pi}{12}$ .
10. Να βρείτε το μέτρο και το βασικό όρισμα του μιγαδικού  $z \neq 0$  αν  $z^2 = \bar{z}$ .

### Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. α) Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού  $w$ , όπου

$$w = \left( \frac{1 + \text{συν}\theta + i\eta\mu\theta}{1 + \text{συν}\theta - i\eta\mu\theta} \right)^v, \quad v \in \mathbb{N}^* \text{ και } \theta \neq (2\kappa + 1)\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $\left( \frac{2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}} \right)^{100}$ .

2. α) Να δείξετε ότι αν  $(1 + i)^v = (1 - i)^v$ , όπου  $v \in \mathbb{N}^*$  τότε  $v = 4\kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}$

β) Αν  $f(v) = \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^v + \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^v$ , να δείξετε ότι  $f(v+4) + f(v) = 0$ .

3. Να αποδείξετε ότι για  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$  ισχύει:

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|, \text{ αν και μόνο αν } \text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2).$$

4. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων  $M$  των μιγαδικών  $z$ , για τους οποίους ισχύει:

α)  $\text{Arg}(z - i) = \frac{\pi}{6}$       β)  $\text{Arg}(z + 1) = \frac{\pi}{4}$       γ)  $\text{Arg}\left(\frac{z}{z - i}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

5. Μεταξύ όλων των μιγαδικών  $z$  που ικανοποιούν τη συνθήκη  $|z + 2 - 5i| \leq 2$ , να βρείτε εκείνον που έχει:

α) Το μικρότερο πρωτεύον όρισμα

β) Το μεγαλύτερο πρωτεύον όρισμα.

6. Αν  $z = \cos\theta + i\eta\mu\theta$ , να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta) \quad \beta) z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\eta\mu(n\theta).$$

7. Αν για τους μιγαδικούς  $z$  και  $w$  ισχύουν  $|z|=1$  και  $w = (\sqrt{3} - i)z$ , τότε:

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού  $w$ .

β) Να βρείτε την εικόνα εκείνου του μιγαδικού από τους  $w$ , για τον οποίο ισχύει

$$\text{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}.$$

8. Αν  $z = \frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2} + i\frac{2\kappa}{1+\kappa^2}$  και  $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$ , να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\kappa$  και το μιγαδικό  $z$ .

9. Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = x^2 + 2|z_1 - z_2|x + (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$ , όπου  $z_1$  και  $z_2$  είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

## 2.5 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ $\mathbb{C}$

### Εισαγωγή

Η επίλυση των εξισώσεων 3ου και 4ου βαθμού, η “αναγκαστική” επαφή με τους μιγαδικούς αριθμούς για την έκφραση των πραγματικών ριζών και η εξέλιξη του αλγεβρικού λογισμού δημιούργησαν στις αρχές του 17ου αιώνα τις προϋποθέσεις για την ανάπτυξη μιας γενικής θεωρίας των πολυωνυμικών εξισώσεων στην Άλγεβρα. Βασικά στοιχεία αυτής της θεωρίας δεν ήταν μόνο οι μέθοδοι επίλυσης, αλλά και δομικά ζητήματα, όπως οι σχέσεις ριζών και συντελεστών μιας εξίσωσης, καθώς και η σχέση ανάμεσα στο βαθμό και στο πλήθος των ριζών. Το τελευταίο, που καθιερώθηκε αργότερα ως **Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**

*“κάθε πολυωνυμική εξίσωση  $n$  βαθμού έχει στο σύνολο των μιγαδικών  $n$  ακριβώς ρίζες”,*

διατυπώνεται στην αρχή διστακτικά, καθώς οι μιγαδικοί δε θεωρούνται ακόμη ισότιμοι προς τους υπόλοιπους αριθμούς. Ο R. Descartes, στο βιβλίο III της “La Geometrie” (1637) γράφει ότι: “κάθε εξίσωση μπορεί να έχει τόσες διαφορετικές ρίζες όσες και οι διαστάσεις [δηλ. ο βαθμός] της άγνωστης ποσότητας στην εξίσωση”, αλλά ονομάζει τις θετικές ρίζες

“αληθινές”, τις αρνητικές “ψεύτικες” και εισάγει για πρώτη φορά τον όρο “φανταστικές” για τις υπόλοιπες:

“...ενώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση  $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$  έχει τρεις ρίζες, εν τούτοις υπάρχει μία μόνο πραγματική ρίζα, το 2, ενώ οι άλλες δύο παραμένουν φανταστικές”.

Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας άρχισε να αποκτά εξαιρετική σημασία με την ανάπτυξη της Ανάλυσης, καθώς η παραγοντοποίηση των πολυωνύμων έπαιξε πρωταρχικό ρόλο στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων (διάσπαση ρητών κλασμάτων σε απλά κλάσματα). Ο G.W. Leibniz έθεσε το 1702 αυτό το ζήτημα ισχυριζόμενος (λαθεμένα) ότι το πολυώνυμο  $x^4 + a^4$  δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων 1ου ή 2ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. Το γεγονός αυτό οδήγησε στις πρώτες συστηματικές προσπάθειες να αποδειχτεί ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων 1ου ή 2ου βαθμού, που αποτελεί μια άλλη ισοδύναμη μορφή του θεμελιώδους θεωρήματος. Ύστερα από ορισμένες ημιτελείς προσπάθειες των d'Alembert (1746), L. Euler (1749) και J.L. Lagrange (1772), ο C.F. Gauss έδωσε την πρώτη αυστηρή απόδειξη το 1799 (σε ηλικία 22 χρονών), στη διδακτορική του διατριβή που είχε τίτλο: “Νέα απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε ακέραια ρητή συνάρτηση μιας μεταβλητής μπορεί να αναλυθεί σε πραγματικούς παράγοντες πρώτου και δεύτερου βαθμού”.

### Η Εξίσωση $z^n = 1$

Γνωρίζουμε ότι στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση  $z^n = 1$  έχει μια λύση, την  $z = 1$ , αν ο  $n$  είναι περιττός και δύο λύσεις, τις  $z = 1$  και  $z = -1$ , αν ο  $n$  είναι άρτιος.

Ας λύσουμε τώρα στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών μερικές εξισώσεις της μορφής  $z^n = 1$ , όπου  $n$  θετικός ακέραιος. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad z^3 = 1 &\Leftrightarrow z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad z^2 + z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 1 \quad \text{ή} \quad z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

δηλαδή η εξίσωση έχει στο  $\mathbb{C}$  τρεις ρίζες.

$$\begin{aligned} \bullet \quad z^4 = 1 &\Leftrightarrow z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad z^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 1 \quad \text{ή} \quad z = i \quad \text{ή} \quad z = -i \quad \text{ή} \quad z = -1, \end{aligned}$$

δηλαδή η εξίσωση έχει στο σύνολο  $\mathbb{C}$  τέσσερις λύσεις.

Γενικά ισχύει το επόμενο θεώρημα:

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση  $z^v = 1$ , όπου  $v$  θετικός ακέραιος, έχει  $v$  ακριβώς διαφορετικές λύσεις, οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{v} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{v}, \quad \kappa = 0, 1, 2, 3, \dots, v-1.$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω  $r(\text{συν}\theta + i\eta\mu\theta)$  μια λύση, σε τριγωνομετρική μορφή, της εξίσωσης  $z^v = 1$ .

Τότε,

$$[r(\text{συν}\theta + i\eta\mu\theta)]^v = 1,$$

οπότε  $r^v(\text{συν}(v\theta) + i\eta\mu(v\theta)) = \text{συν}0 + i\eta\mu0$

Άρα,  $r^v = 1$  και  $v\theta - 0 = 2\kappa\pi$ , για κάποιο  $\kappa \in \mathbb{Z}$ , οπότε  $r = 1$  και  $\theta = \frac{2\kappa\pi}{v}$ .

Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης  $z^v = 1$ , θα είναι της μορφής

$$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{v} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{v}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Αλλά και *αντιστρόφως*, κάθε μιγαδικός της μορφής  $z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{v} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{v}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$  είναι λύση της εξίσωσης  $z^v = 1$ , αφού

$$z_\kappa = \left( \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{v} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{v} \right)^v = \text{συν}(2\kappa\pi) + i\eta\mu(2\kappa\pi) = 1.$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης  $z^v = 1$  είναι όλοι οι αριθμοί της μορφής

$$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{v} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{v}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Για  $\kappa = 0$  έχουμε την προφανή λύση  $z_0 = 1$ .

Αν θέσουμε  $z_1 = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{v}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{v}\right) = \omega$ , τότε για τις ρίζες της  $z^v = 1$ , θα ισχύει:

$$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{v} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{v} = \left( \text{συν}\frac{2\pi}{v} + i\eta\mu\frac{2\pi}{v} \right)^\kappa = \omega^\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Είναι λοιπόν:

$$\begin{array}{ll}
 z_0 = 1 & z_v = \omega^v = 1 \\
 z_1 = \omega & z_{v+1} = \omega^{v+1} = \omega^v \cdot \omega = \omega \\
 z_2 = \omega^2 & z_{v+2} = \omega^{v+2} = \omega^v \cdot \omega^2 = \omega^2 \quad \text{κ.τ.λ.} \\
 \vdots & \vdots \\
 z_{v-1} = \omega^{v-1} & z_{2v-1} = \omega^{2v-1} = \omega^v \cdot \omega^{v-1} = \omega^{v-1}
 \end{array}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι λύσεις της  $z^v = 1$  που δίνονται από την (1) δεν είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του  $k$  έχουμε διαφορετικές λύσεις. Επειδή για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$  υπάρχουν ακέραιοι  $\rho$  και  $v$  τέτοιοι, ώστε να ισχύει  $k = \rho v + v$  με  $0 \leq v < v$ , έχουμε:

$$\omega^k = \omega^{\rho v + v} = (\omega^v)^\rho \cdot \omega^v = 1 \cdot \omega^v = \omega^v.$$

Δηλαδή, για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$  η λύση  $z_k$  ταυτίζεται με μια από τις

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{v-1}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι οι λύσεις  $1 = \omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{v-1}$  είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Έστω ότι δε συμβαίνει αυτό. Τότε θα υπάρχουν φυσικοί  $\lambda_1, \lambda_2$  με  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < v$ , τέτοιοι, ώστε  $\omega^{\lambda_1} = \omega^{\lambda_2}$ , οπότε θα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
 \text{συν} \frac{2\lambda_1\pi}{v} + i\eta\mu \frac{2\lambda_1\pi}{v} &= \text{συν} \frac{2\lambda_2\pi}{v} + i\eta\mu \frac{2\lambda_2\pi}{v} \\
 \frac{2\lambda_1\pi}{v} - \frac{2\lambda_2\pi}{v} &= \mu \cdot 2\pi, \text{ για κάποιο } \mu \in \mathbb{Z} \\
 \lambda_1 - \lambda_2 &= v\mu, \quad \text{για κάποιο } \mu \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι ο ακέραιος  $v$  διαιρεί τη διαφορά  $\lambda_1 - \lambda_2$ . Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού  $0 < \lambda_1 - \lambda_2 < v$ . Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης  $z^v = 1$  είναι οι  $v$  διαφορετικοί αριθμοί

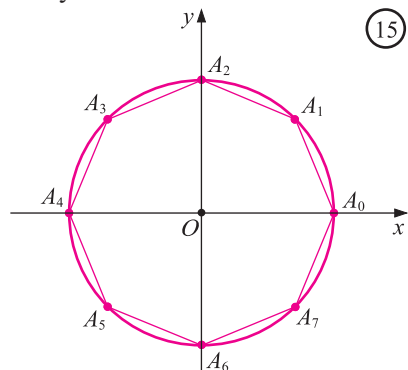
$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{v-1}, \text{ όπου } \omega = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{v}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{v}\right).$$

Οι λύσεις αυτές λέγονται και **νιοστές ρίζες της μονάδας**. ■

## ΣΧΟΛΙΟ

Οι εικόνες  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{v-1}$  των λύσεων  $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{v-1}$  της εξίσωσης  $z^v = 1$  είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με  $v$  πλευρές, εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $r = 1$ . Πιο συγκεκριμένα:

— Η κορυφή  $A_0$  παριστάνει τη λύση 1.



(15)



- Η επόμενη κορυφή  $A_1$  παριστάνει τη λύση  $\omega = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)$ .
- Η κορυφή  $A_2$  παριστάνει την  $\omega^2$  και προκύπτει από την  $\omega$  με στροφή του διανύσματος  $\overrightarrow{OA_1}$  κατά γωνία  $\frac{2\pi}{\nu}$ , δηλαδή κατά γωνία ίση με την κεντρική γωνία του κανονικού  $\nu$ -γωνου.
- Η κορυφή  $A_3$  παριστάνει την  $\omega^3$  και προκύπτει από την  $\omega$  με στροφή του διανύσματος  $\overrightarrow{OA_1}$  κατά γωνία  $\frac{2 \cdot 2\pi}{\nu}$  κτλ.

### Η Εξίσωση $z^\nu = a$ , $a \neq 0$

Έστω  $a = \rho(\text{συν}\theta + i\eta\mu\theta)$  μια τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού  $a$ . Τότε από τον τύπο του de Moivre έχουμε:

$$a = \left( \sqrt[\nu]{\rho} \left( \text{συν} \frac{\theta}{\nu} + i\eta\mu \frac{\theta}{\nu} \right) \right)^\nu.$$

Αν θέσουμε  $z_0 = \sqrt[\nu]{\rho} \left( \text{συν} \frac{\theta}{\nu} + i\eta\mu \frac{\theta}{\nu} \right)$ , τότε η εξίσωση  $z^\nu = a$  γράφεται  $z^\nu = z_0^\nu$  ή, ισοδύναμα,

$$\left( \frac{z}{z_0} \right)^\nu = 1$$

Επομένως, το  $\frac{z}{z_0}$  μπορεί να πάρει τις  $\nu$  διαφορετικές τιμές

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{\nu-1}, \text{ όπου } \omega = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{\nu}\right),$$

οπότε οι λύσεις της εξίσωσης  $z^\nu = a$  είναι οι αριθμοί

$$\begin{aligned} z_\kappa &= z_0 \cdot \omega^\kappa = \sqrt[\nu]{\rho} \left( \text{συν} \frac{\theta}{\nu} + i\eta\mu \frac{\theta}{\nu} \right) \cdot \left[ \text{συν} \left( \frac{2\kappa\pi}{\nu} \right) + i\eta\mu \left( \frac{2\kappa\pi}{\nu} \right) \right] \\ &= \sqrt[\nu]{\rho} \left( \text{συν} \frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu} + i\eta\mu \frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu} \right), \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση  $z^v = \mathbf{a}$ , όπου  $v$  θετικός ακέραιος και  $\mathbf{a} = \rho(\cos\theta + i\eta\mu\theta)$ ,  $\rho = |\mathbf{a}|$ , έχει  $v$  διαφορετικές λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$z_\kappa = \sqrt[v]{\rho} \left( \cos\frac{2\kappa\pi + \theta}{v} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi + \theta}{v} \right), \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, v-1.$$

Οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης  $z^v = \mathbf{a}$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με  $v$  πλευρές, εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\sqrt[v]{\rho}$ , όπου  $\rho = |\mathbf{a}|$ .

Έστω για παράδειγμα η εξίσωση

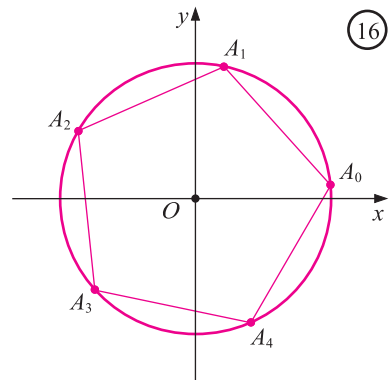
$$z^5 = 16(\sqrt{3} + i). \quad (1)$$

Επειδή  $16(\sqrt{3} + i) = 32 \left( \cos\frac{\pi}{6} + i\eta\mu\frac{\pi}{6} \right)$ , οι λύσεις  $z_\kappa$  της εξίσωσης (1) δίδονται από τον τύπο

$$z_\kappa = \sqrt[5]{32} \left( \cos\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}}{5} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}}{5} \right) = 2 \left( \cos\frac{12\kappa\pi + \pi}{30} + i\eta\mu\frac{12\kappa\pi + \pi}{30} \right), \quad \kappa = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Πιο συγκεκριμένα οι λύσεις είναι:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \left( \cos\frac{\pi}{30} + i\eta\mu\frac{\pi}{30} \right), \\ z_1 &= 2 \left( \cos\frac{13\pi}{30} + i\eta\mu\frac{13\pi}{30} \right), \\ z_2 &= 2 \left( \cos\frac{25\pi}{30} + i\eta\mu\frac{25\pi}{30} \right), \\ z_3 &= 2 \left( \cos\frac{37\pi}{30} + i\eta\mu\frac{37\pi}{30} \right), \\ z_4 &= 2 \left( \cos\frac{49\pi}{30} + i\eta\mu\frac{49\pi}{30} \right). \end{aligned}$$



Οι λύσεις αυτές είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας  $\rho = 2$ .

### Πολυωνυμικές Εξισώσεις με Πραγματικούς Συντελεστές

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, κάθε πολυωνυμική εξίσωση  $P(z) = 0$ , νιοστού βαθμού, δηλαδή κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_\nu \neq 0,$$

έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών  $n$  ακριβώς ρίζες.

Αν  $z_1, z_2, \dots, z_n$  είναι οι ρίζες του πολωνύμου  $P(z)$  (οι οποίες δεν είναι κατανάγκη διαφορετικές), τότε αποδεικνύεται ότι το πολώνυμο αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής:

$$P(z) = \alpha_n (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Επομένως, η επίλυση πολωνυμικών εξισώσεων στο  $\mathbb{C}$  γίνεται με τις ίδιες μεθόδους που χρησιμοποιούνται και στο σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών.

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε πολωνυμικές εξισώσεις με πραγματικούς μόνο συντελεστές.

Έχουμε ήδη λύσει τη δευτεροβάθμια εξίσωση, η οποία, όπως είδαμε, έχει δύο ρίζες, οι οποίες, αν δεν είναι πραγματικές, είναι μιγαδικές συζυγείς. Ας λύσουμε τώρα μία ανωτέρου βαθμού, για παράδειγμα την  $z^3 - 3z^2 + 5z - 3 = 0$ , που είναι πολωνυμική τρίτου βαθμού. Με σχήμα Horner έχουμε:

$$z^3 - 3z^2 + 5z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 2z + 3)(z - 1) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 3 = 0 \text{ ή } z - 1 = 0.$$

Όμως,

$$z^2 - 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = 1 + \sqrt{2}i \text{ ή } z = 1 - \sqrt{2}i.$$

Άρα, οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $1 + \sqrt{2}i$ ,  $1 - \sqrt{2}i$  και  $1$ . Και στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι οι μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης είναι συζυγείς. Το συμπέρασμα αυτό γενικεύεται για οποιαδήποτε πολωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές.

### ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Αν ο μιγαδικός αριθμός  $z_0 = \alpha + \beta i$  είναι ρίζα μιας πολωνυμικής εξίσωσης με **πραγματικούς συντελεστές**, τότε και ο συζυγής του  $\bar{z}_0 = \alpha - \beta i$  είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Μια πολωνυμική εξίσωση, όπως γνωρίζουμε, έχει τη μορφή:

$$\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \text{ όπου } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha_n \neq 0.$$

Αφού ο αριθμός  $z_0$  είναι ρίζα της εξίσωσης, έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned} \alpha_n z_0^n + \alpha_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 z_0 + \alpha_0 &= 0 \\ \overline{\alpha_n z_0^n + \alpha_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 z_0 + \alpha_0} &= \bar{0} \\ \alpha_n \overline{z_0^n} + \overline{\alpha_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{\alpha_1 z_0} + \overline{\alpha_0} &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}_v \bar{z}_0^v + \overline{\alpha_{v-1} z_0^{v-1}} + \dots + \bar{\alpha}_1 \bar{z}_0 + \bar{\alpha}_0 = 0$$

$$\alpha_v \bar{z}_0^v + \alpha_{v-1} \bar{z}_0^{v-1} + \dots + \alpha_1 \bar{z}_0 + \alpha_0 = 0, \text{ αφού } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_v \in \mathbf{R}.$$

Άρα, ο  $\bar{z}_0$  είναι και αυτός ρίζα της εξίσωσης. ■

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν  $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{v}\right)$ , να αποδειχτεί ότι:

$$\alpha) 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{v-1} = 0$$

$$\beta) 1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \omega^3 \cdot \dots \cdot \omega^{v-1} = (-1)^{v-1}.$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\alpha) \text{ Έχουμε } 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{v-1} = \frac{1 - \omega^v}{1 - \omega} = \frac{1 - 1}{1 - \omega} = 0$$

$$\beta) 1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \omega^3 \cdot \dots \cdot \omega^{v-1} = \omega^{1+2+3+\dots+(v-1)}$$

$$= \omega^{\frac{v(v-1)}{2}}$$

$$= \left( \cos\frac{2\pi}{v} + i\sin\frac{2\pi}{v} \right)^{\frac{v(v-1)}{2}}$$

$$= \cos\frac{2\pi v(v-1)}{2v} + i\sin\frac{2\pi v(v-1)}{2v}$$

$$= \cos(v-1)\pi + i\sin(v-1)\pi$$

$$= (\cos\pi + i\sin\pi)^{v-1}$$

$$= (-1)^{v-1}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση  $x^2 - 2\cos\theta \cdot x + 1 = 0$ . Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης αυτής, να κατασκευαστεί εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τις  $x_1^v, x_2^v$ .

### ΛΥΣΗ

Έχουμε  $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta \leq 0$ . Επομένως,

$$x_{1,2} = \frac{2\cos\theta \pm 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta.$$

Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι η

$$x^2 - (x_1^v + x_2^v)x + x_1^v \cdot x_2^v = 0.$$

Έχουμε

$$x_1^v = (\cos\theta + i\eta\mu\theta)^v = \cos(v\theta) + i\eta\mu(v\theta)$$

και

$$\begin{aligned} x_2^v &= (\cos\theta - i\eta\mu\theta)^v = [\cos(-\theta) + i\eta\mu(-\theta)]^v = \cos(-v\theta) + i\eta\mu(-v\theta) \\ &= \cos(v\theta) - i\eta\mu(v\theta). \end{aligned}$$

Επομένως:

$$x_1^v + x_2^v = \cos(v\theta) + i\eta\mu(v\theta) + \cos(v\theta) - i\eta\mu(v\theta) = 2\cos(v\theta)$$

και

$$x_1^v \cdot x_2^v = (\cos(v\theta) + i\eta\mu(v\theta))(\cos(-v\theta) + i\eta\mu(-v\theta)) = \cos^2 v\theta - \eta\mu^2 v\theta = 1$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 2\cos(v\theta)x + 1 = 0.$$

### 3. Να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων το πολυώνυμο

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6,$$

αν γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό  $1 + \sqrt{2}i$ .

#### ΛΥΣΗ

Αφού το  $P(x)$  έχει ρίζα τον αριθμό  $x_0 = 1 + \sqrt{2}i$ , θα έχει ρίζα και το συζυγή του,  $\bar{x}_0 = 1 - \sqrt{2}i$ . Επομένως, το πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρείται με το γινόμενο  $Q(x) = (x - x_0)(x - \bar{x}_0)$ , για το οποίο έχουμε

$$\begin{aligned} Q(x) &= [x - (1 + \sqrt{2}i)][x - (1 - \sqrt{2}i)] = [(x - 1) - \sqrt{2}i][(x - 1) + \sqrt{2}i] \\ &= (x - 1)^2 - (\sqrt{2}i)^2 \\ &= x^2 + 1 - 2x + 2 \\ &= x^2 - 2x + 3. \end{aligned}$$

Αν κάνουμε τη διαίρεση του πολυωνύμου  $P(x)$  με το πολυώνυμο  $Q(x)$ , βρίσκουμε πηλίκο  $3x + 2$ . Επομένως είναι

$$P(x) = (x^2 - 2x + 3)(3x + 2).$$

## ΣΧΟΛΙΟ

Γενικά, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές, όπου οι δευτεροβάθμιοι παράγοντες (αν υπάρχουν) έχουν αρνητική διακρίνουσα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις στο μιγαδικό επίπεδο:

$$\alpha) z^3 = 1$$

$$\beta) z^4 = 1$$

$$\gamma) z^6 = 1.$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) z^3 = -i$$

$$\beta) z^4 = 16 \left( \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} + i\eta\mu \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$\gamma) z^5 = 243 \left( \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} + i\eta\mu \frac{5\pi}{6} \right).$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) z^3 = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$$

$$\beta) z^4 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma) z^6 = -64.$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) z^3 + 3z^2 + 4z = 8$$

$$\beta) z^4 + 5z^2 + 4 = 0.$$

5. Αν ο μιγαδικός  $2 + i$  είναι ρίζα της εξίσωσης

$$3x^3 - 10x^2 + 7x + 10 = 0,$$

να βρείτε και τις άλλες ρίζες της.

6. Αν  $w$  είναι μια κυβική ρίζα της μονάδος, με  $w \neq 1$ , να βρείτε την τιμή της παραστάσης  $(1 - w + w^2)(1 + w - w^2)$

7. Να λύσετε την εξίσωση

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 0.$$

8. Να λύσετε την εξίσωση  $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$  και να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

### Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) z^3 = 1 - i$$

$$\beta) (z - 1)^3 - (1 - i)(z + 1)^3 = 0.$$

2. Να λύσετε την εξίσωση  $z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + z^2 + (z + 1)^2 = 0$ .

3. Να λύσετε την εξίσωση  $z^7 + 1 = 0$  και στη συνέχεια να βρείτε τα τριώνυμα με πραγματικούς συντελεστές που είναι παράγοντες του πολυωνύμου  $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ .

4. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων  $(z^2 + 1)^2 + z^3 + z = 0$  και  $z^{16} + 2z^{14} + 1 = 0$ .

5. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , για τους οποίους ισχύει  $z^7 \bar{z}^3 = 1$ .

6. Αν η εξίσωση  $(1 + iz)^v = p(1 - iz)^v$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$  έχει πραγματική ρίζα, να αποδείξετε ότι  $|p| = 1$ .

7. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 2x + 4 = 0$  με ρίζες τις  $x_1$  και  $x_2$ .

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων  $x_1 + x_2$ ,  $x_1 x_2$  και  $x_1^2 + x_2^2$ .

β) Αν η εξίσωση  $x^2 + px + q = 0$  έχει ως ρίζες τις  $x_1^2$  και  $x_2^2$ , να βρείτε τις τιμές των  $p$  και  $q$ .

8. α) Να λύσετε την εξίσωση

$$\sin^2 \theta z^2 - 2 \sin \theta z + (5 - 4 \sin^2 \theta) = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το  $\theta$  μεταβάλλεται στο διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης κινούνται σε μια υπερβολή.

9. Να λύσετε την εξίσωση

$$x^9 - x^5 + x^4 - 1 = 0.$$

## ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(z) = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$  με  $z \in \mathbb{C}$  και  $\operatorname{Re}(z) \neq 0$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = f(z)$ .

β) Έστω  $\alpha, \beta$  δυο (σταθεροί) πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί από το 0. Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία  $M(x, y)$ , με  $x \neq 0$ , για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = \alpha x + \beta yi$  ικανοποιούν τη σχέση  $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$ .

2. Θεωρούμε τους μιγαδικούς  $z, w$  και  $w_1$ , για τους οποίους ισχύουν:  $w = z - zi$  και  $w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha i$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Να δείξετε ότι αν το  $\alpha$  μεταβάλλεται στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει  $w = \bar{w}_1$ , τότε η εικόνα  $P$  του  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς  $z = \lambda + 2 + (3\lambda - 1)i$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού  $z$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού  $w$  για τον οποίο ισχύει  $w = z + (1 + i)$

γ) Να βρείτε το μιγαδικό  $z$  που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή  $O(0, 0)$ .

4. Να γραμμοσκιάσετε το τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών  $z$ , για τους οποίους ισχύει:

α)  $|2z + 1| < |z + i|$

β)  $|z - 1| = 1 + \operatorname{Re}(z)$ .

5. Να αποδείξετε ότι αν οι μιγαδικοί  $z_1, z_2, \dots, z_n$  έχουν τις εικόνες τους στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή  $O(0, 0)$ , τότε ισχύει  $z_1 + z_2 + \dots + z_n \neq 0$ .

6. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης  $(1 - z)^n = z^n$  είναι σημεία της ευθείας  $x = \frac{1}{2}$ .



7 Αν το τριώνυμο  $ax^2 + bx + \gamma$  με πραγματικούς συντελεστές και  $a \neq 0$  δεν έχει πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι:

α) Για οποιουδήποτε πραγματικού αριθμούς  $\kappa$  και  $\lambda$  ισχύει

$$(\alpha\kappa^2 + \beta\kappa + \gamma)(\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma) > 0.$$

β) Για οποιουδήποτε συζυγείς μιγαδικούς  $z_1$  και  $z_2$  διαφορετικούς από τις ρίζες του τριωνύμου ισχύει επίσης

$$(\alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma)(\alpha z_2^2 + \beta z_2 + \gamma) > 0.$$

8. Γνωρίζοντας ότι για τις νιοστές ρίζες της μονάδας  $1, z_1, z_2, \dots, z_{v-1}$  ισχύει  $1 + z_1 + z_2 + \dots + z_{v-1} = 0$ , να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α)  $\eta\mu \frac{2\pi}{v} + \eta\mu \frac{4\pi}{v} + \eta\mu \frac{6\pi}{v} + \dots + \eta\mu \frac{2(v-1)\pi}{v} = 0,$

β)  $\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{v} + \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{v} + \sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{v} + \dots + \sigma\upsilon\nu \frac{2(v-1)\pi}{v} = -1.$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

i) Αν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ισχύει  $u^2 + v^2 = 0$ , τότε :

A.  $u = 0$

B.  $v = 0$

Γ.  $u = v = 0$

Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

ii) Ο αριθμός  $z = (3 + 5i)^{10} + (3 - 5i)^{10}$  είναι:

A. Φανταστικός

B. Μηδέν

Γ. Πραγματικός

Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

2. Ποιες από τις επόμενες ισότητες αληθεύουν για κάθε μιγαδικό  $z$  :

A.  $|z^2| = |z|^2$

B.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Γ.  $z \cdot \bar{z} = z^2$

Δ.  $z \cdot \bar{z} = |z|$

E.  $|z^2| = z^2$ .

3. Σύμφωνα με τη συνθήκη που ικανοποιούν οι μιγαδικοί  $z$  και αναφέρεται στην πρώτη στήλη, να τους αντιστοιχίσετε στην ευθεία της δεύτερη στήλης που ανήκει η εικόνα τους:

Συνθήκη	Ευθεία
A. $ z - i  =  z + i $	α. $x = 1$
B. $ z - 1  =  z + 1 $	β. $yy'$
Γ. $ z - 1  =  z - i $	γ. $y = x$
Δ. $ z + 1  =  z + i $	δ. $y = -x$
	ε. $x'x$

4. Να αντιστοιχίσετε κάθε μιγαδικό  $z$  της πρώτης στήλης στο όρισμά του της δεύτερης στήλης:

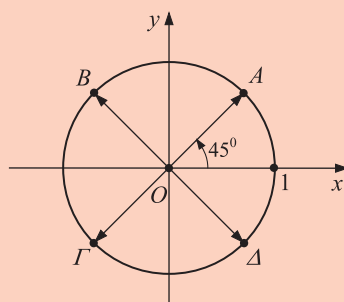
Μιγαδικός ( $k > 0$ )	Όρισμα
A. $k + ki$	α. $-45^\circ$
B. $k - ki$	β. $225^\circ$
Γ. $-k - ki$	γ. $45^\circ$
Δ. $-k + ki$	δ. $180^\circ$
	ε. $60^\circ$
	ζ. $135^\circ$

5. Να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.

Ο αριθμός των πραγματικών ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης  $5^{\text{ου}}$  βαθμού με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να είναι:

A. 1      B. 2      Γ. 3      Δ. 4      E. 5

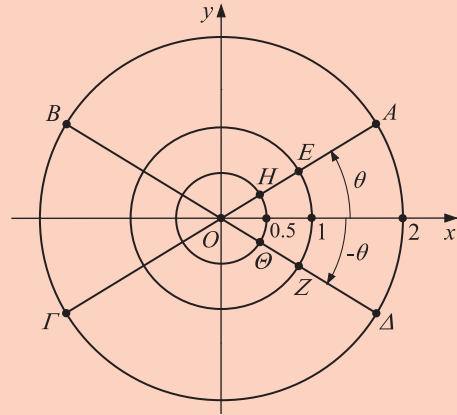
6. Να γράψετε τους μιγαδικούς που έχουν ως εικόνες τα σημεία A, B, Γ και Δ του διπλανού σχήματος:



A:  
B:  
Γ:  
Δ:

7. Αν  $z$  είναι ο μιγαδικός που έχει ως εικόνα το  $A$ , να αντιστοιχίσετε κάθε μιγαδικό της πρώτης στήλης στην εικόνα του που αναφέρεται στη δεύτερη στήλη και σημειώνεται στο παρακάτω σχήμα:

<u>Μιγαδικός</u>	<u>Εικόνα</u>
$\bar{z}$	$B$
$\frac{1}{2}z$	$\Gamma$
$\frac{1}{z}$	$\Delta$
$-z$	$E$
$-\bar{z}$	$Z$
	$H$
	$\Theta$



***B' ΜΕΡΟΣ***

***ΑΝΑΛΥΣΗ***

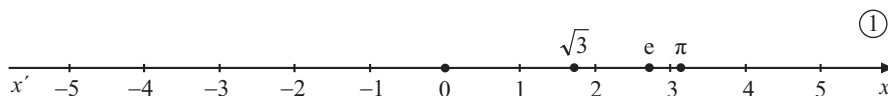


# 1 ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

## 1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

### Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνεται με τα σημεία ενός άξονα, του άξονα των πραγματικών αριθμών. (Σχ. 1)



Ρητοί αριθμοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή  $\frac{\alpha}{\beta}$ , όπου  $\alpha$ ,  $\beta$  ακέραιοι με  $\beta \neq 0$ . Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με  $\mathbb{Q}$ .

Είναι, δηλαδή,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \mid \alpha, \beta \text{ ακέραιοι με } \beta \neq 0 \right\}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι το

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

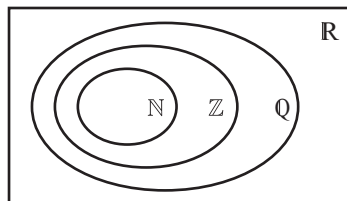
ενώ το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Για τα σύνολα  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  και  $\mathbb{R}$  ισχύει:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Τα σύνολα  $\mathbb{N} - \{0\}$ ,  $\mathbb{Z} - \{0\}$ ,  $\mathbb{Q} - \{0\}$  και  $\mathbb{R} - \{0\}$  τα συμβολίζουμε συντομότερα με  $\mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{Z}^*$ ,  $\mathbb{Q}^*$  και  $\mathbb{R}^*$  αντίστοιχως.



## Πράξεις και διάταξη στο $\mathbb{R}$

Στο σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και με τη βοήθειά τους η αφαίρεση και η διαίρεση. Οι ιδιότητες των πράξεων αυτών είναι γνωστές από προηγούμενες τάξεις. Στη συνέχεια ορίστηκε η έννοια της διάταξης, οι σπουδαιότερες ιδιότητες της οποίας είναι οι:

$$1) \text{ Αν } \alpha \geq \beta \text{ και } \beta \geq \gamma, \text{ τότε } \alpha \geq \gamma$$

$$2) \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$$

$$3) \begin{cases} \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \geq \beta\gamma, \text{ όταν } \gamma > 0 \\ \text{ενώ} \\ \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma, \text{ όταν } \gamma < 0 \end{cases}.$$

$$4) \begin{cases} \text{Αν } \alpha \geq \beta \text{ και } \gamma \geq \delta, \text{ τότε } \alpha + \gamma \geq \beta + \delta \\ \text{Αν } \begin{pmatrix} \alpha \geq \beta \text{ και } \gamma \geq \delta \\ \text{και} \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{pmatrix}, \text{ τότε } \alpha\gamma \geq \beta\delta. \end{cases}$$

5) Αν  $\alpha, \beta \geq 0$  και  $v \in \mathbb{N}^*$ , τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha^v \geq \beta^v$$

$$6) \frac{\alpha}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha\beta \geq 0 \text{ και } \beta \neq 0)$$

7) Αν  $\alpha\beta > 0$ , τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}.$$

## Διαστήματα πραγματικών αριθμών

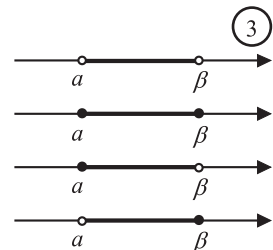
• Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha < \beta$ , τότε ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα  $\alpha, \beta$**  καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}: \text{ανοικτό διάστημα}$$

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}: \text{κλειστό διάστημα}$$

$$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}: \text{κλειστό-ανοικτό διάστημα}$$

$$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}: \text{ανοικτό-κλειστό διάστημα.}$$



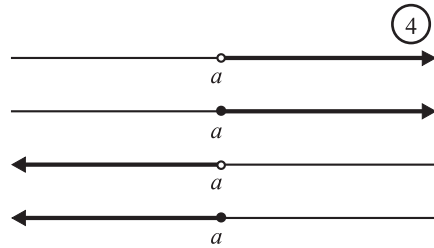
• Αν  $a \in \mathbb{R}$ , τότε ονομάζουμε **μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το  $a$**  καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



Υπό μορφή διαστήματος το σύνολο  $\mathbb{R}$  το συμβολίζουμε με  $(-\infty, +\infty)$ .

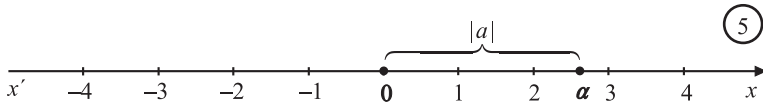
Τα σημεία ενός διαστήματος  $\Delta$ , που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, λέγονται **εσωτερικά σημεία** του  $\Delta$ .

**Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού**

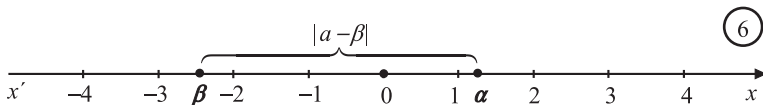
Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού  $a$ , που συμβολίζεται με  $|a|$ , ορίζεται ως εξής:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

Γεωμετρικά, η απόλυτη τιμή του  $a$  παριστάνει την απόσταση του αριθμού  $a$  από το μηδέν,



ενώ η απόλυτη τιμή του  $a - \beta$  παριστάνει την **απόσταση των αριθμών  $a$  και  $\beta$** .



Μερικές από τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής είναι οι εξής:

1)  $|a|^2 = a^2$

2)  $\sqrt{a^2} = |a|$

3)  $|a\beta| = |a| \cdot |\beta|$

4)  $\left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|a|}{|\beta|}$

5)  $||a| - |\beta|| \leq |a + \beta| \leq |a| + |\beta|$       6)  $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \delta > 0$



**ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

Να γραφούν υπό μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα σύνολα:

$$\text{i) } A = \left\{ x \mid \frac{1}{x} \leq 1 \right\} \quad \text{ii) } A = \left\{ x \mid \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < 1 \right\}.$$

**ΛΥΣΗ**

i) Είναι

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x-1}{x} \\ &\Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \text{ και } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x \geq 1. \end{aligned}$$

Άρα  $A = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ .

ii) Είναι

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < 1 &\Leftrightarrow -1 < \frac{1}{x} - 2 < 1 \\ &\Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x} < 3 \\ &\Leftrightarrow 1 > x > \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Άρα  $A = \left( \frac{1}{3}, 1 \right)$ .

**1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ****Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης**

Η έννοια της συνάρτησης είναι γνωστή από προηγούμενες τάξεις. Στην παράγραφο αυτή υπενθυμίζουμε τον ορισμό της πραγματικής συνάρτησης με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , επαναλαμβάνουμε γνωστές έννοιες και τέλος ορίζουμε πράξεις μεταξύ των πραγματικών συναρτήσεων.

## ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω  $A$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$**  μια διαδικασία (κανόνα)  $f$ , με την οποία κάθε στοιχείο  $x \in A$  αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό  $y$ . Το  $y$  ονομάζεται **τιμή της  $f$  στο  $x$**  και συμβολίζεται με  $f(x)$ .

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x).$$

- Το γράμμα  $x$ , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του  $A$  λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα  $y$ , που παριστάνει την τιμή της  $f$  στο  $x$ , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης  $f$  συνήθως συμβολίζεται με  $D_f$ .
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της  $f$  σε όλα τα  $x \in A$ , λέγεται **σύνολο τιμών** της  $f$  και συμβολίζεται με  $f(A)$ . Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

## ΠΡΟΣΟΧΗ

Στα επόμενα και σε όλη την έκταση του βιβλίου :

- Θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα ή ένωση διαστημάτων**.
- Όταν θα λέμε ότι “**Η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο  $B$** ”, θα εννοούμε ότι το  $B$  είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με  $f(B)$  θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της  $f$  σε κάθε  $x \in B$ . Είναι δηλαδή:

$$f(B) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}.$$

## Συνομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι για να οριστεί μια συνάρτηση  $f$  αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

- το πεδίο ορισμού της και
- η τιμή της,  $f(x)$ , για κάθε  $x$  του πεδίου ορισμού της.

Συνήθως, όμως, αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση  $f$  δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το  $f(x)$ . Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε **συμβατικά** ότι το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών  $x$ , για τους οποίους το  $f(x)$  έχει νόημα. Έτσι, για παράδειγμα, αντί να λέμε “δίνεται η συνάρτηση  $f: (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

με  $f(x) = \sqrt{4-2x}$ ” θα λέμε “δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \sqrt{4-2x}$ ” ή, πιο απλά, “δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{4-2x}$ ”, ή “δίνεται η συνάρτηση  $y = \sqrt{4-2x}$ ”.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  με τύπο:

$$\text{i) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x} \qquad \text{ii) } f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$$

## ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται, όταν και μόνο όταν

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \text{ και } x \neq 0.$$

Το τριώνυμο όμως  $x^2 - 3x + 2$  έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2. Έτσι, η ανίσωση  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$  αληθεύει, όταν και μόνο όταν

$$x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2.$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το σύνολο  $A = (-\infty, 0) \cup (0, 1] \cup [2, +\infty)$ .

ii) Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται, όταν και μόνο όταν

$$1 - \ln x \geq 0.$$

Είναι όμως

$$\begin{aligned} 1 - \ln x \geq 0 &\Leftrightarrow \ln x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \ln x \leq \ln e \\ &\Leftrightarrow 0 < x \leq e. \end{aligned}$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το σύνολο  $A = (0, e]$ .

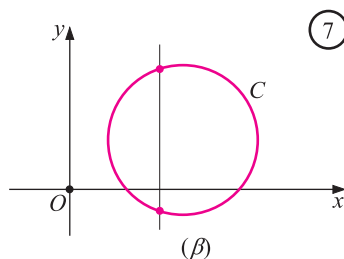
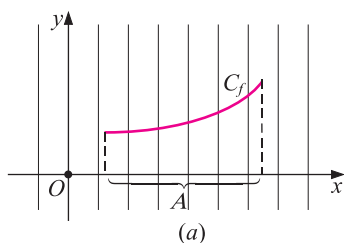
## Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω  $f$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A$  και  $Oxy$  ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων  $M(x, y)$  για τα οποία ισχύει  $y = f(x)$ , δηλαδή το σύνολο των σημείων  $M(x, f(x))$ ,  $x \in A$ , λέγεται **γραφική παράσταση** της  $f$  και συμβολίζεται

συνήθως με  $C_f$ . Η εξίσωση, λοιπόν,  $y = f(x)$  επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της  $C_f$ . Επομένως, η  $y = f(x)$  είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της  $f$ .

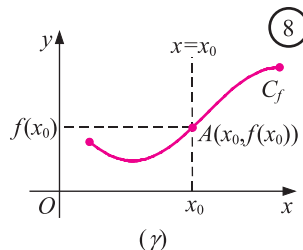
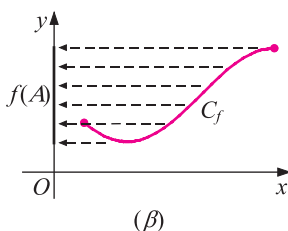
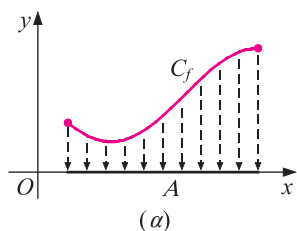
Επειδή κάθε  $x \in A$  αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο  $y \in \mathbb{R}$ , δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της  $f$  το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. 7α).

Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. 7β).



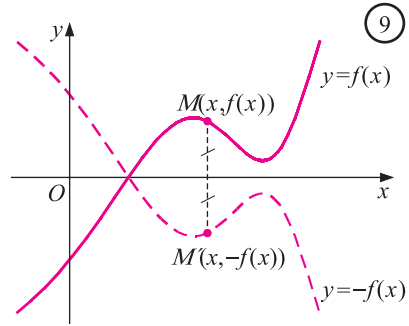
Όταν δίνεται η γραφική παράσταση  $C_f$  μιας συνάρτησης  $f$ , τότε:

- α) Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το σύνολο  $A$  των τεταγμένων των σημείων της  $C_f$ .
- β) Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το σύνολο  $f(A)$  των τεταγμένων των σημείων της  $C_f$ .
- γ) Η τιμή της  $f$  στο  $x_0 \in A$  είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας  $x = x_0$  και της  $C_f$  (Σχ. 8).

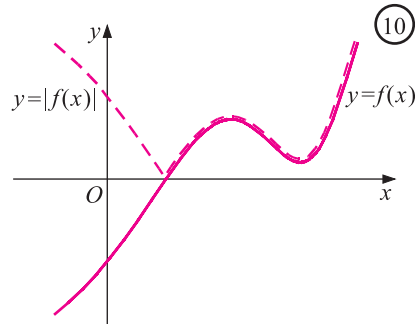


Όταν δίνεται η γραφική παράσταση  $C_f$ , μιας συνάρτησης  $f$  μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $-f$  και  $|f|$ .

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $-f$  είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα  $x'x$ , της γραφικής παράστασης της  $f$ , γιατί αποτελείται από τα σημεία  $M'(x, -f(x))$  που είναι συμμετρικά των  $M(x, f(x))$ , ως προς τον άξονα  $x'x$ . (Σχ. 9).



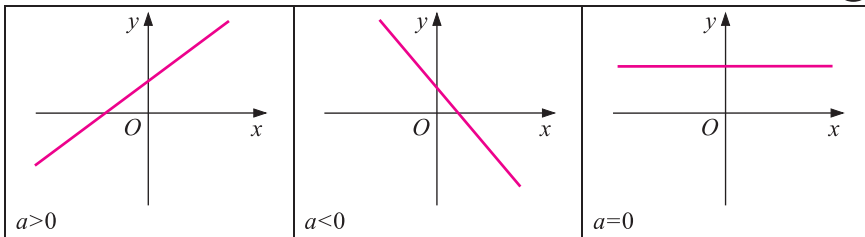
β) Η γραφική παράσταση της  $|f|$  αποτελείται από τα τμήματα της  $C_f$  που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα  $x'x$ , των τμημάτων της  $C_f$  που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).



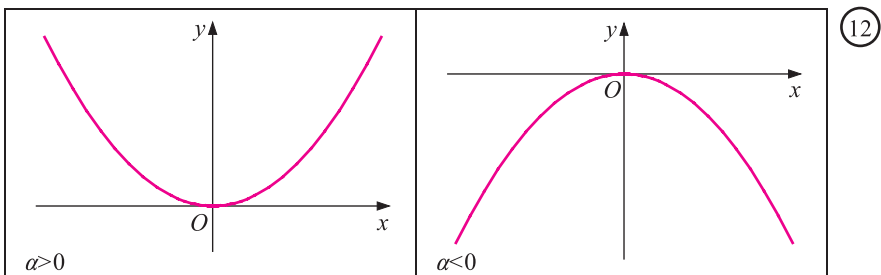
### Μερικές βασικές συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων, τις οποίες γνωρίσαμε σε προηγούμενες τάξεις.

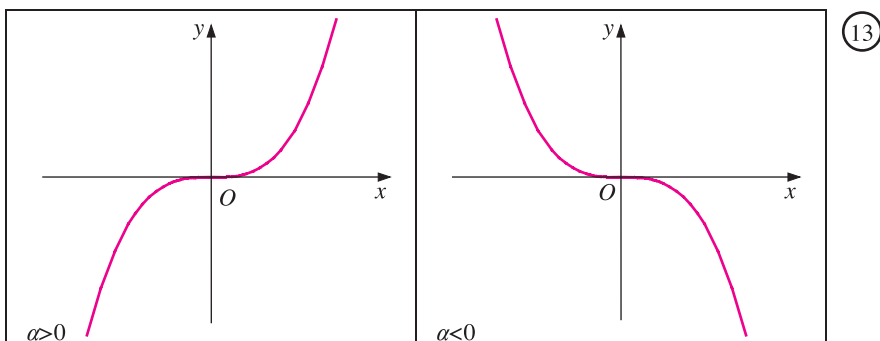
Η πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x) = ax + \beta$ .



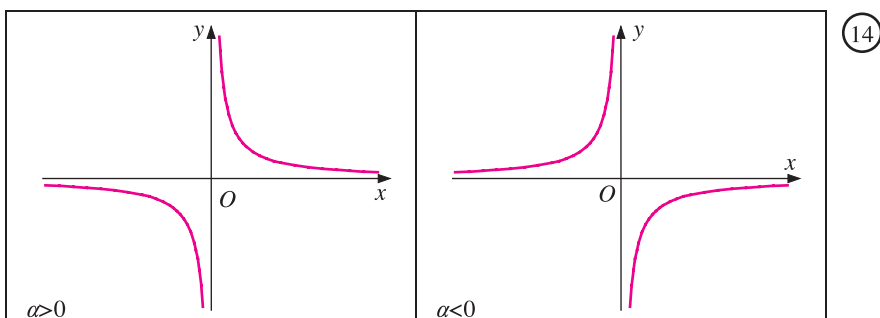
Η πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ .



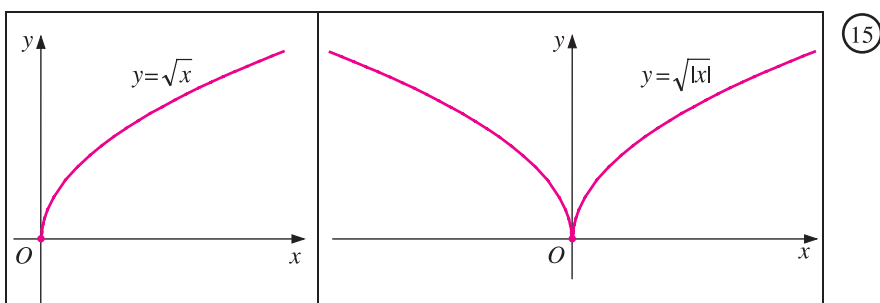
Η πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x) = ax^3$ ,  $a \neq 0$ .



Η ρητή συνάρτηση  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,  $a \neq 0$ .



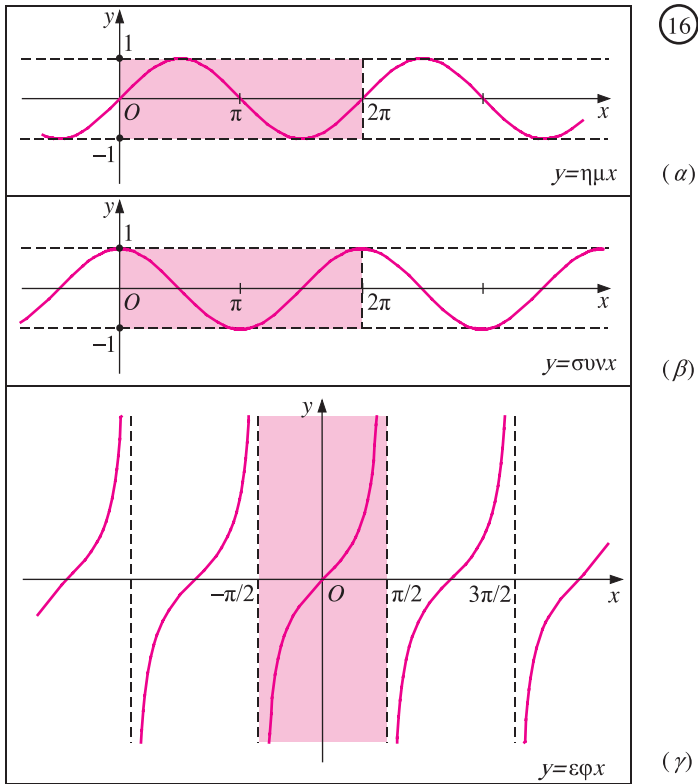
Οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{|x|}$ .



Επειδή  $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ , η γραφική παράσταση της  $y = \sqrt{|x|}$  αποτελείται από δύο

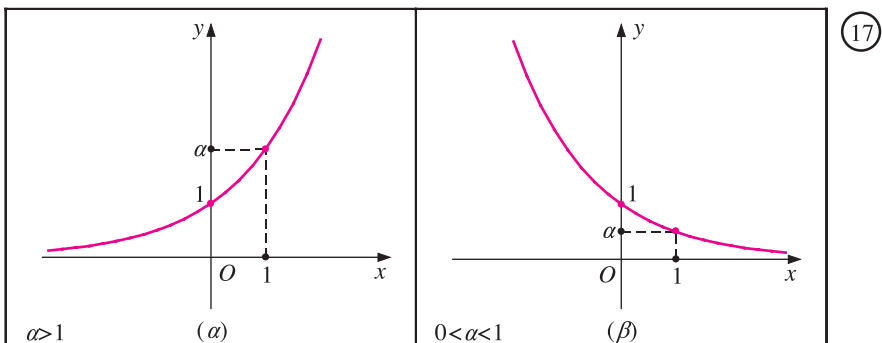
κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της  $y = \sqrt{x}$  και ο άλλος η συμμετρική της ως προς τον άξονα  $y'y$ .

Οι τριγωνικές συναρτήσεις:  $f(x) = \eta\mu x$ ,  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ ,  $f(x) = \epsilon\phi x$ .



Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις  $f(x) = \eta\mu x$  και  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  είναι περιοδικές με περίοδο  $T = 2\pi$ , ενώ η συνάρτηση  $f(x) = \epsilon\phi x$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = \pi$ .

**Η εκθετική συνάρτηση  $f(x) = a^x$ ,  $0 < a \neq 1$ .**



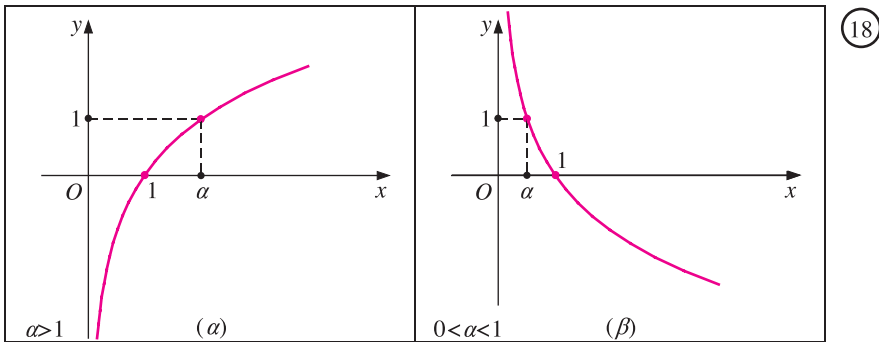
Υπενθυμίζουμε ότι:

αν  $a > 1$ , τότε:  $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ενώ

αν  $0 < a < 1$ , τότε:  $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$ .

Η λογαριθμική συνάρτηση  $f(x) = \log_a x$ ,  $0 < a \neq 1$ .



Υπενθυμίζουμε ότι:

1)  $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

4)  $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

2)  $\log_a a^x = x$  και  $a^{\log_a x} = x$

5)  $\log_a \left( \frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$

3)  $\log_a a = 1$  και  $\log_a 1 = 0$

6)  $\log_a x_1^k = k \log_a x_1$

7) αν  $a > 1$ , τότε:  $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ενώ

αν  $0 < a < 1$ , τότε:  $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$ .

8)  $a^x = e^{x \ln a}$ , αφού  $a = e^{\ln a}$ .

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων μπορούμε να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων, όπως στην παρακάτω εφαρμογή.



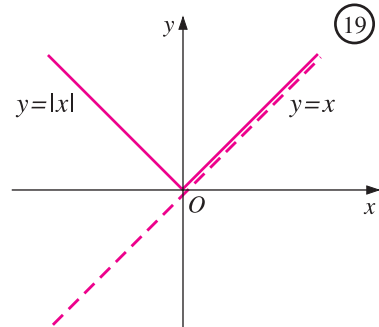
## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να παραστήσετε γραφικά κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις:

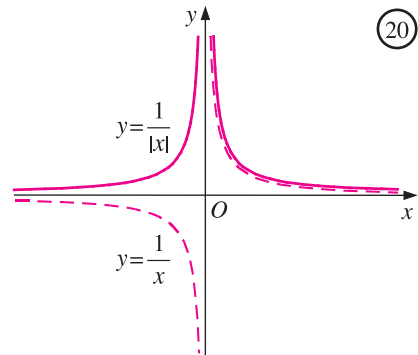
i)  $f(x) = |x|$ ,    ii)  $g(x) = \frac{1}{|x|}$ ,    iii)  $h(x) = \frac{1}{|x-1|}$ .

### ΛΥΣΗ

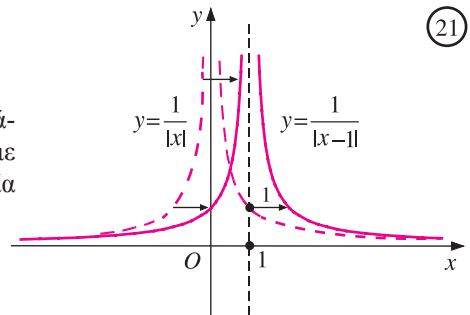
- i) Αρχικά παριστάνουμε γραφικά τη συνάρτηση  $\varphi(x) = x$  και έπειτα την  $f(x) = |\varphi(x)|$ .



- ii) Αρχικά παριστάνουμε γραφικά τη συνάρτηση  $\varphi(x) = \frac{1}{x}$  και έπειτα την  $g(x) = |\varphi(x)|$ .



- iii) Επειδή  $h(x) = g(x - 1)$ , η γραφική παράσταση της  $h$  προκύπτει, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της  $g$  κατά μία μονάδα προς τα δεξιά.



### Ισότητα συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} \quad \text{και} \quad g(x) = x.$$

Παρατηρούμε ότι:

— οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  έχουν κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο  $A = \mathbb{R}$  και

— για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f(x) = g(x)$ , αφού

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x = g(x).$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες. Γενικά:

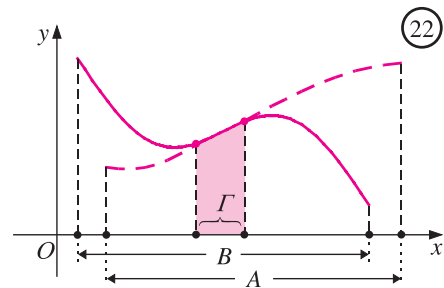
### ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού  $A$  και
- για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f(x) = g(x)$ .

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες γράφουμε  $f = g$ .

Εστω τώρα  $f, g$  δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A, B$  αντιστοίχως και  $\Gamma$  ένα υποσύνολο των  $A$  και  $B$ . Αν για κάθε  $x \in \Gamma$  ισχύει  $f(x) = g(x)$ , τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες στο σύνολο  $\Gamma$ . (Σχ. 22)



Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ και } g(x) = \frac{x^2 + x}{x},$$

που έχουν πεδία ορισμού τα σύνολα  $A = \mathbb{R} - \{1\}$  και  $B = \mathbb{R} - \{0\}$  αντιστοίχως, είναι ίσες στο σύνολο  $\Gamma = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ , αφού για κάθε  $x \in \Gamma$  ισχύει

$$f(x) = g(x) = x + 1.$$

### Πράξεις με συναρτήσεις

Εστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{1-x}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

και οι

$$\varphi_1(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x}, \quad \varphi_2(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}, \quad \varphi_3(x) = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x}, \quad \varphi_4(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}.$$

Παρατηρούμε ότι:

α) Το πεδίο ορισμού των  $\varphi_1, \varphi_2$  και  $\varphi_3$  είναι το σύνολο  $[0, 1]$ , που είναι η τομή των πεδίων ορισμού  $A = (-\infty, 1]$  και  $B = [0, +\infty)$  των  $f, g$ , ενώ το πεδίο ορισμού της  $\varphi_4$  είναι το

σύνολο  $(0, 1]$ , που είναι η τομή των  $A, B$  αν εξαιρέσουμε τα  $x$  για τα οποία ισχύει  $g(x) = 0$ , και

$$\beta) \varphi_1(x) = f(x) + g(x), \varphi_2(x) = f(x) - g(x), \varphi_3(x) = f(x) \cdot g(x), \varphi_4(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Τις συναρτήσεις  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  και  $\varphi_4$  τις λέμε άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο αντιστοίχως των  $f, g$ . Γενικά:

Ορίζουμε ως **άθροισμα**  $f + g$ , **διαφορά**  $f - g$ , **γινόμενο**  $fg$  και **πηλίκο**  $\frac{f}{g}$  δύο συναρτήσεων  $f, g$  τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Το πεδίο ορισμού των  $f + g, f - g$  και  $fg$  είναι η τομή  $A \cap B$  των πεδίων ορισμού  $A$  και  $B$  των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της  $\frac{f}{g}$  είναι το  $A \cap B$ , εξαιρουμένων των τιμών του  $x$  που μηδενίζουν τον παρονομαστή  $g(x)$ , δηλαδή το σύνολο

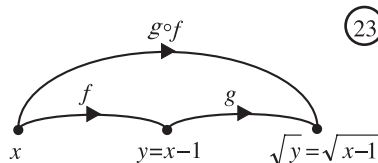
$$\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}.$$

### Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω η συνάρτηση  $\varphi(x) = \sqrt{x-1}$ . Η τιμή της  $\varphi$  στο  $x$  μπορεί να οριστεί σε δύο φάσεις ως εξής:

α) Στο  $x \in \mathbb{R}$  αντιστοιχίζουμε τον αριθμό  $y = x - 1$  και στη συνέχεια

β) στο  $y = x - 1$  αντιστοιχίζουμε τον αριθμό  $\sqrt{y} = \sqrt{x-1}$ , εφόσον  $y = x - 1 \geq 0$ .



Στη διαδικασία αυτή εμφανίζονται δύο συναρτήσεις:

α) η  $f(x) = x - 1$ , που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο  $A = \mathbb{R}$  (α' φάση) και

β) η  $g(y) = \sqrt{y}$ , που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο  $B = [0, +\infty)$  (β' φάση).

Έτσι, η τιμή της  $\varphi$  στο  $x$  γράφεται τελικά

$$\varphi(x) = g(f(x)).$$

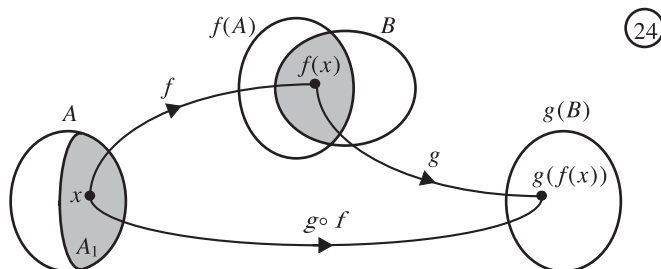
Η συνάρτηση  $\varphi$  λέγεται σύνθεση της  $f$  με την  $g$  και συμβολίζεται με  $g \circ f$ .

Το πεδίο ορισμού της  $\varphi$  δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού  $A$  της  $f$ , αλλά περιορίζεται στα  $x \in A$  για τα οποία η τιμή  $f(x)$  ανήκει στο πεδίο ορισμού  $B$  της  $g$ , δηλαδή είναι το σύνολο  $A_1 = [1, +\infty)$ . Γενικά:

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού  $A, B$  αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της  $f$  με την  $g$** , και τη συμβολίζουμε με  $g \circ f$ , τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



Το πεδίο ορισμού της  $g \circ f$  αποτελείται από όλα τα στοιχεία  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία το  $f(x)$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $g$ . Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η  $g \circ f$  ορίζεται αν  $A_1 \neq \emptyset$ , δηλαδή αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

### ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του βιβλίου, θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = \sqrt{x}$ . Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i)  $g \circ f$

ii)  $f \circ g$ .

**ΛΥΣΗ**

Η συνάρτηση  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $D_f = (0, +\infty)$ , ενώ η  $g$  το  $D_g = [0, +\infty)$ .

i) Για να ορίζεται η παράσταση  $g(f(x))$  πρέπει:

$$x \in D_f \quad \text{και} \quad f(x) \in D_g \quad (1)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1,$$

δηλαδή πρέπει  $x \geq 1$ . Επομένως, ορίζεται η  $g \circ f$  και είναι

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}, \text{ για κάθε } x \in [1, +\infty).$$

ii) Για να ορίζεται η παράσταση  $f(g(x))$  πρέπει:

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0,$$

δηλαδή πρέπει  $x > 0$ . Επομένως, ορίζεται η  $f \circ g$  και είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

**ΣΧΟΛΙΑ**

- Στην παραπάνω εφαρμογή παρατηρούμε ότι  $g \circ f \neq f \circ g$ . Γενικά, αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι  $g \circ f$  και  $f \circ g$ , τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

- Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $h \circ (g \circ f)$ , τότε ορίζεται και η  $(h \circ g) \circ f$  και ισχύει

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των  $f, g$  και  $h$  και τη συμβολίζουμε με  $h \circ g \circ f$ . Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

1. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων;

i)  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$ ,      ii)  $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{2-x}$

iii)  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$       iv)  $f(x) = \ln(1-e^x)$

2. Για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ , όταν:

i)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ,      ii)  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ ,      iii)  $f(x) = e^x - 1$ .

3. Για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ , όταν:

i)  $f(x) = x^3 + 2x + 1$       και       $g(x) = x + 1$

ii)  $f(x) = x^3 + x - 2$       και       $g(x) = x^2 + x - 2$ .

4. Οι ανθρωπολόγοι εκτιμούν ότι το ύψος του ανθρώπου δίνεται από τις συναρτήσεις:

$$A(x) = 2,89x + 70,64 \text{ (για τους άνδρες) και}$$

$$Γ(x) = 2,75x + 71,48 \text{ (για τις γυναίκες)}$$

όπου  $x$  σε εκατοστά, το μήκος του βραχίονα. Σε μία ανασκαφή βρέθηκε ένα οστό από βραχίονα μήκους 0,45 m.

α) Αν προέρχεται από άνδρα ποιο ήταν το ύψος του;

β) Αν προέρχεται από γυναίκα ποιο ήταν το ύψος της;

5. Σύρμα μήκους  $\ell = 20$  cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη  $x$  cm και  $(20 - x)$  cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του  $x$ .

6. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$\text{i) } f(x) = \frac{|x|}{x} + 1,$$

$$\text{ii) } f(x) = x|x|,$$

$$\text{iii) } f(x) = \begin{cases} -x+3, & x < 1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{iv) } f(x) = |\ln x|.$$

Και από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο των τιμών της  $f$  σε καθεμιά περίπτωση.

7. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι  $f = g$ . Στις περιπτώσεις που είναι  $f \neq g$  να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f(x) = g(x)$ .

$$\text{i) } f(x) = \sqrt{x^2} \quad \text{και} \quad g(x) = (\sqrt{x})^2$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + |x|} \quad \text{και} \quad g(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x} + 1.$$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις  $f+g$ ,  $f-g$ ,  $fg$  και  $\frac{f}{g}$ .

9. Ομοίως για τις συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

10. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $g \circ f$ , αν

$$\text{i) } f(x) = x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x},$$

$$\text{ii) } f(x) = \eta\mu x \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{\pi}{4} \quad \text{και} \quad g(x) = \epsilon\phi x.$$

11. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + 1$  και  $g(x) = \sqrt{x-2}$ . Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις  $g \circ f$  και  $f \circ g$ .

12. Να εκφράσετε τη συνάρτηση  $f$  ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, αν

i)  $f(x) = \eta\mu(x^2 + 1)$ ,

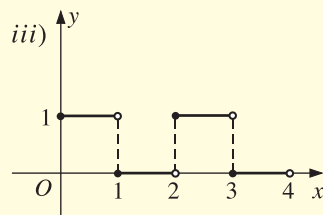
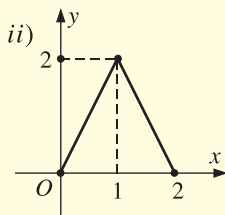
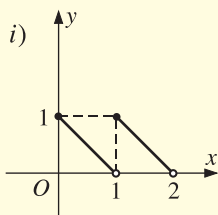
ii)  $f(x) = 2 \eta\mu^2 3x + 1$

iii)  $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$ ,

iv)  $f(x) = \eta\mu^2(3x)$ .

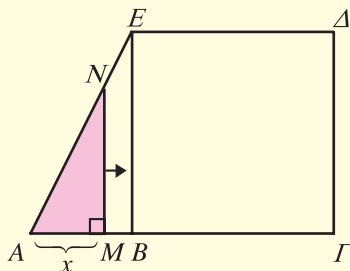
**Β΄ ΟΜΑΔΑΣ**

1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση είναι:

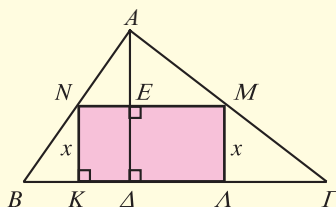


2. Ένα κουτί κυλινδρικού σχήματος έχει ακτίνα βάσης  $x$  cm και όγκο  $628 \text{ cm}^3$ . Το υλικό των βάσεων κοστίζει 4 λεπτά του ευρώ ανά  $\text{cm}^2$ , ενώ το υλικό της κυλινδρικής επιφάνειας 1,25 λεπτά του ευρώ ανά  $\text{cm}^2$ . Να εκφράσετε το συνολικό κόστος ως συνάρτηση του  $x$ . Πόσο κοστίζει ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5 cm;

3. Στο διπλανό σχήμα είναι  $AB = 1$ ,  $AG = 3$  και  $GA = 2$ . Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του  $x = AM$ , όταν το  $M$  διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα  $AG$ .



4. Ένα ορθογώνιο  $KAMN$  ύψους  $x$  cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο  $ABG$  βάσης  $BG = 10$  cm και ύψους  $AA = 5$  cm. Να εκφράσετε το εμβαδό  $E$  και την περίμετρο  $P$  του ορθογωνίου ως συνάρτηση του  $x$ .



5. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

i)  $f(x) = \frac{|x+1| + |x-1|}{2}$ ,

ii)  $f(x) = \frac{\eta\mu x + |\eta\mu x|}{2}$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .



Από τη γραφική παράσταση της  $f$  να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της σε καθεμιά περίπτωση.

6. Να βρείτε συνάρτηση  $f$  τέτοια, ώστε να ισχύει:

i)  $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αν  $g(x) = x + 1$

ii)  $(f \circ g)(x) = \sqrt{1+x^2}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αν  $g(x) = -x^2$

iii)  $(g \circ f)(x) = |\sin x|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αν  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

7. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x + 1$  και  $g(x) = ax + 2$ . Για ποια τιμή του  $a \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f \circ g = g \circ f$ .

8. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{ax + \beta}{x - \alpha}, \text{ με } \beta \neq -\alpha^2 \text{ και } g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1.$$

Να αποδείξετε ότι

α)  $f(f(x)) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$  και

β)  $g(g(x)) = x$ , για κάθε  $x \in [0, 1]$ .

9. Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός  $P$  της πόλης είναι  $x$  εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη  $N = 10\sqrt{2(x^2 + x)}$  χιλιάδες αυτοκίνητα. Έρευνες δείχνουν ότι σε  $t$  έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι  $\sqrt{t} + 4$  εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

i) Να εκφράσετε τον αριθμό  $N$  των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση του  $t$ .

ii) Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα;

### 1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

#### Μονοτονία συνάρτησης

• Οι έννοιες “γνησίως αύξουσα συνάρτηση”, “γνησίως φθίνουσα συνάρτηση” είναι γνωστές από προηγούμενη τάξη. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι:

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

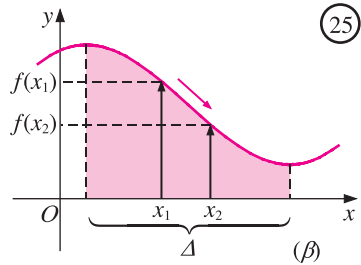
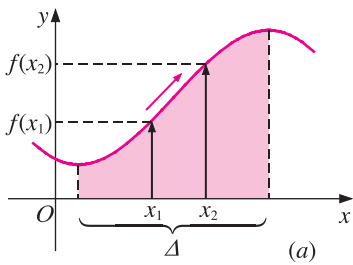
Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται<sup>(1)</sup>:

• **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (Σχ. α)}$$

• **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ (Σχ. β)}$$



Για να δηλώσουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα  $\Delta$ , γράφουμε  $f \uparrow \Delta$  (αντιστοίχως  $f \downarrow \Delta$ ).

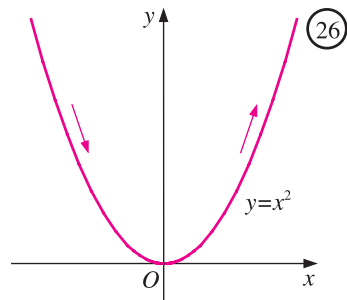
Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = x^2$ :

— είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ , αφού για  $0 \leq x_1 < x_2$  έχουμε  $x_1^2 < x_2^2$ , δηλαδή

$$f(x_1) < f(x_2)$$

— είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$ , αφού για  $x_1 < x_2 \leq 0$  έχουμε  $0 \leq -x_2 < -x_1$ , οπότε  $0 \leq x_2^2 < x_1^2$ , δηλαδή

$$f(x_1) > f(x_2).$$



Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η  $f$  είναι **γνησίως μονότονη στο  $\Delta$** . Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι ένα διάστημα  $\Delta$  και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη.

(1) Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται, απλώς:

• **αύξουσα** σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

• **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

### Ακρότατα συνάρτησης

Οι έννοιες “μέγιστο”, “ελάχιστο” συνάρτησης είναι και αυτές γνωστές από προηγούμενες τάξεις. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι:

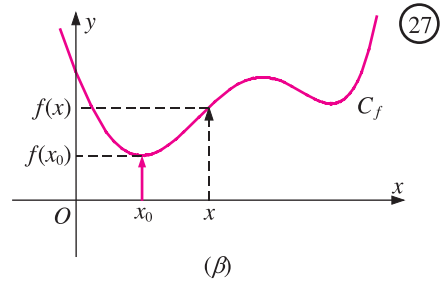
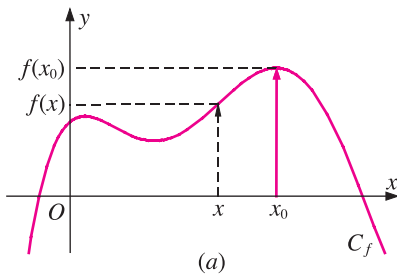
#### ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) **μέγιστο**, το  $f(x_0)$ , όταν  

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \text{ (Σχ. 27α)}$$
- Παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) **ελάχιστο**, το  $f(x_0)$ , όταν  

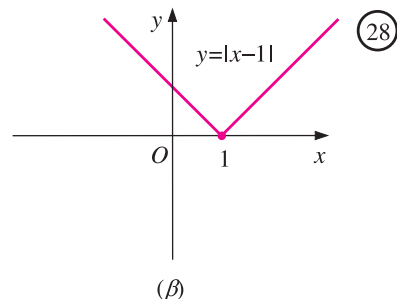
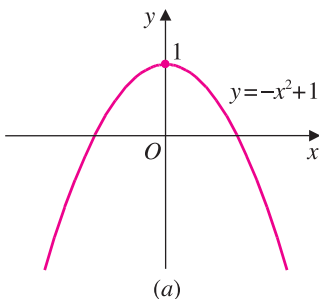
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \text{ (Σχ. 27β)}$$



Για παράδειγμα:

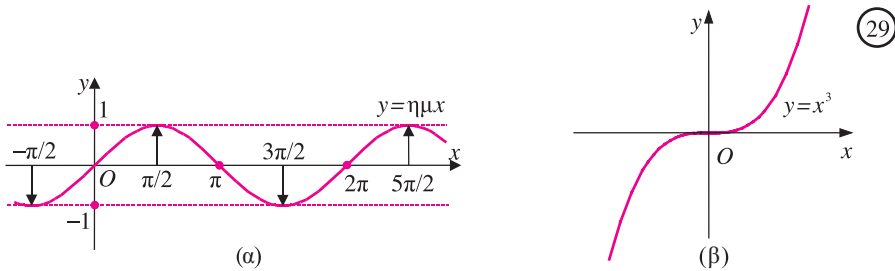
— Η συνάρτηση  $f(x) = -x^2 + 1$  (Σχ. 28α) παρουσιάζει μέγιστο στο  $x_0 = 0$ , το  $f(0) = 1$ , αφού  $f(x) \leq f(0)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

— Η συνάρτηση  $f(x) = |x - 1|$  (Σχ. 28β) παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = 1$ , το  $f(1) = 0$ , αφού  $f(x) \geq f(1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .



— Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  (Σχ. 29α) παρουσιάζει μέγιστο, το  $y = 1$ , σε καθένα από τα σημεία  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  και ελάχιστο, το  $y = -1$ , σε καθένα από τα σημεία  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , αφού  $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

— Η συνάρτηση  $f(x) = x^3$  (Σχ. 29β) δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο, αφού είναι γνησίως αύξουσα.



Όπως είδαμε και στα προηγούμενα παραδείγματα, άλλες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης  $f$  λέγονται **ολικά ακρότατα** της  $f$ .

### Συνάρτηση 1

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Παρατηρούμε ότι για

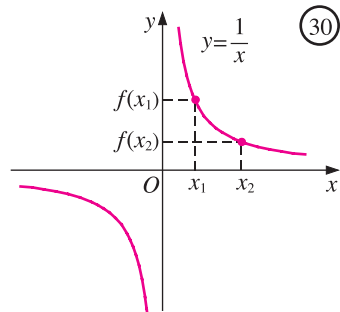
οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \neq 0$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{“Αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2)\text{”},$$

που σημαίνει ότι:

“Τα διαφορετικά στοιχεία  $x_1, x_2 \in D_f$  έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες”.

Λόγω της τελευταίας ιδιότητας η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}$  λέγεται συνάρτηση 1-1 (ένα προς ένα). Γενικά:



### ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

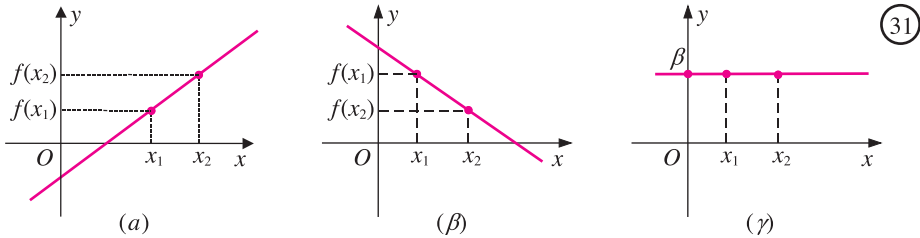
Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι **συνάρτηση 1-1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } x_1 = x_2.$$

Έτσι για παράδειγμα:

— Η συνάρτηση  $f(x) = ax + \beta$ , με  $a \neq 0$  είναι συνάρτηση 1-1. (Σχ. 31α, β)



αφού, αν υποθέσουμε ότι  $f(x_1) = f(x_2)$ , τότε έχουμε διαδοχικά:

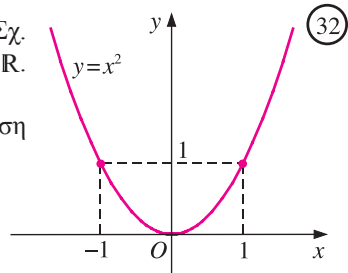
$$ax_1 + \beta = ax_2 + \beta$$

$$ax_1 = ax_2$$

$$x_1 = x_2.$$

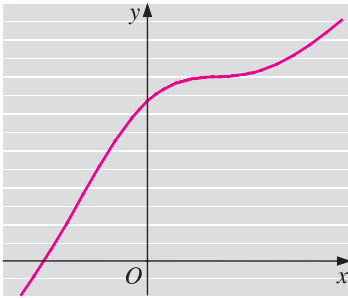
— Η συνάρτηση  $f(x) = \beta$  δεν είναι συνάρτηση 1-1 (Σχ. 31γ), αφού  $f(x_1) = f(x_2) = \beta$  για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .

— Η συνάρτηση  $f(x) = x^2$  (Σχ. 32) δεν είναι συνάρτηση 1-1, αφού  $f(-1) = f(1) = 1$  αν και είναι  $-1 \neq 1$ .

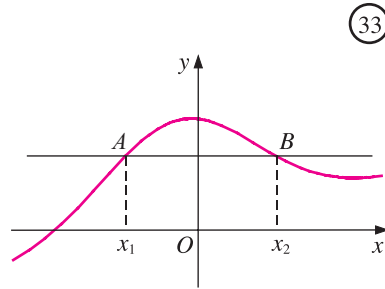


## ΣΧΟΛΙΑ

- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν:
  - Για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει ακριβώς μια λύση ως προς  $x$ .
  - Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  το πολύ σε ένα σημείο (Σχ. 33α).
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση "1-1".



συνάρτηση 1-1

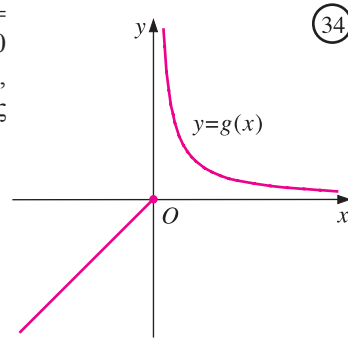


συνάρτηση όχι 1-1

33

Έτσι, οι συναρτήσεις  $f_1(x) = ax + \beta$ ,  $a \neq 0$ ,  $f_2(x) = ax^3$ ,  $a \neq 0$ ,  $f_3(x) = a^x$ ,  $0 < a \neq 1$  και  $f_4(x) = \log_a x$ ,  $0 < a \neq 1$ , είναι συναρτήσεις 1-1. Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , x > 0 \end{cases} \quad (\text{Σχ. 34}).$$



34

**Αντίστροφη συνάρτηση**

• Έστω μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών,  $f(A)$ , της  $f$  υπάρχει μοναδικό στοιχείο  $x$  του πεδίου ορισμού της  $A$  για το οποίο ισχύει  $f(x) = y$ . Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

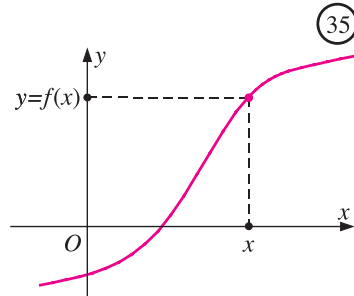
$$g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

με την οποία κάθε  $y \in f(A)$  αντιστοιχίζεται στο μοναδικό  $x \in A$  για το οποίο ισχύει  $f(x) = y$ .

Από τον τρόπο που ορίστηκε η  $g$  προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών  $f(A)$  της  $f$ ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού  $A$  της  $f$  και
- ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x.$$



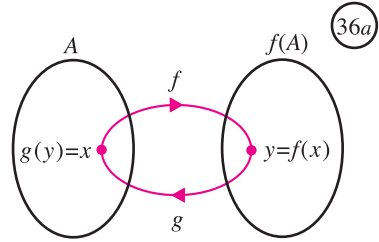
35

Αυτό σημαίνει ότι, αν η  $f$  αντιστοιχίζει το  $x$  στο  $y$ , τότε η  $g$  αντιστοιχίζει το  $y$  στο  $x$  και αντιστρόφως. Δηλαδή η  $g$  είναι η αντίστροφη διαδικασία της  $f$ . Για το λόγο αυτό η  $g$  λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της  $f$  και συμβολίζεται με  $f^{-1}$ . Επομένως έχουμε

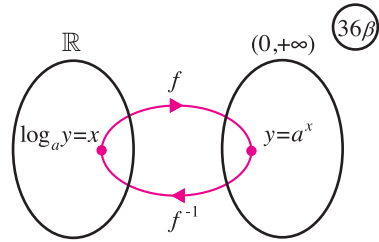
$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

οπότε

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A).$$



Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση  $f(x) = a^x$ . Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι 1-1 με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και σύνολο τιμών το  $(0, +\infty)$ . Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$ . Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,



— έχει πεδίο ορισμού το  $(0, +\infty)$

— έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  και

— αντιστοιχίζει κάθε  $y \in (0, +\infty)$  στο μοναδικό  $x \in \mathbb{R}$  για το οποίο ισχύει  $a^x = y$ . Επειδή όμως

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

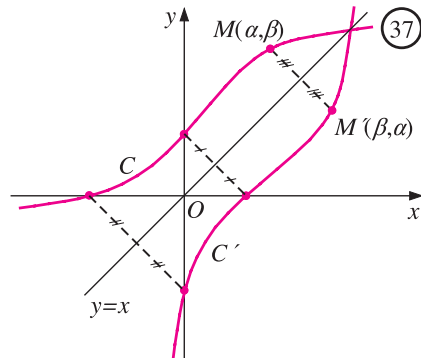
θα είναι  $f^{-1}(y) = \log_a y$ . Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης  $f(x) = a^x$ ,  $0 < a \neq 1$ , είναι η λογαριθμική συνάρτηση  $g(x) = \log_a x$ . Συνεπώς

$$\log_a a^x = x, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad a^{\log_a x} = x, x \in (0, +\infty)$$

• Ας πάρουμε τώρα μια 1-1 συνάρτηση  $f$  και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των  $f$  και της  $f^{-1}$  στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37). Επειδή

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x,$$

αν ένα σημείο  $M(a, \beta)$  ανήκει στη γραφική παράσταση  $C$  της  $f$ , τότε το σημείο  $M'(\beta, a)$  θα ανήκει στη γραφική παράσταση  $C'$  της  $f^{-1}$  και



αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ . Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

Έτσι, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = a^x$  και  $g(x) = \log_a x$ ,  $0 < a \neq 1$ , είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση  $f(x) = 2e^{3x-2} + 1$  είναι **1** και να βρεθεί η αντίστροφη της.

### ΛΥΣΗ

— Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_1) = f(x_2)$ . Θα δείξουμε ότι  $x_1 = x_2$ . Πράγματι έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$2e^{3x_1-2} + 1 = 2e^{3x_2-2} + 1$$

$$2e^{3x_1-2} = 2e^{3x_2-2}$$

$$e^{3x_1-2} = e^{3x_2-2}$$

$$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$$

$$3x_1 = 3x_2$$

$$x_1 = x_2.$$

— Για να βρούμε την αντίστροφη της  $f$  θέτουμε  $y = f(x)$  και λύνουμε ως προς  $x$ . Έχουμε λοιπόν:

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2e^{3x-2} + 1 = y$$

$$\Leftrightarrow 2e^{3x-2} = y - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{3x-2} = \frac{y-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 = \ln \frac{y-1}{2}, \quad y > 1$$



$$\Leftrightarrow 3x = \ln \frac{y-1}{2} + 2, \quad y > 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ln \frac{y-1}{2} + \frac{2}{3}, \quad y > 1.$$

Επομένως,  $f^{-1}(y) = \frac{1}{3} \ln \frac{y-1}{2} + \frac{2}{3}$ ,  $y > 1$ , οπότε η αντίστροφη της  $f$  είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{2} + \frac{2}{3}, \quad x > 1.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες

i)  $f(x) = \sqrt{1-x}$

ii)  $f(x) = 2\ln(x-2) - 1$

iii)  $f(x) = 3e^{-x} + 1$

iv)  $f(x) = (x-1)^2 - 1, \quad x \leq 1.$

2. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της

i)  $f(x) = 3x - 2$

v)  $f(x) = \ln(1-x)$

ii)  $f(x) = x^2 + 1$

vi)  $f(x) = e^{-x} + 1$

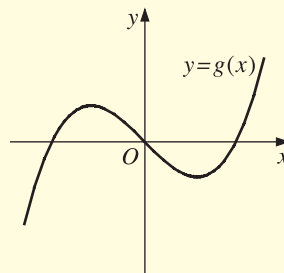
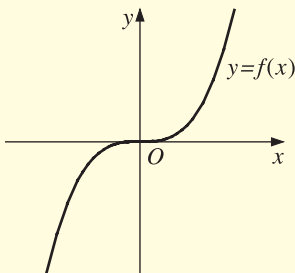
iii)  $f(x) = (x-1)(x-2) + 1$

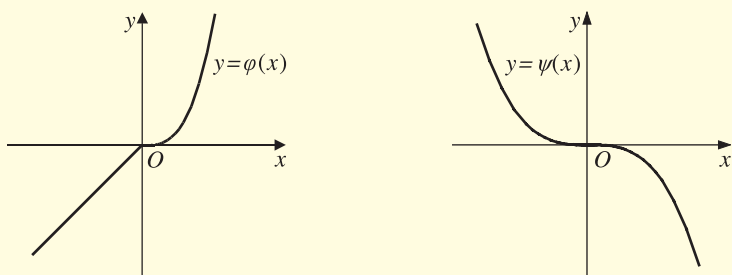
vii)  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

iv)  $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

viii)  $f(x) = |x-1|.$

3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$ ,  $g$ ,  $\varphi$  και  $\psi$ .





Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις  $f, g, \varphi, \psi$  έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

4. Να δείξετε ότι:

- i) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η συνάρτηση  $-f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ .
- ii) Αν δύο συναρτήσεις  $f, g$  είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η συνάρτηση  $f + g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .
- iii) Αν δύο συναρτήσεις  $f, g$  είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f(x) \geq 0$  και  $g(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ , τότε η συνάρτηση  $fg$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

Ανάλογα συμπεράσματα διατυπώνονται, αν οι  $f, g$  είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

## 1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

### Εισαγωγή

Η έννοια του ορίου γεννήθηκε στην προσπάθεια των μαθηματικών να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως:

- Τι ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού;
- Τι ονομάζουμε εφαπτομένη μιας καμπύλης σε ένα σημείο της;
- Τι ονομάζουμε εμβαδό ενός μικτόγραμμου χωρίου;

Στις παραγράφους που ακολουθούν, αρχικά προσεγγίζουμε την έννοια του ορίου “διαισθητικά”, στη συνέχεια διατυπώνουμε τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό του ορίου και μερικές βασικές ιδιότητές του και τέλος, εισάγουμε την έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης.

### Η έννοια του ορίου

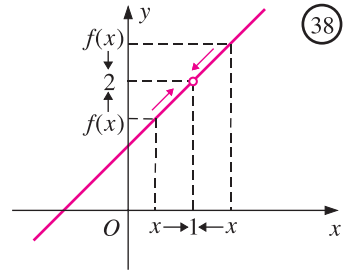
• Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$  και γράφεται

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, x \neq 1.$$



Επομένως, η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία  $y = x + 1$  με εξαίρεση το σημείο  $A(1, 2)$  (Σχ. 38). Στο σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι:

“Καθώς το  $x$ , κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα  $x'$ , προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το  $f(x)$ , κινούμενο πάνω στον άξονα  $y'$ , προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2. Και μάλιστα, οι τιμές  $f(x)$  είναι τόσο κοντά στο 2 όσο θέλουμε, για όλα τα  $x \neq 1$  που είναι αρκούντως κοντά στο 1”.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

και διαβάζουμε

“το όριο της  $f(x)$ , όταν το  $x$  τείνει στο 1, είναι 2”.

Γενικά:

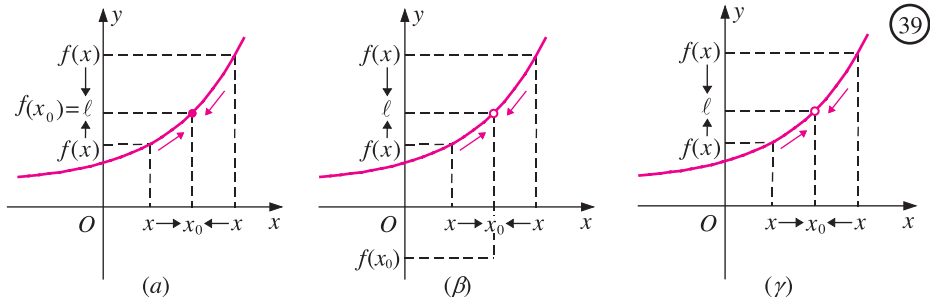
Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης  $f$  προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό  $\ell$ , καθώς το  $x$  προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό  $x_0$ , τότε γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

και διαβάζουμε

“το όριο της  $f(x)$ , όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$ , είναι  $\ell$ ” ή

“το όριο της  $f(x)$  στο  $x_0$  είναι  $\ell$ ”.



**ΣΧΟΛΙΟ**

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

— Για να αναζητήσουμε το όριο της  $f$  στο  $x_0$ , πρέπει η  $f$  να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο  $x_0$ ”, δηλαδή η  $f$  να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής

$$(a, x_0) \cup (x_0, \beta) \text{ ή } (a, x_0) \text{ ή } (x_0, \beta).$$

— Το  $x_0$  μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ’ αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της  $f$  στο  $x_0$ , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο  $x_0$  (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

• Έστω, τώρα, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ -x+5, & x > 1 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες του διπλανού σχήματος.

Παρατηρούμε ότι:

— Όταν το  $x$  προσεγγίζει το 1 από αριστερά ( $x < 1$ ), τότε οι τιμές της  $f$  προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2.$$

— Όταν το  $x$  προσεγγίζει το 1 από δεξιά ( $x > 1$ ), τότε οι τιμές της  $f$  προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4.$$

Γενικά:

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης  $f$  προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό  $\ell_1$ , καθώς το  $x$  προσεγγίζει το  $x_0$  από μικρότερες τιμές ( $x < x_0$ ), τότε γράφουμε:

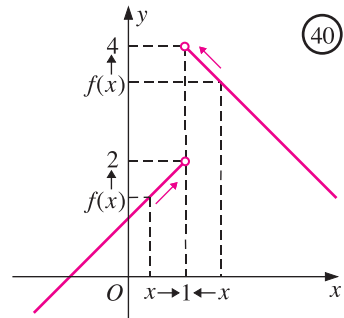
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$$

και διαβάζουμε:

“το όριο της  $f(x)$ , όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$  από τα αριστερά, είναι  $\ell_1$ ”.

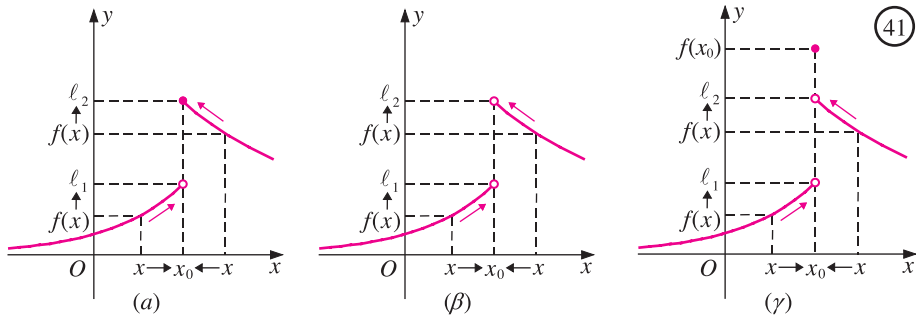
— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης  $f$  προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό  $\ell_2$ , καθώς το  $x$  προσεγγίζει το  $x_0$  από μεγαλύτερες τιμές ( $x > x_0$ ), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$$



και διαβάζουμε:

“το όριο της  $f(x)$ , όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$  από τα δεξιά, είναι  $\ell_2$ ”.



Τους αριθμούς  $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  και  $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  τους λέμε **πλευρικά όρια** της  $f$  στο  $x_0$

και συγκεκριμένα το  $\ell_1$  **αριστερό όριο** της  $f$  στο  $x_0$ , ενώ το  $\ell_2$  **δεξιό όριο** της  $f$  στο  $x_0$ .

Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

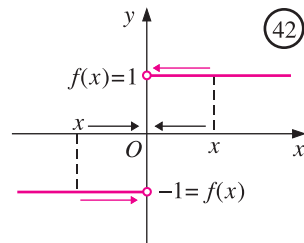
Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  (Σχ. 42) δεν έχει όριο στο  $x_0 = 0$ , αφού:

— για  $x < 0$  είναι  $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ ,  
ενώ

— για  $x > 0$  είναι  $f(x) = \frac{x}{x} = 1$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ,

και έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$



### Ορισμός του ορίου στο $x_0 \in \mathbb{R}$

• Στα προηγούμενα γνωρίσαμε την έννοια του ορίου διαισθητικά. Είδαμε ότι, όταν γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , εννοούμε ότι οι τιμές  $f(x)$  βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο  $\ell$ ,

για όλα τα  $x \neq x_0$  τα οποία βρίσκονται “αρκούντως κοντά στο  $x_0$ ”. Για να διατυπώσουμε, τώρα, τα παραπάνω σε μαθηματική γλώσσα εργαζόμαστε ως εξής:

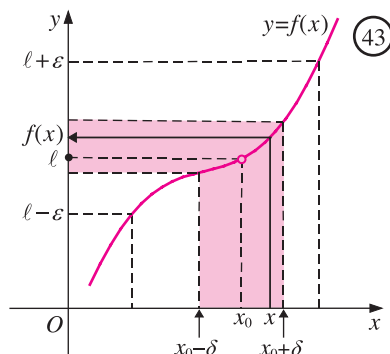
— Στη θέση της φράσης “οι τιμές  $f(x)$  βρίσκονται οσοδήποτε θέλουμε κοντά στο  $\ell$ ” χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad (1)$$

όπου  $\varepsilon$  οποιοσδήποτε θετικός αριθμός.

— Στη θέση της φράσης “για όλα τα  $x \neq x_0$  που βρίσκονται αρκούντως κοντά στο  $x_0$ ” χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad (2)$$



όπου  $\delta$  είναι ένας αρκούντως μικρός θετικός αριθμός. (Η ανισότητα  $0 < |x - x_0|$  δηλώνει ότι  $x \neq x_0$ ).

— Για να συνδέσουμε τις δυο αυτές φράσεις σύμφωνα με τον διαισθητικό ορισμό λέμε ότι για οποιονδήποτε θετικό αριθμό  $\varepsilon$  μπορούμε να βρούμε έναν θετικό αριθμό  $\delta$  τέτοιο ώστε, αν το  $x$  ικανοποιεί τη (2), τότε το  $f(x)$  θα ικανοποιεί την (1). Έχουμε δηλαδή τον ακόλουθο ορισμό:

**ΟΡΙΣΜΟΣ\***

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Θα λέμε ότι η  $f$  έχει στο  $x_0$  όριο  $\ell \in \mathbf{R}$ , όταν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιος, ώστε για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , με  $0 < |x - x_0| < \delta$ , να ισχύει:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  έχει όριο στο  $x_0$ , τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται, όπως είδαμε, με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Στη συνέχεια, όταν γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , θα εννοούμε ότι υπάρχει το όριο της  $f$  στο  $x_0$  και είναι ίσο με  $\ell$ .

Συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0 \\ (\beta) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell \end{aligned}$$

• Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής  $(x_0, \beta)$  και την ανισότητα  $0 < |x - x_0| < \delta$  την αντικαταστήσουμε με την  $x_0 < x < x_0 + \delta$ , τότε έχουμε τον ορισμό του  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ , ενώ αν η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$  και

την ανισότητα  $0 < |x - x_0| < \delta$  την αντικαταστήσουμε με την  $x_0 - \delta < x < x_0$ , τότε έχουμε τον ορισμό του  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

Αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε ισχύει η ισοδυναμία:

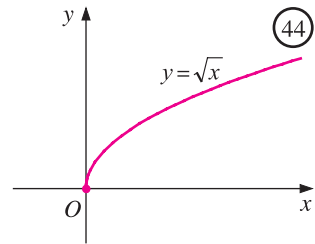
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

• Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής  $(x_0, \beta)$ , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$ , τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad (\text{Σχ. 44})$$

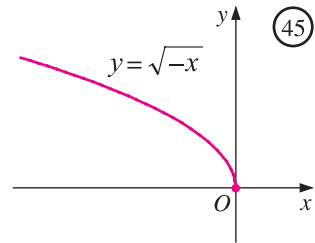


• Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$ , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής  $(x_0, \beta)$ , τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0 \quad (\text{Σχ. 45})$$



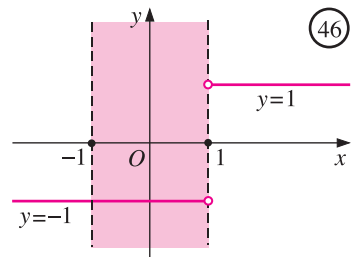
## ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  είναι ανεξάρτητο των άκρων  $\alpha, \beta$  των διαστημάτων  $(\alpha, x_0)$  και  $(x_0, \beta)$  στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η  $f$ .

Έτσι για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης  $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$  στο  $x_0 = 0$ , περιοριζόμαστε στο υποσύνολο  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή

$$f(x) = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1.$$

Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, το ζητούμενο όριο είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ .



### ΣΥΜΒΑΣΗ

Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  έχει **κοντά στο  $x_0$**  μια ιδιότητα  $P$  θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

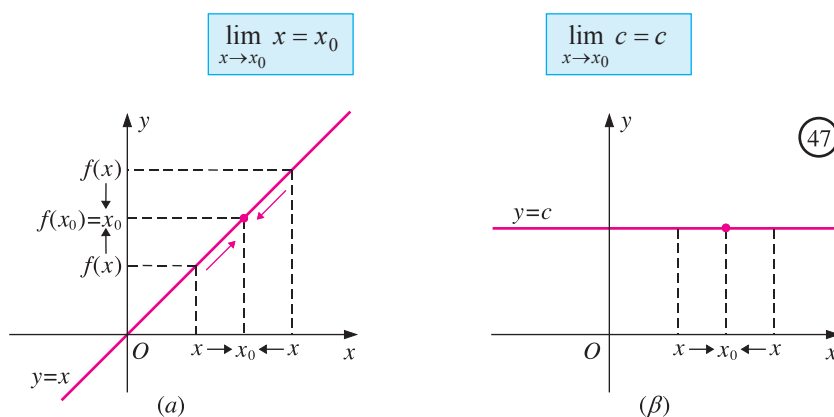
- α) Η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα  $P$ .
- β) Η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0)$ , έχει σ' αυτό την ιδιότητα  $P$ , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής  $(x_0, \beta)$ .
- γ) Η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(x_0, \beta)$ , έχει σ' αυτό την ιδιότητα  $P$ , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0)$ .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$  είναι θετική κοντά στο  $x_0 = 0$ , αφού ορίζεται

στο σύνολο  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  και είναι θετική σε αυτό.

### Όριο ταυτοτικής - σταθερής συνάρτησης

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι:



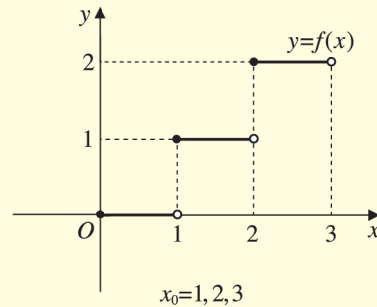
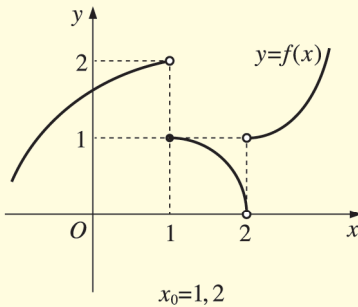
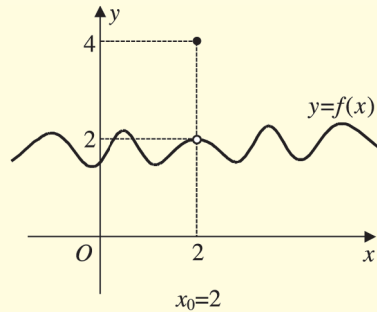
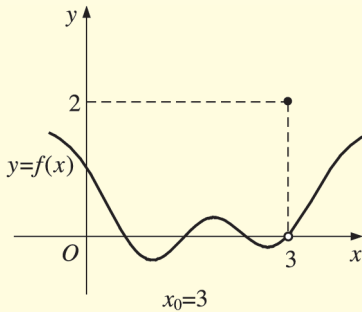
Η πρώτη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x) = x$  (Σχ. 47α) στο  $x_0$  είναι ίσο με την τιμή της στο  $x_0$ , ενώ η δεύτερη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της σταθερής συνάρτησης  $g(x) = c$  (Σχ. 47β) στο  $x_0$  είναι ίσο με  $c$ .



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και το  $f(x_0)$ , εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  είναι:



2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , όταν:

$$\text{i) } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, \quad x_0 = 2$$

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

$$\text{iii) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

$$\text{iv) } f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}, \quad x_0 = 0.$$

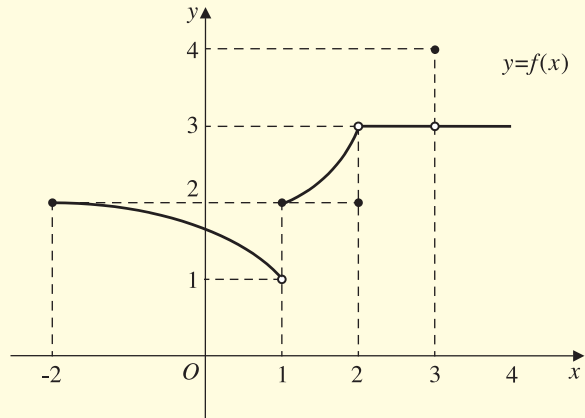
3. Ομοίως όταν:

$$\text{i) } f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1}, \quad x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -1$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{3x - 1}, \quad x_0 = \frac{1}{3}.$$

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη στο  $[-2, +\infty)$  και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

- i)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$
- ii)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$
- iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
- iv)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$
- v)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$
- vi)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$



5. Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , με  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda^2 - 6$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

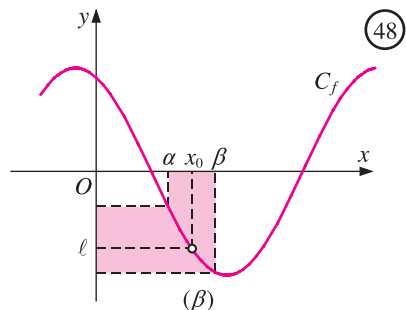
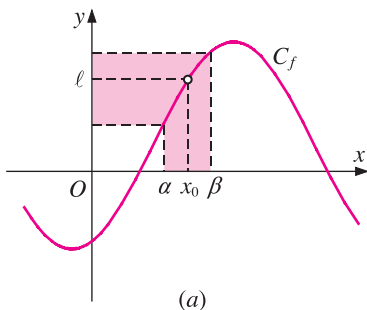
## 1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

### Όριο και διάταξη

Για το όριο και τη διάταξη αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

#### ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$  (Σχ. 48α)
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$  (Σχ. 48β)

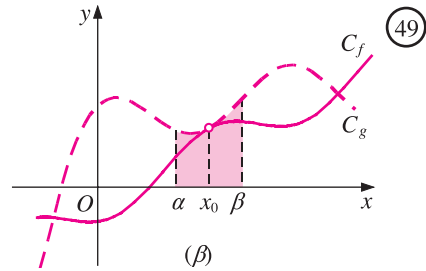
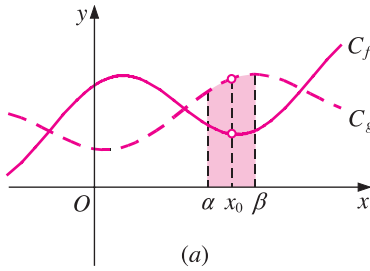


48

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο**

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

**Όρια και πράξεις**

Τα δύο βασικά όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$  και το θεώρημα που ακολουθεί διευκολύνουν τον υπολογισμό των ορίων.

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ , τότε:

- 1  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 2  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , για κάθε σταθερά  $\kappa \in \mathbb{R}$
- 3  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 4  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ , εφόσον  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
- 5  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
- 6  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ , εφόσον  $f(x) \geq 0$  κοντά στο  $x_0$ .

Οι ιδιότητες 1 και 3 του θεωρήματος ισχύουν και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις. Άμεση συνέπεια αυτού είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^v = x_0^v$$

— Έστω τώρα το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \text{ και } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + \alpha_0 = P(x_0). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 6x^2 + 7x - 2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 2 = -4.$$

— Έστω η ρητή συνάρτηση  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , όπου  $P(x)$ ,  $Q(x)$  πολυώνυμα του  $x$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$  με  $Q(x_0) \neq 0$ . Τότε,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^2 + 2x + 1} = \frac{2^2 + 4}{2^2 + 2 \cdot 2 + 1} = \frac{8}{9}.$$

### ΣΧΟΛΙΟ

Όταν  $Q(x_0) = 0$ , τότε δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα 4 του παραπάνω θεωρήματος. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 1 ii), που ακολουθεί.

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ****1** Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 + 1)^9 \cdot |x^3 - 1|] \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}{x - 1}.$$

**ΛΥΣΗ**

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 + 1)^9 \cdot |x^3 - 1|] &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)^9 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} |x^3 - 1| \\ &= [\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)]^9 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} |x^3 - 1| \\ &= 1^9 \cdot |-1| = 1. \end{aligned}$$

ii) Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$ , δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου (ιδιότητα 4). Παρατηρούμε όμως ότι για  $x = 2$  μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος. Οπότε η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4}$ , για  $x \neq 2$ , γράφεται:

$$f(x) = \frac{x(x^2 - 5x + 6)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x-3)}{x+2} = \frac{x^2 - 3x}{x+2}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x}{x+2} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{2 + 2} = -\frac{1}{2}.$$

iii) Για  $x = 1$  μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με  $\sqrt{x^2 + 3} + 2x$  και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - 2x)(\sqrt{x^2 + 3} + 2x)}{(x-1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2x)} = \frac{(\sqrt{x^2 + 3})^2 - (2x)^2}{(x-1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2x)} \\ &= \frac{-3x^2 + 3}{(x-1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2x)} = \frac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2x)} = \frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2 + 3} + 2x}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1}(-3(x+1))}{\lim_{x \rightarrow 1}(\sqrt{x^2+3}+2x)} = \frac{-6}{\sqrt{4}+2} = -\frac{3}{2}.$$

**2.** Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο στο  $x_0 = 1$  της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, & x < 1 \\ -\frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

**ΛΥΣΗ**

Αν  $x < 1$ , τότε  $f(x) = 3x^2 - 4$ , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 4) = 3 \cdot 1^2 - 4 = -1.$$

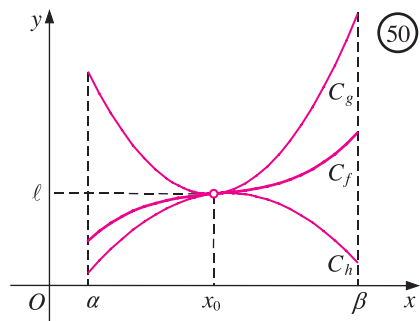
Αν  $x > 1$ , τότε  $f(x) = -\frac{1}{x}$ , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1.$$

Επομένως  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ .

**Κριτήριο παρεμβολής**

Υποθέτουμε ότι “κοντά στο  $x_0$ ” μια συνάρτηση  $f$  “εγκλωβίζεται” (Σχ. 50) ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις  $h$  και  $g$ . Αν, καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0$ , οι  $g$  και  $h$  έχουν κοινό όριο  $\ell$ , τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η  $f$  θα έχει το ίδιο όριο  $\ell$ . Αυτό δίνει την ιδέα του παρακάτω θεωρήματος που είναι γνωστό ως **κριτήριο παρεμβολής**.



**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g, h$ . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ ,

τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Για παράδειγμα,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$ . Πράγματι, για  $x \neq 0$  έχουμε

$$\left| x \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x|,$$

οπότε

$$-|x| \leq x \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x|.$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ , σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0.$$

### Τριγωνομετρικά όρια

Το κριτήριο παρεμβολής είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό ορισμένων τριγωνομετρικών ορίων. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι:

$$|\eta\mu x| \leq |x|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(η ισότητα ισχύει μόνο όταν  $x = 0$ )

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ\*

— Για  $x = 0$  προφανώς ισχύει η ισότητα.

— Για  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  από το διπλανό σχήμα έχουμε

$$\eta\mu x = (MM_1) < (MA) < (\text{τοξ} MA) = x.$$

Άρα

$$|\eta\mu x| < |x|, \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

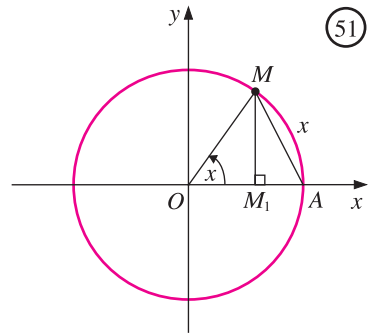
— Για  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  είναι  $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , οπότε λόγω της (1) έχουμε,  $|\eta\mu(-x)| < |-x|$

ή, ισοδύναμα,  $|\eta\mu x| < |x|$ .

— Για  $x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι  $|x| \geq \frac{\pi}{2} > 1 \geq |\eta\mu x|$ , οπότε  $|\eta\mu x| < |x|$ .

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις ισχύει  $|\eta\mu x| \leq |x|$ , με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 0$ . ■

Με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας και του κριτηρίου παρεμβολής θα αποδείξουμε ότι:



(51)

1.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

• Αρχικά θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu x = 1 \tag{1}$$

Πράγματι:

— Σύμφωνα με την προηγούμενη ανισότητα έχουμε  $|\eta\mu x| \leq |x|$ , οπότε

$$-|x| \leq \eta\mu x \leq |x|.$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |x|$ , σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 0.$$

— Γνωρίζουμε ότι  $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$ , οπότε

$$\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{1 - \eta\mu^2 x}, \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu x = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - \eta\mu^2 x} = \sqrt{1 - \lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu^2 x} = \sqrt{1 - 0} = 1.$$

• Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ . Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x &= \lim_{h \rightarrow 0} \eta\mu(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\eta\mu x_0 \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x_0 \eta\mu h) \\ &= \eta\mu x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \eta\mu h \\ &\stackrel{(1)}{=} \eta\mu x_0 \cdot 1 + \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot 0 = \eta\mu x_0. \end{aligned}$$

• Ανάλογα αποδεικνύεται και ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$ . ■

2.

- α)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$



**ΑΠΟΔΕΙΞΗ\***

— Αν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , τότε από το διπλανό σχήμα προκύπτει ότι  
 $\text{εμβ}(\text{τριγ } OAM) < \text{εμβ}(\text{τομ } OAM) < \text{εμβ}(\text{τριγ } OAN)$ ,

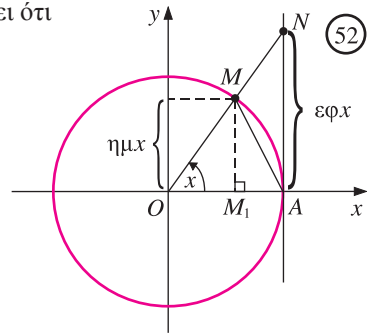
οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \eta\mu x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \epsilon\phi x$$

$$\eta\mu x < x < \epsilon\phi x$$

$$1 < \frac{x}{\eta\mu x} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1.$$

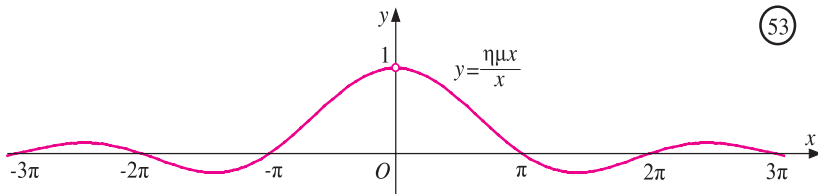


— Αν  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ , τότε  $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ , οπότε έχουμε  $\sigma\upsilon\nu(-x) < \frac{\eta\mu(-x)}{-x} < 1$   
 και άρα

$$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1.$$

Επομένως, για κάθε  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ισχύει  $\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1$ .

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu x = 1$ , από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ .



β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1)}{x(\sigma\upsilon\nu x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 1}{x(\sigma\upsilon\nu x + 1)} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x(1 + \sigma\upsilon\nu x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \right) \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \\
 &= -1 \cdot 0 = 0. \blacksquare
 \end{aligned}$$

### Όριο σύνθετης συνάρτησης

Με τις ιδιότητες που αναφέρουμε μέχρι τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τα όρια απλών συναρτήσεων. Αν, όμως, θέλουμε να υπολογίσουμε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ , της σύνθετης συνάρτησης  $f \circ g$  στο σημείο  $x_0$ , τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε  $u = g(x)$ .
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το  $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ .

Αποδεικνύεται ότι, αν  $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με  $\ell$ , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$$

### ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του βιβλίου τα όρια της μορφής  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$  με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη: “ $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$ ” και γι’ αυτό δεν θα ελέγχεται.

Για παράδειγμα:

- α) Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu \left( x^2 + \frac{\pi}{4} \right).$$

Αν θέσουμε  $u = x^2 + \frac{\pi}{4}$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}$ , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu \left( x^2 + \frac{\pi}{4} \right) = \lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{4}} \eta\mu u = \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- β) Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}.$$

Είναι

$$\frac{\eta\mu 3x}{x} = 3 \frac{\eta\mu 3x}{3x}.$$

Έτσι, αν θέσουμε  $u = 3x$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$ , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 3 \cdot 1 = 3.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^5 - 4x^3 - 2x + 5)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^{10} - 2x^3 + x - 1)$

iii)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^8 + 2x + 3)^{20}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 3} [(x-5)^3 |x^2 - 2x - 3|]$

v)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x - 5}{x + 3}$

vi)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - 3x| + |x - 2|}{x^2 + x + 1}$

vii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{(x+2)^2}$

viii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 + 4x + 3}$ .

2. Έστω μια συνάρτηση  $f$  με  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  αν:

i)  $g(x) = 3(f(x))^2 - 5$

ii)  $g(x) = \frac{|2f(x) - 11|}{(f(x))^2 + 1}$

iii)  $g(x) = (f(x) + 2)(f(x) - 3)$ .

3. Να βρείτε τα όρια

i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}$ .

4. Να βρείτε τα όρια

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} & \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} \\ \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} & \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} \end{array}$$

5. Να βρείτε (αν υπάρχει), το όριο της  $f$  στο  $x_0$  αν:

$$\begin{array}{l} \text{i) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 5x, & x > 1 \end{cases} \quad \text{και } x_0 = 1 \\ \text{ii) } f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ x^2 + 1, & x \geq -1 \end{cases} \quad \text{και } x_0 = -1. \end{array}$$

6. Να βρείτε τα όρια:

$$\begin{array}{lll} \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} & \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x}{x} & \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi 4x}{\eta\mu 2x} \\ \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \eta\mu x}{x} \right) & \text{v) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu x}{x^3 + x} \right) & \text{vi) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x + 4} - 2} \end{array}$$

7. Να βρείτε τα όρια:

$$\begin{array}{lll} \text{i) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} & \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu 2x} & \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x} \end{array}$$

8. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , αν:

$$\begin{array}{l} \text{i) } 1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \text{ii) } 1 - x^4 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad \text{για κάθε } x \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right). \end{array}$$

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + \beta, & x \leq 3 \\ \alpha x + 3\beta, & x > 3 \end{cases}$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$ .

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 8}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{v+1} - (v+1)x + v}{x - 1}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}$$

2. Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x^2 + 10x + 25}}{x + 5}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x - 5| + x^2 - 4x - 5}{x - 5}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|x - 5| + x^2 - 4x - 5}{x - 5}$$

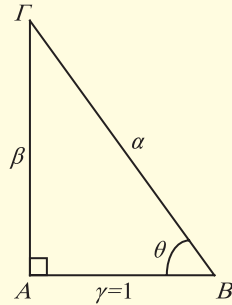
$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

3. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με  $\gamma = 1$ . Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta),$$

$$\text{ii) } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\alpha^2 - \beta^2)$$

$$\text{iii) } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\beta}{\alpha}$$



4. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , αν:

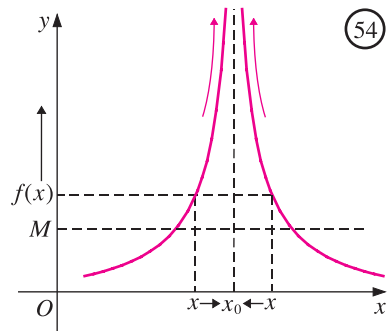
$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} (4f(x) + 2 - 4x) = -10$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1.$$

## 1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

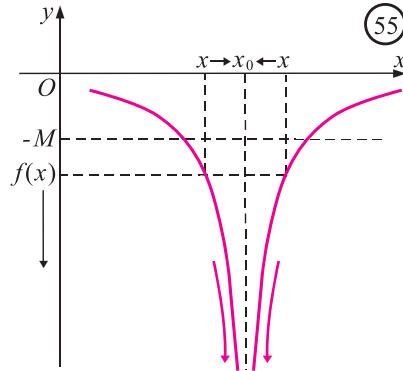
— Στο σχήμα 54 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  κοντά στο  $x_0$ . Παρατηρούμε ότι, καθώς το  $x$  κινούμενο με οποιοδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα  $x$  χ' πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό  $x_0$ , οι τιμές  $f(x)$  αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιοδήποτε θετικό αριθμό  $M$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει στο  $x_0$  όριο  $+\infty$  και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$



— Στο σχήμα 55 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  κοντά στο  $x_0$ . Παρατηρούμε ότι, καθώς το  $x$  κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα  $x$  πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό  $x_0$ , οι τιμές  $f(x)$  ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό  $-M$  ( $M > 0$ ). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει στο  $x_0$  όριο  $-\infty$  και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

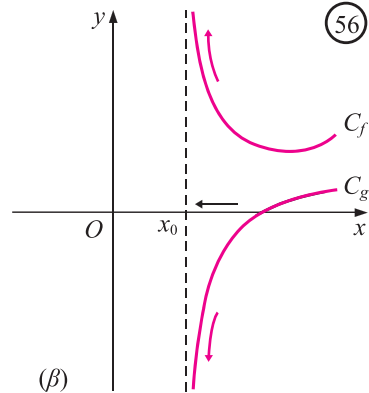
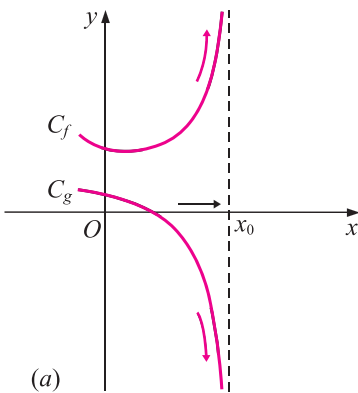


**ΟΡΙΣΜΟΣ\***

Έστω μια συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Ορίζουμε

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , όταν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , με  $0 < |x - x_0| < \delta$  να ισχύει  $f(x) > M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , όταν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , με  $0 < |x - x_0| < \delta$  να ισχύει  $f(x) < -M$

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν όταν  $x \rightarrow x_0^-$  και  $x \rightarrow x_0^+$ .



Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

• Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , ενώ

αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

• Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$ , ενώ

αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$ .

• Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

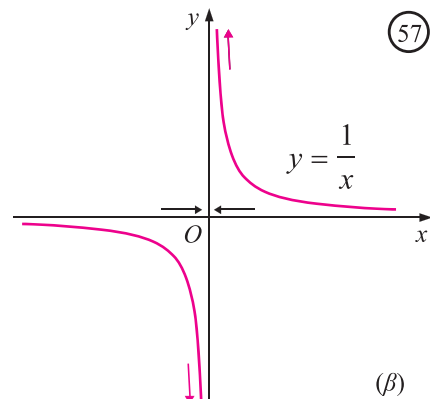
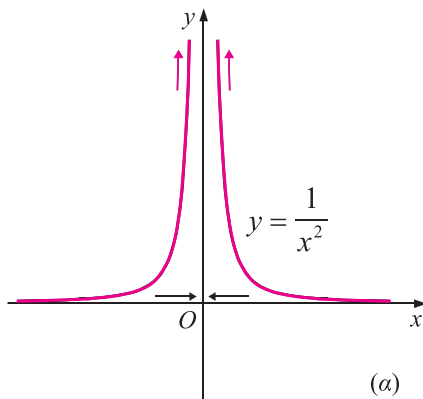
• Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ , ενώ αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .

• Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ .

• Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$ .

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές έχουμε:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  και γενικά  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$  (Σχ. 57α)



57

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \nu \in \mathbb{N}$$

ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \nu \in \mathbb{N} \text{ (Σχ. 57β).}$$

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της  $f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}, \nu \in \mathbb{N}$ .

Για τα όρια αθροίσματος και γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)**

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$							
το όριο της $f$ είναι:	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	
και το όριο της $g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;	

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)**

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$ ,										
το όριο της $f$ είναι:	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της $g$ είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty) + (-\infty) \text{ και } 0 \cdot (\pm\infty).$$

Επειδή  $f - g = f + (-g)$  και  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ , απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του ηλίκου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty) - (+\infty), (-\infty) - (-\infty) \text{ και } \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$



Για παράδειγμα:

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$  και  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ , τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

ενώ,

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις  $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$  και  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ , τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x^2} + 1 \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Ανάλογα παραδείγματα μπορούμε να δώσουμε και για τις άλλες μορφές.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1** Να βρεθούν τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 1|} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x + 2}{(x - 2)^2}.$$

### ΛΥΣΗ

i) Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| = 0$  και  $|x - 1| > 0$  κοντά στο 1, είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|} = +\infty$ .

Επειδή επιπλέον είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 6) = 2$ , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{|x - 1|} \cdot (x^2 - 5x + 6) \right] = +\infty.$$

ii) Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 = 0$  και  $(x - 2)^2 > 0$  κοντά στο 2, είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty$ . Επειδή

επιπλέον είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} (-3x + 2) = -4$ , έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x + 2}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{1}{(x - 2)^2} \cdot (-3x + 2) \right] = -\infty.$$

**2.** Να βρεθούν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$  στο  $x_0 = 2$  και στη συνέχεια να εξετασθεί, αν υπάρχει το όριο της  $f(x)$  στο 2.

**ΛΥΣΗ**

— Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$  και  $x - 2 > 0$  για  $x > 2$ , είναι  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$ .

Επειδή επιπλέον  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x + 1) = 3$ , έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ \frac{1}{x - 2} (x^2 - x + 1) \right] = +\infty.$$

— Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) = 0$  και  $x - 2 < 0$  για  $x < 2$ , είναι  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$ .

Επειδή επιπλέον  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x + 1) = 3$ , έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ \frac{1}{x - 2} \cdot (x^2 - x + 1) \right] = -\infty.$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα. Επομένως δεν υπάρχει όριο της  $f$  στο 2.

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1** Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της  $f$  στο  $x_0$  όταν:

i)  $f(x) = \frac{x + 5}{x^4 + 3x^2}, x_0 = 0$

ii)  $f(x) = \frac{2x - 3}{4(x - 1)^4}, x_0 = 1$

iii)  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}, x_0 = 0.$

**2.** Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της  $f$  στο  $x_0$ , όταν:

i)  $f(x) = \frac{3}{1 - x} - \frac{4}{1 - x^2}, x_0 = 1$

ii)  $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x|x|}, x_0 = 0$

iii)  $f(x) = x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right), x_0 = 0.$

## Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε (εφόσον υπάρξει) το  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-9}{x\sqrt{x} - 2x - 4\sqrt{x} + 8}$ .

2. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση  $f(x) = \epsilon\phi x$  δεν έχει όριο στο  $\frac{\pi}{2}$ .

ii) Η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\phi x$  δεν έχει όριο στο 0.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{(\lambda - 1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 + 2x + \mu}{x}.$$

Να βρείτε τις τιμές των  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$  για τις οποίες υπάρχουν στο  $\mathbf{R}$  τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

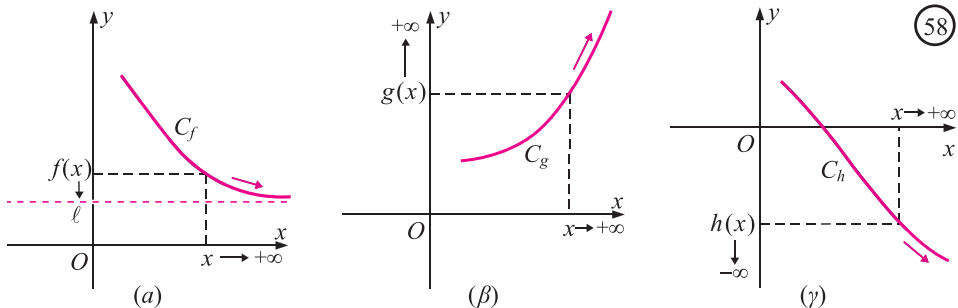
Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα παραπάνω όρια.

4. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , όταν:

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{f(x)} = +\infty$     ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+2} = -\infty$     iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(3x^2 - 2)] = +\infty$ .

## 1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων  $f, g, h$  σε ένα διάστημα της μορφής  $(\alpha, +\infty)$ .



Παρατηρούμε ότι καθώς το  $x$  αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο,

— το  $f(x)$  προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό  $\ell$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $f$  έχει στο  $+\infty$  όριο το  $\ell$  και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

— το  $g(x)$  αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $g$  έχει στο  $+\infty$  όριο το  $+\infty$  και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

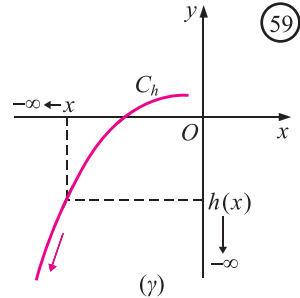
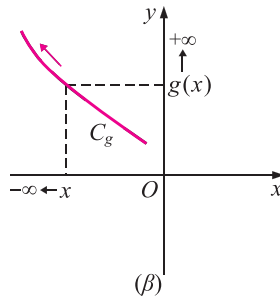
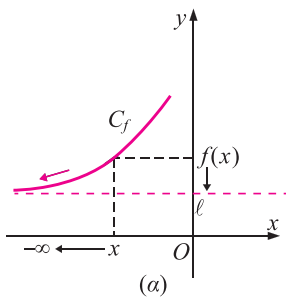
— το  $h(x)$  μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $h$  έχει στο  $+\infty$  όριο το  $-\infty$  και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty .$$

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ , πρέπει η  $f$  να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, +\infty)$ .

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν  $x \rightarrow -\infty$  για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής  $(-\infty, \beta)$ . Έτσι, για τις συναρτήσεις  $f, g, h$  των παρακάτω σχημάτων έχουμε:



59

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty .$

Για τον υπολογισμό του ορίου στο  $+\infty$  ή  $-\infty$  ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu = +\infty$$

και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0, \nu \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$$

και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0, \nu \in \mathbb{N}^* .$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 .$$

Για τα όρια στο  $+\infty$ ,  $-\infty$  ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο  $x_0$  με την προϋπόθεση ότι:

- οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
- δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

### Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης

• Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ . Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων για τον υπολογισμό του  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

Για  $x \neq 0$  έχουμε

$$f(x) = 2x^3 \left( 1 - \frac{5}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} \right).$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{5}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} \right) = 1 - 0 + 0 - 0 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3).$$

Γενικά

Για την πολυωνυμική συνάρτηση  $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0$ , με  $\alpha_n \neq 0$  ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_n x^n) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_n x^n)$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5 - 3x^3 + 6x^2 - x + 7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5) = -\infty.$$

• Έστω τώρα η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{5x^3 + x - 7}$ .

Για  $x \neq 0$  έχουμε:

$$f(x) = \frac{3x^2 \left( 1 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2} \right)}{5x^3 \left( 1 + \frac{1}{5x^2} - \frac{7}{5x^3} \right)} = \frac{3x^2}{5x^3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}}{1 + \frac{1}{5x^2} - \frac{7}{5x^3}}.$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}}{1 + \frac{1}{5x^2} - \frac{7}{5x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{5x^2} - \frac{7}{5x^3} \right)} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{5x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{5x} \right) = 0$$

έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{5x^3} \right).$$

Γενικά,

Για τη ρητή συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$ ,  $\alpha_\nu \neq 0, \beta_\kappa \neq 0$

ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

Για παράδειγμα,

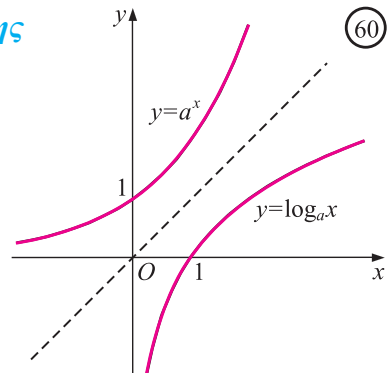
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 6x + 1}{3x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5x^2}{3x^2} \right) = \frac{5}{3}.$$

### Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

Αποδεικνύεται<sup>(1)</sup> ότι:

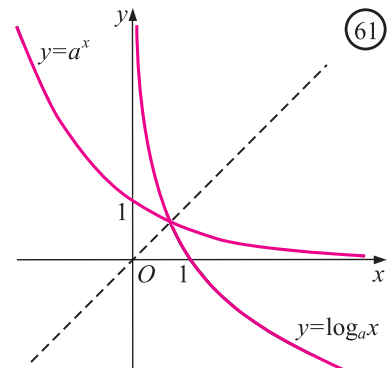
- Αν  $a > 1$  (Σχ. 60), τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x &= +\infty \end{aligned}$$



- Αν  $0 < a < 1$  (Σχ. 61), τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x &= -\infty \end{aligned}$$



<sup>(1)</sup> Η απόδειξη παραλείπεται.

### Πεπερασμένο όριο ακολουθίας

Η έννοια της ακολουθίας είναι γνωστή από προηγούμενες τάξεις. Συγκεκριμένα:

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

**Ακολουθία** ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση  $\alpha : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ .

Η εικόνα  $\alpha(v)$  της ακολουθίας  $\alpha$  συμβολίζεται συνήθως με  $\alpha_v$ , ενώ η ακολουθία  $\alpha$  συμβολίζεται με  $(\alpha_v)$ . Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $\alpha_v = \frac{1}{v}, v \in \mathbb{N}^*$  είναι μια ακολουθία.

Επειδή το πεδίο ορισμού κάθε ακολουθίας, είναι το  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ , έχει νόημα να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της για πολύ μεγάλες τιμές του  $v$ , δηλαδή όταν  $v \rightarrow +\infty$ . Ο ορισμός του ορίου ακολουθίας είναι ανάλογος του ορισμού του ορίου συνάρτησης στο  $+\infty$  και διατυπώνεται ως εξής:

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

Θα λέμε ότι η ακολουθία  $(\alpha_v)$  έχει όριο το  $\ell \in \mathbb{R}$  και θα γράφουμε  $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = \ell$ , όταν για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $v_0 \in \mathbb{N}^*$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $v > v_0$  να ισχύει  $|\alpha_v - \ell| < \varepsilon$

Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων όταν  $x \rightarrow +\infty$ , που μελετήσαμε στα προηγούμενα, ισχύουν και για τις ακολουθίες. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων αυτών μπορούμε να υπολογίζουμε όρια ακολουθιών.

Για παράδειγμα,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2v^2 - 3v + 5}{4v^2 + v - 1} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2v^2}{4v^2} = \frac{1}{2}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1 Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-10x^3 + 2x - 5)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 2x + 1)$

iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^3 + 8}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}$

v)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{4x^3 - x^2 + 2}$

vi)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x^{10} + x + 3}$

vii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x^2+1} - \frac{5}{x+2} \right)$

viii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2+5}{x} - \frac{x^2+3}{x+2} \right)$

2. Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 3}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 10x + 9}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3x+2})$

iv)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x), \alpha \neq \beta$

v)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x + 3})$

3. Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x)$

v)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x - \sqrt{x^2-1}}$

vi)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x^2+2x+2} - x^2)$

**Β' ΟΜΑΔΑΣ**

1 Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $\mu$ , να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + \mu x)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6}$

2. Να προσδιορίσετε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+5x+10} - \lambda x)$  να υπάρχει στο  $\mathbb{R}$ .

3. Αν  $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} - \alpha x + \beta$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

4 Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 5x| + x}{x^2 - 3x + 2}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + 5 - x}{x + \sqrt{4+3x^2}}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - x|}{x - 1}$

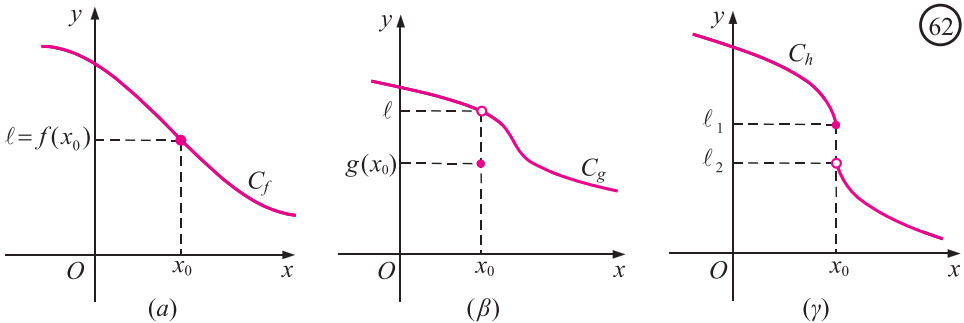




## ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### Ορισμός της συνέχειας

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g, h$  των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Παρατηρούμε ότι:

— Η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

— Η συνάρτηση  $g$  είναι ορισμένη στο  $x_0$  αλλά

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq g(x_0).$$

— Η συνάρτηση  $h$  είναι ορισμένη στο  $x_0$  αλλά δεν υπάρχει το όριό της.

Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος μόνο η γραφική παράσταση της  $f$  δε διακόπτεται στο  $x_0$ . Είναι, επομένως, φυσικό να ονομάσουμε **συνεχή στο  $x_0$**  μόνο τη συνάρτηση  $f$ . Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η  $f$  είναι **συνεχής στο  $x_0$** , όταν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = |x|$  είναι συνεχής στο 0, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0).$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση  $f$  **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της όταν:

α) Δεν υπάρχει το όριο της στο  $x_0$  ή

β) Υπάρχει το όριο της στο  $x_0$ , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της,  $f(x_0)$ , στο σημείο  $x_0$ .

Για παράδειγμα:

— Η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 2 - x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$  δεν είναι συνεχής στο 0, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1, \text{ ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - x) = 2,$$

οπότε δεν υπάρχει το όριο της  $f$  στο 0.

— Η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 3, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$  δεν είναι συνεχής στο 1, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2, \text{ ενώ } f(1) = 3.$$

Μία συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

Για παράδειγμα:

— Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση  $P$  είναι συνεχής, αφού για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

— Κάθε ρητή συνάρτηση  $\frac{P}{Q}$  είναι συνεχής, αφού για κάθε  $x_0$  του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— Οι συναρτήσεις  $f(x) = \eta\mu x$  και  $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$  είναι συνεχείς, αφού για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

— Οι συναρτήσεις  $f(x) = a^x$  και  $g(x) = \log_a x$ ,  $0 < a \neq 1$  είναι συνεχείς.

### Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Από τον ορισμό της συνέχειας στο  $x_0$  και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

#### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς στο  $x_0$ , τότε είναι συνεχείς στο  $x_0$  και οι συναρτήσεις:

$$f + g, c \cdot f, \text{ όπου } c \in \mathbf{R}, f \cdot g, \frac{f}{g}, |f| \text{ και } \sqrt[n]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το  $x_0$ .

Για παράδειγμα:

— Οι συναρτήσεις  $f(x) = \epsilon\phi x$  και  $g(x) = \sigma\phi x$  είναι **συνεχείς** ως ηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

— Η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{3x-2}$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της  $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ , αφού η συνάρτηση  $g(x) = 3x - 2$  είναι συνεχής.

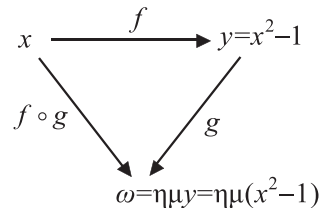
— Η συνάρτηση  $f(x) = |x\eta\mu x|$  είναι συνεχής, αφού είναι της μορφής  $f(x) = |g(x)|$ , όπου  $g(x) = x\eta\mu x$  η οποία είναι συνεχής συνάρτηση ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων  $f_1(x) = x$  και  $f_2(x) = \eta\mu x$ .

Τέλος, αποδεικνύεται ότι για τη σύνθεση συνεχών συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

#### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $\phi(x) = \eta\mu(x^2 - 1)$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων  $f(x) = x^2 - 1$  και  $g(x) = \eta\mu x$ .



### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Για ποια τιμή του  $a$  η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2a, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$  είναι συνεχής;

**ΛΥΣΗ**

— Στο διάστημα  $(-\infty, 0)$  η  $f$  έχει τύπο  $f(x) = x^2 + 2\alpha$  και επομένως είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο διάστημα  $(0, +\infty)$  η  $f$  έχει τύπο  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$  και επομένως είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Για να είναι η  $f$  συνεχής, αρκεί να είναι συνεχής και στο  $x_0 = 0$ , δηλαδή αρκεί  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . Έχουμε όμως:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2\alpha) = 2\alpha, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \text{ και} \\ f(0) &= 2\alpha. \end{aligned}$$

Επομένως, αρκεί  $2\alpha = 1$  ή, ισοδύναμα,  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

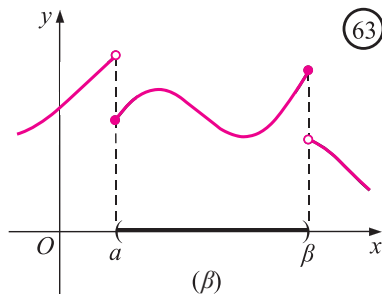
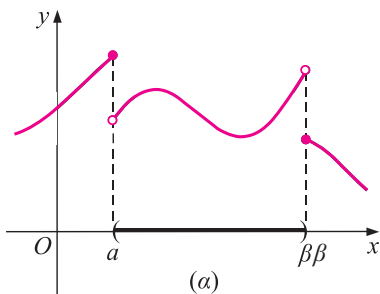
**Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα**

Πολλά από τα θεωρήματα της Ανάλυσης αναφέρονται σε συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς σε διαστήματα του πεδίου ορισμού τους. Είναι, επομένως, απαραίτητο να γνωρίζουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα διάστημα.

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

- Μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$ . (Σχ. 63α)
- Μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$  και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta) \text{ (Σχ. 63β)}$$

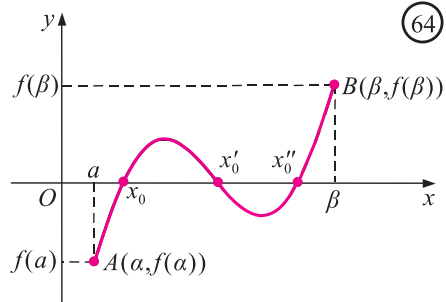


Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής  $(\alpha, \beta]$ ,  $[\alpha, \beta)$ .

Δυο βασικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων σε διαστήματα εκφράζονται από τα παρακάτω θεωρήματα:

### Θεώρημα του Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  στο  $[a, \beta]$ . Επειδή τα σημεία  $A(a, f(a))$  και  $B(\beta, f(\beta))$  βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα  $x'$ , η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και, επιπλέον, ισχύει
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ ,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε

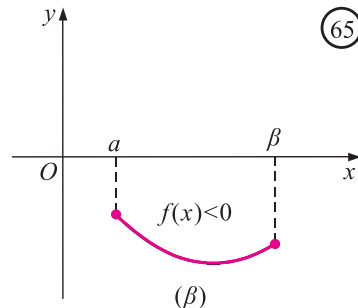
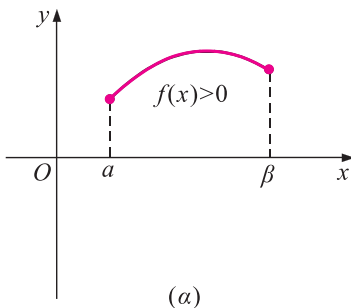
$$f(x_0) = 0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο ανοικτό διάστημα  $(a, \beta)$ .

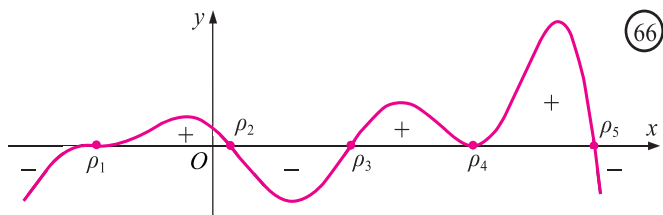
### ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ . (Σχ. 65)



— Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της  $f$  για τις διάφορες τιμές του  $x$ . Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

- α) Βρίσκουμε τις ρίζες της  $f$ .
- β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της  $f$  στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της  $f$  στο αντίστοιχο διάστημα.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης

$$f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x, x \in [0, 2\pi].$$

Αρχικά υπολογίζουμε τις ρίζες της  $f(x) = 0$  στο  $[0, 2\pi]$ . Έχουμε

$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4}.$$

Έτσι οι ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ και } \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right].$$

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της  $f$  σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός $x_0$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x_0)$	-1	1	-1
Πρόσημο	-	+	-

Επομένως, στα διαστήματα  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$  είναι  $f(x) < 0$ , ενώ στο διάστημα

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$  είναι  $f(x) > 0$ .

### Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano και είναι γνωστό ως θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(a)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι  $f(a) < f(\beta)$ . Τότε θα ισχύει  $f(a) < \eta < f(\beta)$  (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - \eta$ ,  $x \in [a, \beta]$ , παρατηρούμε ότι:

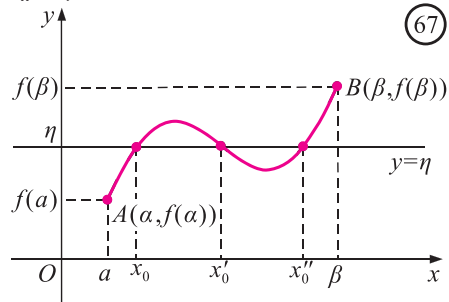
- η  $g$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και
- $g(a)g(\beta) < 0$ ,

αφού

$$g(a) = f(a) - \eta < 0 \text{ και}$$

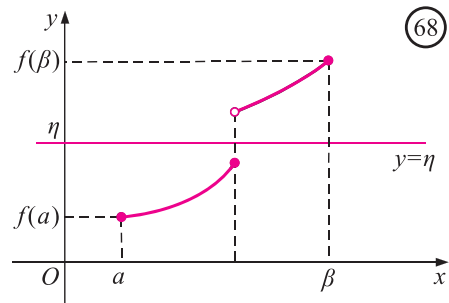
$$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$ , οπότε  $f(x_0) = \eta$ . ■



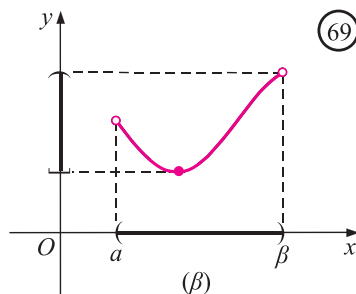
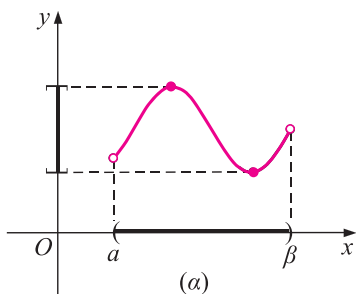
### ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$ , τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

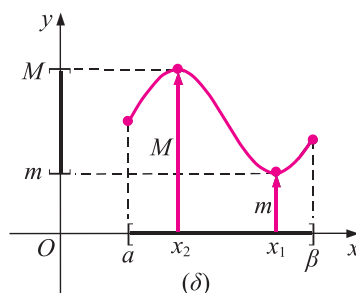
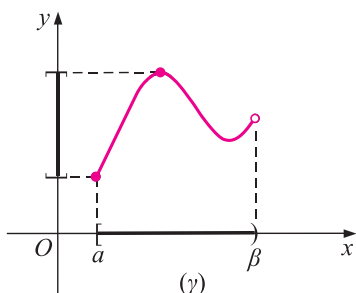


- Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών αποδεικνύεται ότι:

Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.



(69)



Στην ειδική περίπτωση που το  $\Delta$  είναι ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ , ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)**

Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[a, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[a, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ . (Σχ. 69δ)

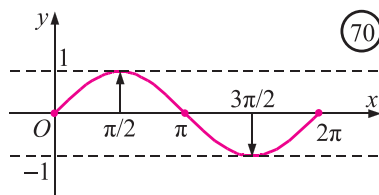
Δηλαδή, υπάρχουν  $x_1, x_2 \in [a, \beta]$  τέτοια, ώστε, αν  $m = f(x_1)$  και  $M = f(x_2)$ , να ισχύει

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in [a, \beta].$$

**ΣΧΟΛΙΟ**

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $[a, \beta]$  είναι το κλειστό διάστημα  $[m, M]$ , όπου  $m$  η ελάχιστη τιμή και  $M$  η μέγιστη τιμή της.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  έχει σύνολο τιμών το  $[-1, 1]$ , αφού είναι συνεχής στο  $[0, 2\pi]$  με  $m = -1$  και  $M = 1$ .



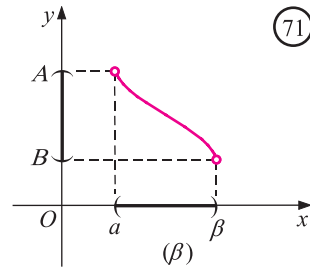
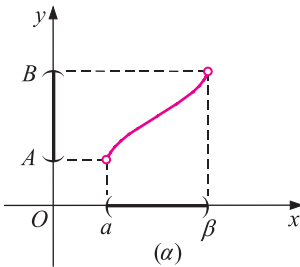


- Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$  (Σχ. 71α), όπου

$$A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

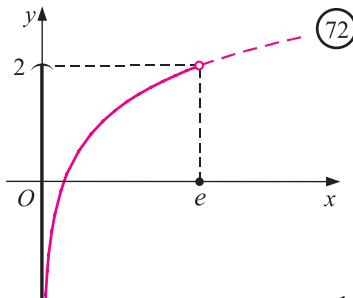
Αν, όμως, η  $f$  είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(B, A)$  (Σχ. 71β).



Για παράδειγμα,

— Το σύνολο τιμών της  $f(x) = \ln x + 1$ ,  $x \in (0, e)$ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση (Σχ. 72), είναι το διάστημα  $(-\infty, 2)$ , αφού

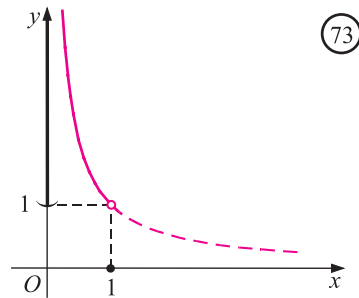
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = 2.$$



— Το σύνολο τιμών της  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, 1)$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση, (Σχ. 73) είναι το διάστημα  $(1, +\infty)$ , αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1.$$

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και όταν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής  $[a, \beta]$ ,  $[a, \beta)$  και  $(\alpha, \beta]$ .



### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ναδειχτεί ότι η εξίσωση  $x + \sin x = 4$  έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(\pi, 2\pi)$ .

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = x + \sin x - 4, x \in [\pi, 2\pi]$ . Τότε:

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\pi, 2\pi]$  ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι  $f(\pi) \cdot f(2\pi) < 0$ , αφού

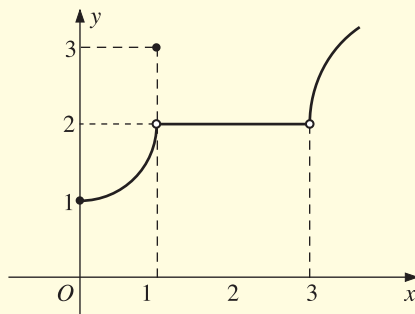
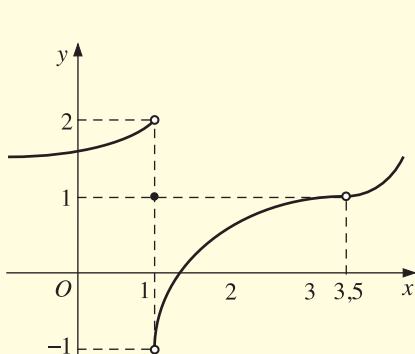
$$f(\pi) = \pi + \sin \pi - 4 = \pi - 5 < 0 \text{ και } f(2\pi) = 2\pi + \sin 2\pi - 4 = 2\pi - 3 > 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $x_0 \in (\pi, 2\pi)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 0$ , οπότε  $x_0 + \sin x_0 - 4 = 0$  και συνεπώς  $x_0 + \sin x_0 = 4$ . Άρα, η εξίσωση  $x + \sin x = 4$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(\pi, 2\pi)$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

#### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.



2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο  $x_0$  τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$i) f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x < 2 \\ x^3, & x \geq 2 \end{cases}, \text{ αν } x_0 = 2$$

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ \sqrt{3+x}, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ αν } x_0 = 1$$

$$\text{iii) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -3, & x = -2 \end{cases}, \text{ αν } x_0 = -2.$$

3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις και μετά να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση, αν

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} 2x^2, & |x| \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$$

$$\text{iii) } f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{iv) } f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$$

4. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3, & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

5. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

$$\text{i) } f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) \quad \text{ii) } f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

$$\text{iii) } f(x) = \eta\mu\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) \quad \text{iv) } f(x) = e^{\eta\mu x}$$

$$\text{v) } f(x) = \ln(\ln x)$$

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\eta\mu x - x + 1 = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

7. Για κάθε μία από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις  $f$ , να βρείτε έναν ακέραιο  $a$  τέτοιο, ώστε στο διάστημα  $(a, a + 1)$  η εξίσωση  $f(x) = 0$  να έχει μία τουλάχιστον ρίζα

$$\text{i) } f(x) = x^3 + x - 1 \quad \text{ii) } f(x) = x^5 + 2x + 1$$

$$\text{iii) } f(x) = x^4 + 2x - 4 \quad \text{iv) } f(x) = -x^3 + x + 2.$$

8 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$a(x - \mu)(x - \nu) + \beta(x - \lambda)(x - \nu) + \gamma(x - \lambda)(x - \mu) = 0$$

όπου  $a, \beta, \gamma > 0$  και  $\lambda < \mu < \nu$ , έχει δυο ρίζες άνισες, μια στο διάστημα  $(\lambda, \mu)$  και μια στο  $(\mu, \nu)$ .

9 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης  $f$  για όλες τις πραγματικές τιμές του  $x$ , όταν:

i)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

ii)  $f(x) = x^4 - x^2$

iii)  $f(x) = \epsilon\phi x - \sqrt{3}$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$     iv)  $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .

10 Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

i)  $f(x) = \ln x + 1$ ,  $x \in [1, e]$

ii)  $f(x) = -x + 2$ ,  $x \in (0, 2)$

iii)  $f(x) = 2\eta\mu x + 1$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$

iv)  $f(x) = e^x + 1$ ,  $x \in (-\infty, 0]$ .

**Β' ΟΜΑΔΑΣ**

1 Αν  $f(x) = \begin{cases} (x - \kappa)(x + \kappa) & , \quad x \leq 2 \\ \kappa x + 5 & , \quad x > 2 \end{cases}$ , να προσδιορίσετε το  $\kappa$ , ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 2$

2. Αν  $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^2 + \beta x - 12 & , \quad x < 1 \\ 5 & , \quad x = 1 \\ \alpha x + \beta & , \quad x > 1 \end{cases}$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

3. i) Έστω μία συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ . Να βρείτε το  $f(0)$ , αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$xf(x) = \sigma\upsilon\nu x + 1.$$

ii) Ομοίως, να βρείτε το  $g(0)$  για τη συνάρτηση  $g$  που είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$|xg(x) - \eta\mu x| \leq x^2.$$

4 Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι ορισμένες και συνεχείς στο  $[0, 1]$  και πληρούν τις σχέσεις  $f(0) < g(0)$  και  $f(1) > g(1)$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) = g(\xi)$ .

5. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x^4 + 1}{x-1} + \frac{x^6 + 1}{x-2} = 0 \quad \beta) \frac{e^x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = 0$$

έχουν μια, τουλάχιστον, ρίζα στο  $(1, 2)$ .

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο

$$\text{i) } f(x) = e^x \text{ και } g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ii) } f(x) = \ln x \text{ και } g(x) = \frac{1}{x}$$

7. i) Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[-1, 1]$ , για την οποία ισχύει

$$x^2 + f^2(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της  $f$  και ποια η γραφική της παράσταση;

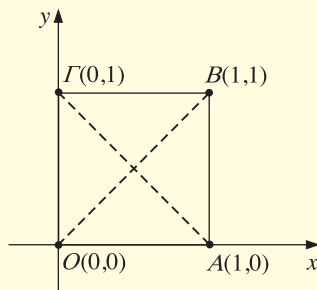
ii) Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης  $f$  στο σύνολο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

8. Δίνεται το τετράγωνο  $OAB\Gamma$  του διπλανού σχήματος και μία συνεχής στο  $[0, 1]$  συνάρτηση  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.

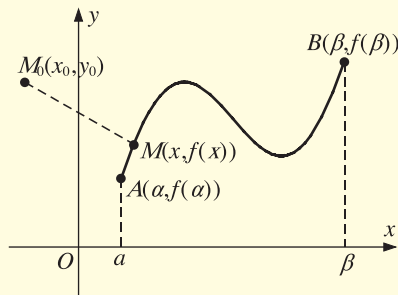
i) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου και

ii) Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano ότι η  $C_f$  τέμνει και τις δύο διαγώνιες.



9. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη  $C$  είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  που είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και το  $M_0(x_0, y_0)$  είναι ένα σημείο του επιπέδου,

i) Να βρείτε τον τύπο της απόστασης  $d(x) = (M_0M)$  του σημείου  $M_0(x_0, y_0)$  από το σημείο  $M(x, f(x))$  της  $C_f$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .



ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $d$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της  $C_f$  που απέχει από το  $M_0$  λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της  $C_f$  που απέχει από το  $M_0$  περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

**I.**

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = e^{-x}$ , τότε

α)  $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$  Α Ψ

β)  $(f \circ g)(x) = -x, x \in \mathbb{R}$  Α Ψ

2. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = l \in \mathbb{R}$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ . Α Ψ

3. Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x \left( \frac{1}{x^2 + x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0$ . Α Ψ

4. Αν  $f(x) > 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , τότε κατ' ανάγκη  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1$ . Α Ψ

5 Ισχύει: α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 1$  Α Ψ

β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$ . Α Ψ

6. Αν  $0 \leq f(x) \leq 1$  κοντά στο 0, τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$ .      Α      Ψ
7. Αν  $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$ ,  $x \in (\alpha, +\infty)$ , τότε κατ' ανάγκη  
θα είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .      Α      Ψ
8. Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 6} (f(x)g(x))$ , τότε είναι ίσο με  $f(6) \cdot g(6)$ .      Α      Ψ
9. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$  ή  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$ .      Α      Ψ
10. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .      Α      Ψ
11. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και για  $x \neq 4$   
ισχύει  $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$ , τότε το  $f(4)$  είναι ίσο με 1.      Α      Ψ
12. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, 1]$  και  $f(-1) = 4, f(1) = 3$ ,  
τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός  $x_0 \in (-1, 1)$  τέτοιος,  
ώστε  $f(x_0) = \pi$ .      Α      Ψ

## II.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$ ,  $l, m \in \mathbb{R}$  και  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι:
- A)  $l < m$     B)  $l \leq m$     Γ)  $l \geq m$     Δ)  $l = m$     E)  $m < l$ .
2. Το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - 2x^2)^3}{(x^2 + 1)^3}$  είναι ίσο με:
- A) 8      B) 1      Γ) 0      Δ)  $+\infty$       E)  $-8$ .
3. Το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2}$  είναι ίσο με:
- A)  $+\infty$     B)  $-\infty$     Γ) 1      Δ) -1      E) 0.

4. Αν το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x}$  δεν υπάρχει, τότε:

- A)  $x_0 = 0$       B)  $x_0 = 2$       Γ)  $x_0 = -1$       Δ)  $x_0 = 1$ .

III.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1 \text{ και } g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Από τους Παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

- A) η  $g$  είναι συνεχής στο 2  
 B) η  $f$  είναι συνεχής στο 1  
 Γ) η  $g$  έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής  
 Δ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

2. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

- A)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{20} - x + 1}$       B)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{20} - x - 1}$   
 Γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^9 + x - 1}$       Δ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^9 + x - 1}$   
 E)  $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x^3 + x + 1)]$       ΣΤ)  $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x^3 + x - 1)]$ .

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο διάστημα  $\Delta = [0, 3]$ , με  $f(0) = 2$ ,  $f(1) = 1$  και  $f(3) = -1$ .

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

- A) Υπάρχει  $x_0 \in (0, 3)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = 0$ .  
 B)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$ .  
 Γ)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ .  
 Δ)  $[-1, 2] \subseteq f(\Delta)$ .  
 E) Η μέγιστη τιμή της  $f$  στο  $[0, 3]$  είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το  $-1$ .

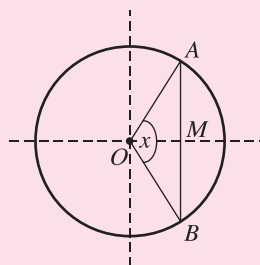


## ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

### Η έννοια της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης, ως έκφραση μιας εξάρτησης ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένες ποσότητες, εμφανίζεται μ' έναν υπονοούμενο τρόπο ήδη από την αρχαιότητα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι πίνακες χορδών της “Αλμαγέστης”, του Έλληνα μαθηματικού και αστρονόμου της αλεξανδρινής περιόδου Κλαύδιου Πτολεμαίου. Στη μια στήλη αυτών των πινάκων υπάρχουν τα μήκη των τόξων ενός κύκλου και στην άλλη τα μήκη των αντίστοιχων χορδών. Χρησιμοποιώντας την έννοια του ημιτόνου στον μοναδιαίο κύκλο μπορούμε να εκφράσουμε αναλυτικά τη “συνάρτηση” των πινάκων του Πτολεμαίου ως εξής:

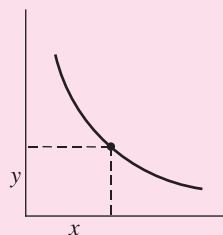
$$\text{χορδή τόξου } (x) = AB = 2AM = 2 \eta\mu \frac{x}{2}.$$



Με τον ίδιο υπονοούμενο τρόπο η έννοια της συνάρτησης εμφανίζεται στους λογαριθμικούς πίνακες που κατασκευάστηκαν στις αρχές του 17ου αιώνα.

Τα γεγονότα που έδωσαν αποφασιστική ώθηση στην ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης ήταν η δημιουργία της Άλγεβρας (χρήση γραμμάτων και ειδικών συμβόλων για την αναπαράσταση μαθηματικών πράξεων, σχέσεων, αγνώστων κ.λπ.) και της αναλυτικής γεωμετρίας (χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού σε γεωμετρικά προβλήματα). Ο Descartes, στο έργο του “La Geometrie” (1637), παρουσιάζοντας τη μέθοδο προσδιορισμού μιας καμπύλης από μια εξίσωση ως προς  $x$  και  $y$  (τα οποία εκφράζουν τα ευθύγραμμα τμήματα-συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης), περιέγραψε για πρώτη φορά τη δυνατότητα αναλυτικής αναπαράστασης μιας σχέσης εξάρτησης ανάμεσα σε μεταβλητές ποσότητες:

*“Αν λοιπόν πάρουμε διαδοχικά ένα άπειρο πλήθος διαφορετικών τιμών για το τμήμα  $y$  τότε θα προκύψει ένα άπειρο πλήθος τιμών για το τμήμα  $x$  και επομένως μια απειρία διαφορετικών σημείων, με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να σχεδιαστεί η ζητούμενη καμπύλη”.*



Ο όρος “συνάρτηση” (από το λατινικό ρήμα *fungor*, που σημαίνει εκτελώ, λειτουργώ) εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1673 σ' ένα χειρόγραφο του Leibniz με τίτλο “Η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτομένων ή περί συναρτήσεων” (*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*), στο οποίο εξετάζεται ο υπολογισμός των τεταγμένων  $y$  των σημείων μιας καμπύλης όταν είναι γνωστή κάποια ιδιότητα των

αντίστοιχων εφαιπτομένων. Ο όρος αυτός άρχισε να αποκτά από εκείνη την εποχή μια ιδιαίτερη σημασία για την αναπαράσταση ποσοτήτων που εξαρτώνται από άλλες μεταβλητές ποσότητες, ιδιαίτερα όταν η εξάρτηση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή μιας αναλυτικής έκφρασης. Ο J. Bernoulli έδωσε το 1718 τον επόμενο γενικό ορισμό:

*“Ονομάζω συνάρτηση ενός μεταβλητού μεγέθους μια ποσότητα που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτό το μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές”.*

Η αντίληψη της συνάρτησης ως “αναλυτικής έκφρασης” κυριάρχησε για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, στη διάρκεια του οποίου η μαθηματική ανάλυση ορίζονταν ως η γενική επιστήμη των μεταβλητών και των συναρτήσεών τους. Ο επόμενος ορισμός, που ταυτίζει την έννοια της συνάρτησης με αυτήν της “αναλυτικής έκφρασης”, δόθηκε από τον L. Euler το 1748, στο έργο του “Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση”.

*“Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας ονομάζεται μια αναλυτική έκφραση που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτή τη μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες”.*

Η παραπέρα εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης προήλθε κυρίως από την προσπάθεια μαθηματικής ερμηνείας φυσικών προβλημάτων, όπως π.χ. το πρόβλημα μιας παλλόμενης χορδής, στερεωμένης στα δυο άκρα της. Σ’ αυτό το πρόβλημα, που απασχόλησε ιδιαίτερα τους επιστήμονες στη διάρκεια του 18ου αιώνα, ζητείται να προσδιοριστεί μια συνάρτηση της μορφής  $y = f(x, t)$  που περιγράφει το σχήμα της χορδής σε μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ . Το είδος όμως των συναρτήσεων που υπεισέρχονται σ’ αυτό το ζήτημα είναι τόσο γενικό, που ανάγκασε τους μαθηματικούς να αναθεωρήσουν την καθιερωμένη αντίληψη ότι κάθε συνάρτηση ταυτίζεται με μια αναλυτική έκφραση και να αναζητήσουν γενικότερους ορισμούς. Ο L. Euler, ήδη από το 1755 διατύπωσε ένα τέτοιο ορισμό, απαλλαγμένο από την άμεση αναφορά στην έννοια της “αναλυτικής έκφρασης”.

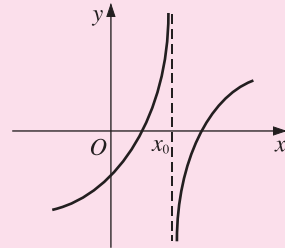
*“Αν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες ποσότητες με τέτοιο τρόπο ώστε, όταν οι τελευταίες αλλάζουν συμβαίνει το ίδιο και με τις πρώτες, τότε οι πρώτες ονομάζονται συναρτήσεις των τελευταίων. Αυτός ο ορισμός είναι πολύ ευρύς και περιλαμβάνει κάθε μέθοδο με την οποία μια ποσότητα θα μπορούσε να προσδιοριστεί από άλλες. Αν λοιπόν το  $x$  υποδηλώνει μια μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από το  $x$  με οποιοδήποτε τρόπο ή προσδιορίζονται από αυτό, ονομάζονται συναρτήσεις του  $x$ ”.*

Οι νέες αυτές αντιλήψεις οδήγησαν βαθμιαία στην έννοια της συνάρτησης ως αυθαίρετης αντιστοιχίας ανάμεσα στα στοιχεία δυο συνόλων, που δεν ακολουθεί υποχρεωτικά κάποιο “νόμο”. Ο J. Fourier, το 1822, επισήμανε ρητά αυτό το σημείο με την εξής παρατήρηση: “Γενικά, η συνάρτηση  $f(x)$  παριστάνει μια διαδοχή τιμών

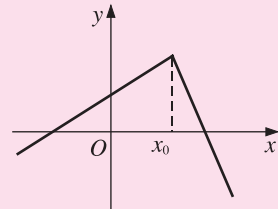
ή τεταγμένων, καθεμιά από τις οποίες είναι αυθαίρετη. Αν δοθεί μια απειρία τιμών στην τεταγμένη  $x$ , θα υπάρχουν ίσου πλήθους τεταγμένες  $f(x)$ . Όλες έχουν πραγματικές αριθμητικές τιμές, θετικές ή αρνητικές ή μηδέν. Δεν προϋποθέτουμε ότι αυτές οι τεταγμένες υπόκεινται σ' ένα κοινό νόμο διαδέχονται η μια την άλλη με οποιοδήποτε τρόπο και καθεμιά από αυτές δίνεται σαν να ήταν μια μοναδική ποσότητα”.

### Η έννοια της συνέχειας

Την περίοδο που η έννοια της συνάρτησης ταυτίζονταν με αυτήν της “αναλυτικής έκφρασης”, υπήρχαν δυο διαφορετικές αντιλήψεις για την έννοια της συνέχειας. Η μία από αυτές, με καθαρά γεωμετρική προέλευση, εξέφραζε την ιδιότητα μιας καμπύλης να μη παρουσιάζει “διακοπές” η άλλη, με προέλευση κυρίως από τη φυσική, εξέφραζε την ιδιότητα ενός φαινομένου να ακολουθεί τον ίδιο “νόμο”, την ιδιότητα μιας συνάρτησης να διατηρεί την ίδια αναλυτική έκφραση σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Σ' αυτήν την τελευταία αντίληψη περί συνέχειας άσκησε έντονη κριτική ο A. L. Cauchy το 1844, σημειώνοντας τα εξής: “Στα έργα των Euler και Lagrange, μια συνάρτηση ονομάζεται συνεχής ή ασυνεχής ανάλογα με το αν οι διαφορετικές τιμές αυτής της συνάρτησης υπόκεινται ή όχι στον ίδιο νόμο, προκύπτουν ή όχι από μια μοναδική εξίσωση. Όμως αυτός ο ορισμός πολύ απέχει από το να θεωρηθεί μαθηματικά ακριβής γιατί αν οι διαφορετικές τιμές μιας συνάρτησης εξαρτώνται από δυο ή περισσότερες διαφορετικές εξισώσεις, τίποτα δεν μας εμποδίζει να μειώσουμε τον αριθμό αυτών των εξισώσεων ή ακόμη και να τις αντικαταστήσουμε από μια απλή εξίσωση, της οποίας η ανάλυση θα μας έδινε όλες τις υπόλοιπες. Επομένως, αν κανείς θεωρήσει τον ορισμό των Euler και Lagrange εφαρμόσιμο σε όλα τα είδη των συναρτήσεων, τότε μια απλή αλλαγή του συμβολισμού είναι συχνά αρκετή για να μετασχηματίσει μια συνεχή συνάρτηση σε ασυνεχή και αντίστροφα. Έτσι π.χ., αν το  $x$  συμβολίζει μια πραγματική μεταβλητή, τότε η συνάρτηση που ισούται με  $+x$  ή  $-x$ , ανάλογα με το αν η μεταβλητή  $x$  είναι θετική ή αρνητική, πρέπει για το λόγο αυτό να τοποθετηθεί στην κλάση των ασυνεχών συναρτήσεων όμως η ίδια συνάρτηση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως συνεχής όταν γραφεί στη μορφή  $\sqrt{x^2}$  <sup>(1)</sup>.



Ασυνέχεια στο  $x_0$  λόγω διακοπής της καμπύλης σ' αυτό το σημείο



Ασυνέχεια στο  $x_0$  λόγω μεταβολής της αναλυτικής έκφρασης σ' αυτό το σημείο

<sup>(1)</sup> Είναι φανερό ότι ο Cauchy χρησιμοποιεί εδώ, χωρίς να την ονομάζει, τη συνάρτηση απόλυτη τιμή.

Έτσι, ο χαρακτήρας της συνέχειας των συναρτήσεων, θεωρούμενος από το σημείο όπου οι γεωμέτρους σταμάτησαν για πρώτη φορά, είναι ασαφής και αβέβαιος. Η αβεβαιότητα όμως θα εξαφανιστεί, αν στη θέση του ορισμού του Euler αντικαταστήσουμε αυτόν που έχω δώσει στο κεφάλαιο II του έργου μου “Αλγεβρική ανάλυση” ...”.

Ο ορισμός, στον οποίο αναφέρεται εδώ ο Cauchy, αποτελεί ουσιαστικά την πρώτη απόπειρα μελέτης της έννοιας της συνέχειας με λογική αυστηρότητα. Αποσυνδέοντας αυτήν την έννοια από κάθε γεωμετρική εποπτεία και εξάρτηση από την έννοια της “αναλυτικής έκφρασης”, τη μετασχημάτισε σε μια καθαρά αριθμητική ιδιότητα των συναρτήσεων, που μπορεί να γίνει αντικείμενο λογισμού. Ο ορισμός αυτός του Cauchy, που δόθηκε το 1821, έχει ως εξής: (έναν παρόμοιο ορισμό είχε δώσει και ο B. Bolzano το 1817).

“Έστω  $f(x)$  μια συνάρτηση της μεταβλητής  $x$  και ας υποθέσουμε ότι για κάθε τιμή του  $x$  σ’ ένα δοσμένο διάστημα η συνάρτηση αυτή έχει πάντοτε μια μοναδική και πεπερασμένη τιμή. Αν δώσουμε στην μεταβλητή  $x$  μια απειροελάχιστη αύξηση  $\alpha$ , η συνάρτηση θα αυξηθεί κατά τη διαφορά  $f(x + \alpha) - f(x)$ , η οποία εξαρτάται από τη νέα μεταβλητή  $\alpha$  και την τιμή που είχε το  $x$ . Σ’ αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση  $f(x)$  θα ονομάζεται **συνεχής** στο διάστημα της μεταβλητής  $x$ , αν για κάθε τιμή του  $x$  σ’ αυτό το διάστημα, η απόλυτη τιμή της διαφοράς  $f(x + \alpha) - f(x)$  μικραίνει επ’ άπειρον μαζί μ’ αυτήν του  $\alpha$ . Με άλλα λόγια, η  $f(x)$  θα παραμένει συνεχής ως προς  $x$ , αν μια απειροελάχιστη αύξηση της μεταβλητής παράγει πάντοτε μια απειροελάχιστη αύξηση της ίδιας της συνάρτησης”.

### **Η έννοια του ορίου**

Η έννοια της συνέχειας καθώς και ορισμένες άλλες βασικές έννοιες της ανάλυσης που θα γνωρίσουμε στα επόμενα κεφάλαια (όπως π.χ. η παράγωγος και το ολοκλήρωμα) περιείχαν, στα πρώτα στάδια της εξέλιξής τους, ορισμένες ασάφειες, που οφειλόταν κυρίως στην αδυναμία των μαθηματικών να διαπραγματευθούν με λογική αυστηρότητα την έννοια του απείρως μικρού και του απείρως μεγάλου. Αυτή η αδυναμία οδήγησε πολλούς να αμφισβητούν τα θεμέλια πάνω στα οποία στηρίζονταν το οικοδόμημα της μαθηματικής ανάλυσης και να συνδέουν τα εντυπωσιακά αποτελέσματά της με ορισμένες μεταφυσικές ερμηνείες.

Οι μαθηματικοί προσπάθησαν να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες εισάγοντας την ιδέα του ορίου, με την οποία, αρχικά, εκφράζονταν η δυνατότητα μιας μεταβαλλόμενης ποσότητας να προσεγγίζει επ’ άπειρον μια σταθερή ποσότητα χωρίς στην πραγματικότητα να τη φτάνει ποτέ. Ο d’Alembert όρισε το 1765 αυτήν την έννοια στην “Εγκυκλοπαίδεια” του Diderot ως εξής:

“Ένα μέγεθος ονομάζεται **όριο** ενός άλλου όταν το δεύτερο μπορεί να προσεγγίζει το

πρώτο σε μια απόσταση οσοδήποτε μικρή, αν και ένα μέγεθος δεν μπορεί να ξεπερνά ποτέ το μέγεθος που προσεγγίζει έτσι ώστε η διαφορά μιας τέτοιας ποσότητας από το όριό της να είναι εντελώς αμελητέα”.

Σύμφωνα λοιπόν μ’ αυτόν τον ορισμό, που περικλείει την έννοια της κίνησης ως μια διαδικασία προσέγγισης, ο αριθμός 2 είναι το όριο της ακολουθίας 1,9 1,99 1,999 1,9999 ..., αλλά όχι όριο ακολουθίας 1,9 1,99 2 2 ... (γιατί αυτή “φτάνει” το 2), ούτε όριο της ακολουθίας 1,9 2,01 1,9999 2,0001 ... (γιατί αυτή ξεπερνά το 2). Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν την έννοια αυτή του ορίου φαίνεται χαρακτηριστικά στο επόμενο παράδειγμα, στο οποίο ο S.F. Lacroix

αποδεικνύει το 1810 ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x}{x + \alpha} = \alpha$ :

“Έστω ότι δίνεται η συνάρτηση  $\frac{\alpha x}{x + \alpha}$ , στην οποία υποθέτουμε ότι το  $x$  αυξάνε-

ται θετικά χωρίς τέλος. Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το  $x$ , βρίσκουμε

$\frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha}{x}}$ , ένα αποτέλεσμα που δείχνει καθαρά ότι η συνάρτηση θα παραμένει πάντοτε

μικρότερη από το  $\alpha$  αλλά θα προσεγγίζει συνέχεια αυτήν την τιμή, αφού το μέρος  $\frac{\alpha}{x}$

του παρονομαστή μειώνεται όλο και περισσότερο και μπορεί να μειωθεί όσο θέλουμε.

Η διαφορά ανάμεσα στο δοσμένο κλάσμα και την τιμή  $\alpha$  εκφράζεται ως

$$\alpha - \frac{\alpha x}{x + \alpha} = \frac{\alpha^2}{x + \alpha}$$

και επομένως γίνεται ολοένα και πιο μικρή, όσο το  $x$  γίνεται μεγαλύτερο, και μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε ποσότητα, οσοδήποτε μικρή. Συνεπώς, το δοσμένο κλάσμα μπορεί να προσεγγίζει το  $\alpha$  όσο κοντά θέλουμε: άρα το  $\alpha$  είναι το όριο της συνάρτησης  $\frac{\alpha x}{x + \alpha}$  ως προς την αόριστη αύξηση του  $x$ ”.

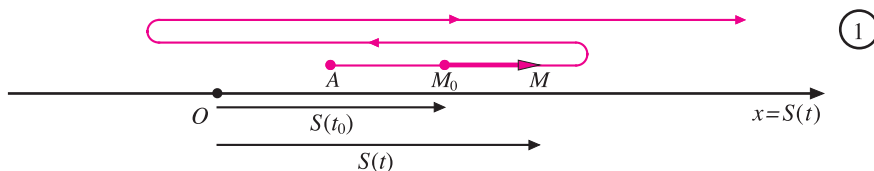
Για να τυποποιήσουμε αυτήν την μακροσκελή διαδικασία, οι μαθηματικοί προσπάθησαν να αποσυνδέσουν την έννοια του ορίου από την έννοια της κίνησης και να την ορίσουν με καθαρά αριθμητικούς όρους, έτσι ώστε να γίνει ένα αντικείμενο μαθηματικού λογισμού. Το αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας υπήρξε ο σημερινός “στατικός” ορισμός με τη βοήθεια των ανισοτήτων και της απόλυσης τιμής, που διατυπώθηκε από τον Weierstrass στα μέσα του 19ου αιώνα. Με αυτόν τον ορισμό, η έννοια του ορίου απογυμνώθηκε από κάθε στοιχείο εποπτείας αλλά έγινε έτσι δυνατό να αποδειχθούν με λογική αυστηρότητα οι ιδιότητες των ορίων και να τυποποιηθεί η διαδικασία υπολογισμού τους.

# 2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

## 2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

### Στιγμαία ταχύτητα

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι  $S = S(t)$  είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή  $t$ .



Η συνάρτηση  $S$  καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή  $t$  και ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.

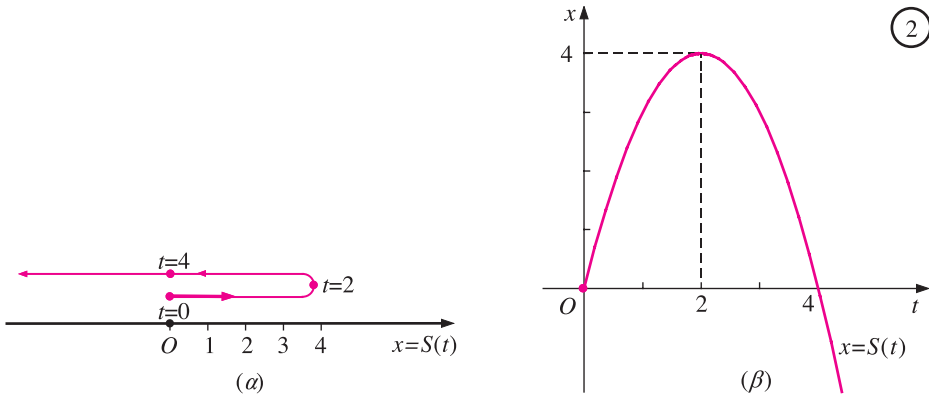
Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι κάποια χρονική στιγμή  $t_0$  το κινητό βρίσκεται στη θέση  $M_0$  και ότι μετά από παρέλευση χρόνου  $h$ , δηλαδή τη χρονική στιγμή  $t = t_0 + h$ , βρίσκεται στη θέση  $M$ . (Σχ. 1). Στο χρονικό διάστημα από  $t_0$  έως  $t$  η μετατόπιση του κινητού είναι ίση με  $S(t) - S(t_0)$ . Αρα, η **μέση ταχύτητα** του κινητού σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι

$$\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}.$$

Όσο το  $t$  είναι πλησιέστερα στο  $t_0$ , τόσο η μέση ταχύτητα του κινητού δίνει με καλύτερη προσέγγιση το *ρυθμό αλλαγής* της θέσης του κινητού κοντά στο  $t_0$ . Για το λόγο αυτό το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το  $t$  τείνει στο  $t_0$ , το ονομάζουμε **στιγμαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή  $t_0$  και τη συμβολίζουμε με  $v(t_0)$ . Δηλαδή:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}.$$

Για παράδειγμα, αν  $S(t) = -t^2 + 4t$  είναι η συνάρτηση θέσης ενός κινητού (Σχ.2β),



τότε η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού κατά τις χρονικές στιγμές  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$  και  $t_3 = 3$  είναι αντιστοίχως:

$$\bullet v(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{S(t) - S(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t^2 + 4t - 3}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-(t-1)(t-3)}{t-1} = 2$$

$$\bullet v(2) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{S(t) - S(2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{-t^2 + 4t - 4}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{-(t-2)(t-2)}{t-2} = 0$$

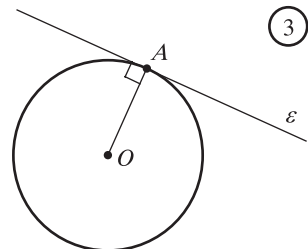
$$\bullet v(3) = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{S(t) - S(3)}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{-t^2 + 4t - 3}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{-(t-1)(t-3)}{t-3} = -2.$$

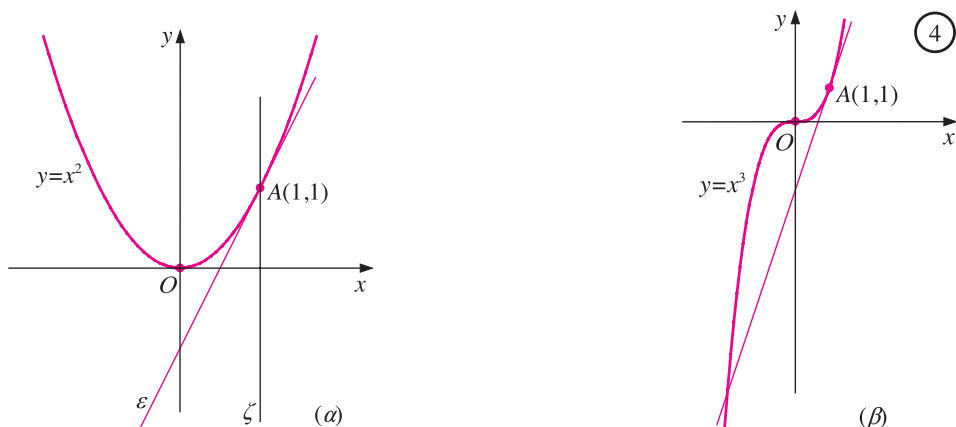
## ΣΧΟΛΙΟ

Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο  $t_0$  ισχύει  $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0$ , οπότε είναι  $v(t_0) \geq 0$ , ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο  $t_0$  ισχύει  $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} < 0$ , οπότε είναι  $v(t_0) \leq 0$ .

## Πρόβλημα εφαπτομένης

Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του  $A$  ονομάζουμε την ευθεία η οποία έχει με τον κύκλο ένα μόνο κοινό σημείο, το  $A$ . Ο ορισμός αυτός δεν μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε καμπύλη, γιατί, με έναν τέτοιο ορισμό η παραβολή  $y = x^2$  θα είχε στο σημείο  $A(1, 1)$  δύο εφαπτόμενες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  (Σχ. 4α), ενώ η  $y = x^3$  δεν θα είχε στο σημείο  $A(1, 1)$  καμία εφαπτομένη (Σχ. 4β).

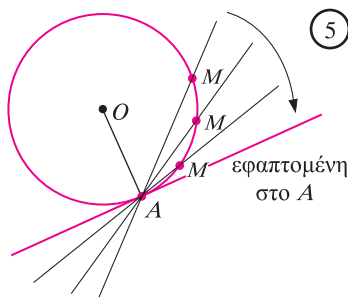




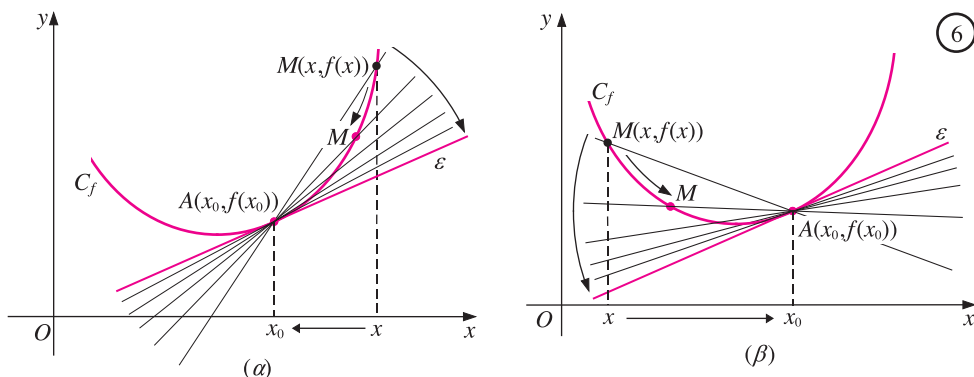
Επομένως, πρέπει να αναζητήσουμε έναν άλλον ορισμό της εφαπτομένης του κύκλου, ο οποίος να μπορεί να γενικευτεί για όλες τις καμπύλες.

Θεωρούμε, λοιπόν, ένα άλλο σημείο  $M$  του κύκλου (Σχ. 5). Τα σημεία  $A, M$  ορίζουν μια τέμνουσα του κύκλου, την ευθεία  $AM$ . Καθώς το σημείο  $M$ , κινούμενο πάνω στον κύκλο πλησιάζει στο  $A$ , η τέμνουσα  $AM$  φαίνεται να έχει ως “οριακή θέση” την εφαπτομένη του κύκλου στο  $A$ .

Τη διαπίστωση αυτή θα δούμε, τώρα, πως μπορούμε να την αξιοποιήσουμε για να ορίσουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της.



• Έστω  $f$  μία συνάρτηση και  $A(x_0, f(x_0))$  ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.



Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο  $M(x, f(x))$ ,  $x \neq x_0$ , της γραφικής παράστασης της  $f$  και την ευθεία  $AM$  που ορίζουν τα σημεία  $A$  και  $M$ , παρατηρούμε ότι:



Καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0$  με  $x > x_0$ , η τέμνουσα  $AM$  φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση  $\varepsilon$  (Σχ. 6α). Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$  με  $x < x_0$  (Σχ. 6β). Την οριακή θέση της  $AM$  θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $A$ . Επειδή η κλίση της τέμνουσας  $AM$  είναι ίση με  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , είναι λογικό να αναμένουμε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο

σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  θα έχει κλίση το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Έτσι δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω  $f$  μια συνάρτηση και  $A(x_0, f(x_0))$  ένα σημείο της  $C_f$ . Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  και είναι ένας πραγματικός αριθμός  $\lambda$ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A$ , την ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το  $A$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ .

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0),$$

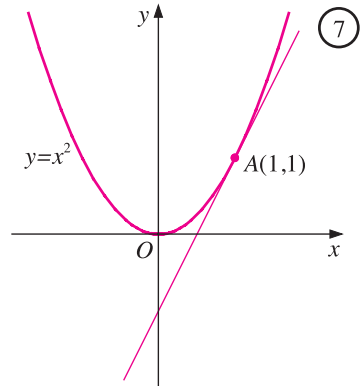
όπου

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2$  και το σημείο της  $A(1, 1)$ . Επειδή

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2, \end{aligned}$$

ορίζεται εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(1, 1)$ . Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 2$  και εξίσωση  $y - 1 = 2(x - 1)$ .



### Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

Στα προηγούμενα, οι ορισμοί της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού και της εφαπτομένης σε σημείο μιας καμπύλης μας οδήγησαν σε ένα όριο της μορφής

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Για την ιδιαίτερη περίπτωση που το παραπάνω όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$**  του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$**  και συμβολίζεται με  $f'(x_0)$ .

Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Για παράδειγμα, αν  $f(x) = x^2 + 1$ , τότε στο  $x_0 = 1$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$$

Επομένως,  $f'(1) = 2$ .

Αν, τώρα, στην ισότητα  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  θέσουμε  $x = x_0 + h$ , τότε έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Πολλές φορές το  $h = x - x_0$  συμβολίζεται με  $\Delta x$ , ενώ το  $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  συμβολίζεται με  $\Delta f(x_0)$ , οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο  $x_0$  με  $\frac{df(x_0)}{dx}$  ή  $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ . Ο συμβολισμός  $f'(x_0)$  είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.

Είναι φανερό ότι, αν το  $x_0$  είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της  $f$ , τότε:

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , αν και μόνο αν υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι ίσα.

Για παράδειγμα,

— η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x < 0 \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$

είναι παραγωγίσιμη στο 0 με  $f'(0) = 0$ , αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x} = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = 0,$$

ενώ

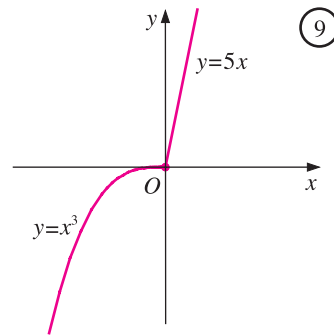
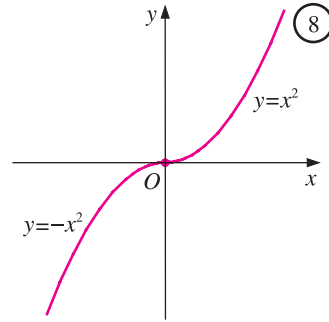
— η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^3 & , x < 0 \\ 5x & , x \geq 0 \end{cases}$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 0}{x} = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x - 0}{x} = 5.$$



## ΣΧΟΛΙΑ

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

• Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή  $t_0$ , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης  $x = S(t)$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ . Δηλαδή, είναι

$$v(t_0) = S'(t_0).$$

• Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης  $\varepsilon$  της  $C_f$  μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f$ , στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι η παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$ . Δηλαδή, είναι

$$\lambda = f'(x_0),$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$  είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Την κλίση  $f'(x_0)$  της εφαπτομένης  $\varepsilon$  στο  $A(x_0, f(x_0))$  θα τη λέμε και **κλίση της  $C_f$  στο  $A$  ή κλίση της  $f$  στο  $x_0$** .

### Κατακόρυφη εφαπτομένη

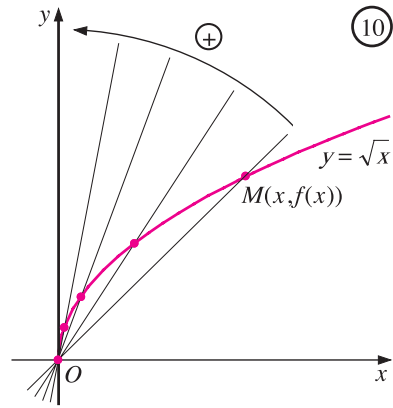
• Ας δούμε, τώρα, αν μπορούμε να ορίσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  σ' ένα σημείο της  $A(x_0, f(x_0))$ , όταν η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

— Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (\text{Σχ. 10}).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$



Παρατηρούμε όμως ότι, αν  $M(x, f(x))$ ,  $x \neq 0$ , είναι ένα σημείο της  $C_f$ , τότε, καθώς το  $x$  τείνει στο 0, η τέμνουσα  $OM$  φαίνεται να παίρνει ως οριακή θέση την κατακόρυφη ευθεία που περνάει από το  $O$ , δηλαδή τείνει να συμπίπτει με τον άξονα  $y'y'$ . Στην περίπτωση αυτή ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $O(0,0)$  ορίζουμε την κατακόρυφη ευθεία  $x = 0$ .

— Έστω τώρα και η συνάρτηση

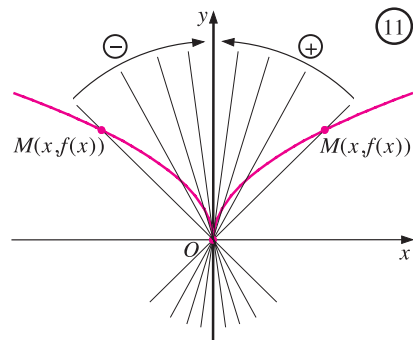
$$f(x) = \sqrt{|x|}. \quad (\text{Σχ. 11})$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$



Παρατηρούμε όμως και εδώ ότι, αν  $M(x, f(x))$ ,  $x \neq 0$ , είναι ένα σημείο της  $C_f$ , τότε, καθώς το  $x$  τείνει στο 0, η τέμνουσα  $OM$  τείνει να συμπίπτει με τον άξονα  $y'y'$ . Στην περίπτωση αυτή ως εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $O(0, 0)$  ορίζουμε την κατακόρυφη ευθεία  $x = 0$ .

Γενικά:

## ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι **συνεχής** στο  $x_0$  και ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ (ή } -\infty)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty,$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty,$$

τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της  $C_f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  την κατακόρυφη ευθεία  $x = x_0$ .

Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Σχ. 12})$$

δέχεται στο σημείο της  $O(0,0)$  κατακόρυφη εφαπτομένη, την  $x = 0$ , αφού είναι συνεχής στο 0 και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty$$

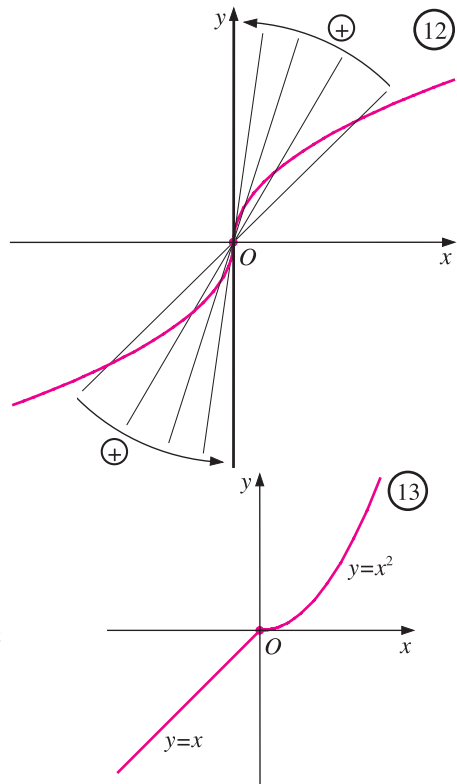
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

• Αν μια συνάρτηση  $f$  **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και **δεν** ισχύουν οι προϋποθέσεις του παραπάνω ορισμού, τότε **δεν ορίζουμε** εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ .

Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

δεν έχει εφαπτομένη στο  $O(0,0)$ , αφού



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1,$$

ενώ

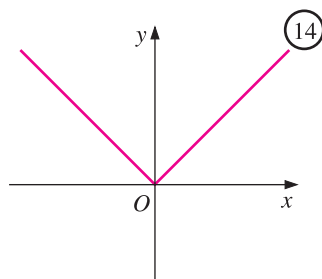
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

### Παράγωγος και συνέχεια

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = |x|$ . Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \text{ ενώ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$



Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση  $f$  μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο  $x_0$  χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Αν, όμως, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε θα είναι και συνεχής στο  $x_0$ , δηλαδή ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για  $x \neq x_0$  έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ . Επομένως,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , δηλαδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ . ■

## ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Για ποιες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \alpha^2 & , x < 0 \\ x^3 + \alpha x + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$  είναι:

- i) συνεχής στο  $x_0 = 0$ ;      ii) παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ ;

## ΛΥΣΗ

i) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -1.$$

ii) Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν  $\alpha \neq 1, -1$ , η συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής και επομένως δεν είναι παραγωγίσιμη.
- Αν  $\alpha = 1$ , η συνάρτηση γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , x < 0 \\ x^3 + x + 1 & , x \geq 0 \end{cases}.$$

— Για  $x < 0$ , έχουμε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x} = \frac{x(x+1)}{x} = x+1,$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1.$$

— Για  $x > 0$  έχουμε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 + x + 1 - 1}{x} = \frac{x(x^2 + 1)}{x} = x^2 + 1,$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1.$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

και επομένως, για  $\alpha = 1$  η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

• Αν  $\alpha = -1$ , η συνάρτηση γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , \quad x < 0 \\ x^3 - x + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

— Για  $x < 0$ , έχουμε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x} = \frac{x(x + 1)}{x} = x + 1,$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1.$$

— Για  $x > 0$  έχουμε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 - x + 1 - 1}{x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x} = x^2 - 1,$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = -1.$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

και επομένως, για  $\alpha = -1$  η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$ , όταν

i)  $f(x) = x^2 + 1, x_0 = 0$

ii)  $f(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = 1$

iii)  $f(x) = \eta\mu^2 x, x_0 = 0.$



2. Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$ , όταν
- i)  $f(x) = x|x|$ ,  $x_0 = 0$       ii)  $f(x) = |x-1|$ ,  $x_0 = 1$
- iii)  $f(x) = |x^2 - 3x|$ ,  $x_0 = 1$       iv)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , x < 0 \\ x + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ ,  $x_0 = 0$ .
3. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = xf(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο 0.
4. Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο  $x_0$  τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό.
- i)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x < 0 \\ x^3 & , x \geq 0 \end{cases}$ , αν  $x_0 = 0$       ii)  $f(x) = |x-1| + 1$ , αν  $x_0 = 1$ .
5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  (αν ορίζεται) στο  $A(x_0, f(x_0))$  για κάθε μία από τις συναρτήσεις των ασκήσεων 1 και 2.

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f(x) = 2 - x + x\eta\mu|x|$  στο σημείο  $x_0 = 0$ .
2. Αν για μία συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f(1+h) = 2 + 3h + 3h^2 + h^3$ , για κάθε  $h \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:
- i)  $f(1) = 2$       ii)  $f'(1) = 3$ .
3. Αν  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & , x < 0 \\ \eta\mu x + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ , να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο  $A(0,1)$  και σχηματίζει με τον άξονα των  $x$  γωνία  $\frac{\pi}{4}$ .
4. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$  στο  $x_0 = 0$ .
5. Αν  $x+1 \leq f(x) \leq x^2 + x + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:
- i)  $f(0) = 1$

$$\text{ii) } 1 \geq \frac{f(x) - f(0)}{x} \geq x + 1, \quad \text{για } x < 0 \text{ και}$$

$$1 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq x + 1, \quad \text{για } x > 0$$

$$\text{iii) } f'(0) = 1.$$

6. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\eta\mu^2 x - x^4 \leq xf(x) \leq \eta\mu^2 x + x^4$$

να αποδείξετε ότι

$$\text{i) } f(0) = 0$$

$$\text{ii) } f'(0) = 1.$$

7. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 0 και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$ , να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } f(0) = 0$$

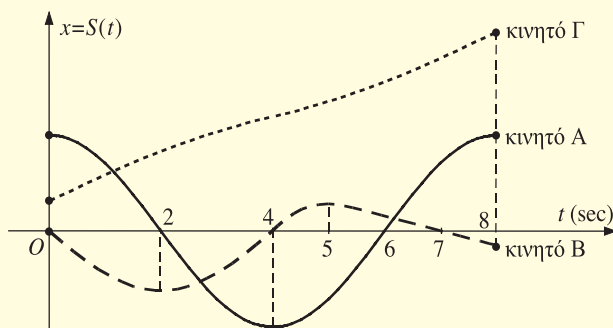
$$\text{ii) } f'(0) = 4.$$

8. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε

$$\text{i) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = -f'(x_0)$$

$$\text{ii) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = 2f'(x_0).$$

9. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως τριών κινητών που κινήθηκαν πάνω στον άξονα  $x'$  στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 8 sec. Να βρείτε:



- i) Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;
- ii) Ποιο κινητό κινήθηκε μόνο προς τα δεξιά;
- iii) Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή  $t = 2 \text{ sec}$ , ποιο τη χρονική στιγμή  $t = 4 \text{ sec}$  και ποιο τη χρονική στιγμή  $t = 5 \text{ sec}$ ;
- iv) Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από  $0 \text{ sec}$  έως  $4 \text{ sec}$ ;
- v) Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;
- vi) Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;

## 2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

• Έστω  $f$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$ . Θα λέμε ότι:

— Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $A$  ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο  $x_0 \in A$ .

— Η  $f$  είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$**  του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ .

— Η  $f$  είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$**  του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$$

• Έστω  $f$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A$  και  $A_1$  το σύνολο των σημείων του  $A$  στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε  $x \in A_1$  στο  $f'(x)$ , ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f' : A_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(x), \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της  $f$**  ή απλά **παράγωγος της  $f$** . Η πρώτη παράγωγος της  $f$  συμβολίζεται και με  $\frac{df}{dx}$  που διαβάζεται “ντε εφ προς ντε χι”. Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση  $y = f'(x)$  θα τη συμβολίζουμε και με  $y = (f(x))'$ .

Αν υποθέσουμε ότι το  $A_1$  είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της  $f'$ , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της  $f$  και συμβολίζεται με  $f''$ .

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος** της  $f$ , με  $\nu \geq 3$ , και συμβολίζεται με  $f^{(\nu)}$ . Δηλαδή

$$f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]', \nu \geq 3.$$

Η εύρεση της παραγώγου συνάρτησης, με βάση τον ορισμό που δώσαμε, δεν είναι πάντα εύκολη. Στη συνέχεια θα δούμε μερικές βασικές περιπτώσεις παραγωγίσιων συναρτήσεων, που θα τις χρησιμοποιούμε στην εύρεση παραγώγου συναρτήσεων (αντί να χρησιμοποιούμε τον ορισμό κάθε φορά).

### Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

• Έστω η σταθερή συνάρτηση  $f(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = 0$ , δηλαδή

$$(c)' = 0$$

Πράγματι, αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $\mathbb{R}$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή  $(c)' = 0$ . ■

• Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = 1$ , δηλαδή

$$(x)' = 1$$

Πράγματι, αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $\mathbb{R}$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή  $(x)' = 1$ . ■

• Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^v$ ,  $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = vx^{v-1}$ , δηλαδή

$$(x^v)' = vx^{v-1}$$

Πράγματι, αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $\mathbb{R}$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1},$$

δηλαδή  $(x^v)' = vx^{v-1}$ . ■

• Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , δηλαδή

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Πράγματι, αν  $x_0$  είναι ένα σημείο του  $(0, +\infty)$ , τότε για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η  $f(x) = \sqrt{x}$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. ■

• Έστω συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ , δηλαδή

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$$

Πράγματι, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $h \neq 0$  ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\eta\mu(x+h) - \eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h - \eta\mu x}{h} \\ &= \eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}. \end{aligned}$$

Επειδή

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1 \text{ και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0,$$

έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή,  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ . ■

• Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = -\eta\mu x$ , δηλαδή

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

Πράγματι, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $h \neq 0$  ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sigma\upsilon\nu(x+h) - \sigma\upsilon\nu x}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu h - \eta\mu x \cdot \eta\mu h - \sigma\upsilon\nu x}{h} \\ &= \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} - \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left( \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h} \right) \\ &= \sigma\upsilon\nu x \cdot 0 - \eta\mu x \cdot 1 = -\eta\mu x. \end{aligned}$$

Δηλαδή,  $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ . ■

## ΣΧΟΛΙΟ

Τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0,$$

τα οποία χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε την παράγωγο των συναρτήσεων  $f(x) = \eta\mu x$ ,  $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$  είναι η παράγωγος στο  $x_0 = 0$  των συναρτήσεων  $f, g$  αντιστοίχως, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \eta\mu 0}{x - 0} = f'(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 0}{x - 0} = g'(0).$$

• Έστω η συνάρτηση  $f(x) = e^x$ . Αποδεικνύεται ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  και ισχύει  $f'(x) = e^x$ , δηλαδή

$$(e^x)' = e^x$$

• Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$ . Αποδεικνύεται ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , δηλαδή

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \ln x$ , στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

### ΛΥΣΗ

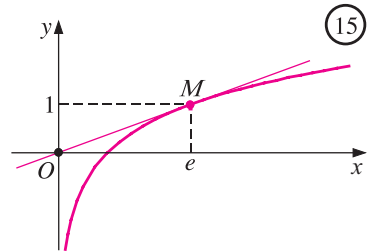
Επειδή  $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ , η εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$  της  $C_f$  σε ένα σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  είναι

$$y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0).$$

Η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$ , αν και μόνο αν

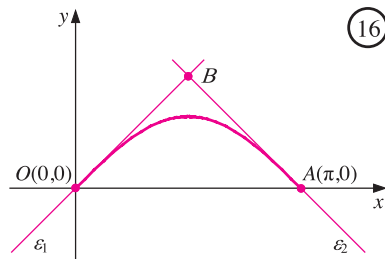
$$0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e.$$

Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το  $M(e, 1)$ .



2. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu x$  στα σημεία  $O(0,0)$  και  $A(\pi,0)$  αντιστοίχως. Να βρεθούν:

- i) Οι εξισώσεις των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$   
 ii) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  και ο άξονας των  $x$ .



### ΛΥΣΗ

i) Επειδή  $f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ , είναι  $f'(0) = 1$  και  $f'(\pi) = -1$  οπότε οι  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  έχουν εξισώσεις

$$y = x \quad \text{και} \quad y = -(x - \pi)$$

αντιστοίχως.

ii) Αν λύσουμε το σύστημα των παραπάνω δύο εξισώσεων βρίσκουμε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  τέμνονται στο σημείο  $B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Άρα, το τρίγωνο  $OAB$  έχει εμβαδόν  $E = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$  όταν:

i)  $f(x) = x^4, x_0 = -1$       ii)  $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 9$

iii)  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, x_0 = \frac{\pi}{6}$       iv)  $f(x) = \ln x, x_0 = e$

v)  $f(x) = e^x, x_0 = \ln 2$ .

2. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

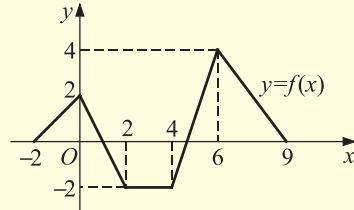
i)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$       ii)  $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

iii)  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \\ x^4, & x \geq 2 \end{cases}$       iv)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2/3 \\ x^3, & x > 2/3 \end{cases}$ .

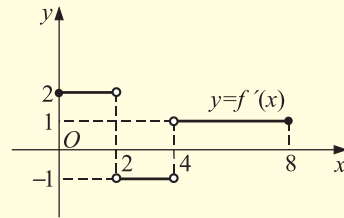


3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής  $y = x^2$  στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης να είναι μεταξύ τους παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^3$ ;

4. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης  $f$  του διπλανού σχήματος.



5. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι συνεχής, με  $f(0) = 0$ , και της οποίας η παράγωγος παριστάνεται γραφικά στο διπλανό σχήμα.



### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x & , x < \pi \\ \alpha x + \beta & , x \geq \pi \end{cases}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = \pi$ .
2. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  και το σημείο  $A(\xi, f(\xi))$ ,  $\xi \neq 0$  της γραφικής παράστασης της  $f$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A(\xi, f(\xi))$  και  $B(-\xi, 0)$  εφάπτεται της  $C_f$  στο  $A$ .
3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f(x) = x^3$  σε οποιοδήποτε σημείο της  $M(\alpha, \alpha^3)$ ,  $\alpha \neq 0$  έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο  $N$  εκτός του  $M$ . Στο σημείο  $N$  η κλίση της  $C_f$  είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο  $M$ .
4. Έστω  $\varepsilon$  η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{x}$  σε ένα σημείο της  $M\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right)$ . Αν  $A, B$  είναι τα σημεία στα οποία η  $\varepsilon$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι
- Το  $M$  είναι μέσο του  $AB$ .
  - Το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$  είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του  $\xi \in \mathbb{R}^*$ .

## 2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

### Παράγωγος αθροίσματος

#### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για  $x \neq x_0$ , ισχύει:

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0). \quad \blacksquare$$

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε για κάθε  $x \in \Delta$  ισχύει:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν  $f_1, f_2, \dots, f_k$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\Delta$ , τότε

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x).$$

Για παράδειγμα,

$$(\eta\mu x + x^2 + e^x + 3)' = (\eta\mu x)' + (x^2)' + (e^x)' + (3)' = \sigma\upsilon\nu x + 2x + e^x.$$

## Παράγωγος γινομένου

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε και η συνάρτηση  $fg$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για  $x \neq x_0$  ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Επειδή οι  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες, άρα και συνεχείς στο  $x_0$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad \blacksquare$$

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε για κάθε  $x \in \Delta$  ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Για παράδειγμα,

$$(e^x \ln x)' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\begin{aligned} (f(x)g(x)h(x))' &= [(f(x)g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x)g(x))' \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h'(x) \\ &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x). \end{aligned}$$

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot \ln x)' &= (\sqrt{x})' \cdot \eta\mu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\eta\mu x)' \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot (\ln x)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \eta\mu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \cdot \frac{1}{x} \quad x > 0.\end{aligned}$$

Αν  $f$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $c \in \mathbb{R}$ , επειδή  $(c)' = 0$ , σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε:

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

Για παράδειγμα,

$$(6x^3)' = 6(x^3)' = 6 \cdot 3x^2 = 18x^2.$$

## Παράγωγος πηλίκου

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  και  $g(x_0) \neq 0$ , τότε και η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Η απόδειξη παραλείπεται.

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και για κάθε  $x \in \Delta$  ισχύει  $g(x) \neq 0$ , τότε για κάθε  $x \in \Delta$  έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{5x-1}\right)' &= \frac{(x^2)'(5x-1) - x^2(5x-1)'}{(5x-1)^2} = \frac{2x(5x-1) - x^2 \cdot 5}{(5x-1)^2} \\ &= \frac{10x^2 - 2x - 5x^2}{(5x-1)^2} = \frac{5x^2 - 2x}{(5x-1)^2}, \quad x \neq \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες προτάσεις μπορούμε τώρα να βρούμε τις παραγώγους μερικών ακόμη βασικών συναρτήσεων.

• Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^{-\nu}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει  $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$ , δηλαδή

$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$$

Πράγματι, για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left( \frac{1}{x^\nu} \right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}. \blacksquare$$

Για παράδειγμα,

$$(x^{-4})' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}, x \neq 0$$

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι  $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$ , για κάθε φυσικό  $\nu > 1$ . Επομένως, αν  $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$ , τότε

$$(x^\kappa)' = \kappa x^{\kappa-1}.$$

• Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\phi x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ , δηλαδή

$$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Πράγματι, για κάθε  $x \in \mathbb{R}_1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} (\varepsilon\phi x)' &= \left( \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \blacksquare \end{aligned}$$

• Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\phi x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$  και ισχύει  $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ , δηλαδή

$$(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$ .

**ΛΥΣΗ**

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x \ln x}{x-1} \right)' = \frac{(x \ln x)'(x-1) - x \ln x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x \ln x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x \ln x - \ln x + x - 1 - x \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

**2.** Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  και  $g(x) = x^2 - x + 1$  έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο  $A(0,1)$  και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης αυτής.

**ΛΥΣΗ**

Αρκεί να δείξουμε ότι  $f'(0) = g'(0)$ . Έχουμε:

$$f'(x) = \left( \frac{1}{x+1} \right)' = \frac{(1)'(x+1) - 1(x+1)'}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

και

$$g'(x) = (x^2 - x + 1)' = 2x - 1,$$

οπότε

$$f'(0) = -1 \text{ και } g'(0) = -1.$$

Άρα

$$f'(0) = -1 = g'(0).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $A(0,1)$  είναι:

$$y-1 = -1(x-0) \Leftrightarrow y = -x+1.$$

**Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης**

Έστω ότι ζητάμε την παράγωγο της συνάρτησης  $y = \eta\mu 2x$ , η οποία είναι σύνθεση της  $g(x) = 2x$  και της  $f(x) = \eta\mu x$ . Επειδή  $\eta\mu 2x = 2 \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ , έχουμε

$$\begin{aligned} (\eta\mu 2x)' &= (2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x)' = 2(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)' \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x = 2(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της  $y = \eta\mu 2x$  δεν είναι η συνάρτηση  $y = \sigma\upsilon\nu 2x$ , όπως ίσως θα περίμενε κανείς από τον τύπο  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ . Αυτό εξηγείται με το παρακάτω θεώρημα:

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Αν η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(x_0)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Γενικά, αν μια συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(\Delta)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Δηλαδή, αν  $u = g(x)$ , τότε

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u'.$$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν  $y = f(u)$  και  $u = g(x)$ , έχουμε τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας**.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Το σύμβολο  $\frac{dy}{dx}$  δεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως

πηλίκο, πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι τα εξής:

- Η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ , δηλαδή

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (1)$$

Πράγματι, αν  $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$  και θέσουμε  $u = \alpha \ln x$ , τότε έχουμε  $y = e^u$ . Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

- Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = a^x \ln a$ , δηλαδή

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

<sup>(1)</sup> Αποδεικνύεται ότι, για  $a > 1$  η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο  $x_0 = 0$  και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.

Πράγματι, αν  $y = a^x = e^{x \ln a}$  και θέσουμε  $u = x \ln a$ , τότε έχουμε  $y = e^u$ . Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

- Η συνάρτηση  $f(x) = \ln |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

Πράγματι

— αν  $x > 0$ , τότε  $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ , ενώ

— αν  $x < 0$ , τότε  $\ln |x| = \ln(-x)$ , οπότε, αν θέσουμε  $y = \ln(-x)$  και  $u = -x$ , έχουμε  $y = \ln u$ . Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα  $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ .

Ανακεφαλαιώνοντας, αν η συνάρτηση  $u = f(x)$  είναι παραγωγίσιμη, τότε έχουμε:

$(u^a)' = au^{a-1} \cdot u'$	$(\varepsilon\phi u)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u} \cdot u'$
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(\sigma\phi u)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 u} \cdot u'$
$(\eta\mu u)' = \sigma\upsilon\nu u \cdot u'$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\sigma\upsilon\nu u)' = -\eta\mu u \cdot u'$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
$(\ln  u )' = \frac{1}{u} \cdot u'$	

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i)  $f(x) = (3x^2 + 5)^9$

ii)  $g(x) = e^{-x^2+1}$

iii)  $h(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$ .



**ΛΥΣΗ**

i) Αν θέσουμε  $u = 3x^2 + 5$ , τότε η συνάρτηση  $y = f(x)$  γράφεται

$$y = u^9,$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} y' &= (u^9)' = 9u^8 \cdot u' \\ &= 9(3x^2 + 5)^8 (3x^2 + 5)' \\ &= 9(3x^2 + 5)^8 \cdot 6x \\ &= 54x(3x^2 + 5)^8. \end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned} \text{ii) } g'(x) &= (e^{-x^2+1})' = e^{-x^2+1}(-x^2+1)' && (\text{θέσαμε } u = -x^2+1) \\ &= e^{-x^2+1}(-2x) = -2xe^{-x^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } h'(x) &= (\ln(\sqrt{x^2+1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot (\sqrt{x^2+1})' && (\text{θέσαμε } u = \sqrt{x^2+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+1}. \end{aligned}$$

**2.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$  του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $M_1(x_1, y_1)$ .

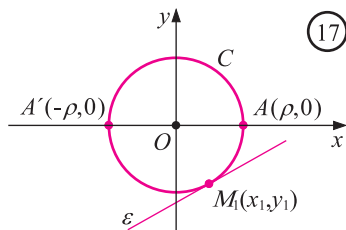
**ΛΥΣΗ**

Αν λύσουμε την εξίσωση του κύκλου ως προς  $y$ , βρίσκουμε ότι

$$y = \sqrt{\rho^2 - x^2}, \text{ αν } y \geq 0 \text{ και } y = -\sqrt{\rho^2 - x^2}, \text{ αν } y \leq 0.$$

Επομένως, ο κύκλος  $C$  αποτελείται από τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$f_1(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2} \text{ και } f_2(x) = -\sqrt{\rho^2 - x^2}$$



οι οποίες είναι ορισμένες στο κλειστό διάστημα  $[-\rho, \rho]$  και παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα  $(-\rho, \rho)$ .

Αν, τώρα, με  $y = f(x)$  συμβολίσουμε εκείνη από τις παραπάνω συναρτήσεις στην οποία ανήκει το  $M_1(x_1, y_1)$ , τότε θα ισχύει

$$\lambda_\varepsilon = f'(x_1) \quad (1) \quad \text{και} \quad x^2 + f^2(x) = \rho^2 \quad (2)$$

Έτσι, με παραγωγή και των δύο μελών της (2), έχουμε

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0$$

οπότε, για  $x = x_1$ , θα ισχύει

$$x_1 + f(x_1)f'(x_1) = 0.$$

Έτσι, λόγω της (1) θα έχουμε

$$x_1 + y_1 \cdot \lambda_\varepsilon = 0$$

οπότε, για  $y_1 \neq 0$ , θα είναι

$$\lambda_\varepsilon = \frac{-x_1}{y_1}.$$

Άρα, η εφαπτομένη  $\varepsilon$  έχει εξίσωση:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

η οποία γράφεται διαδοχικά:

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2, \quad (3)$$

αφού  $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$ .

Αν  $y_1 = 0$ , που συμβαίνει όταν το σημείο  $M_1(x_1, y_1)$  είναι το  $A(\rho, 0)$  ή το  $A'(-\rho, 0)$ , τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι οι εφαπτόμενες της  $C_f$  στα σημεία αυτά είναι οι κατακόρυφες ευθείες

$$x = \rho \quad \text{και} \quad x = -\rho$$

αντιστοίχως. Και οι δυο αυτές εξισώσεις δίνονται από τον παραπάνω τύπο (3) για  $(x_1, y_1) = (\rho, 0)$  και  $(x_1, y_1) = (-\rho, 0)$  αντιστοίχως.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης οποιασδήποτε άλλης κωνικής τομής.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

$$\text{i) } f(x) = x^7 - x^4 + 6x - 1$$

$$\text{ii) } f(x) = 2x^3 + \ln x - \sqrt{3}$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x$$

$$\text{iv) } f(x) = \sin x - \sqrt{3}\eta\mu x + \ln 3.$$

2. Ομοίως των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$$

$$\text{ii) } f(x) = e^x \eta\mu x$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

$$\text{iv) } f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$$

$$\text{v) } f(x) = x^2 \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x.$$

3. Ομοίως των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$$

$$\text{ii) } f(x) = \epsilon\phi x + \sigma\phi x$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{\eta\mu x}{e^x}$$

$$\text{iv) } f(x) = \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}.$$

4. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & , x < 0 \\ 12\sqrt{x} + 6x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} x^2 + \eta\mu x & , x \leq 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}.$$

5. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$ , στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα των  $x$ , όταν

$$\text{i) } f(x) = x + \frac{4}{x} \quad \text{ii) } f(x) = \frac{x}{e^x} \quad \text{iii) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

6. Αν  $f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$  και  $g(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ , να βρείτε τις συναρτήσεις  $f'$ ,  $g'$ . Ισχύει  $f' = g'$ ;

7. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$  στο κοινό σημείο τους  $A(1,1)$ , είναι κάθετες.
8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$ , για τις οποίες η κλίση της  $C_f$  στο σημείο της  $A(0,1)$  είναι ίση με  $\frac{1}{2}$ .
9. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - 3x + 5$ , στα οποία η εφαπτομένη είναι:
- παράλληλη προς την ευθεία  $y = 9x + 1$
  - κάθετη προς την ευθεία  $y = -x$ .
10. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f(x) = x^2$  η οποία άγεται από το σημείο  $A(0, -1)$ .
11. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η  $C_f$ , διέρχεται από το σημείο  $A(1,2)$  και εφάπτεται της ευθείας  $y = x$  στην αρχή των αξόνων.
12. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:
- $f(x) = (3x^4 + 4x^3)^{-2}$
  - $f(x) = (x - 1)^{2/3}$
  - $f(x) = \eta\mu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$
  - $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$
  - $f(x) = e^{-x^2}$ .
13. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$  όταν:
- $f(x) = x^2\sqrt{1+x^3}$ ,  $x_0 = 2$
  - $f(x) = (2x)^{1/3} + (2x)^{2/3}$ ,  $x_0 = 4$
  - $f(x) = x^3\eta\mu^3(\pi x)$ ,  $x_0 = \frac{1}{6}$
  - $f(x) = \frac{x^2+2}{2-x}$ ,  $x_0 = 3$ .
14. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:
- $f(x) = x^{\ln x}$
  - $f(x) = 2^{5x-3}$
  - $f(x) = (\ln x)^x$ ,  $x > 1$
  - $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sin x}$

15. Αν  $f(x) = \eta\mu^2 x$ , να αποδείξετε ότι  $f''(x) + 4 f(x) = 2$ .

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \frac{1}{x}$  και  $g(x) = x^2 - x + 1$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτομένες τους είναι κάθετες.
2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = 3x - 2$  έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^3$  δύο κοινά σημεία και εφάπτεται αυτής σε ένα από τα σημεία αυτά.
3. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = ax^2 + bx + 2$  και  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 1$ .
4. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = e^x$  και  $g(x) = -x^2 - x$ . Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(0,1)$  εφάπτεται και στην  $C_g$ .
5. Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε  $f(0) = 4$ ,  $f'(-1) = 2$ ,  $f''(2) = 4$  και  $f^{(3)}(1) = 6$ .
6. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο  $f$  δεύτερου βαθμού του οποίου η γραφική παράσταση να εφάπτεται των ευθειών  $y = x + 1$  και  $y = 3x - 1$  στα σημεία  $A(0,1)$  και  $B(1,2)$  αντιστοίχως.
7. Αν μία συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 = \alpha$ , να αποδείξετε ότι

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(x) - \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = f(\alpha) + \alpha f'(\alpha)$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{e^x f(x) - e^\alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = e^\alpha (f(\alpha) + f'(\alpha)).$$

8. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \eta\mu 2x - 2\eta\mu^2 x, \quad x \in [0, 2\pi],$$

στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ .

9. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

$$\text{i) } f(x) = \sqrt[3]{x^2},$$

$$\text{ii) } f(x) = \sqrt[3]{x^4}$$

και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $O(0,0)$  σε καθεμια περίπτωση χωριστά.

10. Έστω  $f$  μια παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση για την οποία ισχύει  $f'(1) = 1$  και  $g$  η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα  $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(1, f(1))$  εφάπτεται της  $C_g$  στο  $B(0, g(0))$ .

11. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(-1,1)$ , για την οποία ισχύει

$$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x, \text{ για κάθε } x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

i) Να βρείτε την  $f'(0)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$  σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

## 2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, ορίσαμε τη στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή  $t_0$  ως το όριο

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = S'(t_0).$$

Το όριο αυτό το λέμε και **ρυθμό μεταβολής** της τετμημένης  $S$  του κινητού ως προς το χρόνο  $t$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ . Γενικά,

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$ , όταν  $f$  είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς το  $x$  στο σημείο  $x_0$**  την παράγωγο  $f'(x_0)$ .

Για παράδειγμα, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας  $v$  ως προς το χρόνο  $t$  τη χρονική στιγμή  $t_0$  είναι η παράγωγος  $v'(t_0)$ , της ταχύτητας  $v$  ως προς το χρόνο  $t$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ . Η παράγωγος  $v'(t_0)$  λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή  $t_0$  και συμβολίζεται με  $a(t_0)$ . Είναι δηλαδή

$$a(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0).$$

Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής  $K$ , η εισπραξη  $E$  και το κέρδος  $P$  εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας  $x$  του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος  $K'(x_0)$  παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους  $K$  ως προς την ποσότητα  $x$ , όταν  $x = x_0$  και

λέγεται **οριακό κόστος στο  $x_0$** . Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο  $x_0$**  και **οριακό κέρδος στο  $x_0$** .

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Ένα βότσαλο που ρίχεται σε μία λίμνη προκαλεί κυκλικό κυματισμό. Μία συσκευή μέτρησης δείχνει ότι τη χρονική στιγμή  $t_0$  που η ακτίνα  $r$  του κυματισμού είναι 50 cm, ο ρυθμός μεταβολής της  $r$  είναι 20 cm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού  $E$  που περικλείεται από το κυκλικό κύμα, τη χρονική στιγμή  $t_0$ .

### ΛΥΣΗ

Επειδή  $E = \pi \cdot r^2$  και η ακτίνα  $r$  είναι συνάρτηση του χρόνου  $t$ , έχουμε

$$E(t) = \pi r^2(t),$$

οπότε

$$E'(t) = 2\pi r(t) \cdot r'(t).$$

Επομένως,

$$E'(t_0) = 2\pi r(t_0) \cdot r'(t_0) = 2\pi \cdot 50 \cdot 20 = 2000\pi \text{ (cm}^2\text{/sec)}.$$

**2.** Αν το συνολικό κόστος παραγωγής  $x$  μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι  $K(x)$  και η συνολική είσπραξη από την πώλησή τους είναι  $E(x)$ , τότε  $P(x) = E(x) - K(x)$  είναι το συνολικό κέρδος και  $K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x}$  είναι το μέσο κόστος.

- i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης είναι ίσοι.
- ii) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ίσο με το οριακό κόστος.

### ΛΥΣΗ

i) Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι

$$P'(x) = E'(x) - K'(x).$$

Επομένως,

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) - K'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) = K'(x).$$

ii) Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους είναι

$$K'_\mu(x) = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2}.$$

Επομένως

$$K'_\mu(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x) \cdot x - K(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x}$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = K'_\mu(x).$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο  $r = 4 - t^2$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας  $E$  και του όγκου  $V$  της μπάλας, όταν  $t = 1$  sec.

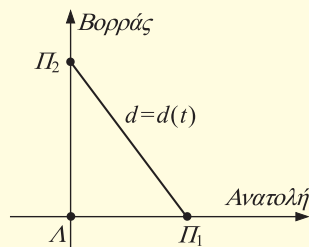
(Θυμηθείτε ότι  $E = 4\pi r^2$  και  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ).

2. Ο όγκος  $V$  ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό  $100 \text{ cm}^3/\text{sec}$ . Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του  $r$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , που αυτή είναι ίση με  $9 \text{ cm}$ ;

3. Το κόστος παραγωγής,  $K(x)$ , και η τιμή πώλησης,  $\Pi(x)$ ,  $x$  μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνονται από τις συναρτήσεις  $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$  και  $\Pi(x) = 420x$  αντιστοίχως. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους,  $P(x) = \Pi(x) - K(x)$ , είναι θετικός.

4. Δύο πλοία  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι  $\Lambda$ . Το πλοίο  $\Pi_1$  κινείται ανατολικά με ταχύτητα  $15 \text{ km/h}$  και το  $\Pi_2$  βόρεια με ταχύτητα  $20 \text{ km/h}$ .

- i) Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$





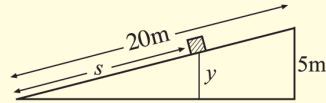
ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση  $d = (Π_1Π_2)$  των δυο πλοίων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

5. Ένα κινητό  $M$  ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = \frac{1}{4}x^2$ ,  $x \geq 0$ . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης  $x$  του  $M$  είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του  $y$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

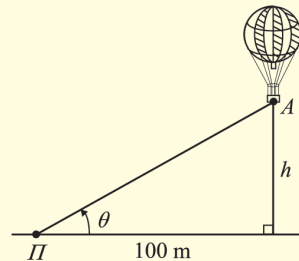
### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό  $10 \text{ cm}^2/\text{sec}$ , να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν  $r = 85 \text{ cm}$ .
2. Έστω  $T$  το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$  που ορίζουν τα σημεία  $O(0,0)$ ,  $A(x,0)$  και  $B(0,\ln x)$ , με  $x > 1$ . Αν το  $x$  μεταβάλλεται με ρυθμό  $4 \text{ cm/sec}$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $T$ , όταν  $x = 5 \text{ cm}$ .

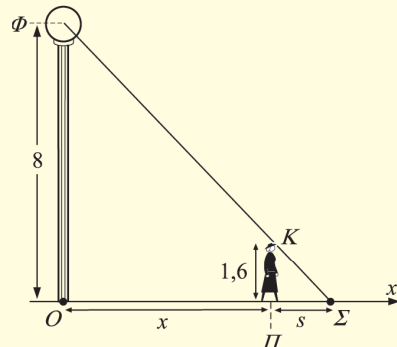
3. Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα  $3 \text{ m/s}$ . Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του  $y$ .



4. Ένα αερόστατο  $A$  αφήνει το έδαφος σε απόσταση  $100 \text{ m}$  από έναν παρατηρητή  $\Pi$  με ταχύτητα  $50 \text{ m/min}$ . Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει η  $A\Pi$  με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος  $100 \text{ m}$ .



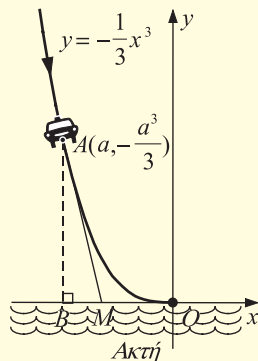
5. Μία γυναίκα ύψους  $1,60 \text{ m}$  απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους  $8 \text{ m}$  με ταχύτητα  $0,8 \text{ m/s}$ . Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο οσκιος της;



6. Ένα περιπολικό  $A$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = -\frac{1}{3}x^3$ ,  $x \leq 0$  πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο

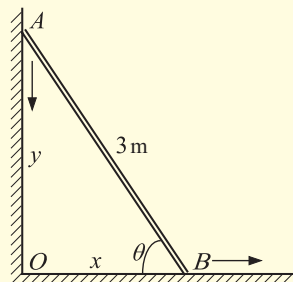
$$a'(t) = -a(t)$$

να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη  $-3$ .



7. Μία σκάλα μήκους 3 m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1 m/sec. Τη χρονική στιγμή  $t_0$ , που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5 m, να βρείτε:

- i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\theta$  (Σχήμα).
- ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή  $A$  της σκάλας.



8. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 1$ . Καθώς περνάει από το σημείο  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , η τεταγμένη  $y$  ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης  $x$  τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το  $A$ .

## 2.5 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε ένα από τα πλέον βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού που είναι γνωστό ως **Θεώρημα Μέσης Τιμής**. Αρχικά διατυπώνουμε το Θεώρημα του Rolle, το οποίο είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και στη συνέχεια διατυπώνουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής, το οποίο αποδεικνύεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Rolle.

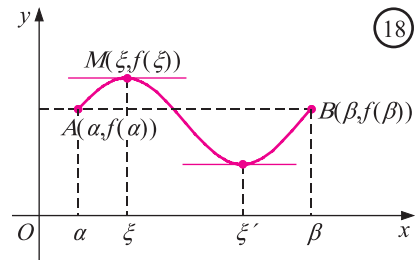
**ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)**

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(a, \beta)$  και
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε:  
 $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ .



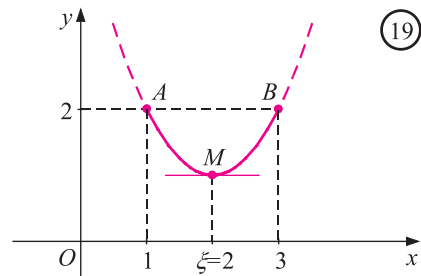
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad x \in [1, 3]. \quad (\text{Σχ. 19})$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, 3]$ , παραγωγίσιμη στο  $(1, 3)$ , με  $f'(x) = 2x - 4$  και  $f(1) = 2 = f(3)$ , σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει ένας αριθμός  $\xi \in (1, 3)$  τέτοιος, ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

Για την εύρεση του αριθμού  $\xi$ , έχουμε:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 4 = 0 \Leftrightarrow \xi = 2.$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)**

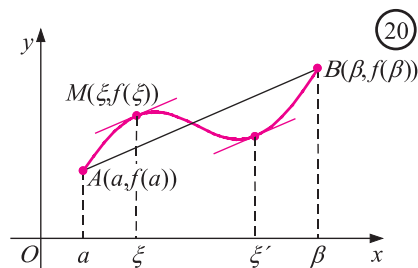
Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(a, \beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη της ευθείας  $AB$ .



Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

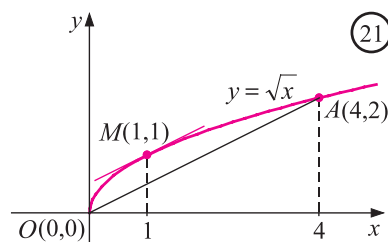
$$f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 4].$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 4]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, 4)$ , με  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, θα υπάρχει ένας αριθμός  $\xi \in (0, 4)$  τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Για την εύρεση του αριθμού  $\xi$ , έχουμε:

$$f'(\xi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\xi} = 1 \Leftrightarrow \xi = 1.$$



## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### 1. Να αποδειχθεί ότι:

- i) Η συνάρτηση  $f(x) = \lambda x^3 + x^2 - (\lambda + 1)x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα  $[0, 1]$ .
- ii) Η εξίσωση  $3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1) = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο  $[0, 1]$  αφού

- είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$  με  $f'(x) = 3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1)$  και
- ισχύει  $f(0) = f(1) = 0$ .

ii) Αφού, λοιπόν, για τη συνάρτηση  $f(x) = \lambda x^3 + x^2 - (\lambda + 1)x$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}^*$  ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, θα υπάρξει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = 0$  ή, ισοδύναμα,  $3\lambda\xi^2 + 2\xi - (\lambda + 1) = 0$ . Επομένως, το  $\xi \in (0, 1)$  θα είναι ρίζα της εξίσωσης  $3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1) = 0$ .

**2.** Να αποδειχτεί ότι για τη συνάρτηση  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  και για οποιοδήποτε διάστημα  $[x_1, x_2]$ , ο αριθμός  $x_0 \in (x_1, x_2)$ , που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, είναι το κέντρο του διαστήματος  $[x_1, x_2]$ , δηλαδή είναι  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ .

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2)$ , με  $f'(x) = 2ax + b$ . Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει  $x_0 \in (x_1, x_2)$ , τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Είναι όμως:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma - \alpha x_1^2 - \beta x_1 - \gamma}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + \beta(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)[\alpha(x_1 + x_2) + \beta]}{x_2 - x_1} = \alpha(x_1 + x_2) + \beta. \end{aligned}$$

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$2\alpha x_0 + \beta = \alpha(x_1 + x_2) + \beta \Leftrightarrow x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

**3.** Ένα αυτοκίνητο διήνυσε μία διαδρομή 200 χιλιομέτρων σε 2,5 ώρες. Να αποδειχθεί ότι κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν 80 χιλιόμετρα την ώρα.

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω  $x = S(t)$ ,  $t \in [0, 2,5]$  η συνάρτηση θέσης του κινητού. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει  $t_0 \in [0, 2,5]$ , τέτοια ώστε  $v(t_0) = S'(t_0) = 80$ .

Η συνάρτηση  $S$  είναι συνεχής στο  $[0, 2,5]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, 2,5)$ . Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει  $t_0 \in (0, 2,5)$  τέτοιο, ώστε

$$v(t_0) = S'(t_0) = \frac{S(2,5) - S(0)}{2,5} = \frac{200 - 0}{2,5} = 80 \text{ χιλιόμετρα την ώρα.}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  για τα οποία ισχύει  $f'(\xi) = 0$ .

i)  $f(x) = x^2 - 2x + 1, [0, 2]$

ii)  $f(x) = \eta\mu 3x, \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

iii)  $f(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu 2x, [0, \pi]$

iv)  $f(x) = |x|, [-1, 1]$ .

2. Να εξετάσετε, ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει το θεώρημα, να βρείτε όλα τα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  για τα οποία ισχύει  $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ .

i)  $f(x) = x^2 + 2x, [0, 4]$

ii)  $f(x) = 3\eta\mu 2x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

iii)  $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & , x \leq -1 \\ x^3 - x & , x > -1 \end{cases}, [-3, 2]$

3. Αν  $\alpha < \beta$ , να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f(x) = e^x$  και  $g(x) = \ln x$  ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και στη συνέχεια ότι:

$$e^\alpha < \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} < e^\beta \quad \text{και} \quad \frac{1}{\beta} < \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}.$$

Για τη συνάρτηση  $g(x) = \ln x$  υποθέτουμε επιπλέον ότι  $0 < \alpha < \beta$ .

### Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(-1, 0)$  και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα  $(0, 1)$ .

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$  έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x - 1)\eta\mu x$ . Να αποδείξετε ότι:
- Η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα  $(0, 1)$ .
  - Η εξίσωση  $\epsilon\phi x = 1 - x$  έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα  $(0, 1)$ .
3. i) Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  με  $f'(x) \neq 1$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.
- ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\eta\mu \frac{x}{2} = x$  αληθεύει μόνο για  $x = 0$ .
4. i) Να αποδείξετε ότι  $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ , για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ .
- ii) Αν  $f$  είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$ , με  $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , να αποδείξετε ότι για όλα τα  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  ισχύει:

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |\beta - \alpha|.$$

5. Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $[0, 4]$  και ισχύει  $2 \leq f'(x) \leq 5$  για κάθε  $x \in (0, 4)$ . Αν  $f(0) = 1$ , να αποδείξετε ότι  $9 \leq f(4) \leq 21$ .
6. Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $[-1, 1]$  και ισχύει  $f'(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in (-1, 1)$ . Αν  $f(-1) = -1$  και  $f(1) = 1$ , να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$ , εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την  $f$  σε καθένα από τα διαστήματα  $[-1, 0]$  και  $[0, 1]$ .
7. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 2^x \text{ και } g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα  $A(0, 1)$ ,  $B(1, 2)$ .

## 2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού θεωρείται μία από τις σπουδαιότερες προτάσεις της ανάλυσης, αφού με τη βοήθειά του αποδεικνύονται πολλά άλλα θεωρήματα. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το Θ.Μ.Τ. για να αποδείξουμε τα επόμενα δύο βασικά θεωρήματα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
  - $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,
- τότε η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ . Πράγματι

- Αν  $x_1 = x_2$ , τότε προφανώς  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- Αν  $x_1 < x_2$ , τότε στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Επειδή το  $\xi$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , ισχύει  $f'(\xi) = 0$ , οπότε, λόγω της (1), είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ . Αν  $x_2 < x_1$ , τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι  $f(x_1) = f(x_2)$ . Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ . ■

**ΠΟΡΙΣΜΑ**

Έστω δυο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και
  - $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,
- τότε υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει:

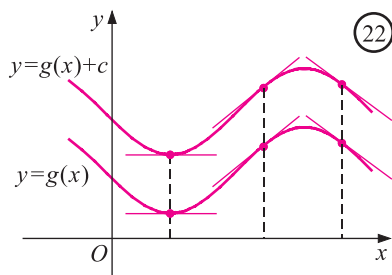
$$f(x) = g(x) + c$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Η συνάρτηση  $f - g$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και για κάθε εσωτερικό σημείο  $x \in \Delta$  ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση  $f - g$  είναι σταθερή στο  $\Delta$ . Άρα, υπάρχει σταθερά  $C$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει  $f(x) - g(x) = c$ , οπότε  $f(x) = g(x) + c$ . ■





**ΣΧΟΛΙΟ**

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι, αν και  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , εντούτοις η  $f$  δεν είναι σταθερή στο  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

Δίνεται μία συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει

$$f'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

i) Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση  $\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^x}$  είναι σταθερή και

ii) Να βρεθεί ο τύπος της  $f$ , αν δίνεται επιπλέον ότι  $f(0) = 1$ .

**ΛΥΣΗ**

i) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$\varphi'(x) = \left( \frac{f(x)}{e^x} \right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} \stackrel{(1)}{=} 0,$$

Επομένως, η  $\varphi$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$ .

ii) Επειδή η  $\varphi$  είναι σταθερή, υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε  $\varphi(x) = c$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ή, ισοδύναμα,  $\frac{f(x)}{e^x} = c$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επομένως

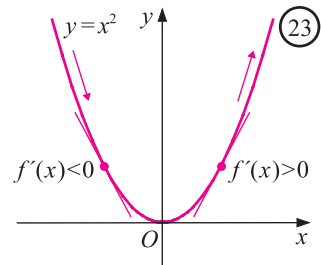
$$f(x) = ce^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή  $f(0) = 1$ , έχουμε  $1 = c$ , οπότε

$$f(x) = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

### Μονοτονία συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2$ . Παρατηρούμε ότι στο διάστημα  $(-\infty, 0)$ , στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει  $f'(x) = 2x < 0$ , ενώ στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει  $f'(x) = 2x > 0$ . Βλέπουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στη μονοτονία και στο πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης. Συγκεκριμένα ισχύει:



### ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

- Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε *εσωτερικό* σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε *εσωτερικό* σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι  $f'(x) > 0$ .

Έστω  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ . Θα δείξουμε ότι  $f(x_1) < f(x_2)$ . Πράγματι, στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο,

ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ , οπότε έχουμε

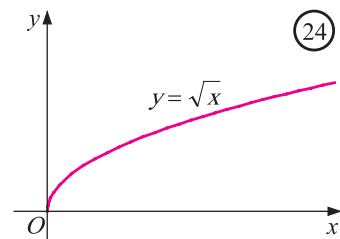
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή  $f'(\xi) > 0$  και  $x_2 - x_1 > 0$ , έχουμε  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , οπότε  $f(x_1) < f(x_2)$ .

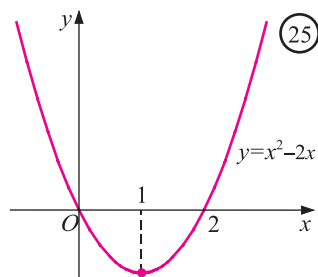
- Στην περίπτωση που είναι  $f'(x) < 0$  εργαζόμαστε αναλόγως. ■

Για παράδειγμα:

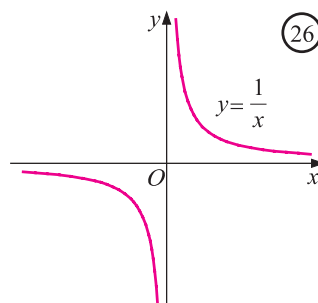
— η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ , είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ , αφού είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .



— η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ , αφού είναι συνεχής στο  $[1, +\infty)$  και  $f'(x) = 2(x - 1) > 0$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ , ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 1]$ , αφού είναι συνεχής στο  $(-\infty, 1]$  και  $f'(x) = 2(x - 1) < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 1)$ .



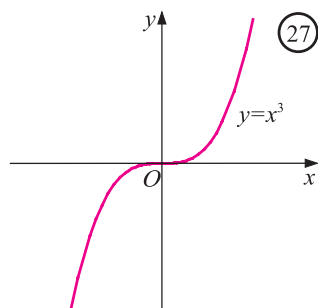
— η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}$  είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 0)$ , και  $(0, +\infty)$ , αφού  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$  και για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .



## ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο  $\Delta$ , η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = x^3$ , αν και είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , εντούτοις έχει παράγωγο  $f'(x) = 3x^2$  η οποία δεν είναι θετική σε όλο το  $\mathbb{R}$ , αφού  $f'(0) = 0$ . Ισχύει όμως  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .



## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$  είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα.

### ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$ . Το πρόσημο της  $f'$  δίνεται στον παρακάτω πίνακα

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Επομένως, η συνάρτηση  $f$ :

— είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0]$ , αφού είναι συνεχής στο  $(-\infty, 0]$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  στο  $(-\infty, 0)$ .

— είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, 1]$ , αφού είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  και ισχύει  $f'(x) < 0$  στο  $(0, 1)$ .

— είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ , αφού είναι συνεχής στο  $[1, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  στο  $(1, +\infty)$ .

Το πρόσημο της  $f'$  και το είδος μονοτονίας της  $f$  στα διαστήματα  $(-\infty, 0]$ ,  $[0, 1]$  και  $[1, +\infty)$  συγκεντρώνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

**2. i) Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση  $f'(x) = x - \sigma\upsilon\nu x - 2$ ,  $x \in [0, \pi]$  είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.**

**ii) Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση  $\sigma\upsilon\nu x = x - 2$  έχει ακριβώς μια λύση στο  $[0, \pi]$ .**

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Είναι

$$f'(x) = (x - \sigma\upsilon\nu x - 2)' = 1 + \eta\mu x > 0, \text{ για κάθε } [0, \pi].$$

Επομένως, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, \pi]$ . Επειδή η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, σύμφωνα με την παράγραφο 1.8, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα  $[f(0),$

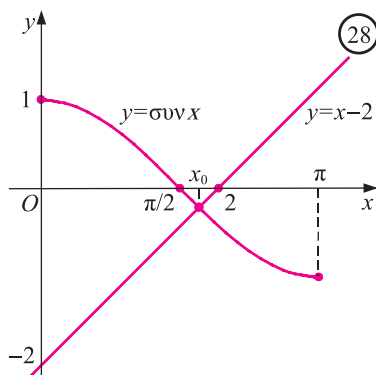
$$f(\pi)] = [-3, \pi - 1].$$

ii) Έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x = x - 2 \Leftrightarrow x - \sigma\upsilon\nu x - 2 = 0,$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0, x \in [0, \pi].$$

Επειδή το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το διάστημα  $[-3, \pi - 1]$ , που περιέχει το 0, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, \pi)$ , τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ . Επειδή επιπλέον η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, \pi]$ , η  $x_0$  είναι μοναδική ρίζα της  $f(x) = 0$  στο διάστημα αυτό. Η ρίζα αυτή, όπως φαίνεται και στο σχήμα 28, είναι η τετμημένη του σημείου τομής της  $y = x - 2$  και της  $y = \sigma\upsilon\nu x$ .



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για τις συναρτήσεις  $f, g$  ισχύουν:

$$f'(x) = g(x) \text{ και } g'(x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $\varphi(x) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2$  είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i)  $f(x) = x^3 + 3x - 4$

ii)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

iii)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

3. Ομοίως των συναρτήσεων:

i)  $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & , x \leq 1 \\ x + 2 & , x > 1 \end{cases}$

ii)  $f(x) = |x^2 - 1|$

4. Ομοίως των συναρτήσεων:

i)  $f(x) = \frac{x}{e^x}$

ii)  $f(x) = \ln x - x$

iii)  $f(x) = \eta\mu x + |\eta\mu x|, x \in [0, 2\pi].$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^5 + 5x - 6$  και  $g(x) = 2\sqrt{x} + x - 3$ .

i) Να αποδείξετε ότι οι  $f, g$  είναι γνησίως αύξουσες.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

iii) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$$x^5 + 5x - 6 = 0 \text{ και } 2\sqrt{x} + x - 3 = 0$$

έχουν ακριβώς μία ρίζα την  $x = 1$ .

6. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση  $f(x) = e^x - 1 + \ln(x + 1)$  είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η εξίσωση  $e^x = 1 - \ln(x + 1)$  έχει ακριβώς μία λύση την  $x = 0$ .

## Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για μία συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη σ' όλο το  $\mathbf{R}$  ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \text{ για όλα τα } x, y \in \mathbf{R},$$

να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

2. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

- iii) Αν  $-2 < \alpha < 2$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^3 - 3x + \alpha = 0$  έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

3. Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα τη χρονική στιγμή  $t$  δίνεται από τη συνάρτηση:

$$x = S(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 16t + 160, 0 \leq t \leq 5.$$

Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- i) Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν;  
 ii) Πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά;  
 iii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται;
4. Η τιμή  $V$  (σε ευρώ) ενός προϊόντος,  $t$  μήνες μετά την παραγωγή του, δίνεται από τον τύπο

$$V = 50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2}.$$

Να αποδείξετε ότι το προϊόν συνεχώς υποτιμάται χωρίς, όμως, η τιμή του να μπορεί να γίνει μικρότερη από το μισό της αρχικής τιμής του.

5. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$  είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο των τιμών της  $f$  σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

ii) Η εξίσωση  $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$  είναι ισοδύναμη με την  $f(x) = \alpha$  και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

6. Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbf{R}^*$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbf{R}$ .

7. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\eta x$  είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

ii)  $\eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\eta x > 0$ , για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

iii) Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$  είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

8. Να αποδείξετε ότι:

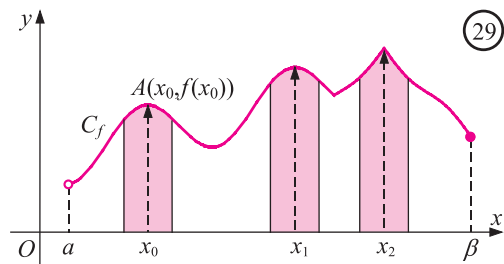
i) Η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  είναι γνησίως αύξουσα.

ii)  $2\eta\mu x + \epsilon\phi x \geq 3x$ , για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

## 2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### Η έννοια του τοπικού ακροτάτου

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  σ' ένα διάστημα  $(a, \beta]$ . Παρατηρούμε ότι στο σημείο  $x = x_0$  η τιμή της συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε “γειτονικό” σημείο του  $x_0$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  τοπικό μέγιστο. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία  $x_1$  και  $x_2$ . Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:



### ΟΡΙΣΜΟΣ

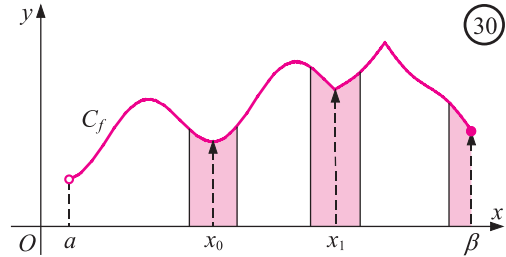
Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το  $x_0$  λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το  $f(x_0)$  **τοπικό μέγιστο της  $f$** .

Αν η ανισότητα  $f(x) \leq f(x_0)$  ισχύει για κάθε  $x \in A$ , τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο**, το  $f(x_0)$ .

Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι στο σημείο  $x = x_0$  η τιμή της συνάρτησης είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε “γειτονικό” σημείο του  $x_0$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  **τοπικό ελάχιστο**. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία  $x_1$  και  $\beta$ . Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:



### ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το  $x_0$  λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το  $f(x_0)$  **τοπικό ελάχιστο της  $f$** .

Αν η ανισότητα  $f(x) \geq f(x_0)$  ισχύει για κάθε  $x \in A$ , τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το  $f(x_0)$ .

Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της  $f$  λέγονται **τοπικά ακρότατα** ή, απλά, **ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η  $f$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της  $f$  λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

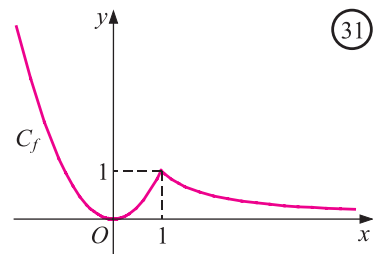
Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ αν } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & , \text{ αν } x > 1 \end{cases}$$

παρουσιάζει:

i) στο  $x = 0$  τοπικό ελάχιστο, το  $f(0) = 0$ , το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο και

ii) στο  $x = 1$  τοπικό μέγιστο, το  $f(1) = 1$ .

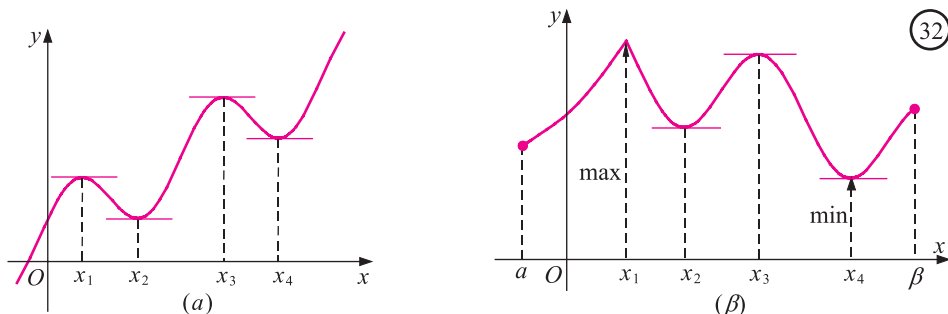


Η συνάρτηση  $f$  αν και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, εντούτοις δεν παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο.



## ΣΧΟΛΙΑ

i) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ. 32α).



ii) Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β). Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α).

### Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων

Με μια προσεκτική παρατήρηση του σχήματος 32β βλέπουμε ότι αν  $\sigma'$  ένα εσωτερικό σημείο  $x_0$  ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  είναι οριζόντια, δηλαδή ισχύει  $f'(x_0) = 0$ . Αυτό επιβεβαιώνεται από το παρακάτω θεώρημα, που είναι γνωστό ως **Θεώρημα του Fermat**.

### ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη  $\sigma'$  ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο  $x_0$  και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

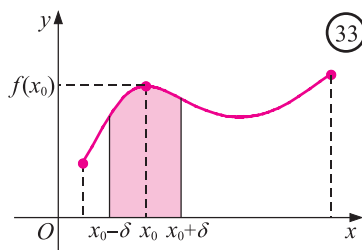
$$f'(x_0) = 0$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  τοπικό μέγιστο. Επειδή το  $x_0$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  και η  $f$  παρουσιάζει  $\sigma'$  αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \text{ και}$$

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$



Επειδή, επιπλέον, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , τότε, λόγω της (1), θα είναι  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ , οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , τότε, λόγω της (1), θα είναι  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ , οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε  $f'(x_0) = 0$ .

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

## ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$ , στα οποία η  $f'$  είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως, όπως φαίνεται και στα σχήματα 29 και 30, οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης  $f$  σ' ένα διάστημα  $\Delta$  είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η παράγωγος της  $f$  μηδενίζεται.

2. Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται.

3. Τα άκρα του  $\Delta$  (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ .

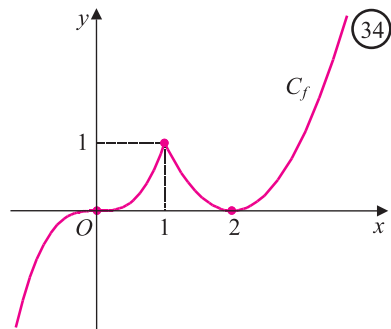
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , x < 1 \\ (x-2)^2 & , x \geq 1 \end{cases}$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και παραγωγίσιμη σε όλο το  $\mathbb{R}$  εκτός από το 1, με:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x < 1 \\ 2(x-2) & , x > 1 \end{cases}$$

Οι ρίζες της  $f'(x) = 0$  είναι οι 0 και 2.



Επειδή η  $f'$  μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της  $f$  είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της  $f$ . Επομένως, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο το οποίο να μας πληροφορεί ποια από τα κρίσιμα σημεία της  $f$  είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων αυτής. Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι **συνεχής**.

i) Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ . (Σχ. 35α)

ii) Αν  $f'(x) < 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) > 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$ . (Σχ. 35β)

iii) Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ . (Σχ. 35γ).

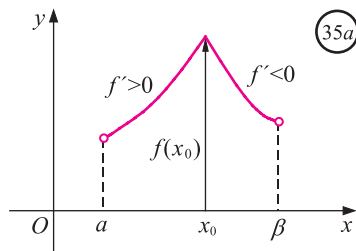
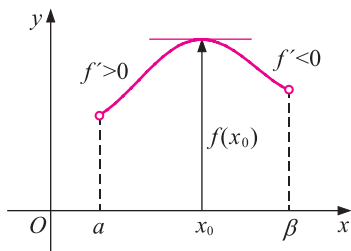
### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Επειδή  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, x_0]$ . Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \quad (1)$$

Επειδή  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (x_0, \beta)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[x_0, \beta)$ . Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$

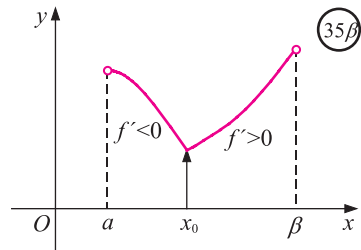
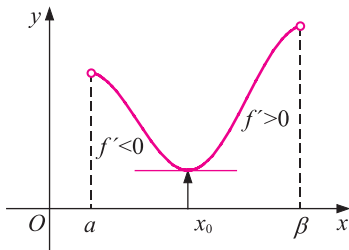


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

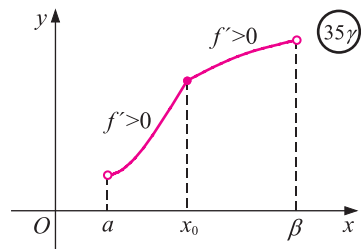
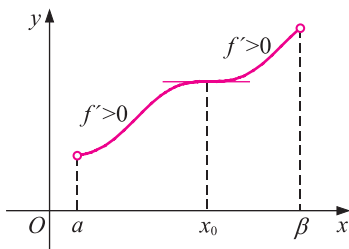
που σημαίνει ότι το  $f(x_0)$  είναι μέγιστο της  $f$  στο  $(\alpha, \beta)$  και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



iii) Έστω ότι

$f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .



Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $(\alpha, x_0]$  και  $[x_0, \beta)$ . Επομένως, για  $x_1 < x_0 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ . Άρα το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο της  $f$ . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ . Πράγματι, έστω  $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$  με  $x_1 < x_2$ .

— Αν  $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$ , επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, x_0]$ , θα ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

— Αν  $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$ , επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[x_0, \beta)$ , θα ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

— Τέλος, αν  $x_1 < x_0 < x_2$ , τότε όπως είδαμε  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ .

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ , οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ .

Ομοίως, αν  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . ■

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 4x^3$  που είναι ορισμένη στο  $\mathbf{R}$ . Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$ , με  $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ . Οι ρίζες της  $f'(x) = 0$  είναι  $x = 0$  (διπλή) ή  $x = 3$ , το δε πρόσημο της  $f'$  φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	$0$	$-$	$0$	$+$

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 3]$ , γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[3, +\infty)$  και παρουσιάζει ένα μόνο τοπικό ακρότατο, συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο για  $x = 3$ , το  $f(3) = -27$ .

## ΣΧΟΛΙΑ

- Όπως είδαμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος στην πρώτη περίπτωση το  $f(x_0)$  είναι η μέγιστη τιμή της  $f$  στο  $(\alpha, \beta)$ , ενώ στη δεύτερη περίπτωση το  $f(x_0)$  είναι η ελάχιστη τιμή της  $f$  στο  $(\alpha, \beta)$ .

- Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ , όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα § 1.8), η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της  $f$ .
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της  $f$  στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.
3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της  $f$ .

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$ ,  $x \in [0, 5]$ . Έχουμε  $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$ ,  $x \in [0, 5]$ . Οι ρίζες της  $f'(x) = 0$  είναι οι  $x = 1$ ,  $x = 4$ . Επομένως, τα κρίσιμα σημεία της  $f$  είναι τα  $x = 1$ ,  $x = 4$ . Οι τιμές της  $f$  στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα του διαστήματος  $[0, 5]$  είναι

$$f(1) = 30, f(4) = 3, f(0) = 19 \text{ και } f(5) = 14.$$

Άρα, η μέγιστη τιμή της  $f$  στο  $[0, 5]$  είναι ίση με 30 και παρουσιάζεται για  $x = 1$ , ενώ η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι ίση με 3 και παρουσιάζεται για  $x = 4$ .

- Για να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα απαιτείται να προσδιορίσουμε το πρόσημο της  $f''$  εκατέρωθεν του  $x_0$ . Όταν ο προσδιορισμός αυτός δεν είναι εύκολος ή είναι αδύνατος, τότε το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, μπορεί να μας πληροφορήσει αν το  $x_0$  είναι θέση τοπικού ακρότατου.

## ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και  $x_0$  ένα σημείο του  $(\alpha, \beta)$  στο οποίο η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.

- Αν  $f'(x_0) = 0$  και  $f''(x_0) < 0$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο.
- Αν  $f'(x_0) = 0$  και  $f''(x_0) > 0$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = x + 2\sigma\upsilon\nu x, x \in (0, 2\pi).$$

Έχουμε

$$f'(x) = 1 - 2\eta\mu x \text{ και } f''(x) = -2\sigma\upsilon\nu x,$$

οπότε οι ρίζες της  $f'$  είναι οι  $\frac{\pi}{6}$  και  $\frac{5\pi}{6}$ .

Για  $x = \frac{\pi}{6}$ , είναι  $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0$ , ενώ για  $x = \frac{5\pi}{6}$ , είναι  $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3} > 0$ .

Έτσι έχουμε

α)  $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$  και  $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$ , οπότε το  $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

β)  $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0$  και  $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) > 0$ , οπότε το  $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

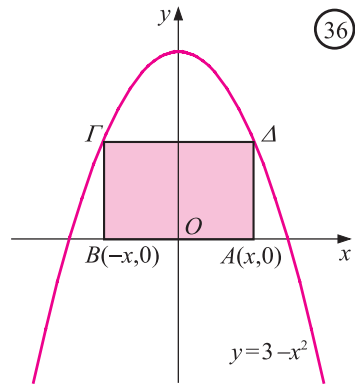
**1.** Να βρεθεί το  $x \in [0, \sqrt{3}]$  έτσι, ώστε το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος να έχει μέγιστο εμβαδό.

#### ΛΥΣΗ

Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι

$$E(x) = (AB)(A\Delta) = 2x(3 - x^2) = -2x^3 + 6x.$$

Έχουμε  $E'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x + 1)(x - 1)$ . Οι ρίζες της  $E'(x) = 0$  είναι οι  $x = -1, x = 1$ . Η μονοτονία και τα ακρότατα της  $E$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα



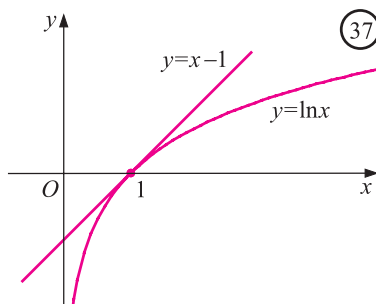
$x$	0	1	$\sqrt{3}$	
$E'(x)$		+	0	-
$E(x)$	0 min	4 max	0 min	

Άρα, η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν  $x = 1$ .

**2.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x - 1 - \ln x$ .

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδειχτεί ότι  $\ln x \leq x - 1$ , για κάθε  $x > 0$ .



**ΛΥΣΗ**

i) Έχουμε  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ . Η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μία μόνο ρίζα, την  $x = 1$ . Η μονοτονία και τα ακρότατα της  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$x$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘ ↗		
		0 min		

ii) Επειδή η  $f$  για  $x = 1$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(1) \Leftrightarrow x - 1 - \ln x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x \leq x - 1. \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν  $x = 1$ .

**3.** Μία βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης  $\Pi(x)$ , σε ευρώ, κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους  $x$  των μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο  $\Pi(x) = 40000 - 6x$ . Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι 4000 ευρώ. Αν η βιομηχανία πληρώνει φόρο 1200 ευρώ για κάθε μονάδα προϊόντος, να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

**ΛΥΣΗ**

Η εισπραξη από την πώληση  $x$  μονάδων παραγωγής είναι

$$E(x) = x\Pi(x) = x(40000 - 6x) = -6x^2 + 40000x.$$

Το κόστος από την παραγωγή  $x$  μονάδων είναι

$$K(x) = 4000x.$$

Το ολικό κόστος μετά την πληρωμή του φόρου είναι:

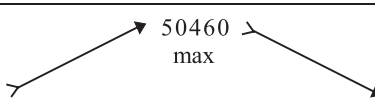
$$K_{\text{ολ}}(x) = 4000x + 1200x = 5200x.$$

Επομένως, το κέρδος της βιομηχανίας είναι

$$\begin{aligned} P(x) &= E(x) - K_{\text{ολ}}(x) \\ &= -6x^2 + 40000x - 5200x \\ &= -6x^2 + 34800x. \end{aligned}$$

Έχουμε  $P'(x) = -12x + 34800$ , οπότε η  $P'(x) = 0$  έχει ρίζα την  $x = 2900$ .

Η μονοτονία και τα ακρότατα της  $P$  στο  $(0, +\infty)$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$x$	0	2900	$+\infty$
$P'(x)$		+	0 -
$P(x)$		 50460 max	

Επομένως, το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται όταν η βιομηχανία παράγει 2900 μονάδες από το προϊόν αυτό και είναι ίσο με 50460 χιλιάδες ευρώ.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η παράγωγος μιας συνάρτησης  $f$  είναι

$$f'(x) = 3(x-1)^3(x-2)^2(x-3).$$

Για ποιες τιμές του  $x$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για ποιες παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο;

2. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

ii)  $g(x) = x^3 - 3x + 2$

iii)  $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$

β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών των εξισώσεων:

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0, \quad x^3 - 3x + 2 = 0, \quad 2x^3 - 3x^2 - 1 = 0.$$



3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ e^{1-x} & , x > 1 \end{cases} \quad \text{ii) } g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & , x < 1 \\ x^2 - 4x + 3 & , x \geq 1 \end{cases}$$

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

$$\text{i) } f(x) = e^x - x \quad \text{ii) } f(x) = x^x, x > 0.$$

5. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία  $x_1 = -1$  και  $x_2 = 1$ . Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

6. Να αποδείξετε ότι, από όλα τα οικόπεδα σχήματος ορθογωνίου με εμβαδό  $400 \text{ m}^2$ , το τετράγωνο χρειάζεται τη μικρότερη περιφέρεια.

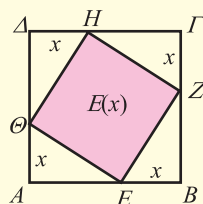
7. Με συρματοπλέγμα μήκους  $80 \text{ m}$  θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

8. Μία ώρα μετά τη λήψη  $x \text{ mg}$  ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση  $T(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$ ,  $0 < x < 3$ . Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς  $x$ , να γίνει μέγιστος.

9. Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος με πλευρά  $2 \text{ cm}$ . Αν το τετράγωνο  $EZH\Theta$  έχει τις κορυφές του στις πλευρές του  $AB\Gamma\Delta$ ,

i) να εκφράσετε την πλευρά  $EZ$  συναρτήσει του  $x$ .

ii) να βρείτε το  $x$  έτσι, ώστε το εμβαδόν  $E(x)$  του  $EZH\Theta$  να γίνει ελάχιστο.



10. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής  $x$  μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι  $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$  ευρώ, για  $0 \leq x \leq 105$ , ενώ η είσπραξη από την πώληση των  $x$  μονάδων είναι  $E(x) = 420x - 2x^2$  ευρώ. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου, για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

### Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu x - x + 3$ ,  $x \in [0, \pi]$

i) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και ακρότητα.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\eta\mu x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο  $(0, \pi)$ .

2. i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότητα τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

ii) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότητα τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x + 3$$

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \ln x \text{ και } h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει

i) α)  $e^x > 1 + x$

ii) α)  $\sin x > 1 - \frac{1}{2}x^2$

β)  $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

β)  $\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$

iii) α)  $(1+x)^v > 1+vx$ ,  $v \in \mathbb{N}$  με  $v \geq 2$

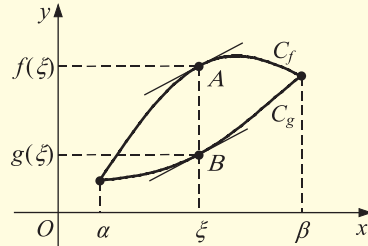
β)  $(1+x)^v > 1+vx + \frac{v(v-1)}{2}x^2$ ,  $v \in \mathbb{N}$  με  $v \geq 3$ .

4. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση  $f$ , που είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει

$$2f^3(x) + 6f'(x) = 2x^3 + 6x + 1,$$

τότε η  $f$  δεν έχει ακρότητα.

5. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f, g$  σ' ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Το σημείο  $\xi \in (a, \beta)$  είναι το σημείο στο οποίο η κατακόρυφη απόσταση ( $AB$ ) μεταξύ των  $C_f$  και  $C_g$  παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των  $C_f$  και  $C_g$  στα σημεία  $A(\xi, f(\xi))$  και  $B(\xi, g(\xi))$  είναι παράλληλες.



6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (x - a)^2(x - \beta)^2(x - \gamma)^2, \text{ με } a < \beta < \gamma$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

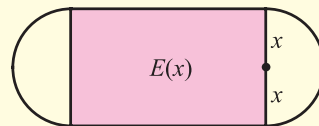
7. Με ένα σύρμα μήκους 4 m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς  $x$  m και ένα τετράγωνο πλευράς  $y$  m.

- i) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς  $x$  του ισοπλεύρου τριγώνου.
- ii) Για ποια τιμή του  $x$  το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  και το σημείο  $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ .

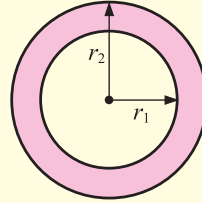
- i) Να βρείτε το σημείο  $M$  της  $C_f$  που απέχει από το σημείο  $A$  τη μικρότερη απόσταση.
- ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M$  είναι κάθετη στην  $AM$ .

9. Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400 m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



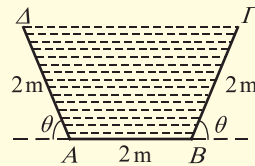
10. Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώνουν ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 1000 ευρώ το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 ευρώ. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε να έχουμε τα περισσότερα έσοδα;

11. Έστω  $E$  το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή  $t = 0$  είναι  $r_1 = 3$  cm και  $r_2 = 5$  cm και ότι για  $t > 0$  η ακτίνα  $r_1$  αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05 cm/s, ενώ η ακτίνα  $r_2$  αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/s. Να βρείτε:



- πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και
- πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.

12. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή  $ABΓΔ$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

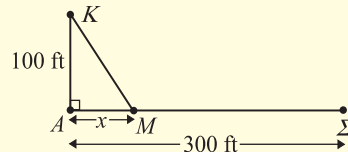


- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής  $ABΓΔ$  είναι ίσο με

$$E = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$$

- Για ποια τιμή του  $\theta$  το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

13. Ένας κολυμβητής  $K$  βρίσκεται στη θάλασσα 100 ft<sup>(1)</sup> μακριά από το πλησιέστερο σημείο  $A$  μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του  $\Sigma$  βρίσκεται 300 ft μακριά από το σημείο  $A$ . Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3 ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5 ft/s.

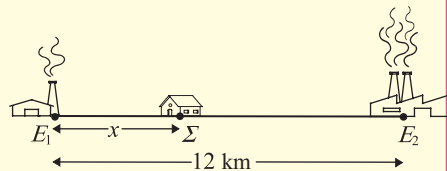


- Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή  $KM\Sigma$  του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο

$$T(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}.$$

- Για ποια τιμή του  $x$  ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

14. Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια  $E_1$  και  $E_2$  τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12 km και εκπέμπουν καπνό με παροχές  $P$  και



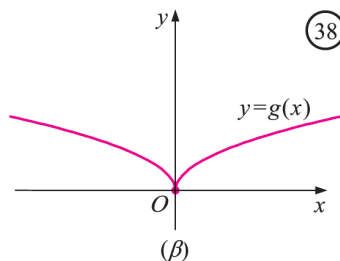
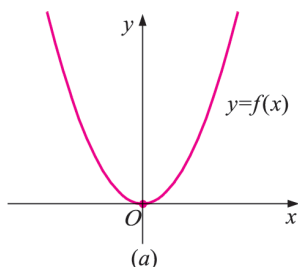
<sup>(1)</sup>1 ft = 30,48 cm

8P αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση  $d$  από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης  $d$ , να βρείτε σε ποια απόσταση  $x$  από το εργοστάσιο  $E_1$  πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση. (Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου).

## 2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### Κοίλα - κορτά συνάρτησης

- Έστω οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = \sqrt{|x|}$  (Σχ. 38).



Οι πληροφορίες τις οποίες μας δίνει η πρώτη παράγωγος για τη συμπεριφορά κάθε μιας από τις δύο συναρτήσεις, όπως φαίνεται και στο σχήμα 38 είναι ίδιες. Δηλαδή οι συναρτήσεις,

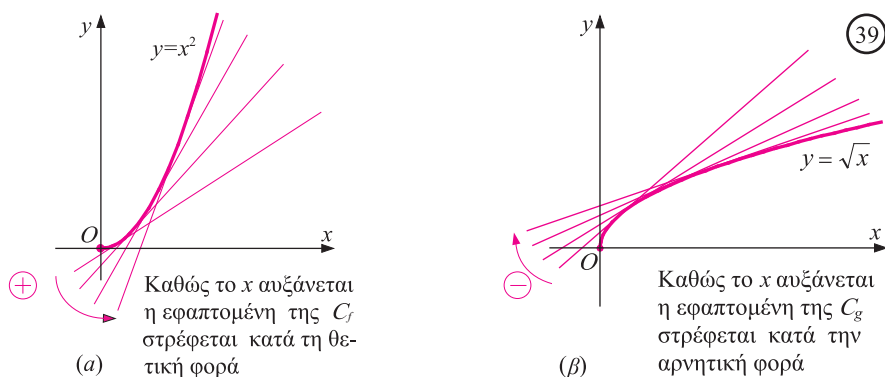
— είναι γνησίως φθίνουσες στο  $(-\infty, 0]$

— είναι γνησίως αύξουσες στο  $[0, +\infty)$

— παρουσιάζουν τοπικό ελάχιστο για  $x = 0$ , το οποίο είναι ίσο με 0.

Όμως, οι συναρτήσεις αυτές έχουν διαφορετικές γραφικές παραστάσεις. Δηλαδή, “ανέρχονται” και “κατέρχονται” με διαφορετικό τρόπο σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 0]$  και  $[0, +\infty)$ . Επομένως, οι πληροφορίες που μας δίνει το πρόσημο της πρώτης παραγώγου δεν είναι ικανές για τη χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .



Παρατηρούμε ότι καθώς το  $x$  αυξάνεται:

- η κλίση  $f'(x)$  της  $C_f$  αυξάνεται, δηλαδή η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ , ενώ
- η κλίση της  $g'(x)$  της  $C_g$  ελαττώνεται, δηλαδή η  $g'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ .

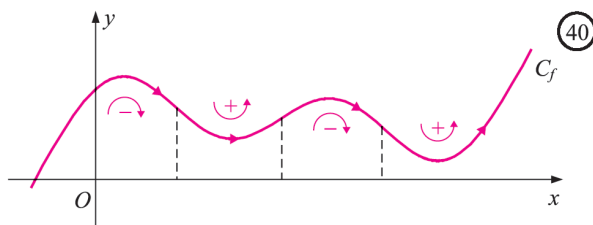
Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο  $(0, +\infty)$ , ενώ στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι η  $g$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο  $(0, +\infty)$ . Γενικότερα, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .
- Η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

Εποπτικά, μία συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα  $\Delta$ , όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη  $C_f$ , για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα  $\Delta$  πρέπει να στραφεί κατά τη θετική (αντιστοίχως αρνητική) φορά. (Σχ. 40)



Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα  $\Delta$ , χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $\cup$  (αντιστοίχως  $\cap$ ).

## ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται “κάτω” (αντιστοίχως “πάνω”) από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

- Η μελέτη μιας συνάρτησης ως προς τα κοίλα και κυρτά διευκολύνεται με τη βοήθεια του επόμενου θεωρήματος, που είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου ορισμού και του θεωρήματος μονοτονίας.

## ΘΕΩΡΗΜΑ

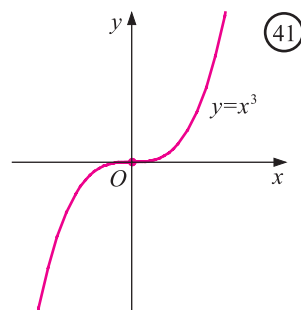
Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

- Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .
- Αν  $f''(x) < 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κοίλη στο  $\Delta$ .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = x^3$  (Σχ. 41),

— είναι κοίλη στο  $(-\infty, 0]$ , αφού  $f''(x) = 6x < 0$ , για  $x \in (-\infty, 0)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $(-\infty, 0]$  ενώ,

— είναι κυρτή στο  $[0, +\infty)$ , αφού  $f''(x) = 6x > 0$ , για  $x \in (0, +\infty)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$ .



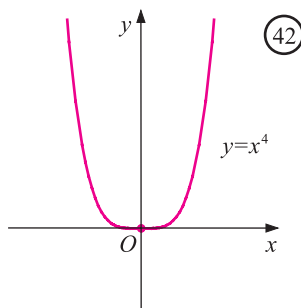
## ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^4$  (Σχ. 42). Επειδή η  $f'(x) = 4x^3$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , η  $f(x) = x^4$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ . Εντούτοις, η  $f''(x)$  δεν είναι θετική στο  $\mathbb{R}$ , αφού  $f''(0) = 0$ .

## Σημεία καμπής

Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^3$  (Σχ. 41) παρατηρούμε ότι,

- στο σημείο  $O(0, 0)$  η γραφική παράσταση της  $f$  έχει εφαπτομένη και
- εκατέρωθεν του  $x_0 = 0$ , η κυρτότητα της καμπύλης αλλάζει.



Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  “κάμπτεται” στο σημείο  $O(0, 0)$ . Το σημείο  $O$  λέγεται **σημείο καμπής της  $C_f$** . Γενικά δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ . Αν

- η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, x_0)$  και κοίλη στο  $(x_0, \beta)$ , ή αντιστρόφως, και
- η  $C_f$  έχει εφαπτομένη στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ ,

τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της  $f$ .

Όταν το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$ , τότε λέμε ότι η  $f$  **παρουσιάζει στο  $x_0$  καμπή** και το  $x_0$  λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της  $C_f$  “διαπερνά” την καμπύλη. Αποδεικνύεται, επιπλέον, ότι:

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$  και η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε  $f''(x_0) = 0$ .

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος  $\Delta$  στα οποία η  $f''$  είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις σημείων καμπής. Επομένως, *οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης  $f$  σ' ένα διάστημα  $\Delta$  είναι:*

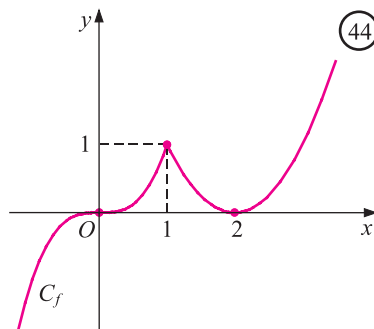
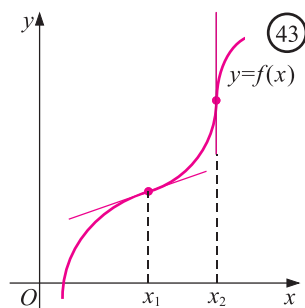
- τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f''$  μηδενίζεται, και
- τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία δεν υπάρχει η  $f''$  (Σχ. 43).

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , x < 1 \\ (x-2)^4 & , x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{Σχ. 44})$$

Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R} - \{1\}$  με

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & , x < 1 \\ 12(x-2)^2 & , x > 1 \end{cases}$$





Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

$x$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	+	0	+
$f(x)$	κοίλη		κυρτή	κυρτή	κυρτή	

Επειδή η  $f''$  μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι τα σημεία 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 δεν είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σ' αυτά η  $f$  δεν αλλάζει κυρτότητα, ενώ το σημείο 0 είναι θέση σημείου καμπής, αφού στο  $O(0, f(0))$  υπάρχει εφαπτομένη της  $C_f$  και η  $f$  στο 0 αλλάζει κυρτότητα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής, θέση σημείου καμπής είναι μόνο το 0, εκατέρωθεν του οποίου η  $f''$  αλλάζει πρόσημο. Γενικά:

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ . Αν

- η  $f''$  αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του  $x_0$  και
  - ορίζεται εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(x_0, f(x_0))$ ,
- τότε το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να προσδιορισθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5,$$

είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

### ΛΥΣΗ

ι) Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f''(x) = 12(x-1)(x+1)$ . Το πρόσημο της  $f''$  φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

$x$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f''(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$		↖	0	↘	0	↖
			Σ.Κ		Σ.Κ	

Επομένως, η  $f$  είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, -1]$  και  $[1, +\infty)$  και κοίλη στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

Επειδή η  $f''$  μηδενίζεται στα σημεία  $-1, 1$  και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, τα σημεία  $A(-1,0)$  και  $B(1,0)$  είναι σημεία καμπής της  $C_f$ . Τα συμπεράσματα αυτά καταχωρούνται στην τελευταία γραμμή του παραπάνω πίνακα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων

i)  $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2$

ii)  $g(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3}$ .

2. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i)  $f(x) = xe^{1-x}$

ii)  $g(x) = x^2(2\ln x - 5)$

iii)  $h(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1 & , x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

3. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i)  $f(x) = e^{-x^2}$

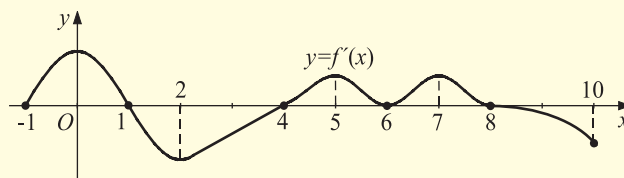
ii)  $g(x) = \varepsilon\phi x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

iii)  $h(x) = x|x|$

iv)  $\varphi(x) = \sqrt{|x|}$

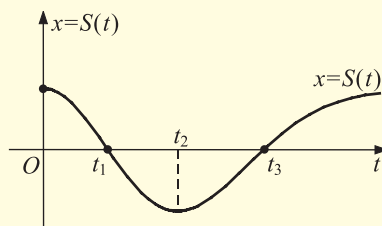
v)  $\psi(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & , x < 0 \\ \sqrt{x} & , x \geq 0 \end{cases}$

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[-1, 10]$ .



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση  $C$  της συνάρτησης θέσεως  $x = S(t)$  ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν η  $C$  παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_3$ , να βρείτε:



- i) Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.
- ii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.

### Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$$

έχει για κάθε τιμή του  $\alpha \in \mathbf{R}$ , ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή  $y = -x^2 + 2$ .

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha \in (-2, 2)$  η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$  είναι κυρτή σε όλο το  $\mathbf{R}$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ .

- i) Να αποδείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.
- ii) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και  $x_3$  η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A(x_1, f(x_1))$ ,  $B(x_2, f(x_2))$  και  $\Gamma(x_3, f(x_3))$  είναι συνευθειακά.

5. Έστω  $f$  μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $(-2,2)$ , για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0.$$

Να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν έχει σημεία καμπής.

## 2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ DE L'HOSPITAL

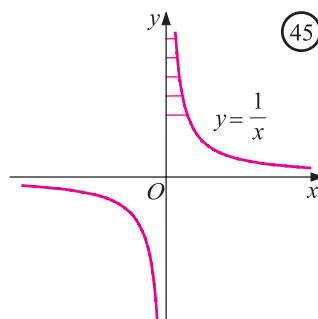
### Ασύμπτωτες

- Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}$  (Σχ. 45).

Όπως είδαμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το  $x$  τείνει στο 0 από θετικές τιμές, η γραφική παράσταση της  $f$  τείνει να συμπίσει με την ευθεία  $x = 0$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία  $x = 0$  είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της  $C_f$ . Γενικά:



### ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  είναι  $+\infty$  ή  $-\infty$ , τότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της  $f$ .

- Για την ίδια συνάρτηση παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το  $x$  τείνει στο  $+\infty$ , η γραφική παράσταση της  $f$  τείνει να συμπίσει με την ευθεία  $y = 0$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία  $y = 0$  είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το  $x$  τείνει στο  $-\infty$ , η γραφική παράσταση της  $f$  τείνει να συμπίσει με την ευθεία  $y = 0$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία  $y = 0$  είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της  $C_f$  στο  $-\infty$ . Γενικά:

## ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  (αντιστοίχως  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ), τότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  (αντιστοίχως στο  $-\infty$ ).

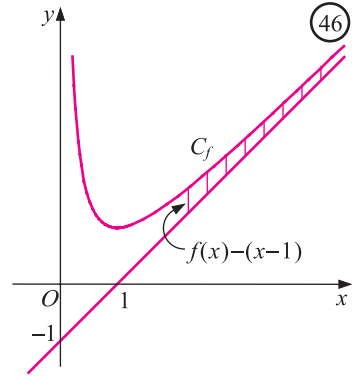
- Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$$

και η ευθεία

$$g(x) = x - 1 \quad (\text{Σχ. 46}).$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , καθώς το  $x$  τείνει στο  $+\infty$ , οι τιμές της  $f$  προσεγγίζουν τις τιμές της  $g$ . Δηλαδή, η γραφική παράσταση της  $f$  προσεγγίζει την ευθεία  $y = x - 1$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία  $y = x - 1$  είναι **ασύμπτωτη (πλάγια)** της  $C_f$  στο  $+\infty$ . Γενικά:



## ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , αντιστοίχως στο  $-\infty$ , αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

Η ασύμπτωτη  $y = \lambda x + \beta$  είναι **οριζόντια** αν  $\lambda = 0$ , ενώ αν  $\lambda \neq 0$  λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη. Για τον προσδιορισμό των ασυμπτωτών μιας συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

## ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , αντιστοίχως στο  $-\infty$ , αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbf{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbf{R}.$$

## ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:

- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Οι ρητές συναρτήσεις  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , με βαθμό του αριθμητή  $P(x)$  μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  αναζητούμε:

- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η  $f$  δεν ορίζεται.
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής.
- Στο  $+\infty$ ,  $-\infty$ , εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, +\infty)$  αντιστοίχως  $(-\infty, \alpha)$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

## ΛΥΣΗ

Επειδή η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}^*$  και είναι συνεχής σ' αυτό, θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0 και πλάγιες στο  $-\infty$  και  $+\infty$ .

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty,$$

Άρα, η ευθεία  $x = 0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ . Εξετάζουμε, τώρα, αν υπάρχει στο  $+\infty$  ασύμπτωτη της μορφής  $y = \lambda x + \beta$ . Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1, \text{ οπότε } \lambda = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ οπότε } \beta = 0.$$

Επομένως, η ευθεία  $y = x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ .

Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία  $y = x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  και στο  $-\infty$ .

### Κανόνες de L' Hospital

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^3}$ . Για να εξετάσουμε αν η ευθεία  $x = 0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ , χρειάζεται να υπολογίσουμε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3}. \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι, αν εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου πηλίκου, παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής  $\frac{0}{0}$ . Οι μέθοδοι που εφαρμόσαμε στο κεφάλαιο του ορίου για την άρση της απροσδιοριστίας (απλοποίηση κτλ.) δεν εφαρμόζονται στο πιο πάνω όριο.

Για τα όρια πηλίκου που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ , ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα (η απόδειξή τους παραλείπεται), που είναι γνωστά ως **κανόνες de l'Hospital**.

#### ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο $\left( \text{μορφή } \frac{0}{0} \right)$

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (περασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Έτσι το παραπάνω όριο (1) υπολογίζεται ως εξής:

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{3x^2} = +\infty$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3} = +\infty,$$

που σημαίνει ότι η ευθεία  $x = 0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή  $\frac{+\infty}{+\infty}$ )**

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ,  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Για παράδειγμα, ο υπολογισμός του  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$  γίνεται ως εξής:

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

**ΣΧΟΛΙΑ**

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές  $\frac{+\infty}{-\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{+\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{-\infty}$ .
2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

**1** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$ . Να αποδειχτεί ότι:

- i) Η ευθεία  $y = x + 2$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$
- ii) Η ευθεία  $y = x - 2$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

i) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0.$$



Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4e^x}{e^x + 1} = \frac{-4 \cdot 0}{0+1} = 0.$$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = 0.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 4 - \frac{4e^x}{e^x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0.$$

## 2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x}{e^x}.$$

### ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Θα αναζητήσουμε, επομένως, ασύμπτωτες στο  $-\infty$  και στο  $+\infty$ .

• Για να είναι η  $y = \lambda x + \beta$  ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ , αρκεί τα όρια  $\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  και  $\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x]$  να είναι πραγματικοί αριθμοί. Επειδή  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ , η  $C_f$  δεν έχει ασύμπτωτη στο  $-\infty$ .

• Για να είναι η  $y = \lambda x + \beta$  ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ , αρκεί τα όρια  $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  και  $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x]$  να είναι πραγματικοί αριθμοί. Έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$$

$$\stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} \quad (\text{Κανόνας De L' Hospital})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Άρα, η ευθεία  $y = 0$ , δηλαδή ο άξονας  $x'x$ , είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$\text{ii) } f(x) = \varepsilon\phi x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$$

$$\text{iv) } f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases} .$$

2. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

$$\text{ii) } f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x-1}$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{x^2 - 3}{x-2}$$

$$\text{iii) } f(x) = \sqrt{x^2 + x} .$$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\ln(x+1)}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x^2}{x^4}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} .$$

### Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$  και οι ευθείες  $\varepsilon_1: y = -x - 1$  και  $\varepsilon_2: y = x + 1$ . Να αποδείξετε ότι

i) Η  $\varepsilon_1$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ , ενώ η  $\varepsilon_2$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

ii) Για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  ισχύει  $x^2 + 2x + 2 > (x+1)^2 \geq 0$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την  $\varepsilon_1$  κοντά στο  $-\infty$  και πάνω από την  $\varepsilon_2$  κοντά στο  $+\infty$ .

2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  όταν:

$$\text{i) } f(x) = \frac{x^2}{2^x} \qquad \text{ii) } f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

3. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \alpha & , \quad x \leq 0 \\ e^{\beta x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

$$4. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x} & , \quad 0 < x \neq 1 \\ -1 & , \quad x = 1 \end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) η } f \text{ είναι συνεχής} \qquad \text{ii) } f'(1) = -\frac{1}{2}.$$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x-1} & , \quad \text{αν } x \neq 1 \\ 0 & , \quad \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad \text{αν } x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x} & , \quad \text{αν } x > 1 \end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) Η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ , ενώ  
 ii) Η  $g$  είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ (1 - e^{-x}) \ln x & , \quad x \in (0, 1] \end{cases}$$

i) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

ii) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο 0.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $O(0,0)$ .

## 2.10 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς, με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με ικανοποιητική ακρίβεια. Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται **μελέτη της συνάρτησης** και περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

**1ο** Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**2ο** Εξετάζουμε τη συνέχεια της  $f$  στο πεδίο ορισμού της.

**3ο** Βρίσκουμε τις παραγώγους  $f'$  και  $f''$  και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της  $f'$  προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της  $f$ , ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της  $f''$  καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

**4ο** Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

**5ο** Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της  $f$**  και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της  $f$ . Για καλύτερη σχεδίαση της  $C_f$  κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της  $f$ .

### ΣΧΟΛΙΟ

1) Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  είναι *άρτια*, τότε η  $C_f$  έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα  $y'y$ , ενώ αν είναι *περιττή*, η  $C_f$  έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων  $O$ . Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα  $x \in A$ , με  $x \geq 0$ .

2) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι *περιοδική* με περίοδο  $T$ , τότε περιορίζουμε τη μελέτη της  $C_f$  σ' ένα διάστημα πλάτους  $T$ .

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 11.$$

**ΛΥΣΗ**

1. Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .
2. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική.
3. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

Οι ρίζες της  $f'$  είναι οι  $x = 3, x = 0$  (διπλή) και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα.

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$
$f(x)$				

Έχουμε επίσης

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

Οι ρίζες της  $f''$  είναι οι  $x = 0, x = 2$  και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$0$	$+$
$f(x)$				

- 4) Η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ασύμπτωτες στο  $+\infty$  και  $-\infty$ , αφού είναι πολυωνυμική τέταρτου βαθμού. Είναι όμως:

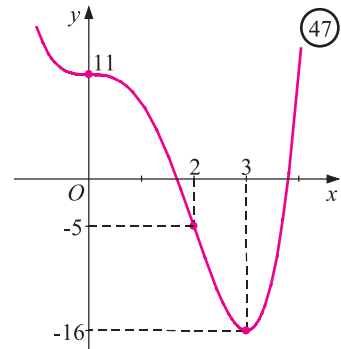
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 4x^3 + 11) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 4x^3 + 11) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty.$$

- 5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  και χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f''(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$						



## 2. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}.$$

### ΛΥΣΗ

1. Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R} - \{1\}$ .
2. Η  $f$  είναι συνεχής ως ρητή.
3. Έχουμε

$$f'(x) = \left( \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} \right)' = \frac{(2x - 1)(x - 1) - x^2 + x - 4}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}.$$

Οι ρίζες της  $f'$  είναι  $-1, 3$  και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα.

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	↗		$-3$ T.M.	↘	$5$ T.E.	↗

Έχουμε επίσης

$$f''(x) = \frac{(2x - 2)(x - 1)^2 - 2(x - 1)(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)^4} = \frac{8}{(x - 1)^3}.$$

Η  $f''$  δεν έχει ρίζες και το πρόσημό της δίνεται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη.

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

4) Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ , η ευθεία  $x = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

Εξετάζουμε τώρα αν υπάρχει στο  $+\infty$  ασύμπτωτη της μορφής  $y = \lambda x + \beta$ . Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x^2 - x} = 1, \text{ οπότε } \lambda = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 1} = 0, \text{ οπότε } \beta = 0.$$

Επομένως, η ευθεία  $y = x$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

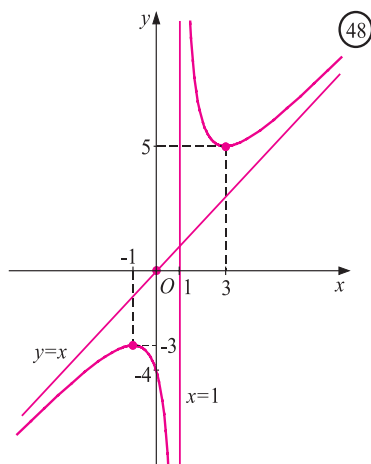
Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία  $y = x$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  και στο  $-\infty$ .

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = +\infty.$$

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\swarrow$ $-\infty$ $\searrow$ $\xrightarrow{-3}$ T.M. $\xrightarrow{-\infty}$		$\swarrow$ $+\infty$ $\searrow$ $\xrightarrow{5}$ T.E. $\xrightarrow{+\infty}$			



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

ii)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

iii)  $f(x) = x^4 - 2x^2$ .

2. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

ii)  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ .

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x) = x + \eta\mu x$  στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ .

## ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## Γ' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \frac{1}{x}$  και  $g(x) = x^2 - 3x + 3$ ,  $x \in (0, +\infty)$  έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο  $A(1,1)$ .

ii) Να βρείτε τη σχετική θέση των  $C_f$  και  $C_g$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

2. Αν  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$ , με

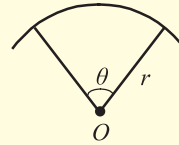
$$f(0) = g(0) \text{ και } f'(x) > g'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι

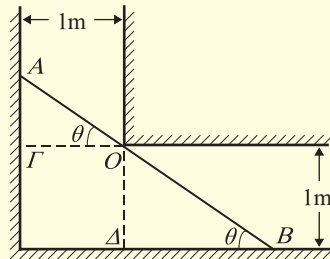
$$f(x) < g(x) \text{ στο } (-\infty, 0) \text{ και } f(x) > g(x) \text{ στο } (0, +\infty).$$

3. Ισοσκελές τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 1. Αν  $\theta$  είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του είναι  $E = (1 + \sin\theta)\eta\mu\theta$ . Να βρείτε την τιμή της γωνίας  $\theta \in (0, \pi)$  για την οποία εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

4. Ένα σύρμα μήκους 20 m διατίθεται για την περιφράξη ενός ανθόκηπου σχήματος κυκλικού τομέα. Να βρείτε την ακτίνα  $r$  του κύκλου, αν επιθυμούμε να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια του κήπου.



5. Δύο διάδρομοι πλάτους 1 m τέμνονται κάθετα (Σχήμα). Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια, να στρίψει στη γωνία.



**Υπόδειξη:**

- i) Να εκφράσετε τα  $OA, OB$  συναρτήσει της γωνίας  $\theta$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι  $(AB) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\upsilon\theta} = f(\theta)$ .



iii) Να βρείτε την τιμή της γωνίας  $\theta$ , για την οποία το  $AB$  γίνεται ελάχιστο.

6. i) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

ii) Να αποδείξετε ότι  $a^{a+1} > (a+1)^a$  για κάθε  $a > e$ .

iii) Να αποδείξετε ότι για  $x > 0$  ισχύει  $2^x = x^2 \Leftrightarrow f(x) = f(2)$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $2^x = x^2$  έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις  $x_1 = 2, x_2 = 4$ .

7. i) Αν  $\alpha, \beta > 0$  και για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  ισχύει  $\alpha^x + \beta^x \geq 2$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha\beta = 1$ .

ii) Αν  $\alpha > 0$  και για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  ισχύει  $\alpha^x \geq x+1$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha = e$ .

8. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = e^x$  είναι κυρτή, ενώ η  $g(x) = \ln x$  είναι κοίλη.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(0,1)$  και της  $C_g$  στο  $B(1,0)$ .

iii) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) e^x \geq x+1, \quad x \in \mathbf{R} \qquad \beta) \ln x \leq x-1, \quad x \in (0, +\infty).$$

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

iv) Η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την  $C_g$ .

9. i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

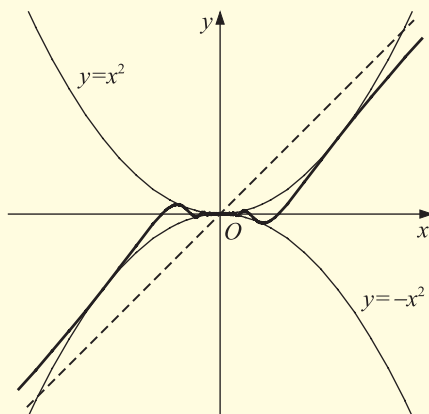
$$f(x) = e^x - \lambda x, \quad \lambda > 0.$$

ii) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του  $\lambda > 0$  για την οποία ισχύει

$$e^x \geq \lambda x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

iii) Για την τιμή του  $\lambda$  που θα βρείτε παραπάνω να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = \lambda x$  εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = e^x$ .

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ .



Να αποδείξετε ότι

- i) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και στη συνέχεια ότι η ευθεία  $y = 0$  (ο άξονας  $x'x$ ) είναι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $O(0, 0)$ .
- ii) Ο άξονας  $x'x$  έχει με την  $C_f$  άπειρα κοινά σημεία, παρόλο που εφάπτεται της  $C_f$ .
- iii) Η ευθεία  $y = x$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$ .

**11. Α.** Έστω μια συνάρτηση  $\varphi$  τέτοια, ώστε

$$\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0 \text{ και } \varphi''(x) + \varphi(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) Η συνάρτηση  $\psi(x) = [\varphi'(x)]^2 + [\varphi(x)]^2$  είναι σταθερή στο  $\mathbf{R}$  και να βρείτε τον τύπο της.
- ii)  $\varphi(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ .

**B.** Έστω δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  τέτοιες ώστε:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ και } f''(x) + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

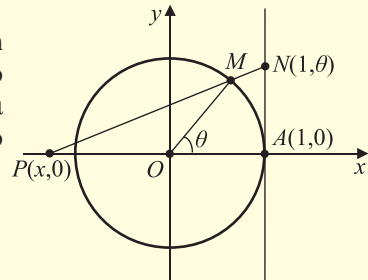
$$g(0) = 1, g'(0) = 0 \text{ και } g''(x) + g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) Οι συναρτήσεις  $\varphi(x) = f(x) - \eta\mu x$  και  $\psi(x) = g(x) - \sigma\upsilon\nu x$  ικανοποιούν τις υποθέσεις (1) του ερωτήματος Α.

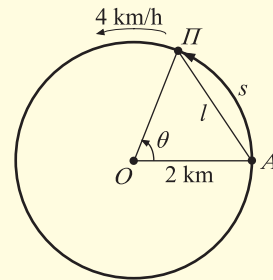
ii)  $f(x) = \eta\mu x$  και  $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

12. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα 1 cm και η  $\varepsilon$  εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο  $A$ . Το τόξο  $AM$  είναι  $\theta$  rad και το ευθ. τμήμα  $AN$  είναι  $\theta$  cm. Η ευθεία  $MN$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $P(x, 0)$ . Να δείξετε ότι:



i)  $x = \frac{\theta \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\theta - \eta\mu\theta} = x(\theta)$  ii)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} x(\theta) = -2$ .

13. Ένας πεζοπόρος  $\Pi$  ξεκινάει από ένα σημείο  $A$  και βαδίζει γύρω από μια κυκλική λίμνη ακτίνας  $\rho = 2$  km με ταχύτητα  $v = 4$  km/h. Αν  $S$  είναι το μήκος του τόξου  $A\Pi$  και  $\ell$  το μήκος της απόστασης  $A\Pi$  του πεζοπόρου από το σημείο εκκίνησης τη χρονική στιγμή  $t$ :



A) Να αποδείξετε ότι

i)  $\theta = \frac{S}{2}$  και  $\ell = 4\eta\mu\frac{\theta}{2}$ , ii)  $S = 4t$ ,  $\theta = 2t$  και  $\ell = 4\eta\mu t$ .

B) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης  $\ell$  ως προς τον χρόνο  $t$ . Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης  $\ell$  ως προς τον χρόνο  $t$ , όταν

α)  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ , β)  $\theta = \pi$  και γ)  $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ;

14. Ένας αγρότης θέλει να προσλάβει εργάτες για να μαζέψουν 12500 κιλά ντομάτες. Κάθε εργάτης μαζεύει 125 κιλά την ώρα και πληρώνεται 6 ευρώ την ώρα. Για το συντονισμό και επιστασία των εργατών ο αγρότης θα προσλάβει και έναν επιστάτη τον οποίο θα πληρώνει 10 ευρώ την ώρα. Ο αγρότης, επιπλέον, θα πληρώσει στο σωματείο των εργατών εισφορά 10 ευρώ για τον επιστάτη και κάθε εργάτη. Να βρείτε πόσους εργάτες πρέπει να προσλάβει ο αγρότης για να του κοστίσει το ελάχιστο δυνατόν και ποιο θα είναι το ελάχιστο κόστος.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

## I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

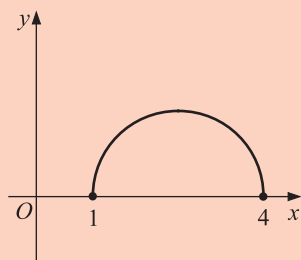
1. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$  και  $f'(x) \neq 0$  για όλα τα  $x \in (0,1)$ , τότε  $f(0) \neq f(1)$ . Α Ψ
2. Αν η συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(\beta) < f(\alpha)$ , τότε υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) < 0$ . Α Ψ
3. Αν οι  $f, g$  είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο  $[\alpha, \beta]$ , με  $f(\alpha) = g(\alpha)$  και  $f(\beta) = g(\beta)$ , τότε υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε στα σημεία  $A(x_0, f(x_0))$  και  $B(x_0, g(x_0))$  οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες. Α Ψ
4. Αν  $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , τότε:
  - α) το  $f(1)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$  Α Ψ
  - β) το  $f(2)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$  Α Ψ
5. α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ  
 β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ
6. Η συνάρτηση  $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$  με  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$  και  $\alpha \neq 0$  έχει πάντα ένα σημείο καμψής. Α Ψ
7. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν στο  $x_0$  σημείο καμψής, τότε και η  $h = fg$  έχει στο  $x_0$  σημείο καμψής. Α Ψ
8. Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται στο  $\mathbf{R}$  και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$ . Αν υπάρχει κάποιο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  της  $C_f$  του οποίου η απόσταση από τον άξονα  $x'x$  είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι οριζόντια. Α Ψ

9. Η ευθεία  $x = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

α)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$  Α Ψ

β)  $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2}$  Α Ψ

10. Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε:



i) το πεδίο ορισμού της  $\frac{1}{f'}$  είναι το  $(1, 4)$  Α Ψ

ii) το πεδίο ορισμού της  $\frac{1}{f'}$  είναι το  $[1, 4]$  Α Ψ

iii)  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (1, 4)$  Α Ψ

iv) υπάρχει  $x_0 \in (1, 4) : f'(x_0) = 0$ . Α Ψ

11. Η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + x + 1$  έχει:

α) μια, τουλάχιστον, ρίζα στο  $(0, 1)$  Α Ψ

β) μια, ακριβώς, ρίζα στο  $(-1, 0)$  Α Ψ

γ) τρεις πραγματικές ρίζες Α Ψ

12. Αν για τις παραγωγίσιμες στο  $\mathbf{R}$  συναρτήσεις  $f, g$  ισχύουν  $f(0) = 4, f'(0) = 3, f'(5) = 6, g(0) = 5, g'(0) = 1, g'(4) = 2$ , τότε  $(f \circ g)'(0) = (g \circ f)'(0)$  Α Ψ

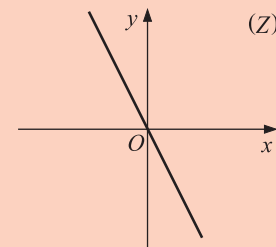
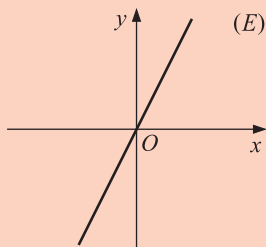
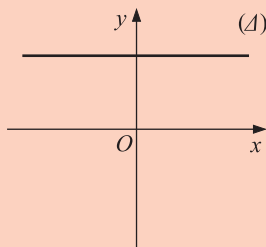
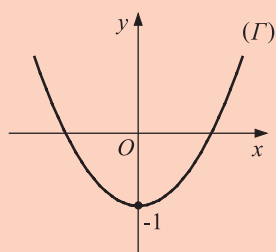
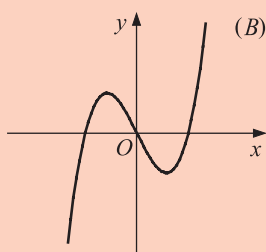
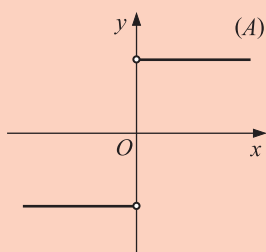
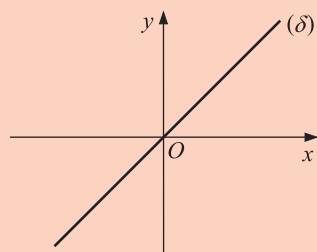
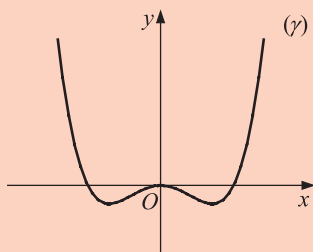
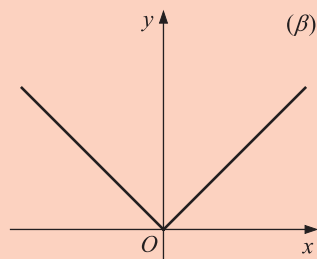
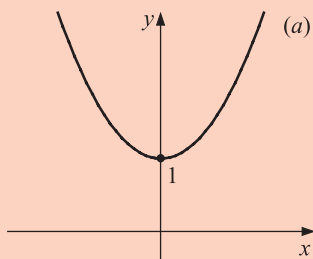
## II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$  ισούται με:
- A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       B)  $\frac{4}{3}$       Γ)  $\sqrt{3}$       Δ) 0      E)  $\frac{3}{4}$ .
2. Το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$  ισούται με:
- A)  $\frac{1}{x^2}$       B)  $-\frac{2}{x^2}$       Γ)  $-\frac{1}{x^2}$       Δ)  $-\frac{2}{x}$       E) 0
3. Αν  $f(x) = 5^{3x}$  τότε η  $f'(x)$  ισούται με:
- A)  $3x5^{3x-1}$       B)  $\frac{5^{3x}}{3 \ln 5}$       Γ)  $3 \cdot 5^{2x}$   
 Δ)  $3 \cdot 5^{3x}$       E)  $5^{3x} \ln 125$
4. Αν  $f(x) = \sin^3(x+1)$  τότε η  $f'(\pi)$  ισούται με:
- A)  $3 \sin^3(\pi+1) \eta\mu(\pi+1)$       B)  $3 \sin^2(\pi+1)$   
 Γ)  $-3 \sin^2(\pi+1) \eta\mu(\pi+1)$       Δ)  $3 \pi \sin^2(\pi+1)$
5. Αν  $f(x) = (x^2 - 1)^3$  τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:
- A) 1      B) -1      Γ) 0  
 Δ) 27      E) δεν υπάρχει.
6. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = 2x^2$  στα σημεία με τετμημένη  $x_0$  είναι παράλληλες, τότε το  $x_0$  είναι:
- A) 0      B)  $\frac{1}{4}$       Γ)  $\frac{1}{2}$       Δ) 1      E) 2.
7. Αν  $f(x) = e^{\beta x}$ ,  $g(x) = e^{\alpha x}$  και  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , τότε το  $\beta$  ως συνάρτηση του  $\alpha$  ισούται με:
- A)  $\frac{\alpha - 1}{\alpha^2}$       B)  $\frac{\alpha^2}{\alpha + 1}$       Γ)  $\frac{\alpha + 1}{\alpha^2}$   
 Δ)  $\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}$       E)  $\frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$ .
8. Αν  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$  και  $f(0) = 0$ , τότε:
- A)  $f(1) = -1$       B)  $f(-1) > 0$   
 Γ)  $f(1) > 0$       Δ)  $f(-1) = 0$ .

## III.

1. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  σε εκείνη από τις συναρτήσεις A, B, Γ, Δ, E, Z που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.



2. Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο  $+\infty$ .

**ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ****ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ**

1.  $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

Α.  $y = 2$

2.  $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$

Β.  $y = x - 1$

3.  $f(x) = 2 + \frac{3}{x-2}$

Γ.  $y = -x + 1$

Δ.  $y = x$

Ε.  $y = -x$



## ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

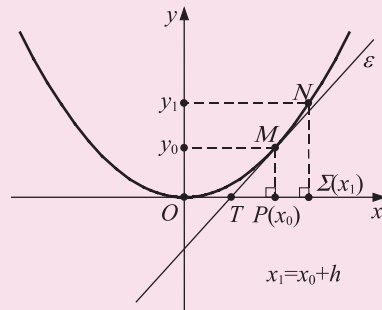
### Η έννοια της παραγώγου

Οι αρχαίοι Έλληνες ονόμαζαν εφαπτομένη μιας καμπύλης την ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο μ' αυτήν, χωρίς να την τέμνει και την κατασκεύαζαν με βάση γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν απ' αυτόν τον ορισμό. Έτσι ήταν γνωστός ο τρόπος κατασκευής εφαπτομένων στον κύκλο και τις κωνικές τομές (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή). Επίσης, με προσφυγή σε κινηματικές μεθόδους, ο Αρχιμήδης είχε επινοήσει μέθοδο κατασκευής της εφαπτομένης μιας καμπύλης που είναι σήμερα γνωστή ως "έλικα του Αρχιμήδη".

Η επόμενη εξέλιξη στο ζήτημα αυτό έγινε στις αρχές του 17ου αιώνα, όταν άρχισε η συστηματική εφαρμογή αλγεβρικών μεθόδων στη γεωμετρία. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει τον τρόπο με τον οποίο η Άλγεβρα εφαρμόζεται στον προσδιορισμό της εφαπτομένης μιας παραβολής.

Έστω  $y = f(x) = x^2$  η εξίσωση μιας παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων και  $M(x_0, y_0)$  ένα σημείο της, στο οποίο ζητείται να κατασκευαστεί μια εφαπτομένη  $\varepsilon$ . Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει αν προσδιορίσουμε ένα άλλο χαρακτηριστικό σημείο της  $\varepsilon$ , όπως π.χ. το σημείο  $T$  στο οποίο τέμνει τον άξονα των τετμημένων.

Θεωρούμε ένα άλλο σημείο της παραβολής, το  $N(x_1, y_1)$ , πολύ γειτονικό του  $M$ , τέτοιο ώστε  $x_1 = x_0 + h$  (το  $h$  θεωρείται εδώ μια απειροελάχιστη μεταβολή του  $x_0$ ). Στην περίπτωση αυτή τα ορθογώνια τρίγωνα  $MPT$  και  $NST$



μπορούν να θεωρηθούν κατά προσέγγιση όμοια και άρα θα ισχύει κατά προσέγγιση

η αναλογία  $\frac{N\Sigma}{MP} = \frac{\Sigma T}{TP}$ . Αν θέσουμε  $TP = s$ , τότε διαδοχικά θα ισχύει:

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{s+h}{s} \quad \text{ή} \quad y_1 = y_0 \left(1 + \frac{h}{s}\right) \quad \text{ή} \quad y_1 - y_0 = y_0 \frac{h}{s} \quad \text{ή} \quad \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{y_0}{s}. \quad (1)$$

Το πρώτο μέλος αυτής της κατά προσέγγιση ισότητας γράφεται:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h$$

και έτσι η (1) γίνεται  $2x_0 + h = \frac{y_0}{s}$ . Αν τώρα θέσουμε, όπως οι μαθηματικοί του 17ου αιώνα,  $h = 0$  βρίσκουμε από την τελευταία ότι  $2x_0 = \frac{y_0}{s}$  ή  $s = \frac{y_0}{2x_0}$ . Γνωρίζοντας

λοιπόν το σημείο επαφής  $M(x_0, y_0)$ , προσδιορίζουμε από την τελευταία το μήκος  $TP = s$

που μας δίνει αμέσως το σημείο  $T$ . Η ευθεία  $MT$  είναι η ζητούμενη εφαπτομένη της παραβολής. Η προηγούμενη διαδικασία ήταν ένας από τους δρόμους που οδήγησαν ιστορικά, στην έννοια της παραγώγου.

### Κανόνες παραγώγισης

Στο δεύτερο μισό του 17ου αιώνα, οι μαθηματικοί είχαν κατορθώσει να μετασχηματίσουν όλη τη μακροσκελή διαδικασία παραγώγισης σε εφαρμογή ορισμένων κανόνων και τύπων, με τη βοήθεια κατάλληλα επιλεγμένων συμβόλων. Πρωτοπόροι προς αυτήν την κατεύθυνση υπήρξαν οι I. Newton και ο G. Leibniz. Ο Leibniz συμβόλιζε την απειροελάχιστη μεταβολή μιας ποσότητας  $x$  με  $dx$  (διαφορικό του  $x$ ) έτσι, π.χ. για τη συνάρτηση  $y = x^2$  του προηγούμενου παραδείγματος, η αντίστοιχη μεταβολή του  $y$  (διαφορικό του  $y$ ) ήταν:

$$dy = d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2x dx + (dx)^2 - x^2 = 2x dx + (dx)^2.$$

Παραλείποντας την πολύ μικρή (συγκρινόμενη με τις άλλες) ποσότητα  $(dx)^2$  προέκυπτε η  $dy = 2x dx$  (εδώ η παράγωγος  $2x$  ονομάζονταν “διαφορικός συντελεστής”) και τελικά η  $\frac{dy}{dx} = 2x$ , ένας συμβολισμός που διατηρείται μέχρι σήμερα, χωρίς όμως να

έχει νόημα πηλίκου. Με τον τρόπο αυτό ο Leibniz απέδειξε το 1677 τον κανόνα για τον υπολογισμό της μεταβολής του γινομένου δύο μεταβλητών  $x$  και  $y$ , που αποτελεί μια “πρωτόγονη” μορφή του σημερινού κανόνα της παραγώγου ενός γινομένου συναρτήσεων

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x + dx)(y + dy) - xy \\ &= xy + xdy + ydx + dx dy - xy \\ &= xdy + ydx + dx dy. \end{aligned}$$

Παραλείποντας και εδώ την πολύ μικρή ποσότητα  $dx dy$ , παίρνουμε τη σχέση

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

Με την εισαγωγή και καθιέρωση αυτών των κανόνων και συμβολισμών, η έννοια της παραγώγου εξελίχθηκε σ' ένα εξαιρετικά αποτελεσματικό εργαλείο και διεύρυνε σε μεγάλο βαθμό τις εφαρμογές της μαθηματικής ανάλυσης. Παράλληλα όμως, οι ασάφειες που επισημάναμε αποτελούσαν μια διαρκή πρόκληση για τους μαθηματικούς που αντιμετώπιζαν με κριτικό πνεύμα τα θεμέλια της επιστήμης τους. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός αυτής της έννοιας, που στηρίζεται στην έννοια του ορίου, δόθηκε για πρώτη φορά το 1823 από τον A.L. Cauchy:

“Όταν η συνάρτηση  $y = f(x)$  παραμένει συνεχής σ' ένα διάστημα της μεταβλητής  $x$  και δοθεί σ' αυτή τη μεταβλητή μια τιμή που ανήκει σ' αυτό το διάστημα, τότε κάθε απειροελάχιστη αύξηση της μεταβλητής παράγει μια απειροελάχιστη αύξηση της συνάρτησης. Συνεπώς, αν θεθεί  $\Delta x = i$ , τότε οι δυο όροι του πηλίκου διαφορών

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

θα είναι απειροελάχιστες ποσότητες. Αλλά ενώ αυτοί οι δυο όροι θα προσεγγίζουν επ' άπειρον και ταυτόχρονα το όριο μηδέν, το πηλίκο μπορεί να συγκλίνει προς κάποιο άλλο όριο, θετικό ή αρνητικό. Αυτό το όριο, όταν υπάρχει έχει μια ορισμένη τιμή για κάθε συγκεκριμένο  $x$ , αλλά μεταβάλλεται μαζί με το  $x$ .

Η μορφή της νέας συνάρτησης που θα εκφράζει το όριο του λόγου

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

θα εξαρτάται από τη μορφή της δοσμένης συνάρτησης  $y = f(x)$ .

Για να ξεχωρίσουμε αυτήν την εξάρτηση, δίνουμε στη νέα συνάρτηση το όνομα **παράγωγος συνάρτηση** και τη συμβολίζουμε, με τη βοήθεια ενός τόνου,  $y'$  ή  $f'(x)$ ".

Με αφετηρία αυτόν τον ορισμό, ο Cauchy υπολόγισε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και απέδειξε τους κανόνες της παραγωγίσης. Π.χ. για τον ιδιαίτερα σημαντικό κανόνα της παραγώγου μιας σύνθετης συνάρτησης, έδωσε την ακόλουθη απόδειξη:

"Έστω  $z$  μια δεύτερη συνάρτηση του  $x$ , συνδεδεμένη με την πρώτη  $y = f(x)$  μέσω του τύπου  $z = F(y)$ . Η  $z$  ή  $F[f(x)]$  είναι αυτή που ονομάζεται συνάρτηση μιας συνάρτησης της μεταβλητής  $x$  και αν οι απειροελάχιστες και ταυτόχρονες αυξήσεις των  $x$ ,  $y$  και  $z$  συμβολιστούν με  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  αντίστοιχα, τότε θα είναι

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

Από αυτήν, περνώντας στα όρια, έχουμε

$$z' = F'(y) \cdot y' = F'[f(x)] \cdot f'(x)^{(*)}$$

(\*) Ένα αδύνατο σημείο αυτής της απόδειξης, που αφορά την ισότητα (1), είναι ότι για μικρές, μη μηδενικές τιμές του  $\Delta x$ , μπορεί να ισχύει  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$ .

# 3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

## 3.1 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

### Αρχική συνάρτηση

Πολλές φορές στην πράξη παρουσιάζονται προβλήματα, που η λύση τους απαιτεί πορεία αντίστροφη της παραγωγίσης. Τέτοια προβλήματα είναι για παράδειγμα τα παρακάτω:

- Η εύρεση της θέσης  $S(t)$  ενός κινητού τη χρονική στιγμή  $t$ , αν είναι γνωστή η ταχύτητά του  $v(t)$  που, όπως γνωρίζουμε, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης  $x = S(t)$ .
- Η εύρεση της ταχύτητας  $v(t)$  ενός κινητού τη χρονική στιγμή  $t$ , αν είναι γνωστή η επιτάχυνσή του  $\gamma(t)$  που, όπως γνωρίζουμε, είναι η παράγωγος της συνάρτησης  $v = v(t)$ .
- Η εύρεση του πληθυσμού  $N(t)$  μιας κοινωνίας βακτηριδίων τη χρονική στιγμή  $t$ , αν είναι γνωστός ο ρυθμός αύξησης  $N'(t)$  του πληθυσμού.

Το κοινό χαρακτηριστικό των προβλημάτων αυτών είναι ότι, δίνεται μια συνάρτηση  $f$  και ζητείται να βρεθεί μια άλλη συνάρτηση  $F$  για την οποία να ισχύει  $F'(x) = f(x)$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Οδηγούμαστε έτσι στον παρακάτω ορισμό.

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$** <sup>(1)</sup> ονομάζεται κάθε συνάρτηση  $F$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

<sup>(1)</sup> Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα  $\Delta$  έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $F(x) = x^3$  είναι μια παράγουσα της  $f(x) = 3x^2$  στο  $\mathbf{R}$ , αφού  $(x^3)' = 3x^2$ . Παρατηρούμε ότι και όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = x^3 + c = F(x) + c$ , όπου  $c \in \mathbf{R}$ , είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\mathbf{R}$ , αφού  $(x^3 + c)' = 3x^2$ . Γενικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbf{R},$$

είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- κάθε άλλη παράγουσα  $c \in \mathbf{R}$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ , όπου  $c \in \mathbf{R}$ , είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω  $G$  είναι μια άλλη παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ . Τότε για κάθε  $x \in \Delta$  ισχύουν  $F'(x) = f(x)$  και  $G'(x) = f(x)$ , οπότε

$$G'(x) = F'(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{για κάθε } x \in \Delta. \quad \blacksquare$$

### Αόριστο ολοκλήρωμα

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης  $f$  σ' ένα διάστημα  $\Delta$  ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της  $f$  στο  $\Delta$** , συμβολίζεται  $\int f(x) dx$  και διαβάζεται "ολοκλήρωμα εφ του  $x$  ντε  $x$ ". Δηλαδή,

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbf{R},$$

όπου  $F$  μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ .

Για παράδειγμα,

$$\int \sin x dx = \eta \mu x + c, \quad \text{αφού } (\eta \mu x)' = \sin x.$$

Από τον τρόπο που ορίστηκε το αόριστο ολοκλήρωμα προκύπτει ότι:

Για κάθε συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Η διαδικασία εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος είναι αντίστροφη πορεία της παραγωγίσιμης και λέγεται **ολοκλήρωση**. Η σταθερά  $c$  λέγεται **σταθερά ολοκλήρωσης**.

Από τον πίνακα των παραγώγων βασικών συναρτήσεων βρίσκουμε τον παρακάτω πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων.

Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε **διάστημα** στο οποίο οι παραστάσεις του  $x$  που εμφανίζονται έχουν νόημα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ			
1.	$\int 0 dx = c$	6.	$\int \eta \mu x dx = -\sigma \nu \eta x + c$
2.	$\int 1 dx = x + c$	7.	$\int \frac{1}{\sigma \nu \eta^2 x} dx = \epsilon \phi x + c$
3.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + c$	8.	$\int \frac{1}{\eta \mu^2 x} dx = -\sigma \phi x + c$
4.	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \alpha \neq -1$	9.	$\int e^x dx = e^x + c$
5.	$\int \sigma \nu \eta x dx = \eta \mu x + c$	10.	$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + c$

Συνέπεια του ορισμού του αόριστου ολοκληρώματος και των κανόνων παραγωγίσιμης είναι οι εξής δύο ιδιότητες:

Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  έχουν παράγουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε

- $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \lambda \in \mathbb{R}^*$
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους έχουμε για παράδειγμα:

$$\int 4x^2 dx = 4 \int x^2 dx = 4 \frac{x^3}{3} + c$$

$$\begin{aligned} \int (3\eta \mu x - 2e^x) dx &= \int 3\eta \mu x dx - \int 2e^x dx \\ &= 3 \int \eta \mu x dx - 2 \int e^x dx \end{aligned}$$

$$= -3\sigma\upsilon\nu x - 2e^x + c$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{3x}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c. \end{aligned}$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Να βρεθεί συνάρτηση  $f$  τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο  $A(2, 3)$  και να ισχύει  $f'(x) = 2x - 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

### ΛΥΣΗ

Επειδή  $f'(x) = 2x - 1$ , έχουμε διαδοχικά:

$$\int f'(x) dx = \int (2x - 1) dx$$

$$f(x) + c_1 = x^2 - x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 - x + c_2 - c_1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Για να διέρχεται η  $f$  από το σημείο  $A(2, 3)$  πρέπει και αρκεί  $f(2) = 3$  ή, ισοδύναμα,  $2^2 - 2 + c = 3$ , δηλαδή  $c = 1$ . Επομένως,  $f(x) = x^2 - x + 1$ .

**2.** Η είσπραξη  $E(x)$ , από την πώληση  $x$  μονάδων ενός προϊόντος ( $0 \leq x \leq 100$ ) μιας βιομηχανίας, μεταβάλλεται με ρυθμό  $E'(x) = 100 - x$  (σε χιλιάδες ευρώ ανά μονάδα προϊόντος), ενώ ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής είναι σταθερός και ισούται με 2 (σε χιλιάδες ευρώ ανά μονάδα προϊόντος). Να βρεθεί το κέρδος της βιομηχανίας από την παραγωγή 100 μονάδων προϊόντος, υποθέτοντας ότι το κέρδος είναι μηδέν όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα.

### ΛΥΣΗ

Αν  $P(x)$  είναι το κέρδος και  $K(x)$  είναι το κόστος παραγωγής για  $x$  μονάδες προϊόντος, τότε

$$P(x) = E(x) - K(x),$$

οπότε

$$P'(x) = E'(x) - K'(x) = 10 - x - 2 = 8 - x.$$

Δηλαδή

$$P'(x) = 8 - x,$$

οπότε

$$\int P'(x)dx = \int (8 - x)dx$$

και άρα

$$P(x) = 98x - \frac{x^2}{2} + c, c \in \mathbf{R}.$$

Όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα, το κέρδος είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει  $P(0) = 0$ , οπότε  $c = 0$ . Επομένως,

$$P(x) = 98x - \frac{x^2}{2}.$$

Άρα, το κέρδος από 100 μονάδες προϊόντος είναι

$$P(100) = 98 \cdot 100 - \frac{100^2}{2} = 9800 - 5000 = 4800 \text{ (σε χιλιάδες ευρώ).}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i)  $\int (x^3 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)dx$

ii)  $\int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx$

iii)  $\int 3x\sqrt{x} dx$

iv)  $\int \frac{x^3 + 8}{x + 2} dx$

v)  $\int \left( e^x - \frac{3}{x} + \sigma\upsilon\nu 2x \right) dx$

vi)  $\int \left( \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{1}{\eta\mu^2 x} \right) dx$

vii)  $\int \frac{x+3}{x+2} dx.$



2. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(0, +\infty)$ , για την οποία ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ και } f(9) = 1.$$

3. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f''(x) = 3$ ,  $f'(1) = 6$  και  $f(0) = 4$ .

4. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f''(x) = 12x^2 + 2$  και η γραφική της παράσταση στο σημείο της  $A(1, 1)$  έχει κλίση 3.

5. Ο πληθυσμός  $N(t)$ , σε εκατομμύρια, μιας κοινωνίας βακτηριδίων, αυξάνεται με ρυθμό  $N'(t) = \frac{1}{20}e^{t/20}$  ανά λεπτό. Να βρείτε την αύξηση του πληθυσμού στα πρώτα 60 λεπτά.

6. Μια βιομηχανία έχει διαπιστώσει ότι για εβδομαδιαία παραγωγή  $x$  εξαρτημάτων έχει οριακό κόστος  $x^2 + 5x$  (ευρώ ανά μονάδα προϊόντος). Να βρείτε τη συνάρτηση κόστους της εβδομαδιαίας παραγωγής, αν είναι γνωστό ότι τα σταθερά εβδομαδιαία έξοδα της βιομηχανίας, όταν δεν παράγει κανένα εξάρτημα, είναι 100 (ευρώ).

7. Μια νέα γεώτρηση εξώρυξης πετρελαίου έχει ρυθμό άντλησης που δίνεται από τον τύπο  $R'(t) = 20 + 10t - \frac{3}{4}t^2$ , όπου  $R(t)$  είναι ο αριθμός, σε χιλιάδες, των βαρελιών που αντλήθηκαν στους  $t$  πρώτους μήνες λειτουργίας της. Να βρείτε πόσα βαρέλια θα έχουν αντληθεί τους 8 πρώτους μήνες λειτουργίας της.

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Η θερμοκρασία  $T$  ενός σώματος, που περιβάλλεται από ένα ψυκτικό υγρό, ελαττώνεται με ρυθμό  $-kae^{-kt}$ , όπου  $a, k$  είναι θετικές σταθερές και  $t$  ο χρόνος. Η αρχική θερμοκρασία  $T(0)$  του σώματος είναι  $T_0 + a$ , όπου  $T_0$  η θερμοκρασία του υγρού η οποία με κατάλληλο μηχανήμα διατηρείται σταθερή. Να βρείτε τη θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή  $t$ .
2. Ένας βιομήχανος, ο οποίος επενδύει  $x$  χιλιάδες ευρώ στη βελτίωση της παραγωγής του εργοστασίου του, αναμένει να έχει κέρδος  $P(x)$  χιλιάδες ευρώ από αυτή την επένδυση. Μια ανάλυση της παραγωγής έδειξε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους  $P(x)$ , που οφείλεται στην επένδυση αυτή, δίνεται από τον τύπο  $P'(x) = 5,8e^{-x/2000}$ . Να βρείτε το συνολικό κέρδος που οφείλεται σε αύξηση της επένδυσης από 4.000.000 ευρώ σε 6.000.000 ευρώ.
3. Από την πώληση ενός νέου προϊόντος μιας εταιρείας διαπιστώθηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους  $K(t)$  δίνεται από τον τύπο  $K'(t) = 800 - 0,6t$  (σε ευρώ την

ημέρα), ενώ ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης  $E(t)$  στο τέλος των  $t$  ημερών δίνεται από τον τύπο  $E'(t) = 1000 + 0,3t$  (σε ευρώ την ημέρα). Να βρείτε το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την τρίτη έως και την έκτη ημέρα παραγωγής.

4. Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις με  $f(0) = g(0)$ ,  $f(1) = g(1) + 1$  και  $f''(x) = g''(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $f(x) = g(x) + x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) Αν η συνάρτηση  $g$  έχει δύο ρίζες  $\alpha, \beta$  με  $\alpha < 0 < \beta$ , τότε η συνάρτηση  $f$  έχει μια τουλάχιστον, ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$ .

### 3.2 ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Ο πίνακας των αόριστων ολοκληρωμάτων, που δώσαμε παραπάνω, δεν είναι αρκετός για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μίας οποιασδήποτε συνάρτησης, όπως π.χ. τα ολοκληρώματα  $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$  και  $\int xe^x dx$ . Σε τέτοιες περιπτώσεις ο υπολογισμός γίνεται απλούστερος με τη βοήθεια των παρακάτω μεθόδων ολοκλήρωσης.

#### Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Η μέθοδος αυτή εκφράζεται με τον τύπο:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

που είναι συνέπεια του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f, g$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Πράγματι, για κάθε  $x \in \Delta$ , έχουμε

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

οπότε

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x).$$

Επομένως

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))' dx - \int f'(x)g(x)dx$$

ή, ισοδύναμα,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + c - \int f'(x)g(x)dx. \quad (1)$$

Επειδή το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της (1) περιέχει μια σταθερά ολοκλήρωσης, το  $c$  μπορεί να παραλειφθεί, οπότε έχουμε τον παραπάνω τύπο. ■

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα του β' μέλους υπολογίζεται ευκολότερα.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα  $\int xe^x dx$ . Έχουμε:

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

Αν, τώρα, δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, αλλάζοντας τους ρόλους των  $x$  και  $e^x$ , βρίσκουμε

$$\int xe^x dx = \int \left( \frac{x^2}{2} \right)' e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx.$$

Το τελευταίο, όμως, ολοκλήρωμα είναι πιο σύνθετο από το αρχικό.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### 1 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i)  $\int x^2 e^x dx$

ii)  $\int x \eta \mu 2x dx$

iii)  $\int (4x^3 + 1) \ln x dx$

iv)  $\int e^x \eta \mu 2x dx$ .

### ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx \\ &= x^2 e^x - \int 2x (e^x)' dx = x^2 e^x - 2x e^x + \int 2e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x)e^{\alpha x} dx$$

όπου  $P(x)$  πολυώνυμο του  $x$  και  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

ii) Έχουμε

$$\int x \eta\mu 2x dx = \frac{1}{2} \int x(-\sigma\upsilon\nu 2x)' dx = -\frac{1}{2} x \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu 2x dx = -\frac{1}{2} x \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{4} \eta\mu 2x + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x)\eta\mu(\alpha x) dx,$$

$$\int P(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x) dx$$

όπου  $P(x)$  πολυώνυμο του  $x$  και  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

iii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \int (4x^3 + 1) \ln x dx &= \int (x^4 + x)' \ln x dx = (x^4 + x) \ln x - \int (x^4 + x) \frac{1}{x} dx \\ &= (x^4 + x) \ln x - \int (x^3 + 1) dx = (x^4 + x) \ln x - \frac{x^4}{4} - x + c. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x) \ln(\alpha x) dx,$$

όπου  $P(x)$  πολυώνυμο του  $x$  και  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

iv) Θέτουμε  $I = \int e^x \eta\mu(2x) dx$ , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int (e^x)' \eta\mu(2x) dx = e^x \eta\mu(2x) - 2 \int e^x \sigma\upsilon\nu(2x) dx \\ &= e^x \eta\mu(2x) - 2 \int (e^x)' \sigma\upsilon\nu(2x) dx \\ &= e^x \eta\mu(2x) - 2e^x \sigma\upsilon\nu(2x) - 4 \int e^x \eta\mu 2x dx \\ &= e^x \eta\mu(2x) - 2e^x \sigma\upsilon\nu(2x) - 4I. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$5I = e^x \eta\mu(2x) - 2e^x \sigma\upsilon\nu(2x) + c_1,$$

οπότε

$$I = \frac{1}{5} e^x \eta\mu(2x) - \frac{2}{5} e^x \sigma\upsilon\nu(2x) + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int e^{\alpha x} \eta\mu(\beta x) dx,$$

$$\int e^{\alpha x} \sigma\upsilon\nu(\beta x) dx$$

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ .

**2.** Ο πληθυσμός  $P(t)$ ,  $0 \leq t \leq 20$ , μιας πόλης, που προέκυψε από συγχώνευση 10 κοινοτήτων, αυξάνεται με ρυθμό (σε άτομα ανά έτος) που δίνεται από τον τύπο  $P'(t) = te^{t/10}$ ,  $0 \leq t \leq 20$ , όπου  $t$  είναι ο αριθμός των ετών μετά τη συγχώνευση. Να βρεθεί ο πληθυσμός  $P(t)$  της πόλης  $t$  χρόνια μετά τη συγχώνευση, αν γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός ήταν 10000 κάτοικοι κατά τη στιγμή της συγχώνευσης.

### ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$\begin{aligned} \int P'(t) dt &= \int te^{t/10} dt \\ &= 10 \int (e^{t/10})' t dt \\ &= 10e^{t/10} \cdot t - 10 \int e^{t/10} dt \\ &= 10te^{t/10} - 100e^{t/10} + c, \end{aligned}$$

οπότε

$$P(t) = 10te^{t/10} - 100e^{t/10} + c, \text{ για κάποιο } c \in \mathbb{R}.$$

Όταν  $t = 0$ , ο πληθυσμός είναι 10000. Συνεπώς:

$$P(0) = 10000 \Leftrightarrow 10e^0 \cdot 0 - 100e^0 + c = 10000 \Leftrightarrow c = 10100.$$

Άρα, ο πληθυσμός της πόλης,  $t$  χρόνια μετά τη συγχώνευση, είναι

$$P(t) = 10te^{t/10} - 100e^{t/10} + 10100.$$

### Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή  $\int f(g(x))g'(x)dx$ . Η μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du,$$

όπου  $u = g(x)$  και  $du = g'(x)dx$

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα  $\int f(u)du$  του

δευτέρου μέλους υπολογίζεται ευκολότερα.

Η απόδειξη του τύπου αυτού στηρίζεται στο γνωστό κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης. Πράγματι, αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$ , τότε

$$F'(u) = f(u), \quad (1)$$

οπότε

$$F'(g(x)) = f(g(x))$$

και άρα

$$\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x)dx &= \int F'(g(x))g'(x)dx \\ &= \int (F(g(x)))'dx \quad (\text{αφού } (F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x)) \\ &= F(g(x)) + c \\ &= F(u) + c, \quad (\text{όπου } u = g(x)) \\ &= \int f(u)du \quad (\text{λόγω της (1)}) \blacksquare \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα  $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ . Θέτουμε  $u = x^2 + 1$  και  $du = (x^2 + 1)'dx = 2xdx$ , οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned} \int 2x\sqrt{x^2+1}dx &= \int \sqrt{u}du \\ &= \int u^{1/2}du \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} + c \\ &= \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + c \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c. \end{aligned}$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\text{i) } \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx \quad \text{ii) } \int \epsilon\phi x dx.$$

**ΛΥΣΗ**

i) Θέτουμε  $u = 1 + e^x$ , οπότε  $d = (1 + e^x)'d = e^x d$ . Επομένως,

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{1+e^x} + c$$

ii) Έχουμε  $\int \varepsilon\phi x dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx$ . Επομένως, αν θέσουμε  $u = \sigma\upsilon\nu x$ , οπότε  $du = (\sigma\upsilon\nu x)' dx = -\eta\mu x d$ , έχουμε:

$$\int \varepsilon\phi x dx = -\int \frac{1}{u} du = -\ln |u| + c = -\ln |\sigma\upsilon\nu x| + c.$$

**2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα**

$$\text{i) } \int \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) dx \quad \text{ii) } \int \frac{1}{1-2x} dx \quad \text{iii) } \int x(x^2 - 1)^{99} dx.$$

**ΛΥΣΗ**

i) Θέτουμε  $u = 2x + \frac{\pi}{6}$ , οπότε  $du = \left(2x + \frac{\pi}{6}\right)' dx = 2 dx$ .

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) dx &= \frac{1}{2} \int \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \int \eta\mu u du \\ &= -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu u + c = -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + c. \end{aligned}$$

ii) Θέτουμε  $u = 1 - 2x$ , οπότε  $d = (1 - 2x)' dx = -2 d$ .

Επομένως,

$$\int \frac{1}{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = -\frac{1}{2} \ln |u| + c = -\frac{1}{2} \ln |1-2x| + c.$$

iii) Θέτουμε  $u = x^2 - 1$ , οπότε  $d = 2x d$ . Άρα

$$\int x(x^2 - 1)^{99} dx = \frac{1}{2} \int u^{99} du = \frac{1}{2} \frac{u^{100}}{100} + c = \frac{1}{200} (x^2 - 1)^{100} + c.$$

**3. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα**

$$\text{i) } \int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx \quad \text{ii) } \int \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6} dx.$$

## ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R} - \{2, 3\}$  και γράφεται

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}.$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς  $A, B$  έτσι, ώστε να ισχύει

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}.$$

Με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε τελικά:

$$(A+B-x)x = 3A+2B+1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$ , αν και μόνο αν

$$\begin{cases} A+B-2=0 \\ 3A+2B+1=0 \end{cases} \text{ ή, ισοδύναμα, } \begin{cases} A=-5 \\ B=7 \end{cases}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx &= \int \left( \frac{-5}{x-2} + \frac{7}{x-3} \right) dx = \int \frac{-5}{x-2} dx + \int \frac{7}{x-3} dx \\ &= -5 \ln|x-2| + 7 \ln|x-3| + c. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int \frac{\kappa x + \lambda}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx, \text{ με } \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$$

ii) Αν εκτελέσουμε τη διαίρεση του πολυωνύμου  $x^2 - 3x + 7$  με το πολώνυμο  $x^2 - 5x + 6$ , βρίσκουμε ότι

$$\frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{2x+1}{x^2 - 5x + 6}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int 1 dx + \int \frac{2x+1}{x^2 - 5x + 6} dx \\ &= x - 5 \ln|x-2| + 7 \ln|x-3| + c \quad (\text{λόγω του (i)}). \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{P(x)}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx,$$

όπου  $P(x)$  πολώνυμο του  $x$  βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 και  $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ .



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$i) \int x^2 e^{-x} dx$$

$$ii) \int (3x^2 - 2x + 1)e^{2x} dx$$

$$iii) \int x^3 \ln x dx$$

$$iv) \int 2x^2 \eta\mu 2x dx$$

$$v) \int 4x \sigma\upsilon\nu 2x dx$$

$$vi) \int \ln x dx,$$

$$vii) \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$viii) \int e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx$$

$$ix) \int e^x \eta\mu x dx$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$i) \int \eta\mu 3x dx$$

$$ii) \int (4x^2 - 16x + 7)^3 (x - 2) dx$$

$$iii) \int \frac{x+3}{(x^2+6x)^4} dx$$

$$iv) \int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}} dx$$

$$v) \int x\sqrt{x+1} dx.$$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$i) \int e^x \eta\mu e^x dx$$

$$ii) \int \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$$iii) \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$$

$$iv) \int \frac{e^x}{(e^x+1)\ln(e^x+1)} dx$$

$$v) \int \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx.$$

### Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$i) \int \frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

$$ii) \int \epsilon\phi x \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x) dx$$

$$iii) \int \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x} dx.$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\text{i) } \int \sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}} \cdot \frac{1}{x^4} dx \quad \text{ii) } \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad \text{iii) } \int x \ln(x^2+1) dx.$$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\text{i) } \int x^2 \ln x^2 dx \quad \text{ii) } \int (\ln t)^2 dt \quad \text{iii) } \int e^{2x} \operatorname{cose}^x dx.$$

4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\text{i) } \int \epsilon\phi x dx \quad \text{και} \quad \int \frac{x}{\operatorname{cose}^2 x} dx$$

$$\text{ii) } \int \frac{\operatorname{cose} x}{\eta\mu^2 x} dx \quad \text{και} \quad \int \frac{1+\operatorname{cose} x}{\eta\mu^2 x} dx$$

$$\text{iii) } \int \eta\mu^3 x dx \quad \text{και} \quad \int \operatorname{cose}^3 x dx.$$

5. Με τη βοήθεια των τύπων

$$\eta\mu^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{cose} 2\alpha}{2} \quad \text{και} \quad \operatorname{cose}^2 \alpha = \frac{1 + \operatorname{cose} 2\alpha}{2}$$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int \eta\mu^2 x dx \quad \text{ii) } \int \operatorname{cose}^2 x dx \quad \text{iii) } \int \eta\mu^2 x \operatorname{cose}^2 x dx.$$

6. Με τη βοήθεια των τύπων

$$2\eta\mu\alpha\operatorname{cose}\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta),$$

$$2\operatorname{cose}\alpha\operatorname{cose}\beta = \operatorname{cose}(\alpha - \beta) + \operatorname{cose}(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \operatorname{cose}(\alpha - \beta) - \operatorname{cose}(\alpha + \beta)$$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i) } \int \eta\mu\operatorname{cose} 2x dx \quad \text{ii) } \operatorname{cose} 3x \operatorname{cose} 5x dx \quad \text{iii) } \int \eta\mu 2x \eta\mu 4x dx$$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\text{i) } \int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx \quad \text{ii) } \int \frac{3x+2}{x^2-3x+2} dx$$

$$\text{iii) } \int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2} dx \quad \text{iv) } \int \frac{2}{x^2-1} dx.$$

### 3.3 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

#### Γενικά

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι, όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση θέσης  $y = S(t)$  ενός κινητού, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού. Πολλές φορές, όμως, είναι γνωστή η ταχύτητα  $v = v(t)$  ή η επιτάχυνση  $a = a(t)$  του κινητού και ζητείται η θέση του. Για παράδειγμα:

— Αν ένα κινητό κινείται ευθυγράμμως με σταθερή ταχύτητα  $c$ , για να προσδιορίσουμε τη θέση του  $y = S(t)$ , αρκεί να λύσουμε ως προς  $y$  την εξίσωση

$$y' = c. \quad (1)$$

— Αν σε ένα σώμα μάζας  $m$  ασκείται δύναμη  $F = F(t)$ , τότε το σώμα κινείται με επιτάχυνση  $a = a(t)$  η οποία, σύμφωνα με το 2ο νόμο της μηχανικής, δίνεται από τον τύπο  $F = ma$  ή, ισοδύναμα,  $F = my''$ , όπου  $y = S(t)$  η συνάρτηση θέσης του σώματος. Επομένως, για να προσδιορίσουμε τη θέση  $y = S(t)$  του σώματος, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$my'' = F. \quad (2)$$

Εξισώσεις όπως οι (1) και (2) λέγονται **διαφορικές εξισώσεις**. Γενικά,

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

**Διαφορική εξίσωση** λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει τη μεταβλητή  $x$ , μια άγνωστη συνάρτηση  $y = f(x)$  και κάποιες από τις παραγώγους της  $y', y'', \dots$

Για παράδειγμα, οι εξισώσεις

$$y' = 2x, y' = 2y, y'' + y = 0$$

είναι διαφορικές εξισώσεις.

Η μεγαλύτερη από τις τάξεις των παραγώγων που εμφανίζονται στην εξίσωση ονομάζεται **τάξη** της διαφορικής εξίσωσης. Έτσι οι εξισώσεις  $y' = 2x$  και  $y' = 2y$  είναι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, ενώ η  $y'' + y = 0$  είναι δευτέρας τάξεως.

Κάθε συνάρτηση  $y = f(x)$  που επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση λέγεται **λύση** της εξίσωσης.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $y = x^2$  είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y' = 2x$ , αφού  $y' = (x^2)' = 2x$ .

Το σύνολο όλων των λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης λέγεται **γενική λύση** της εξίσωσης.

Για παράδειγμα, η γενική λύση της εξίσωσης  $y' = 2x$  είναι η  $y = x^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Συχνά ζητάμε εκείνη τη λύση  $y = f(x)$  της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί μια **αρχική συνθήκη**  $y_0 = f(x_0)$ . Για να βρούμε τη λύση αυτή, βρίσκουμε πρώτα τη γενική λύση της εξίσωσης και με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης προσδιορίζουμε τη ζητούμενη λύση.

Για παράδειγμα, η λύση  $y = f(x)$  της διαφορικής εξίσωσης  $y' = 2x$ , που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη  $f(1) = 2$ , είναι η συνάρτηση  $y = x^2 + 1$ , αφού από τη γενική λύση  $y = x^2 + c$ , για  $x = 1$  και  $y = 2$  είναι  $c = 1$ .

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με δυο ειδικές μορφές διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως:

- Τις εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές και
- Τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως.

### Διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

Έχει αποδειχτεί πειραματικά, ότι ο ρυθμός μεταβολής, ως προς το χρόνο, του πληθυσμού  $y = P(t)$  μιας κοινωνίας, η οποία δεν επηρεάζεται από εξωτερικούς παράγοντες, είναι ανάλογος του πληθυσμού. Δηλαδή, ισχύει

$$P'(t) = \alpha P(t),$$

όπου  $\alpha$  θετική σταθερά.

Αν ο αρχικός πληθυσμός της κοινωνίας είναι  $P_0$ , δηλαδή  $P(0) = P_0$ , για να βρούμε τον πληθυσμό  $P(t)$  ύστερα από χρόνο  $t$ , θα λύσουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση.

Επειδή  $y = P(t) > 0$ , η εξίσωση γράφεται

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \alpha,$$

οπότε ολοκληρώνοντας και τα δυο μέλη της, έχουμε διαδοχικά:

$$\int \frac{P'(t)}{P(t)} dt = \int \alpha dt$$

$$\ln P(t) = \alpha t + c_1.$$

$$P(t) = e^{\alpha t + c_1},$$

$$P(t) = ce^{\alpha t}, \text{ με } c = e^{c_1}.$$

Επειδή  $P(0) = P_0$ , είναι  $c = P_0$ , οπότε

$$P(t) = P_0 e^{\alpha t}.$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση λέγεται διαφορική εξίσωση με **χωριζόμενες μεταβλητές**. Γενικά,

### ΟΡΙΣΜΟΣ

**Διαφορική εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές** λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$a(y) \cdot y' = \beta(x) \quad (1),$$

όπου  $y = f(x)$  η άγνωστη συνάρτηση,  $a(y)$  συνάρτηση του  $y$  και  $\beta(x)$  συνάρτηση του  $x$ .

Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της ως προς  $x$ . Έχουμε

$$\int a(y)y'dx = \int \beta(x)dx.$$

Επειδή  $y = f(x)$ , είναι  $dy = f'(x)dx = y'dx$ , οπότε έχουμε

$$\int a(y)dy = \int \beta(x)dx. \quad (2)$$

Αν  $A(y)$  είναι μια παράγουσα  $a(y)$  και  $B(x)$  μια παράγουσα της  $\beta(x)$ , τότε η (2) γράφεται

$$A(y) = B(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Από την τελευταία εξίσωση προσδιορίζουμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

### ΣΧΟΛΙΟ

Η ισότητα (2) μας επιτρέπει να γράφουμε τη διαφορική εξίσωση (1) στην “άτυπη” μορφή της

$$a(y)dy = \beta(x)dx$$

και να ολοκληρώνουμε τα μέλη της, το μεν πρώτο μέλος της ως προς  $y$ , το δε δεύτερο μέλος της ως προς  $x$ .

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

i)  $2y - xy' = 0, \quad x \neq 0 \text{ και } y > 0$

ii)  $y' = 2xy^2, \quad y \neq 0$

iii)  $x + yy' = 0, \quad y > 0.$

## ΛΥΣΗ

i) Σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ , η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{y} y' = \frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x},$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{2}{x} dx.$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x} dx$$

$$\ln y = 2 \ln |x| + c_0 = \ln x^2 + c_0, \quad c_0 \in \mathbf{R}$$

$$y = e^{\ln x^2 + c_0} = e^{c_0} \cdot e^{\ln x^2} = cx^2, \quad c > 0.$$

Άρα, σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$  είναι  $y = cx^2$ , όπου  $c > 0$

ii) Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2x dx.$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$

Άρα,  $y = -\frac{1}{x^2 + c}$ , όπου  $c \in \mathbf{R}$  (Σχ. 2).

iii) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0$$

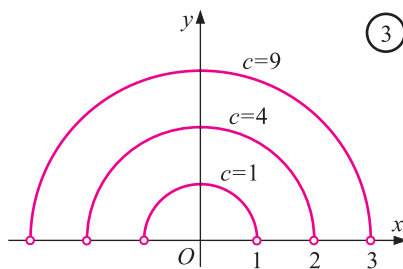
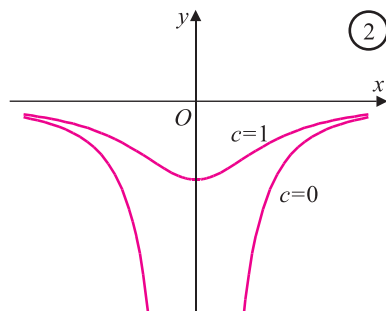
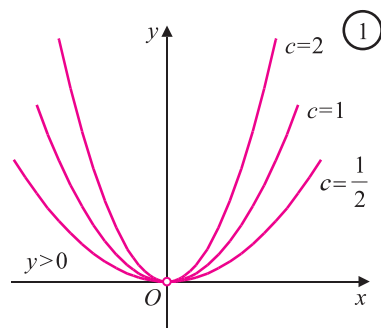
$$y dy = -x dx$$

$$\int y dy = -\int x dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$$x^2 + y^2 = c, \quad c > 0$$

Άρα,  $y = \sqrt{c - x^2}$ , όπου  $c > 0$  (Σχ. 3).

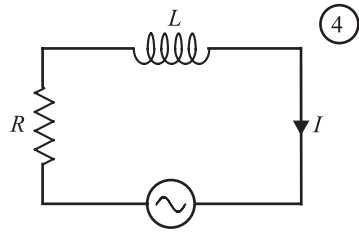


### Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι στο διπλανό κύκλωμα ισχύει ο κανόνας του Kirchhoff. Δηλαδή,

$$L \cdot \frac{dI(t)}{dt} + R \cdot I(t) = V(t). \quad (1)$$

Για να προσδιορίσουμε την ένταση,  $I(t)$ , του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, είναι ανάγκη να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση (1). Η εξίσωση αυτή λέγεται γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. Γενικά:



### ΟΡΙΣΜΟΣ

Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$y' + a(x)y = \beta(x),$$

όπου  $y = f(x)$  είναι η άγνωστη συνάρτηση και  $a(x), \beta(x)$  συναρτήσεις του  $x$ .

Για την επίλυση της εξίσωσης αυτής:

- Αναζητούμε μια παράγουσα  $A(x)$  της συνάρτησης  $a(x)$  και έπειτα
- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης με  $e^{A(x)}$ .

Έτσι, έχουμε διαδοχικά

$$y'e^{A(x)} + a(x)e^{A(x)}y = \beta(x)e^{A(x)}$$

$$y'e^{A(x)} + A'(x)e^{A(x)}y = \beta(x)e^{A(x)}$$

$$y'e^{A(x)} + (e^{A(x)})'y = \beta(x)e^{A(x)}$$

$$(ye^{A(x)})' = \beta(x)e^{A(x)}$$

$$\int (ye^{A(x)})' dx = \int \beta(x)e^{A(x)} dx$$

$$ye^{A(x)} = B(x) + c,$$

όπου  $B(x)$  μια παράγουσα της  $\beta(x)e^{A(x)}$ .

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

#### 1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2y = 2.$$

**ΛΥΣΗ**

Επειδή μια παράγουσα της  $a(x) = 2$  είναι η  $A(x) = 2x$ , πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της εξίσωσης με  $e^{2x}$ . Έτσι, έχουμε διαδοχικά

$$y'e^{2x} + 2e^{2x}y = 2e^{2x}$$

$$(ye^{2x})' = (e^{2x})'$$

$$ye^{2x} = e^{2x} + c$$

$$y = 1 + ce^{-2x}, c \in \mathbb{R}.$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

1. Να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις:

i)  $y' = 4 - xy^2, y > 0$

ii)  $y'y = x, y > 0$

iii)  $\frac{1}{xy} y' = 2$

iv)  $y' = e^{-y} \sin x.$

2. Να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις:

i)  $y' + 2y = 3$

ii)  $y' + 2y = e^{-x}$

iii)  $y' + y = 2x$

iv)  $y' + 2xy = x.$

3. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y' = 2x^2y^2, y < 0$ , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(0, -3)$ .

4. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y' = 2 - 3y$  που ικανοποιεί τη συνθήκη  $y(0) = 2/3$ .

5. Να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις:

i)  $y' + \frac{1}{\sin^2 x} y = \frac{1}{\sin^2 x}, \text{ αν } y(0) = 3$

ii)  $(x+1)y' + y = 1/x, \text{ αν } y(1) = 10.$



**Β' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος  $I$  σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα ικανοποιεί την εξίσωση  $\frac{dI}{dt} + I = \eta\mu t$ . Αν  $I(0) = 0$ , να βρείτε την ένταση  $I(t)$ .

2. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης  $ye^{y^2} y' = e^{2x}$ , η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(2, 2)$ .

3. Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση  $y' - \frac{1}{x}y = x$ ,  $x > 0$ .

4. Η κλίση της εφαπτομένης μιας γραμμής  $(C)$  με εξίσωση  $y = y(x)$ ,  $y > 0$  στο σημείο  $M(x, y)$  είναι ίση με  $xy$ . Να βρείτε την εξίσωση της  $(C)$ , αν είναι γνωστό ότι διέρχεται από το σημείο  $A(0, 1)$ .

5. Έστω  $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$  σταθερές, με  $\alpha > \lambda > 0$ .

i) Να λύσετε την εξίσωση  $y' + \alpha y = \beta e^{-\lambda t}$ .

ii) Αν  $y = y(t)$  είναι μια λύση της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ισχύει  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ .

6. Έχει αποδειχτεί πειραματικά ότι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας  $\theta$  ενός σώματος, όταν αυτό βρεθεί σε περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας  $T$  με  $\theta > T$ , είναι

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T), \quad k > 0.$$

Να βρείτε τη θερμοκρασία  $\theta(t)$ , αν  $\theta(0) = \theta_0$ .

7. Ο πληθυσμός  $P = P(t)$  μιας χώρας μεταναστεύει με σταθερό ρυθμό  $m > 0$ . Δίνεται ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού  $P$ , αν δεν υπήρχε η μετανάστευση, θα ήταν ανάλογος του  $P$ .

i) Να δικαιολογήσετε ότι ο πληθυσμός  $P$  ικανοποιεί την εξίσωση  $P' = kP - m$ ,  $k > 0$  σταθερά.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση  $P = P(t)$ , αν  $P(0) = P_0$ .

iii) Να αποδείξετε ότι:

— Αν  $m < kP_0$ , τότε ο πληθυσμός αυξάνεται.

— Αν  $\nu m > kP_0$ , τότε ο πληθυσμός μειώνεται.

— Αν  $m = kP_0$ , τότε ο πληθυσμός παραμένει σταθερός.

8. Έστω  $y = y(t)$  το ύψος και  $V = V(t)$  ο όγκος του νερού μιας δεξαμενής τη χρονική στιγμή  $t$ . Η δεξαμενή αδειάζει από μια κυκλική οπή εμβαδού  $a$  που βρίσκεται στον πυθμένα της. Σύμφωνα με το νόμο του Torricelli ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του νερού είναι

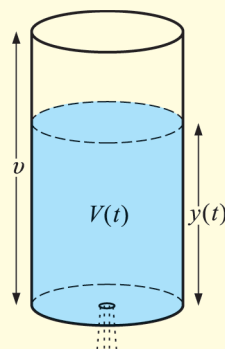
$$\frac{dV}{dt} = -\alpha\sqrt{2gy}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2.$$

- i) Αν η δεξαμενή είναι κυλινδρική με ύψος 3,6 m, ακτίνα 1 m και η ακτίνα της οπής είναι 0,1 m, να αποδείξετε ότι το  $y$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$y' = -\frac{\sqrt{5}}{50}\sqrt{y}$$

- ii) Να βρείτε το ύψος  $y(t)$ , αν είναι γνωστό ότι τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η δεξαμενή ήταν γεμάτη.

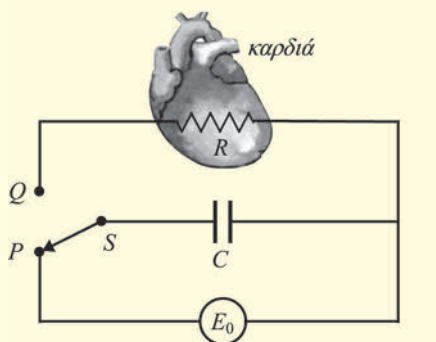
- iii) Πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να αδειάσει τελείως η δεξαμενή; (Δίνεται ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι  $V = \pi r^2 \nu$ ).



9. Ένας βηματοδότης αποτελείται από μια μπαταρία και έναν πυκνωτή, ενώ η καρδιά παίζει το ρόλο της αντίστασης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν ο διακόπτης  $S$  βρίσκεται στη θέση  $P$ , ο πυκνωτής φορτίζεται ενώ, όταν βρίσκεται στη θέση  $Q$ , ο πυκνωτής εκφορτίζεται και προκαλεί ηλεκτρικό ερέθισμα στην καρδιά. Κατά τη διάρκεια αυτή στην καρδιά εφαρμόζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη  $E$  που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E, \quad t_1 < t < t_2,$$

όπου  $R, C$  σταθερές. Να βρείτε την  $E(t)$ , αν  $E(t_1) = E_0$ .



10. Σύμφωνα με τον κανόνα του Kirchhoff για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος ισχύει

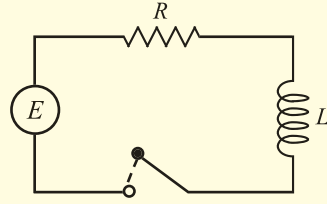
$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t).$$

- i) Αν  $R=12 \Omega$ ,  $L=4 \text{ H}$ ,  $E=60 \text{ V}$ ,

α) να βρείτε την ένταση  $I(t)$  του ρεύματος,  $t \text{ sec}$  μετά το κλείσιμο του κυκλώματος.

β) να βρείτε το  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)$ . Τι συμπεραίνετε;

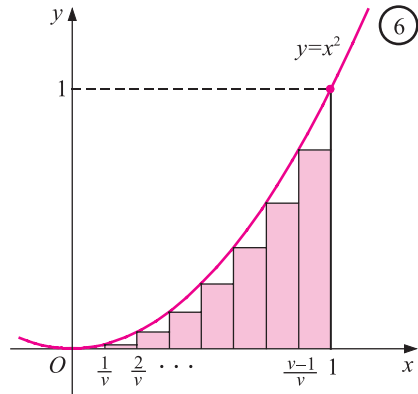
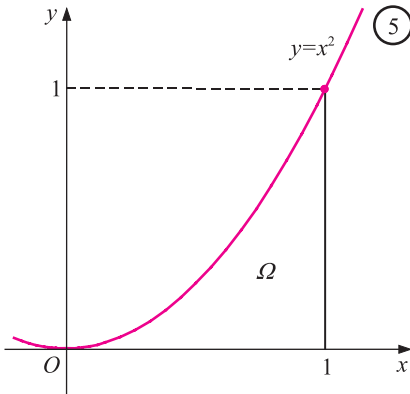
- ii) Αν στο κύκλωμα αντί για μπαταρία που δίνει σταθερή ηλεκτρεγερτική δύναμη  $E$  χρησιμοποιήσουμε μια γεννήτρια που δίνει  $E(t) = 60\eta\mu 3t$ , να βρείτε την ένταση  $I(t)$ .



### 3 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

#### Εμβαδόν παραβολικού χωρίου

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$  (Παραβολικό χωρίο Σχ. 5).



Μια μέθοδος να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής:

Χωρίζουμε το διάστημα  $[0,1]$  σε  $v$  ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους  $\Delta x = \frac{1}{v}$ , με άκρα τα σημεία:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{v}, \quad x_2 = \frac{2}{v}, \quad \dots, \quad x_{v-1} = \frac{v-1}{v}, \quad x_v = \frac{v}{v} = 1.$$

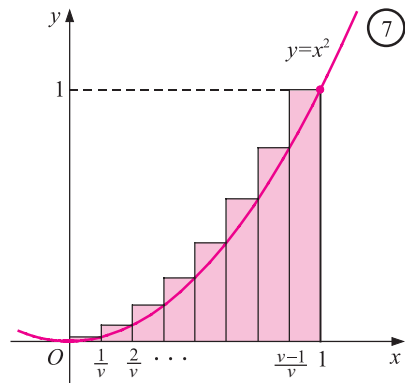
● Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της  $f$  σε καθένα από αυτά. (Σχ. 6). Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα,  $\varepsilon_v$ , των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= f(0) \frac{1}{v} + f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v-1}{v}\right) \frac{1}{v} \\ &= \frac{1}{v} \left[ 0^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v-1}{v}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{v^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2] \\ &= \frac{1}{v^3} \frac{(v-1) \cdot v(2v-1)}{6} = \frac{2v^2 - 3v + 1}{6v^2}. \end{aligned}$$

● Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της  $f$  σε καθένα απ' αυτά (Σχ. 7), τότε το άθροισμα

$$E_v = f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right) \frac{1}{v}$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Είναι όμως,



$$E_v = f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right) \cdot \frac{1}{v}$$

$$= \frac{1}{v} \left[ \left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v}{v}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{v^3} (1^2 + 2^2 + \dots + v^2) = \frac{1}{v^3} \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} = \frac{2v^2 + 3v + 1}{6v^2}.$$

Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν  $E$  βρίσκεται μεταξύ των  $\varepsilon_\nu$  και  $E_\nu$ . Δηλαδή ισχύει  $\varepsilon_\nu \leq E \leq E_\nu$ , οπότε

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu \leq E \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} E_\nu.$$

Επειδή  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} E_\nu = \frac{1}{3}$ , έχουμε  $E = \frac{1}{3}$ .

● Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα  $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots, \nu$  και ύψη την τιμή της συνάρτησης σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο  $\xi_\kappa$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots, 3, \dots, \nu$ , καθενός διαστήματος, (Σχ. 8), τότε το άθροισμα

$$S_\nu = \frac{1}{\nu} f(\xi_1) + \frac{1}{\nu} f(\xi_2) + \dots + \frac{1}{\nu} f(\xi_\nu)$$

των εμβαδών των ορθογώνιων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Επειδή  $f(x_{\kappa-1}) \leq f(\xi_\kappa) \leq f(x_\kappa)$  για  $\kappa = 1, 2, \dots, \nu$ , θα είναι

$$\frac{1}{\nu} f(x_{\kappa-1}) \leq \frac{1}{\nu} f(\xi_\kappa) \leq \frac{1}{\nu} f(x_\kappa),$$

οπότε θα ισχύει

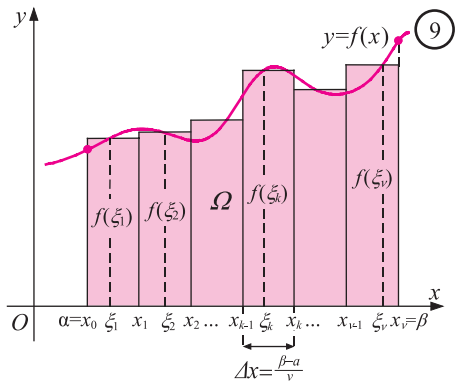
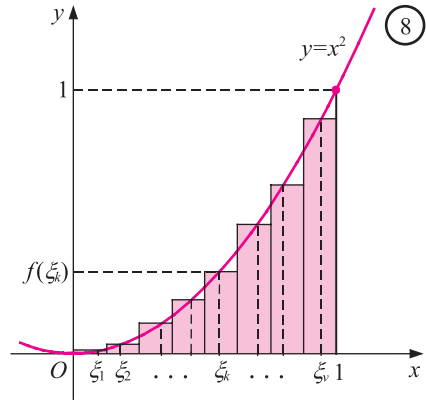
$$\varepsilon_\nu \leq S_\nu \leq E_\nu.$$

Είναι όμως,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} E_\nu = E$ . Άρα θα ισχύει  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_\nu = E$ .

### Ορισμός εμβαδού

Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , με  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και  $\Omega$  το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ .

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  (Σχ. 9) εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Δηλαδή:



• Χωρίζουμε το διάστημα  $[a, \beta]$  σε  $\nu$  ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους  $\Delta x = \frac{\beta - a}{\nu}$ , με τα σημεία  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_\nu = \beta$ .

• Σε κάθε υποδιάστημα  $[x_{k-1}, x_k]$  επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο  $\xi_k$  και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση  $\Delta x$  και ύψη τα  $f(\xi_k)$ . Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογώνιων αυτών είναι

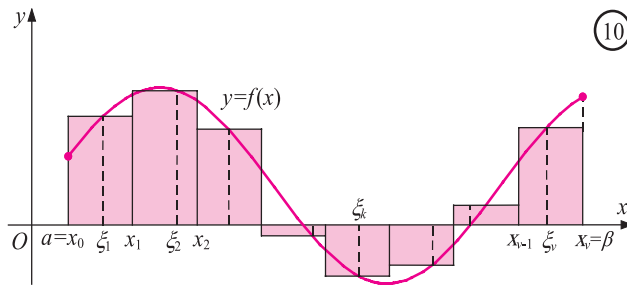
$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_\nu)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_\nu)]\Delta x.$$

• Υπολογίζουμε το  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} S_\nu$ .

Αποδεικνύεται ότι το  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} S_\nu$  υπάρχει στο  $\mathbf{R}$  και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων  $\xi_k$ . Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου  $\Omega$  και συμβολίζεται με  $E(\Omega)$ . Είναι φανερό ότι  $E(\Omega) \geq 0$ .

### Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[a, \beta]$ . Με τα σημεία  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_\nu = \beta$  χωρίζουμε το διάστημα  $[a, \beta]$  σε  $\nu$  ισομήκη υποδιαστήματα μήκους  $\Delta x = \frac{\beta - a}{\nu}$ .



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , για κάθε  $k \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ , και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x \quad (1).$$

(1) Το άθροισμα αυτό ονομάζεται ένα άθροισμα RIEMANN.

Αποδεικνύεται ότι,

“Το όριο του αθροίσματος  $S_n$ , δηλαδή το  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x \right)$  (1) υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων  $\xi_k$ ”.

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης  $f$  από το  $\alpha$  στο  $\beta$ , συμβολίζεται με  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της  $f$  από το  $\alpha$  στο  $\beta$ ”. Δηλαδή,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x \right)$$

Το σύμβολο  $\int$  οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος  $S$  της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Η έννοια “όρια” εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου. Στην έκφραση  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  το γράμμα  $x$  είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ ,  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$  συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός, σε αντίθεση με το  $\int f(x) dx$  που είναι ένα σύνολο συναρτήσεων. Είναι, όμως, χρήσιμο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι  $\alpha > \beta$  ή  $\alpha = \beta$ , ως εξής:

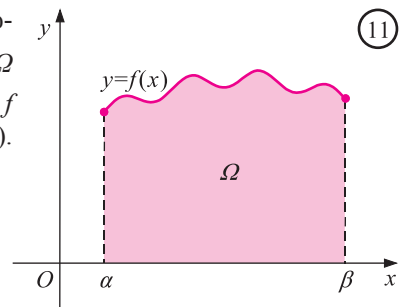
- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε το ολοκλήρωμα  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  δίνει το εμβαδόν  $E(\Omega)$  του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  τον άξονα  $x$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$  (Σχ. 11). Δηλαδή,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = E(\Omega).$$

Επομένως,



$$\text{Αν } f(x) \geq 0, \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0.$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι  $\int_{\alpha}^{\beta} c \, dx = c(\beta - \alpha)$ , για οποιοδήποτε  $c \in \mathbb{R}$ .

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αν  $\alpha = \beta$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\alpha} c \, dx = 0 = c(\alpha - \alpha) = c(\beta - \alpha)$ .

ii) Αν  $\alpha < \beta$ , τότε, επειδή η  $f(x) = c$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , έχουμε

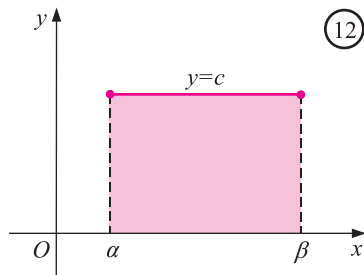
$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} c \, dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} [(f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x)] \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\beta - \alpha}{v} [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_v)] \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{\beta - \alpha}{v} (c + c + \dots + c) \right) \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{\beta - \alpha}{v} \cdot v c \right) = c(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

iii) Αν  $\alpha > \beta$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} c \, dx = -\int_{\beta}^{\alpha} c \, dx = -c(\alpha - \beta) = c(\beta - \alpha).$$

### ΣΧΟΛΙΟ

Αν  $c > 0$ , τότε το  $\int_{\alpha}^{\beta} c \, dx$  εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση  $\beta - \alpha$  και ύψος  $c$  (Σχ. 12).



### Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα.



**ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο**

Έστω  $f, g$  συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, \beta]$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Τότε ισχύουν

- $\int_a^\beta \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^\beta f(x) dx$
- $\int_a^\beta [f(x) + g(x)] dx = \int_a^\beta f(x) dx + \int_a^\beta g(x) dx$

και γενικά

- $\int_a^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^\beta f(x) dx + \mu \int_a^\beta g(x) dx$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο**

Αν η  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx$$

Για παράδειγμα, αν  $\int_0^3 f(x) dx = 3$  και  $\int_0^4 f(x) dx = 7$ , τότε

$$\int_3^4 f(x) dx = \int_3^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = -\int_0^3 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = -3 + 7 = 4.$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ**

Αν  $f(x) \geq 0$  και  $\alpha < \gamma < \beta$  (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:

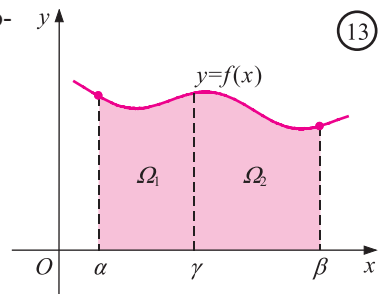
$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

αφού

$$E(\Omega_1) = \int_a^\gamma f(x) dx, \quad E(\Omega_2) = \int_\gamma^\beta f(x) dx$$

και

$$E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) dx.$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο**

Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$  και η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_a^\beta f(x) dx > 0.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν  $\int_1^4 f(x)dx = 9$ ,  $\int_3^4 f(x)dx = 11$  και  $\int_1^8 f(x)dx = 13$ , να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i )  $\int_4^3 f(x)dx$       i i)  $\int_4^8 f(x)dx$

iii)  $\int_1^3 f(x)dx$       i γ)  $\int_3^8 f(x)dx$ .

2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^e \ln t dt = \int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt.$$

3. Να υπολογίσετε το  $\kappa$  έτσι, ώστε

$$\int_1^{\kappa} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} dx - \int_{\kappa}^1 \frac{5}{x^2 + 1} dx = 3.$$

4. Αν  $\int_1^3 f(x)dx = 5$  και  $\int_1^3 g(x)dx = -2$  να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i)  $\int_1^3 (2f(x) - 6g(x))dx$

ii)  $\int_3^1 (2f(x) - g(x))dx$ .

### 3.5 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος  $\int_a^b f(x)dx$  κατευθείαν από τον ορισμό είναι συνήθως μία δύσκολη και πολύ κοπιαστική διαδικασία. Στην παράγραφο αυτή θα αναζητήσουμε τρόπο υπολογισμού ολοκληρωμάτων χωρίς τη χρήση του ορισμού. Σ' αυτό θα μας βοηθήσει το γνωστό, ως *θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού*. Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού στηρίζεται στο επόμενο θεώρημα, το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη παράγουσας μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Αν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $a$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in \Delta,$$

είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ . Δηλαδή ισχύει:

$$\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Για παράδειγμα

$$\left( \int_0^x \eta \mu^2 t dt \right)' = \eta \mu^2 x \quad \text{και} \quad \left( \int_1^x \ln t dt \right)' = \ln x.$$

**ΣΧΟΛΙΑ**

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (Σχ. 14) ως εξής:

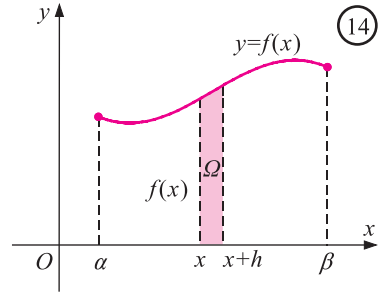
$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega \\ &\approx f(x) \cdot h, \text{ για μικρά } h > 0. \end{aligned}$$

Άρα, για μικρά  $h > 0$  είναι

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x),$$

οπότε

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$



- Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα παραγωγίσις σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\left( \int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Για παράδειγμα,

$$\left( \int_1^{x^3} \ln t dt \right)' = (\ln x^3) \cdot (x^3)' = (3 \ln x) 3x^2 = 9x^2 \ln x$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)**

Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[a, \beta]$ , τότε

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση  $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ . Επειδή και η  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , θα υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \quad (1)$$

Από την (1), για  $x = \alpha$ , έχουμε  $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$ , οπότε  $c = G(\alpha)$ . Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για  $x = \beta$ , έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha). \blacksquare$$

Πολλές φορές, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις μας, συμβολίζουμε τη διαφορά  $G(\beta) - G(\alpha)$  με  $[G(x)]_{\alpha}^{\beta}$ , οπότε η ισότητα του παραπάνω θεωρήματος γράφεται

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [G(x)]_{\alpha}^{\beta} = \left[ \int f(x)dx \right]_{\alpha}^{\beta}.$$

Για παράδειγμα,

$$\int_1^3 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$$\int_0^{\pi} \eta \mu x dx = [-\sigma \nu x]_0^{\pi} = -\sigma \nu \pi + \sigma \nu 0 = 2$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

**1** Δίνεται η συνάρτηση  $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt$

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $F$ .

ii) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η  $F$ .

### ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση  $f(t) = \sqrt{t^2 - 1}$  έχει πεδίο ορισμού το σύνολο  
 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ .

Για να ορίζεται η  $F$ , πρέπει τα άκρα  $1, x$  του ολοκληρώματος να ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της  $f$ . Άρα, πρέπει  $x \in [1, +\infty)$ , οπότε το πεδίο ορισμού της  $F$  είναι το σύνολο  $[1, +\infty)$ .

ii) Για  $x \in [1, +\infty)$  έχουμε:

$$F'(x) = \left( \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt \right)' = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Επειδή η  $F$  είναι συνεχής στο  $[1, +\infty)$  και ισχύει  $F'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ , η συνάρτηση  $F$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ , οπότε παρουσιάζει ελάχιστο το  $F(1) = 0$ .

### Μέθοδοι ολοκλήρωσης

● Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx,$$

όπου  $f', g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, \beta]$ .

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα  $I = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} x(\eta\mu x)' dx = [x\eta\mu x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (x)'\eta\mu x dx \\ &= [x\eta\mu x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \eta\mu x dx \\ &= [x\eta\mu x]_0^{\pi/2} + [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}. \end{aligned}$$

● Ο τύπος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου  $f, g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις,  $u = g(x)$ ,  $du = g'(x)dx$  και  $u_1 = g(\alpha)$ ,  $u_2 = g(\beta)$ .

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ .

Έχουμε:

$$I = \int_1^e \ln x (\ln x)' dx$$

Αν θέσουμε  $u = \ln x$ , τότε  $du = (\ln x)' dx$ ,  $u_1 = \ln 1 = 0$  και  $u_2 = \ln e = 1$ . Επομένως,

$$I = \int_0^1 u du = \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\text{i) } \int_1^2 \frac{x^2 + x - 1}{x} dx \quad \text{ii) } \int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{iii) } \int_{-1}^5 |x-2| dx.$$

### ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \text{i) Έχουμε } \int_1^2 \frac{x^2 + x - 1}{x} dx &= \int_1^2 \frac{x^2}{x} dx + \int_1^2 \frac{x}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^2 x dx + \int_1^2 1 dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^2 + [x]_1^2 - [\ln x]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = \frac{5}{2} - \ln 2. \end{aligned}$$

$$\text{ii) Έχουμε } \int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 x^{1/2} dx + \int_1^4 x^{-1/2} dx$$

$$= \left[ \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 + \left[ \frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_1^4 = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_1^4 + [2\sqrt{x}]_1^4 = \frac{20}{3}.$$

iii) Επειδή  $|x-2| = \begin{cases} 2-x, & x \leq 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$ , έχουμε

$$\int_{-1}^5 |x-2| dx = \int_{-1}^2 (2-x) dx + \int_2^5 (x-2) dx = \left[ 2x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 + \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^5 = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i)  $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$

i i)  $\int_1^e \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^3}} dx$

iii)  $\int_0^{\pi/2} (\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x) dx$

ii)  $\int_1^2 \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 dx.$

2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2 \frac{x^3 + 7x}{x^2 + 5} dx + 2 \int_2^1 \frac{x}{x^2 + 5} dx = \frac{3}{2}.$$

3. Να αποδείξετε ότι

$$2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) f'(x) dx = (f(\beta))^2 - (f(\alpha))^2.$$

4. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(0,0)$  και  $B(1,1)$ , να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος  $\int_0^1 f'(x) dx$ , εφόσον η  $f'$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$ .

5. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i)  $F(x) = \int_1^{\sigma\upsilon\nu x} \sqrt{1-t^2} dt$

ii)  $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\theta} d\theta$

6. i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

ii) Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(1 + \sqrt{2})$ .

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν  $\int_0^x t g(t) dt = x^4 + x^6$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $g(1)$ .

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \int_x^{x+1} e^{\sin 2\pi t} dt$  είναι σταθερή.

3. Αν  $f(x) = \int_0^{x-2} \frac{t}{e^t} dt$ , να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της  $f$ .

4. Αν  $F(x) = \int_0^x x f(t) dt$ , να βρείτε την  $F'(x)$ .

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$  είναι σταθερή στο  $(0, +\infty)$  και να βρείτε τον τύπο της.

6. Να βρείτε το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{5+t^2} dt$ .

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\text{i) } \int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx \quad \text{ii) } \int_0^{\pi/2} [\eta\mu(\sin x + x) \eta\mu x - \eta\mu(\sin x + x)] dx.$$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\text{i) } \int_0^2 (x^2 - |x-1|) dx \quad \text{ii) } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \text{ αν } f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \eta\mu x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{iii) } \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx.$$

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\text{i) } \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad \text{ii) } \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$\text{iii) } \int_0^1 x \ln(9 + x^2) dx \quad \text{iv) } \int_0^{\pi/2} e^x \sin 2x dx.$$



10. Αν  $I = \int_0^{\pi/2} x \eta \mu^2 x dx$ ,  $J = \int_0^{\pi/2} x \sigma \upsilon \nu^2 x dx$ , να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα  
 $I+J$ ,  $I-J$ ,  $I$ ,  $J$ .

11. Έστω μια συνάρτηση  $f$  με  $f''$  συνεχή και για την οποία ισχύει

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 2.$$

Αν  $f(\pi) = 1$ , με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το  $f(0)$ .

12. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$ , με  $f''$ ,  $g''$  συνεχείς στο  $[a, \beta]$ . Αν  $f(a) = g(a) = 0$  και  $f'(\beta) = g'(\beta)$ , να αποδείξετε ότι

$$I = \int_a^{\beta} (f(x)g''(x) - f''(x)g(x)) dx = g'(\beta)(f(\beta) - g(\beta)).$$

### 3.6 ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Με τη βοήθεια του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού μπορούμε, τώρα, να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό ως *Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού*.

#### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ , τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε

$$\int_a^{\beta} f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη στο  $[a, \beta]$  και ισχύει  $F'(x) = f(x)$ . Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}. \quad (1)$$

Είναι όμως,

$$F'(\xi) = f(\xi), F(\beta) = \int_a^{\beta} f(t) dt \text{ και } F(\alpha) = \int_a^{\alpha} f(t) dt = 0.$$

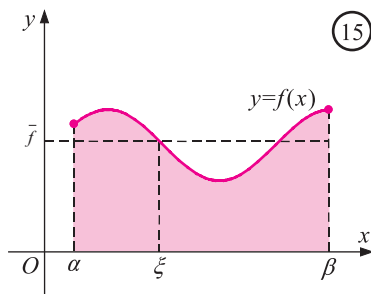
Επομένως, η ισότητα (1) γράφεται  $f(\xi) = \frac{\int_a^\beta f(t)dt}{\beta - \alpha}$  ή, ισοδύναμα,  

$$\int_a^\beta f(t)dt = f(\xi)(\beta - \alpha). \blacksquare$$

### ΣΧΟΛΙΟ

Ο αριθμός  $f(\xi) = \frac{\int_a^\beta f(x)dx}{\beta - \alpha}$  λέγεται **μέση τιμή** της συνάρτησης  $f$  στο  $[a, \beta]$  και συμβολίζεται με  $\bar{f}$ .

Γεωμετρικά, η μέση τιμή  $\bar{f}$  μιας μη αρνητικής συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[a, \beta]$  παριστάνει το ύψος του ορθογωνίου που έχει βάση το  $[a, \beta]$  και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'$  και τις ευθείες  $x = a$  και  $x = \beta$  (Σχ. 15).



### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ . Να βρεθεί  $\xi \in (0, 9)$  έτσι ώστε  $f(\xi) = \bar{f}$ .

#### ΛΥΣΗ

$$\text{Έχουμε } \bar{f} = \frac{\int_0^9 \sqrt{x} dx}{9} = \frac{\left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^9}{9} = \frac{18}{9} = 2.$$

Επομένως, αρκεί να βρεθεί  $\xi \in (0, 9)$  έτσι, ώστε  $f(\xi) = 2$ . Έχουμε

$$f(\xi) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\xi} = 2 \Leftrightarrow \xi = 4.$$

Άρα, το ζητούμενο  $\xi$  είναι το 4.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

#### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

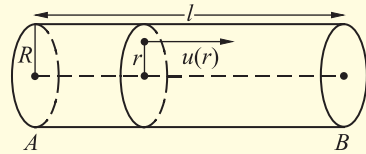
1. Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{f}$  της συνεχούς συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0, 1]$ , αν δίνεται ότι  $\int_0^1 (f(x) - 1) dx = 0$ .

2. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ ,  $\kappa$  σταθερά και  $\int_a^\beta (f(x) - \kappa) dx = 0$ , να αποδείξετε ότι η μέση τιμή της  $f$  στο  $[a, \beta]$  είναι  $\kappa$ .
3. Να βρεθεί η μέση τιμή της μεταβλητής  $x$  στο διάστημα  $[a, \beta]$ .

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ , ορισμένες σ' ένα διάστημα  $[a, \beta]$ ,  $a > 0$ . Να υπολογίσετε τις  $\bar{f}$ ,  $\bar{g}$  και να αποδείξετε ότι  $\bar{f} \cdot \bar{g} > 1$ .

2. Η ταχύτητα  $v$  του αίματος σ' ένα αγγείο ακτίνας  $R$  και μήκους  $\ell$ , σε απόσταση  $r$  από τον κεντρικό άξονα του αγγείου είναι  $v(r) = \frac{P}{4n\ell}(R^2 - r^2)$ , όπου  $P$  η διαφορά



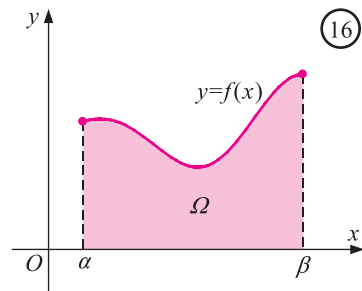
πίεσεως μεταξύ των άκρων  $A, B$  του αγγείου και  $n$  το ιξώδες του αίματος (σταθερά).

- α) Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του αίματος, όταν  $r \in [0, R]$ .
- β) Να βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα και να τη συγκρίνετε με τη μέση ταχύτητα
3. Έστω  $f$  μια παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$  συνάρτηση, με  $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$ .  
Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  έχει μια, τουλάχιστον, οριζόντια εφαπτομένη.

## 3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

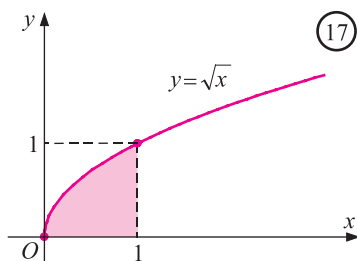
- Στην παράγραφο 4.4 είδαμε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$  και  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = a$ ,  $x = \beta$  και τον άξονα  $x$ ' $x$  (Σχ. 16) είναι

$$E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) dx$$

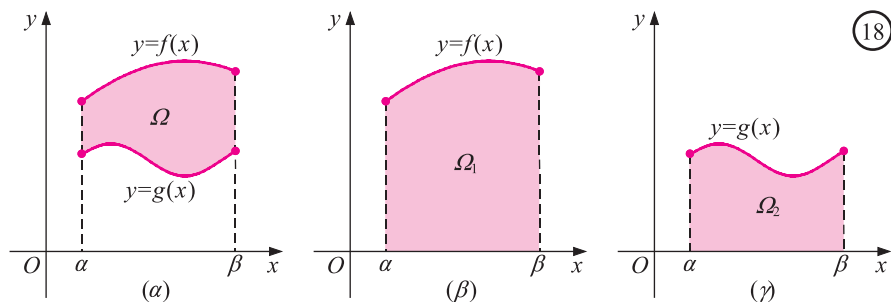


Για παράδειγμα, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f(x) = \sqrt{x}$ , τον άξονα  $x$ 's και τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$  (Σχ. 17) είναι ίσο με

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{1/2} dx = \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$



• Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις  $f$  και  $g$ , συνεχείς στο διάστημα  $[a, \beta]$  με  $f(x) \geq g(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$  και  $\Omega$  το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $f$ ,  $g$  και τις ευθείες  $x = a$  και  $x = \beta$  (Σχ. 18a).



Παρατηρούμε ότι

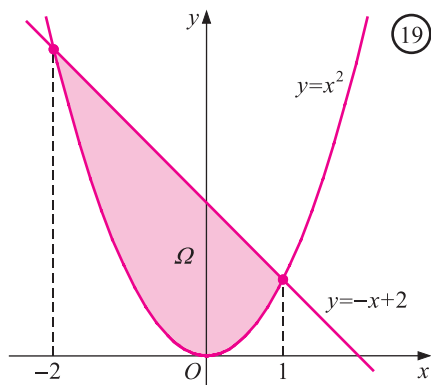
$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx.$$

Επομένως,

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx \quad (1)$$

Για παράδειγμα, το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = -x + 2$  και  $g(x) = x^2$  (Σχ. 19) είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{-2}^1 [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_{-2}^1 (-x + 2 - x^2) dx \\ &= \left[ -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

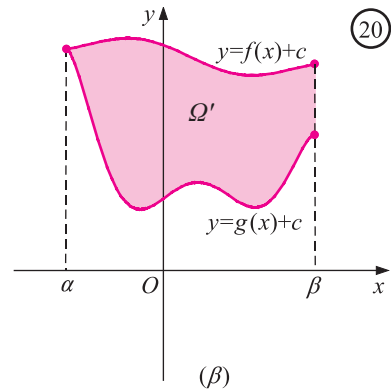
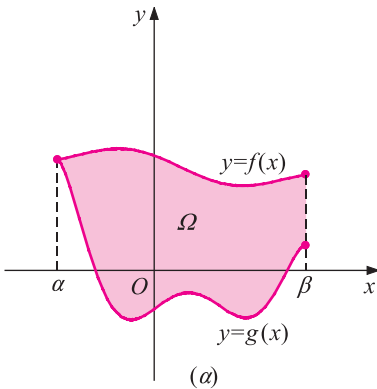


• Ο τύπος (1) βρέθηκε με την προϋπόθεση ότι:

(i)  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και

(ii) οι  $f, g$  είναι μη αρνητικές στο  $[\alpha, \beta]$ .

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι ο τύπος (1) ισχύει και χωρίς την υπόθεση (ii). Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $[\alpha, \beta]$ , θα υπάρχει αριθμός  $c \in \mathbb{R}$  τέτοιος ώστε  $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ . Είναι φανερό ότι το χωρίο  $\Omega$  (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο  $\Omega'$  (Σχ. 20β).



Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

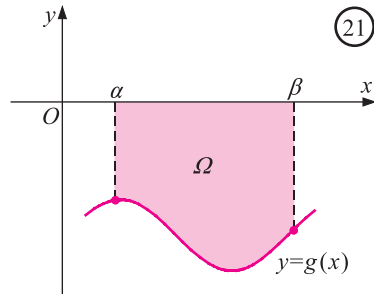
$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx.$$

Άρα,

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$$

• Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τον άξονα  $x'x$ , τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $g$ , με  $g(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$  (Σχ. 21). Πράγματι, επειδή ο άξονας  $x'x$  είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [-g(x)] dx = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx. \end{aligned}$$

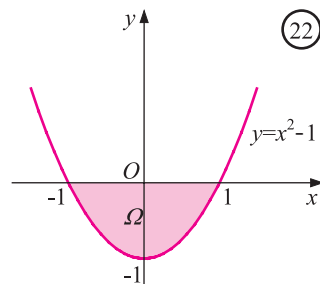


Επομένως, αν για μια συνάρτηση  $g$  ισχύει  $g(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε

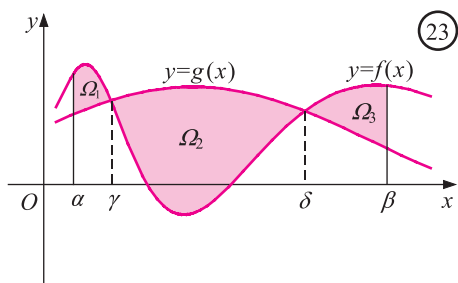
$$E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Για παράδειγμα, το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $g(x) = x^2 - 1$  και τον άξονα  $x$ 's (Σχ. 22) είναι ίσο με

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= -\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx \\ &= \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



• Όταν η διαφορά  $f(x) - g(x)$  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $[a, \beta]$ , όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  και τις ευθείες  $x = a$  και  $x = \beta$  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων  $\Omega_1, \Omega_2$  και  $\Omega_3$ . Δηλαδή,



$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3)$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^\gamma (f(x) - g(x)) dx + \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x)) dx + \int_\delta^\beta (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_a^\gamma |f(x) - g(x)| dx + \int_\gamma^\delta |f(x) - g(x)| dx + \int_\delta^\beta |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$

Επομένως,

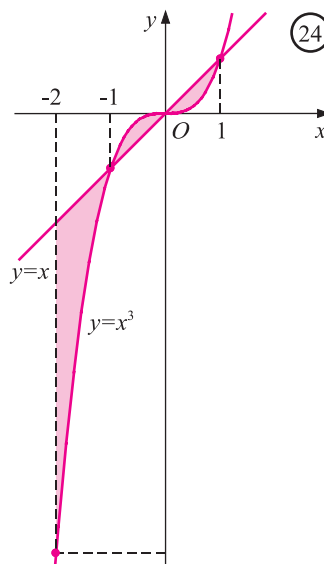
$$E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = x$  και τις ευθείες  $x = -2$ ,  $x = 1$ . (Σχ. 24).

Αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της διαφοράς  $f(x) - g(x)$  στο διάστημα  $[-2, 1]$ .

Επειδή

$$f(x) - g(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1),$$



έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

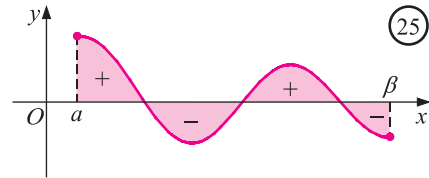
$x$	$\frac{2}{3}$	$-1$	$0$	$1$
$f(x) - g(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$

Λαμβάνοντας, τώρα, υπόψη τον παραπάνω πίνακα, έχουμε

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{-2}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^{-1} (g(x) - f(x)) dx + \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (x - x^3) dx + \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^{-1} + \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

### ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με τα παραπάνω το  $\int_a^\beta f(x) dx$  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x$  ή μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x$  (Σχ. 25)



### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \eta\mu x$ ,  $g(x) = \sigma\upsilon\eta x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 2\pi$ .

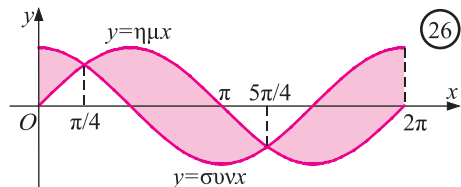
#### ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της διαφοράς  $f(x) - g(x)$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ . Στο διάστημα αυτό έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\eta x$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = \frac{5\pi}{4}$$



Επομένως, για το πρόσημο της διαφοράς  $f(x) - g(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$  έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$2\pi$	
$f(x) - g(x)$	-	0	+	0	-

Λαμβάνοντας, τώρα, υπόψη τον πίνακα αυτόν, έχουμε

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx \\ &= [\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x]_0^{\pi/4} + [-\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x]_{\pi/4}^{5\pi/4} + [\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x]_{5\pi/4}^{2\pi} \\ &= \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**2.** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f(x) = \ln x$ , τον άξονα των  $x$  και την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(e, 1)$ .

### ΛΥΣΗ

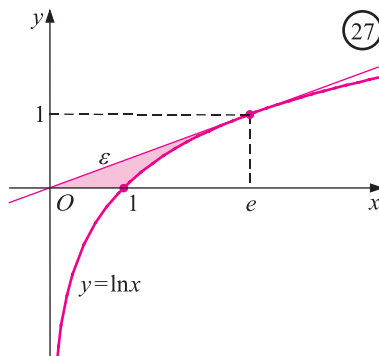
Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(e, 1)$  είναι

$$\varepsilon: y - 1 = f'(e)(x - e). \quad (1)$$

Επειδή  $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ , έχουμε  $f'(e) = \frac{1}{e}$ .

Επομένως, η (1) γράφεται:

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}x.$$



Το ζητούμενο εμβαδόν  $E$  είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου μείον το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x$ ' $x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = e$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} E &= \int_0^e \frac{1}{e} x dx - \int_1^e \ln x dx = \left[ \frac{1}{e} \frac{x^2}{2} \right]_0^e - \left( [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx \right) \\ &= \left[ \frac{1}{e} \frac{x^2}{2} \right]_0^e - [x \ln x]_1^e + [x]_1^e = \frac{e-2}{2}. \end{aligned}$$



**3.** Να υπολογιστεί το εμβαδόν  $E$  του κυκλικού δίσκου  $x^2 + y^2 = \rho^2$ .

### ΛΥΣΗ

Το ημκύκλιο  $C_1$  είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}, \quad x \in [-\rho, \rho],$$

αφού για  $y > 0$  είναι

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{\rho^2 - x^2}.$$

Αν  $E_1$  είναι το εμβαδόν του ημκυκλίου, τότε  $E = 2E_1$ . Επειδή  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [-\rho, \rho]$ , έχουμε

$$E_1 = \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2 - x^2} dx. \quad (1)$$

Επειδή  $-\rho \leq x \leq \rho$ , έχουμε  $-1 \leq \frac{x}{\rho} \leq 1$ . Επομένως, υπάρχει  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  τέτοιο, ώστε

$$\frac{x}{\rho} = \eta\mu\theta. \quad (1)$$

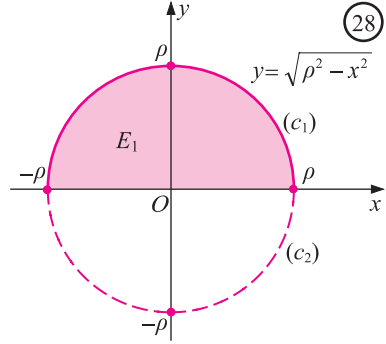
Έτσι, έχουμε  $x = \rho\eta\mu\theta$ ,  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , οπότε  $dx = \rho\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$ . Επιπλέον, για  $x = -\rho$  είναι

$\theta = -\frac{\pi}{2}$  και για  $x = \rho$  είναι  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\rho^2 - \rho^2\eta\mu^2\theta} \cdot \rho\sigma\upsilon\nu\theta d\theta = \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta d\theta \\ &= \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta d\theta = \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta \quad (\text{Επειδή } \sigma\upsilon\nu\theta > 0) \\ &= \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta}{2} d\theta = \rho^2 \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\eta\mu 2\theta}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi\rho^2}{2}. \end{aligned}$$

Άρα  $E = 2E_1 = \pi\rho^2$ .

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το εμβαδόν της έλλειψης  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  είναι ίσο με  $\pi\alpha\beta$ .



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ , τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 2$  και του άξονα των  $x$ .
2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες που δίνονται κάθε φορά:
  - i)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$
  - ii)  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ .
3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - 3x$  και τον άξονα των  $x$ .
4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = x^3$  και  $g(x) = 2x - x^2$ .
5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 4 - x^2$  και την ευθεία  $x - y - 2 = 0$ .

### Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

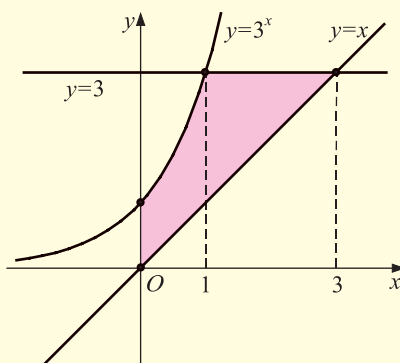
1. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 3x^2$ 
  - i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $A(1, 3)$ .
  - ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την εφαπτομένη της στο  $A$  και τον άξονα των  $x$ .
2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & , x < 1 \\ 2\sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$ , τις ευθείες  $x = -1$ ,  $x = 2$  και τον άξονα των  $x$ .
3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 & , x < 2 \\ -2x + 5 & , x \geq 2 \end{cases}$  και τον άξονα των  $x$ .

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

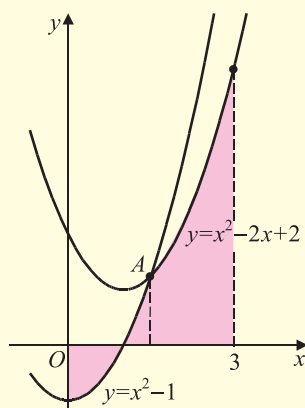
$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ και } g(x) = \frac{x+1}{3}.$$

5. i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν,  $E(\lambda)$ , του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \frac{e}{x}$ ,  $g(x) = \ln x$ , τον άξονα των  $x$  και την ευθεία  $x = \lambda$ ,  $\lambda > e$ .
- ii) Να βρείτε το όριο  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ .

6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.

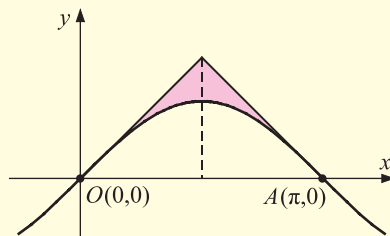


7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.



8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$

- i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της  $C_f$  στα σημεία  $O(0, 0)$  και  $A(\pi, 0)$ .
- ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τις εφαπτόμενες στα σημεία  $O$  και  $A$ .



9. i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{x}$ , την εφαπτόμενή της στο σημείο  $(1, 1)$  και τον άξονα των  $x$ .
  - ii) Να βρείτε την ευθεία  $x = \alpha$ , η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \ln \frac{1}{x}$  και την ευθεία  $y = \ln 2$ .
11. i) Να βρείτε συνάρτηση  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(0,2)$  και η κλίση της στο σημείο  $M(x, f(x))$  είναι  $2x - 3$ .
  - ii) Ποιο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν η  $C_f$  και ο άξονας των  $x$ .
12. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = (x - 1)(x - 3)$ .
- i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της  $f$  στα σημεία  $A, B$  που η  $C_f$  τέμνει τον άξονα των  $x$ .
  - ii) Αν  $\Gamma$  είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, να αποδείξετε ότι η  $C_f$  χωρίζει το τρίγωνο  $AB\Gamma$  σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι  $\frac{2}{1}$ .

## ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Γ' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση  $u = \pi - x$  για να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$$

- ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{3 + \eta\mu^2 x} dx$ .

2. i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^2 - 1} dx$

- ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\eta\mu x} dx$ .

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{(u+1)(u+2)} du$$

και στη συνέχεια τα ολοκληρώματα:

- i)  $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x + 1)(\eta\mu x + 2)} dx$     ii)  $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)(e^x + 2)} dx$ .

4. Αν  $I_v = \int_0^1 \frac{t^{2v+1}}{1+t^2} dt$ ,  $v \in \mathbb{N}$ ,

- i) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $I_v + I_{v+1}$ ,  $v \in \mathbb{N}$

- ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα  $I_0, I_1, I_2$ .

5. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left( \int_0^u f(t)dt \right) du.$$

6. Δίνεται η συνάρτηση  $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ , όπου  $f(t) = \int_1^t \sqrt{u^2 - 1} du$ .

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $F$ .  
 ii) Να αποδείξετε ότι η  $F$  είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

7 Δίνονται τα ολοκληρώματα

$$F(x) = \int_0^x e^t \sin^2 t dt \quad \text{και} \quad G(x) = \int_0^x e^t \eta \mu^2 t dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$F(x) + G(x) \quad \text{και} \quad F(x) - G(x)$$

και στη συνέχεια τα ολοκληρώματα  $F(x)$  και  $G(x)$ .

- ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I = \int_{\pi}^{2\pi} e^t \sin^2 t dt \quad \text{και} \quad J = \int_{\pi}^{2\pi} e^t \eta \mu^2 t dt.$$

8. Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 + 1$  και την ευθεία  $y = 5$  χωρίζεται από την ευθεία  $y = \alpha^2 + 1$ ,  $\alpha > 0$ , σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

9. i) Να βρεθεί το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = 1$ ,  $x = \lambda$ ,  $\lambda > 0$ .

- ii) Να βρεθούν οι τιμές του  $\lambda$  έτσι, ώστε  $E(\lambda) = \frac{1}{2}$ .

- iii) Να βρεθούν τα  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda)$  και  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ .

10. Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις συνεχείς στο  $[\alpha, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι:

- i) Αν  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ .

- ii) Αν  $m$  η ελάχιστη και  $M$  η μέγιστη τιμή της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$$

- iii) Με τη βοήθεια της ανισότητας  $\eta \mu x > x$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , να αποδείξετε

ότι η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi} \text{ για κάθε } x \in \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \text{ και}$$

$$\beta) \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta\mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}.$$

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = e^{-x^2}$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$  και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας  $e^x \geq 1+x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 \text{ για κάθε } x \in [0, 1] \text{ και}$$

$$\beta) \frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1.$$

### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

#### I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Ισχύει  $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$  Α Ψ
2. Ισχύει  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$  Α Ψ
3. Αν  $\alpha = \beta$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ . Α Ψ
4. Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ . Α Ψ
5. Αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ . Α Ψ

6. Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) \geq 0$   
για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ . A Ψ
7.  $\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1)dx < \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1)dx$ , για κάθε  $\alpha > 0$ . A Ψ
8.  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 - \eta\mu^2 x)dx = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sigma\upsilon\nu x dx$ . A Ψ
9.  $\int f(x)dx = xf'(x) - \int xf''(x)dx$ . A Ψ
10.  $\int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt$ . A Ψ
11. Αν  $\int_0^1 (f(x) - 1)dx = 0$  τότε  $\bar{f} = 1$ . A Ψ
12. Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ , τότε  $f(\xi) = 0$  για κάποιο  $\xi \in (\alpha, \beta)$ . A Ψ
13. Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$  και η  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο  $[\alpha, \beta]$ ,  
τότε η  $f$  παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές. A Ψ
14. Το ολοκλήρωμα  $\int_{-1}^1 (x^3 - x)dx$  παριστάνει το εμβαδόν του  
χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση  
της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - x$  και τον άξονα των  $x$ . A Ψ

## II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Αν  $f'(x) = \eta\mu\pi x$  και  $f(0) = 0$ , τότε το  $f(1)$  ισούται με

A)  $-\frac{1}{\pi}$ ,

B)  $\frac{1}{\pi}$ ,

Γ)  $\frac{-2}{\pi}$ ,

Δ)  $\frac{2}{\pi}$ .



2. Το ολοκλήρωμα  $\int \frac{1}{4-x} dx$  στο  $(4, +\infty)$  είναι ίσο με

A)  $\ln(4-x) + c,$

B)  $-\ln(4-x) + c,$

Γ)  $\ln(x-4) + c,$

Δ)  $-\ln(x-4) + c.$

3. Το ολοκλήρωμα  $\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$  στο  $(0, +\infty)$  είναι ίσο με

A)  $\frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3}{3} + c,$

B)  $2\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right),$

Γ)  $\frac{(1 - \ln x)^3}{3} + c,$

Δ)  $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 2x + c,$

E)  $\frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3}{3} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + c.$

4. Το ολοκλήρωμα  $\int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx$  είναι ίσο με

A)  $\frac{4}{3},$

B)  $0,$

Γ)  $-\frac{4}{3},$

Δ)  $\frac{2}{3},$

E)  $\frac{5}{3}.$

5. Το ολοκλήρωμα  $\int \ln x dx$  είναι ίσο με

A)  $\frac{1}{x} + c,$

B)  $\frac{\ln^2 x}{2} + c,$

Γ)  $x(\ln x - 1) + c,$

Δ)  $\frac{\ln^3 x}{3} + c.$

6. Έστω  $f, g$  δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο  $[\alpha, \beta]$ .

Αν  $f(x) \leq g(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

A)  $f'(x) \leq g'(x), x \in [\alpha, \beta],$

B)  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

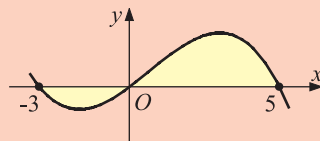
Γ)  $\int f(x) dx \leq \int g(x) dx, x \in [\alpha, \beta],$

Δ)  $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx \leq \int_{\beta}^{\alpha} g(x) dx.$

7. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με

A)  $\int_{-3}^5 f(x)dx$ ,

B)  $\int_5^{-3} f(x)dx$ .



Γ)  $\int_{-3}^0 f(x)dx - \int_0^5 f(x)dx$ , Δ)  $-\int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^5 f(x)dx$ .

8. Αν  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$  και  $f(0) = g(0) + 2$ , τότε για κάθε  $x \in [-1, 1]$  ισχύει:

A)  $f(x) = g(x) - 2$ ,

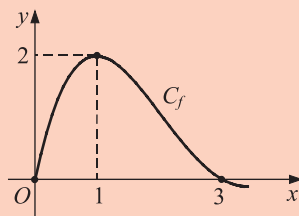
B)  $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x))dx = 4$ .

Γ)  $f(x) \leq g(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$

Δ) Οι  $C_f, C_g$  έχουν κοινό σημείο στο  $[-1, 1]$ .

9. Έστω η συνάρτηση  $F(x) = \int_1^x f(t)dt$  όπου  $f$  η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε η  $F'(1)$  είναι ίση με

A) 0, B) 1, Γ) 2, Δ)  $\frac{1}{2}$ .



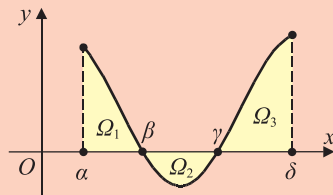
10. Έστω η συνάρτηση  $f$  του διπλανού σχήματος. Αν

$E(\Omega_1) = 2, E(\Omega_2) = 1$  και  $E(\Omega_3) = 3$

τότε το  $\int_a^\delta f(x)dx$  είναι ίσο με

A) 6, B) -4, Γ) 4,

Δ) 0, E) 2.



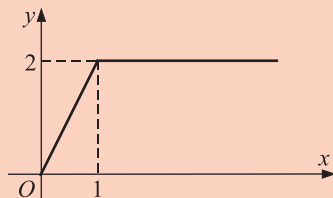
11. Έστω η συνάρτηση  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , όπου  $f$  η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε

A)  $F(x) = x^2$ ,

B)  $F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$ ,

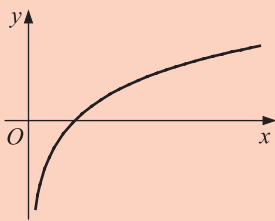
Γ)  $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x, & 1 \leq x \end{cases}$ ,

Δ)  $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x-1, & 1 \leq x \end{cases}$ .

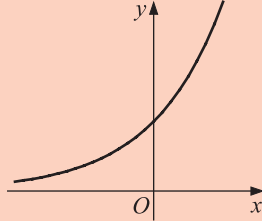


## III.

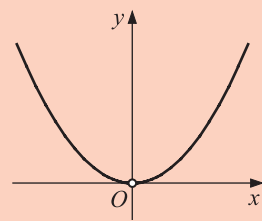
1. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα αντιπροσωπεύει τη γραφική παράσταση μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης  $xy' = y$ , με  $x, y > 0$ .



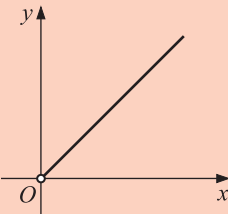
(A)



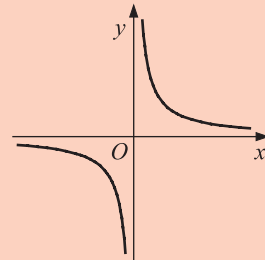
(B)



(Γ)



(Δ)



(E)

2. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα;

A)  $\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx$ ,

B)  $\int_0^{\pi/2} \eta\mu x dx$ ,

Γ)  $\int_0^{\pi} \epsilon\phi x dx$

Δ)  $\int_0^1 \ln x dx$ ,

E)  $\int_0^2 \sqrt{1-x^2} dx$ ,

Z)  $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ .

3. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &= \int (x)' \frac{1}{x} dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \left( \frac{1}{x} \right)' dx \\ &= 1 - \int x \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= 1 + \int \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

Άρα  $\int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$ , οπότε  $0 = 1!$

4. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du$$

$$= -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du = -I. \text{ (Θέσαμε } x = \frac{1}{u} \text{ οπότε } dx = -\frac{1}{u^2} du \text{).}$$

Άρα  $I = -I$  οπότε  $I = 0$ . Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού

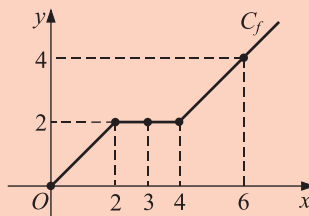
$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx > 0,$$

επειδή  $\frac{1}{1+x^2} > 0$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$ .

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

όπου  $f$  η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.



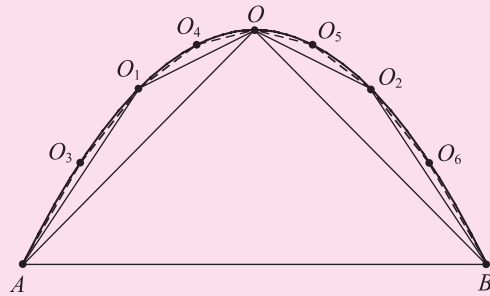
$$F(0) = \square, \quad F(2) = \square, \quad F(3) = \square, \quad F(4) = \square, \quad F(6) = \square.$$

## ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

### Αρχική συνάρτηση - Αόριστο ολοκλήρωμα

Η αυτονόητη σημασία των προβλημάτων που συνδέονται με τον υπολογισμό εμβαδών και οι ιδιαίτερες δυσκολίες που παρουσιάζουν, οδήγησαν τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα στην επινόηση γενικών μεθόδων μέτρησης εμβαδών, ιδιαίτερα επιφανειών που περικλείονται από καμπύλες. Καθοριστική στο ζήτημα αυτό υπήρξε η συμβολή των αρχαίων Ελλήνων και ιδιαίτερα του Αρχιμήδη. Οι ιδέες του Αρχιμήδη πάνω στο πρόβλημα του εμβαδού υπήρξαν η αφετηρία της δημιουργίας του σύγχρονου ολοκληρωτικού λογισμού. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού μιας επιφάνειας που περικλείεται από ένα τμήμα παραβολής και ένα ευθύγραμμο τμήμα (παραβολικό χωρίο).

Έστω ένα παραβολικό χωρίο με βάση  $AB$  και κορυφή  $O$  (το σημείο της παραβολής που έχει τη μέγιστη απόσταση από τη βάση). Ο Αρχιμήδης, φέρνοντας τις χορδές  $OA$  και  $OB$ , δημιουργεί δυο νέα παραβολικά χωρία με βάσεις  $OA$ ,  $OB$  και κορυφές  $O_1$ ,  $O_2$  αντίστοιχα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής, αποδεικνύει ότι για τα εμβαδά των τριών τριγώνων  $OAB$ ,  $O_1AO$  και  $O_2BO$  ισχύει η σχέση



$$(OAB) = 4[(O_1AO) + (O_2BO)]. \quad (1)$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία στα νέα παραβολικά χωρία, βρίσκει ότι

$$(O_1AO) = 4[(O_3AO_1) + (O_4O_1O)] \quad (2)$$

και

$$(O_2BO) = 4[(O_5O_2O) + (O_6BO_2)] \quad (3)$$

Με τον τρόπο αυτό, το εμβαδόν  $E$  του παραβολικού χωρίου μπορεί να προσεγγιστεί (“εξαντληθεί”) από ένα άθροισμα εμβαδών εγγεγραμμένων τριγώνων ως εξής:

$$\begin{aligned} E &= (OAB) + [(O_3AO_1) + (O_4O_1O)] + [(OAO_1) + (O_4O_1O)] + [(O_5O_2O) + (O_6BO_2)] + \dots \\ &= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \frac{1}{4}(O_1AO) + \frac{1}{4}(O_2BO) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \frac{1}{4}[(O_1AO) + (O_2BO)] + \dots \\
 &= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \left(\frac{1}{4}\right)^2(OAB) + \dots
 \end{aligned}$$

Όπως είναι φανερό, πρόκειται για το άθροισμα των (απειρών) όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το  $\alpha = (OAB)$  και λόγο  $\lambda = \frac{1}{4}$ . Το άθροισμα αυτό δίνεται σήμερα από τον γνωστό τύπο

$$\frac{\alpha}{1-\lambda} = \frac{(OAB)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(OAB).$$

Το εμβαδόν λοιπόν του παραβολικού χωρίου είναι ίσο με τα  $\frac{4}{3}$  του εμβαδού του τριγώνου που ορίζουν τα άκρα της βάσης και η κορυφή της παραβολής<sup>(\*)</sup>

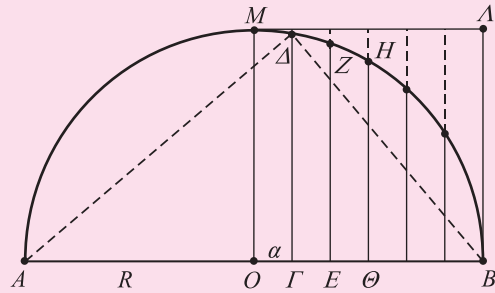
*Όπως στα προβλήματα ακροτάτων και εφαπτομένων έτσι και στο πρόβλημα του εμβαδού, οι ιδέες των αρχαίων Ελλήνων γνώρισαν παραπέρα εξέλιξη μετά την ανάπτυξη της Άλγεβρας και την εφαρμογή της σε γεωμετρικά προβλήματα. Στη διάρκεια του 17ου αιώνα διαπιστώθηκε ότι ο υπολογισμός των εμβαδών μπορεί να γίνει με μια διαδικασία αντίστροφη προς αυτήν της παραγώγισης.*

### **Ορισμένο ολοκλήρωμα - Η έννοια του εμβαδού**

Χαρακτηριστικό παράδειγμα της νέας μεθόδου αντιμετώπισης προβλημάτων υπολογισμού εμβαδών κατά τον 17ο αιώνα αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο ο J. Wallis ανακάλυψε το 1655 μια νέα αναλυτική έκφραση για το εμβαδόν του κύκλου και τον αριθμό  $\pi$ .

<sup>(\*)</sup> Η διατύπωση στο έργο του Αρχιμήδη “Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής” είναι: “παν τμάμα περιεχόμενον υπό ευθείας και ορθογωνίου κώνου τομάς επίτριτον εστι του τριγώνου του βάσιν έχοντος ταν αυτάν και ύψος ίσον τω τμάματι”. Ο Αρχιμήδης στην πραγματικότητα εργάστηκε λίγο διαφορετικά αποφεύγοντας την έννοια του απείρου, χρησιμοποίησε πεπερασμένο πλήθος όρων του παραπάνω αθροίσματος και έδειξε ότι το ζητούμενο εμβαδό ισούται με  $\frac{4}{3}(OAB)$  αποκλείοντας (με παραγωγή σε άτοπο) τις περιπτώσεις να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από αυτό.

Ο Wallis θεώρησε ένα ημικύκλιο διαμέτρου  $AB = 2R$ , χώρισε την ακτίνα του  $OB$  σε ίσα τμήματα μήκους  $\alpha$  και από κάθε σημείο διαίρεσης ύψωσε μια κάθετη (βλ. σχήμα). Όπως είναι γνωστό από την Ευκλείδεια γεωμετρία, κάθε μια από αυτές τις κάθετες είναι μέση ανάλογη των δύο τμημάτων στα οποία χωρίζει τη διάμετρο  $AB$ .



Π.χ., για την κάθετη  $\Gamma\Delta$ , που είναι ύψος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου  $\Delta AB$ , ισχύει

$$\Gamma\Delta^2 = \text{AG} \cdot \text{GB} = (R + \alpha)(R - \alpha) = R^2 - \alpha^2$$

δηλ.  $\Gamma\Delta = \sqrt{R^2 - \alpha^2}$ . Όμοια προκύπτει  $EZ = \sqrt{R^2 - 4\alpha^2}$ ,  $H\Theta = \sqrt{R^2 - 9\alpha^2}$  κ.ο.κ. Αφού υπολόγισε με τον τρόπο αυτό όλες τις (πεπερασμένου πλήθους) κάθετες που “εξαντλούν” το τεταρτημόριο  $OMB$ , ο Wallis πραγματοποίησε μια “μετάβαση στο άπειρο” με τον εξής συλλογισμό:

“Ο λόγος του αθροίσματος όλων αυτών των καθέτων προς το άθροισμα των μεγίστων τιμών τους (δηλ. των ακτίνων) είναι ίδιος με το λόγο του τεταρτημορίου (το οποίο “εξαντλούν” αυτές οι κάθετες) προς το τετράγωνο με πλευρά την ακτίνα (δηλ. το τετράγωνο  $OMAB$ , το οποίο “εξαντλούν” οι ακτίνες-προεκτάσεις των καθέτων)”.

Διατυπωμένο σε συμβολική γλώσσα, το συμπέρασμα αυτό του Wallis γίνεται

$$\frac{\sqrt{R^2 - 0^2} + \sqrt{R^2 - \alpha^2} + \sqrt{R^2 - 4\alpha^2} + \dots}{R + R + R + \dots} = \frac{\text{τεταρτημόριο}(OMB)}{\text{τετράγωνο}(OMAB)} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^2}{R^2} = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

Αυτό το μίγμα Γεωμετρίας, Άλγεβρας και “πρωτόγονου” απειροστικού λογισμού, ισοδυναμεί ουσιαστικά με τη σύγχρονη σχέση

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε  $R = 1$  (δηλ. το μοναδιαίο κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$ ) και διαιρέσουμε την ακτίνα (δηλ. το διάστημα  $[0, 1]$ ) σε  $n$  ίσα τμήματα μήκους το καθένα  $\frac{1}{n}$ , τότε το πρώτο μέλος της προηγούμενης ισότητας (1) γίνεται

$$\frac{1}{n} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{0}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2} \right].$$

Αυτό όμως όπως θα δούμε παρακάτω είναι το κατώτερο άθροισμα της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  (που προκύπτει από την εξίσωση του κύκλου), ως προς την προηγούμενη

διαμέριση του διαστήματος  $[0,1]$ , και το όριό του όταν  $n \rightarrow +\infty$ , είναι το

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Η έννοια του ολοκληρώματος, όπως και οι άλλες θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης, έγιναν αντικείμενο συστηματικής κριτικής και ορίστηκαν με λογική αυστηρότητα στη διάρκεια του 19ου αιώνα. Η έννοια του ολοκληρώματος που χρησιμοποιούμε σήμερα στο σχολείο, στηρίζεται στον επόμενο ορισμό του συμβόλου  $\int_a^b f(x)dx$  που έδωσε ο B. Riemann το 1854:

“Θεωρούμε μια ακολουθία τιμών  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  που βρίσκονται ανάμεσα στα  $a$  και  $b$  κατά σειρά μεγέθους και συμβολίζουμε χάριν συντομίας το  $x_1 - a$  με  $\delta_1$ , το  $x_2 - x_1$  με  $\delta_2$ , ... το  $b - x_{n-1}$  με  $\delta_n$  και τα γνήσια θετικά κλάσματα με  $\varepsilon_i$ . Τότε η τιμή του αθροίσματος

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

θα εξαρτάται από την εκλογή των διαστημάτων  $\delta_i$  και των ποσοτήτων  $\varepsilon_i$ . Αν έχει την ιδιότητα, ανεξαρτήτως της εκλογής των  $\delta_i$  και  $\varepsilon_i$ , να τείνει προς ένα σταθερό όριο  $A$  καθώς όλα τα  $\delta_i$  γίνονται απειροελάχιστα, τότε η τιμή αυτή ονομάζεται  $\int_a^b f(x)dx$ . Αν δεν έχει αυτή την ιδιότητα, τότε το  $\int_a^b f(x)dx$  δεν έχει κανένα νόημα”.





**ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

**Α' ΜΕΡΟΣ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

**1 ΠΙΝΑΚΕΣ –**

**ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

**§ 1.1 Α' Ομάδας**

1. i)  $3 \times 7$  ii) π.χ. το στοιχείο  $a_{12}$  μας πληροφορεί ότι η ομάδα «ΝΙΚΗ» έχει 6 νίκες.

$$2. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. i)  $x = 1, y = -1$  ii) δεν υπάρχουν

4.  $x = e$ .

$$5. x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}.$$

**§ 1.2 Α' Ομάδας**

$$1. i) \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$ii) \begin{bmatrix} 11 & 13 & 15 & 17 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$iii) [0 \ 0 \ 0], [8 \ 10 \ 12]$$

iv) δεν ορίζονται

$$v) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\alpha-1 & 2\beta & 2\gamma \\ 2x & 2y-1 & 2\omega \\ 2\kappa & 2\lambda & 2\mu-1 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} -6 & 14 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$3. x = -7, y = 8, \omega = 8.$$

$$4. i) \begin{bmatrix} 13 & -1 & 33 \\ -5 & 35 & 14 \end{bmatrix},$$

$$ii) \begin{bmatrix} -11 & 18 & 1 \\ 4 & -1 & 18 \end{bmatrix}$$

$$iii) \begin{bmatrix} -\lambda^2 & \lambda^2 & 2\lambda^2 \\ 3\lambda^2 & -\lambda^2 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

$$5. i) \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ii) \begin{bmatrix} -18 & 6 \\ -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$iii) \begin{bmatrix} -16 & 32 \\ -4 & 8 \\ 18 & 40 \end{bmatrix} \quad iv) \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 6 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$6. i) X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad ii) X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$7. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$8. \alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 3, \delta = -1.$$

**§ 1.2 Β' Ομάδας**

$$1. i) x = 1, y = -1 \quad ii) x = 2, y = 0.$$

$$2. X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$3. \begin{bmatrix} -9 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$4. \begin{bmatrix} 34 & 29 & 41 \\ 24 & 30 & 37 \end{bmatrix}.$$

$$5. \text{ i) } \begin{bmatrix} 220 & 198 & 154 & 66 \\ 88 & 44 & 132 & 132 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} 31800 & 28620 & 22260 & 9540 \\ 12720 & 6360 & 19080 & 19080 \end{bmatrix}.$$

### § 1.3 Α' Ομάδας

$$1. \text{ i) } [12], \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii) } \begin{bmatrix} 3 & -14 & -3 \\ 16 & 2 & -2 \\ -7 & -29 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -20 & -11 \\ 2 & 10 & -4 \\ 15 & -13 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv) } \begin{bmatrix} 4 & 13 & 17 \\ -18 & 17 & -8 \end{bmatrix}, BA \text{ δεν ορίζεται.}$$

$$2. \text{ i) } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ii) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Παρατηρήστε ότι οι αμοιβές στις δύο εταιρείες είναι:

60.50 + 75.40 και 30.50 + 60.40 αντιστοίχως

4. Να αποδείξετε ότι  $AB = I$ .

$$5. A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ ο } B \text{ δεν αντιστρέφεται}$$

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma\eta\theta & \eta\mu\theta \\ -\eta\mu\theta & \sigma\eta\theta \end{bmatrix}.$$

$$6. \text{ i) } \begin{bmatrix} \eta\mu\alpha & \sigma\eta\alpha \\ -\sigma\eta\alpha & \eta\mu\alpha \end{bmatrix}$$

ii) Πολλαπλασιάστε και τα 2-μέλη της εξίσωσης, από αριστερά, με τον αντίστροφο του πίνακα:

$$\begin{bmatrix} \eta\mu\alpha & -\sigma\eta\alpha \\ \sigma\eta\alpha & \eta\mu\alpha \end{bmatrix}, \text{ οπότε έχουμε}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma\eta 2\alpha \\ -1 & -\eta\mu 2\alpha \end{bmatrix}.$$

### § 1.3 Β' Ομάδας

$$1. \text{ i) } x = 5, y = 0 \quad \text{ii) } A^3 = \begin{bmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 100 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 125 & 250 \\ 250 & 500 \end{bmatrix}.$$

2.  $x = 3$ .

$$3. \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Να γίνουν οι πράξεις.

5. i) Ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται διότι έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός και είναι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ii) Αποδείξτε ότι  $A + A^{-1} = 2I$ .

6. i) πράξεις, ii) και iii), να χρησιμοποιήσετε την (i).

$$7. \text{ i) } \begin{bmatrix} 7,4 & 8,8 \\ 11,6 & 13,8 \\ 16,3 & 19,4 \end{bmatrix}$$

ii) 3345 ευρώ και 2230 ευρώ.

8. i) Παρατηρήστε ότι  $A^v = A^{v-3} \cdot A^3$   
 ii)  $B^v = (B^2)^v$ ,  $v=2\rho$  και  $B^v = B^{2\rho} B$ ,  
 $v=2\rho+1$ .

9. i)  $A(-x) A(x) = I$  ii)  $x=0$ .

10. i) Πράξεις ii)  $y = -x$

iii) Παρατηρήστε ότι  $M = A(1)$ , οπότε  
 $M^{-1} = A(-1)$ .

11. i)  $A^2 = A \cdot A = I$ ,  $A^v = (A^2)^v$  με  $v=2\rho$  και  
 $A^v = (A^2)^v A$  με  $v=2\rho+1$ .

i)  $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

iii)  $6I + 5A$ .

12. i)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ii) α)  $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  β)  $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

γ)  $X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ .

13. i) Πράξεις

ii) Να γράψετε:  $1992 = 3.664$   
 $1989 = 3.663$ .

2. i)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  ii)  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

3. Το  $O(0, 0)$  αντιστοιχίζεται στο  $O'(0, 0)$ . Το  $A(3, 4)$  στο  $A'(10, -3)$ .  
 Στη συνέχεια αποδείξετε ότι  $(OA) \neq (O'A')$ .

4. i)  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  ii) Αποδείξετε ότι  $A'D' // B'T'$   
 και  $A'B' // A'T'$ . Στη συνέχεια δείξτε ότι η  $A'D'$  δεν είναι κάθετη στην  $A'B'$ .

5. i)  $A(5, -5)$  ii)  $5x - 2y = 1$ .

6. i) Στροφή περί την αρχή των αξόνων  $O$  κατά  
 γωνία  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ .

ii) Ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$  και λόγο  $\lambda = 2 > 0$ .

iii) Συμμετρία με άξονα την  $y = x$  και στη συνέχεια συμμετρία ως προς κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$ .

iv) Ομοιοθεσία με κέντρο ομοιοθεσίας την αρχή των αξόνων  $O$  και λόγο  $\lambda = 2 > 0$  και στη συνέχεια συμμετρία ως προς κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$ .

v) Συμμετρία ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία  $y = x$  και στη συνέχεια συμμετρία ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα των  $x$ .

vi) Συμμετρία ως προς κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$ , συμμετρία ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα  $x$  και τέλος συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία  $y = x$ .

**§ 1.4 Α' Ομάδας**

1. Οι πίνακες των γραμμικών μετασχηματισμών είναι οι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

αντιστοίχως.

Το σημείο  $A(1,0)$  αντιστοιχίζεται στα  $(1, -1)$ ,  $(1,1)$  και  $(1,2)$  αντιστοίχως.

Όμοια: το  $B(0,1)$  στα  $(1,1)$ ,  $(1,2)$  και  $(2,4)$ .

**§ 1.4 Β' Ομάδας**

1. i) Αρκεί να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της εικόνας του τυχαίου σημείου  $M$  του επιπέδου με το γραμμικό μετασχηματισμό  $T$  επαληθεύουν την  $y=2x$ .

ii)  $(-2y, y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

- iii) Το  $A'(1, 1)$  δεν έχει πρότυπο διότι, αν είχε θα έπρεπε να επαληθεύει την  $y=2x$ .
2. i)  $x' = x - y$   
 $y' = x$ , και υπολογίστε τις αποστάσεις ( $AB$ ) και ( $A'B'$ ).
- ii) Να βρείτε την εικόνα του  $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$  μέσω του  $AB$  με το γραμμικό μετασχηματισμό  $T$ .
- iii) Χρησιμοποιείστε το γνωστό τύπο  $E_{(OAB)} = \frac{1}{2} |\det(\vec{OA}, \vec{OB})|$ .
3. i)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $y = \frac{1}{3}x$ .
- ii) Ομοίως.
4. i) Υπολογίστε τις συντεταγμένες του  $M'(x'_0, y'_0)$ , συμμετρικού του  $M(x_0, y_0)$  ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία  $y = -x$  συναρτήσει των  $x_0, y_0$ .
- ii)  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ .
- iii)  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ .
- iv)  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ .
5. i) Είναι  $x = \frac{x'}{\alpha}$  και  $y = \frac{y'}{\beta}$ , οπότε ...
- i)  $(OA'B'T') = 2(OA'T') = |\det(\vec{OA}', \vec{OT}')|$ .
4. i)  $(1, -1, 1)$   
 ii)  $\left(-\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}, z\right)$ ,  $z \in \mathbb{R}$   
 iii) Αδύνατο.
5. i)  $(1, 1 - z, z, 0)$ ,  $z \in \mathbb{R}$   
 ii)  $(3 - z + 3\omega, 2 - z + 2\omega, z, \omega)$ , όπου  $z, \omega \in \mathbb{R}$   
 iii) Αδύνατο.
6. i)  $(2, 1/2)$  ii) Αδύνατο.
- 
- § 1.5 – 1.6 Β' Ομάδας**
1.  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, -1)$ .
2.  $y = x^2 - 3x + 2$ .
3. Να λύσετε το σύστημα με αγνώστους  $\eta, \mu, \sigma, \nu, \beta, \epsilon, \varphi, \gamma$ .
4.  $(x, y, \omega) = \left(4\omega, \frac{5\omega}{2}, \omega\right)$   $\omega \in \mathbb{R}$ .
5.  $X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\omega + z & -1/2\omega \\ \omega & z \end{bmatrix}$   $\omega, z \in \mathbb{R}$ .
6. i) Αν  $\alpha \neq 1, 2$ , αδύνατο. Αν  $\alpha = 1$  ή  $\alpha = 2$ , άπειρες λύσεις.  
 ii) Αν  $\lambda \neq 3$  μια λύση την:  
 $\left(\frac{2\lambda + \mu - 16}{\lambda - 3}, \frac{4\lambda - 2\mu + 8}{\lambda - 3}, \frac{\mu - 10}{\lambda - 3}\right)$ .  
 Αν  $\lambda = 3$  και  $\mu \neq 10$ , άπειρες λύσεις της μορφής  $(2 + \omega, 4 - 2\omega, \omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ .
- iii) Αν  $k \neq 2$ , αδύνατο, ενώ αν  $k = 2$  μοναδική λύση την  $(0, 1)$ .
- 
- § 1.5 – 1.6 Α' Ομάδας**
3. i)  $(3, -1, 2)$   
 ii)  $(3 - \omega, 4 + 2\omega, \omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$   
 iii)  $(2 - y, y, 3, 4)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

**§ 1.7 Α' Ομάδας**

1. i)  $-3000$     ii)  $0$     iii)  $1$   
 iv)  $\alpha\beta(\beta - \alpha)$     v)  $-1$     vi)  $0$ .
2. i)  $x = 1$  ή  $x = 4i$     ii)  $x = \pm 1$   
 iii)  $x = 0, 1, 2$     iv)  $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ .
3. i)  $x = -2, y = 3$   
 ii)  $x = 1, y = 1/2, \omega = 3$   
 iii)  $x = 0, y = 0, z = 0$     iv)  $x = 0$ .
4. i)  $\kappa = 2$  ή  $-1$     ii)  $\kappa = 1$  ή  $-2$ .

**§ 1.7 Β' Ομάδας**

1. i) Αν  $\kappa \neq 1$  και  $\kappa \neq 2$ , τότε έχει λύση την  

$$\left( 0, \frac{\kappa}{\kappa-1}, \frac{1}{1-\kappa} \right)$$
 Αν  $\kappa = 1$ , είναι αδύνατο, ενώ αν  $\kappa = 2$ , έχει λύσεις τις  $(2 - y, y, -1), y \in \mathbb{R}$ .  
 ii) Αν  $\lambda \neq \pm 1$ , τότε έχει λύση την  

$$\left( \frac{\lambda+4}{3(\lambda+1)}, -\frac{\lambda^2-2\lambda+3}{3(\lambda+1)}, \frac{\lambda-2}{\lambda+1} \right)$$
 Αν  $\lambda = 1$ , έχει λύσεις τις  $\left( \frac{1}{2} - y, y, -\frac{1}{2} \right)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , ενώ αν  $\lambda = -1$ , είναι αδύνατο.  
 2. Αν  $\lambda \neq \pm 1$ , τότε έχει λύση την  $(0, 0, 0)$ . Αν  $\lambda = 1$ , έχει λύσεις τις  $(-3\omega, 2\omega, \omega), \omega \in \mathbb{R}$ , ενώ αν  $\lambda = -1$  έχει λύσεις τις  $(3\omega, 2\omega, \omega), \omega \in \mathbb{R}$ .  
 3. i) Διέρχονται από το  $A(1, -1)$   
 ii) Σχηματίζουν τρίγωνο  
 iii)  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$  και η  $\varepsilon_3$  τέμνει αυτές στα σημεία  
 $A(-1, 2) B(1/2, 1/2)$   
 iv)  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ .

4. i) Η ορίζουσα του συστήματος είναι ίση με τη διακρίνουσα της εξίσωσης, οπότε ...  
 ii) Άπειρες λύσεις.
5. Οι τρεις ισότητες σχηματίζουν ομογενές σύστημα γραμμικό του τύπου  $3 \times 3$  με ορίζουσα μηδέν, οπότε ...
6. i) Λύστε το σύστημα των δυο τελευταίων εξισώσεων.  
 ii) Λύστε το σύστημα  

$$\begin{cases} 2x - y = -\lambda \\ x - y = \lambda \end{cases}$$
7. i)  $\lambda = 1$  ή  $\lambda = -1$   
 ii) Αν  $\lambda = 1$ , έχει λύσεις της μορφής  $(3y, y), y \in \mathbb{R}$ , ενώ αν  $\lambda = -1$ , έχει λύσεις της μορφής  $(y, y), y \in \mathbb{R}$ .

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ  
 του ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

**Γ' Ομάδας**

1. i) Πράξεις    ii)  $A(x)A(-x) = A(\emptyset)$   
 iii) Επαγωγή
2. i) Πράξεις    ii)  $AB = I$
3. i) Πράξεις  
 ii) Να γίνουν οι πράξεις:  
 $(\alpha I + \beta J) + (\alpha' I + \beta' J)$   
 $(\alpha I + \beta J)(\alpha' I + \beta' J)$

4. Να αποδείξετε ότι

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu 2\varphi & \eta\mu 2\varphi \\ \eta\mu 2\varphi & -\sigma\upsilon\nu 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Θέτουμε διαδοχικά όπου  $\theta$  το  $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ .

5. i) Αρκεί να αποδείξετε ότι οι εικόνες των σημείων  $M_1(x_1, y_1)$  και  $M_2(x_2, y_2)$  ταυτίζονται μόνο όταν το  $M_1$  συμπίπτει με το  $M_2$ .

$$i) T^{-1}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

6. Η ορίζουσα του συστήματος είναι  $D = \alpha\beta(\beta - \gamma)$  κ.τ.λ.

7. Η ορίζουσα του συστήματος είναι  $D = (\sigma\alpha\alpha - \eta\mu\alpha)(1 - \eta\mu\alpha)(1 - \sigma\alpha\alpha)$ .

8. Αν  $\kappa = 1$ , οι ευθείες συμπίπτουν, ενώ αν  $\kappa \neq 1$ , τότε  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$  και η  $\varepsilon_3$  τις τέμνει.

9. Αν  $\lambda \neq 1$ , τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την  $(0, 0, 0)$ , ενώ αν  $\lambda = 1$ , έχει άπειρες λύσεις της μορφής  $(x, 0, 0)$ , με  $x \in \mathbb{R}$ .

10. Το ομογενές σύστημα:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x - \alpha y = 0 \\ \alpha x - (\lambda+1)y = 0 \end{cases}$$

έχει και μη μηδενικές λύσεις, οπότε

$$D = \lambda^2 - 2\lambda + \alpha^2 - 3 = 0.$$

11. i)  $x = \lambda + 2, y = \lambda$

ii)  $\lambda = -1$  ή  $\lambda = 2$ .

## 2 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

### § 2.1 - 2.2 Α' Ομάδας

1. α) 6    β)  $-\frac{3}{2}$ .

2. α)  $x = 1, y = 2$     β)  $-2$     γ)  $x = -15, y = 27$ .

4. α)  $y' y$     β)  $x' x$     γ)  $y = x$ .

5. α)  $3 + 4i$     β)  $-3 - 6i$     γ) 0    δ)  $2 + 23i$   
ε)  $-3 + 18i$     στ) 25    ζ)  $1 + 7i$ .

6. α)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$     β)  $-1$     γ)  $2i$

δ)  $-2 + 2\sqrt{3}i$     ε)  $1 + i$     στ)  $\frac{4}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{3}i$

7. α) αδύνατο    β)  $x = \frac{2}{5}, y = -\frac{1}{5}$

γ)  $x = -\frac{1}{2}, y = 0$

8. α) 0    β)  $2i$

9. α)  $-5 - 7i$     β)  $-4 + 9i$     γ)  $-4i$

δ) 11    ε)  $i$     στ) 0

10. α) ως προς άξονα  $x'x$     β) ως προς κέντρο  $O(0, 0)$     γ) ως προς άξονα  $y'y$ .

11.  $z_2 = \bar{z}_1$ .

12. α)  $y = 3$     β)  $x'x$  και  $y'y$     γ) διχοτόμοι

δ)  $x = 1$ .

13. α) 1, 2    β)  $1 \pm i\sqrt{2}$     γ)  $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

14.  $\beta = -12, \gamma = 26$ .

### § 2.1 - 2.2 Β' Ομάδας

1.  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$ .

2.  $-1$

3. 0

4.  $-2, 0, 2$

5. α) 0, 1,  $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$     β) 0,  $\pm 1, \pm i$ .

6.  $z = x + yi$  κτλ.

7.  $\beta - ai = i(\alpha + \beta i)$  κτλ.

8. α)  $z = x + yi$  κτλ. β) αρκεί να δείξετε ότι  $u = \bar{u}, v = -\bar{v}$

9. α)  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  ή  $y'y$  εκτός του  $O(0, 0)$

β)  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  ή  $x'x$  εκτός του  $O(0, 0)$

**§ 2.3 Α' Ομάδας**

1.  $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 5, 5, 5, 4, 1, 8, 5, \frac{\sqrt{10}}{5}$ .

2. 2, 1, 1, 1.

3. α)  $z \in \mathbb{R}$  β)  $\frac{1}{2}$  γ)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. α)  $x^2 + y^2 = 1$  β)  $x^2 + (y+1)^2 = 1$

γ)  $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$

δ) Κυκλικό δακτύλιο

ε) Εκτός κύκλου  $x^2 + y^2 = 2$ .

5. α) Στη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα  $A(-1, 0), B(0, 2)$ .

β) Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετο του  $AB$  και το  $B$  όπου  $A(0, 1)$  και  $B(-1, 0)$ .

6. Ο μοναδιαίος κύκλος

7.  $2i, 6i$

8.  $|w-1|=2$ .

9.  $|z|^2 = z\bar{z}$  κτλ.

**§ 2.3 Β' Ομάδας**

1. Αν  $z = x + yi$ , τότε  $\text{Re}(z) = x, \text{Im}(z) = y$  κτλ.

2.  $w = -\bar{w}$  κτλ.

3.  $w = \bar{w}$  κτλ.

4.  $w = -\bar{w}$  κτλ.

5. Αρκεί  $|w|=1$

6.  $|z|=1$

7. 4

8.  $y = \frac{1}{4}x - \frac{15}{8}, \left(\frac{15}{34}, -\frac{60}{34}\right)$

9. Αν  $z_2 = x_2 + y_2i$ , τότε  $\frac{x_2^2}{5^2} + \frac{y_2^2}{3^2} = 1$ .

10. α)  $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$  β)  $\frac{1}{z_1} = \bar{z}_1, \frac{1}{z_2} = \bar{z}_2$  κτλ.

**§ 2.4 Α' Ομάδας**

1. α)  $2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

β)  $2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right)$

γ)  $2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$

δ)  $2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

ε)  $4(\cos 0 + i \sin 0)$

στ)  $4(\cos \pi + i \sin \pi)$ .

2. α)  $12\sqrt{2}(1+i)$

β)  $10i$

γ)  $i$

3. α)  $\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$  β)  $6i$  γ)  $-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ .

4. α)  $4 + 4\sqrt{3}i$  β)  $3^8$  γ) 1.

5.  $i$ .

6.  $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ .

7.  $2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{6}$ .

8. Στροφή κατά γωνία  $-\frac{\pi}{2}$ .

9.  $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ .

10. 1 και 0 ή 1 και  $\frac{2\pi}{3}$  ή 1 και  $\frac{4\pi}{3}$ .



---

**§ 2.4 Β' Ομάδας**


---

1. α) 1 και  $v\theta$     β)  $-1$
2. Να γράψετε τους  $1+i$ ,  $1-i$  σε τριγωνομετρική μορφή.
3. Να εργαστείτε με διανυσματικές ακτίνες.
4. α)  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, x > 0$   
β)  $y = x + 1, y > 0$   
γ)  $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ , με  $x > 0$ .
5. α)  $5i$     β)  $-\frac{100}{29} + \frac{105}{29}i$ .
6. Να εφαρμόσετε το θεώρημα του De Moivre.
7. α)  $|w|=2$     β)  $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ .
8.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .
9. Πρέπει  $\Delta \leq 0$ .

---

**§ 2.5 Α' Ομάδας**


---

1. α) Κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου  
β) Κορυφές τετραγώνου  
γ) Κορυφές κανονικού εξαγώνου.
2. α)  $-i = \sin \frac{3\pi}{2} + i\eta\mu \frac{3\pi}{2}$  κτλ.  
β)  $z_\kappa = 2 \left[ \sin \left( \frac{2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3}}{4} \right) + i\eta\mu \left( \frac{2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3}}{4} \right) \right]$ ,  
 $\kappa = 0, 1, 2, 3$   
γ)  $z_\kappa = 3 \left[ \sin \left( \frac{2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}}{5} \right) + i\eta\mu \left( \frac{2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}}{5} \right) \right]$   
 $\kappa = 0, 1, 2, 3, 4$

3. α)  $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} = \sin \frac{\pi}{4} + i\eta\mu \frac{\pi}{4}$  κτλ.  
β)  $\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{5\pi}{3} + i\eta\mu \frac{5\pi}{3}$  κτλ.  
γ)  $-64 = 64(\sin \pi + i\eta\mu \pi)$  κτλ.
4. α)  $z^3 + 3z^2 + 4z = 8 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + 4z + 8) = 0$ .  
β) Να θέσετε  $z^2 = w, \pm i, \pm 2i$ .
5.  $2-i, -\frac{2}{3}$
6. 4
7. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την:  
 $x^6 = 1, x \neq 1$ .
8. Οι ρίζες είναι  $-3$  και  $\pm i\sqrt{3}$ .

---

**§ 2.5 Β' Ομάδας**


---

1. α) Είναι  $1-i = \sqrt{2} \left( \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i\eta\mu \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right)$   
β) Η εξίσωση γράφεται  $\left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 = 1-i$ .
2. Η εξίσωση γράφεται  
 $(z+1)^2(z^2+z+1)(z^2-z+1) = 0$  κτλ.
3. Έχουμε  $z^7+1=0 \Leftrightarrow z^7 = \sin \pi + i\eta\mu \pi$  κτλ.
4.  $\pm i$
5. 1,  $i, -1, -i$
6. Να πάρετε τα μέτρα και των δύο μελών της εξίσωσης.
7. α) 2, 4, -4,    β)  $p=4, q=16$ .
8. α)  $\frac{1}{\sin \theta} \pm 2i \epsilon \varphi \theta$     β)  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$
9. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα  
 $(x^4-1)(x^5-1) = 0$  κτλ.

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. β)  $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2} = 1.$

2.  $x^2 - y^2 = 1.$

3. α)  $y = 3x - 7$     β)  $y = 3x - 9$

γ)  $A \left( \frac{21}{10}, -\frac{7}{10} \right)$

4. α) Τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο  $K \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$  και ακτίνα  $\rho = \frac{\sqrt{5}}{3}$

β) Τα σημεία της παραβολής  $y^2 = 4x.$

6. Να πάρετε τα μέτρα και των δύο μελών της εξίσωσης.

7. α) Οι τιμές του τριωνύμου είναι ομόσημες του  $a$

β) Είναι γινόμενο δύο συζυγών παραστάσεων.

8. Να εξισώσετε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του αθροίσματος

$1 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0$  με το μηδέν.

**B' ΜΕΡΟΣ (ΑΝΑΛΥΣΗ)**

**1 ΟΡΙΟ –**

**ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

**§ 1.1-1.2 Α' Ομάδας**

1. i)  $A = \mathbf{R} - \{1, 2\}$     ii)  $A = [1, 2]$   
 iii)  $A = [-1, 0) \cup (0, 1]$     iv)  $A = (-\infty, 0).$

2. i)  $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$   
 ii)  $x \in (-1, 1)$     iii)  $x > 0.$

3. i)  $x > 0$     ii)  $x > 1.$

4. α) 200, 69 cm    β) 195,23 cm.

5.  $E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(20 - x^2)$  με  $x \in (0, 20).$

6. i)  $f(A) = \{2, 0\}$     ii)  $f(A) = \mathbf{R}$   
 iii)  $f(A) = [2, +\infty)$     iv)  $f(A) = [0, +\infty).$

7. i) είναι ίσες στο  $[0, +\infty)$   
 ii) είναι ίσες στο  $\mathbf{R}^*$   
 iii) είναι ίσες στο  $[0, 1) \cup (1, +\infty).$

8. Είναι

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x(1-x)}, (f-g)(x) = \frac{1-2x^2}{x(1-x)},$$

$$(fg)(x) = \frac{1+x}{1-x}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1-x^2}{x^2}.$$

9.  $(f+g)(x) = 2\sqrt{x}$ ,  $(f-g)(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ,

$$(fg)(x) = \frac{x^2-1}{x}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

10. i)  $(g \circ f)(x) = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$

ii)  $(g \circ f)(x) = |\sin x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$

iii)  $(g \circ f)(x) = 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

11.  $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2-1}$ ,

$$x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = x-1, x \in [2, +\infty).$$

12. i) Είναι σύνθεση των  $h(x) = x^2 + 1$  και

$$g(x) = \eta\mu x.$$

ii) Είναι σύνθεση των  $h(x) = 3x$ ,  $g(x) = \eta\mu x$  και  $\varphi(x) = 2x^2 + 1$ .

iii) Είναι σύνθεση των συναρτήσεων  $h(x) = 2x$ ,  $g(x) = e^x - 1$  και  $\varphi(x) = \ln x$ .

iv) Είναι σύνθεση των συναρτήσεων  $h(x) = 3x$ ,  $g(x) = \eta\mu x$  και  $\varphi(x) = x^2$ .

### § 1.1 - 1.2 Β' Ομάδας

1. i)  $f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ -x+2, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

ii)  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -2x+4, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

iii)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \cup [2,3) \\ 0, & x \in [1,2) \cup [3,4) \end{cases}$ .

2.  $K(x) = 8\pi x^2 + \frac{500\pi}{x}$ ,  $x > 0$  και το κόστος είναι  $300\pi \cong 942$  λεπτά = 9,42 ευρώ.

3.  $E(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x-1, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ .

4.  $E(x) = -2x^2 + 10x$ ,  $0 < x < 5$ ,  
 $p(x) = 20 - 2x$ ,  $0 < x < 5$ .

5. i)  $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x < 1 \text{ και} \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

$$(A) = [1, +\infty).$$

ii)  $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$  και

$$f(A) = [0, 1].$$

6. i)  $f(x) = x^2 + 1$  ii)  $f(x) = \sqrt{1-x}$   
iii)  $f(x) = \eta\mu x$  ή  $f(x) = -\eta\mu x$ .

7.  $\alpha = 1$ .

8. α) πράξεις β) πράξεις.

9. i)  $N(t) = 10\sqrt{2(t+9\sqrt{t}+20)}$   
ii) 16 χρόνια.

### § 1.3 Α' Ομάδας

1. i)  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 1]$

i)  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $(2, +\infty)$ .

iii)  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

iv)  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 1]$ .

2. i) Είναι  $1-1$  και  $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$ ,  
 $x \in \mathbb{R}$ .

ii) Δεν είναι  $1-1$ .

iii) Δεν είναι  $1-1$ .

- iv) Είναι 1-1 και  $f^{-1}(x) = 1 - x^3, x \geq 0$ .  
 v) Είναι 1-1 και  $f^{-1}(x) = 1 - e^x, x \in \mathbb{R}$ .  
 vi) Είναι 1-1 και  $f^{-1}(x) = \ln \frac{1}{x-1}, x > 1$ .  
 vii) Είναι 1-1 και  $f^{-1}(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}, x \in (-1, 1)$ .  
 viii) Δεν είναι 1-1.
3. Οι συναρτήσεις  $f, \varphi$  και  $\psi$  αντιστρέφονται, ενώ η  $g$  δεν αντιστρέφεται.
4. i), ii), iii) να εφαρμόσετε ιδιότητες των αντισοτήτων.
- vi) 2    vii)  $\sqrt[3]{9}$     viii) 0.  
 2. i) 43    ii)  $\frac{3}{17}$     iii) 6.  
 3. i) 8/3    ii)  $\frac{1}{2}$     iii)  $\frac{1}{2}$     iv) 27.  
 4. i) 1/6    ii) 1/2    iii)  $\frac{3}{8}$     iv)  $\frac{1}{12}$ .  
 5. i) δεν υπάρχει    ii) 2.  
 6. i) 3    ii) 1    iii) 2    iv) 0    v) 1    vi) 4.  
 7. i) 2    ii) 0    iii) 1/2.  
 8. i) 1    ii) 1.  
 9.  $\alpha = 4/3$  και  $\beta = 2$ .

**§ 1.4 Α' Ομάδας**

1. i)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0, f(3) = 2$   
 ii)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2, f(2) = 4$ .  
 iii) Δεν υπάρχει όριο στα  $x_0 = 1, x_0 = 2, f(1) = 1$ , δεν ορίζεται η  $f$  στο 2.  
 iv) Δεν υπάρχει όριο στα  $x_0 = 1, x_0 = 2$  ενώ  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2, f(1) = 1, f(\mathbb{Z}) = 2$  και δεν ορίζεται στο 3.
2. i) -1    ii) 1    iii) δεν υπάρχει  
 iv) δεν υπάρχει.
3. i) 4 και 2    ii) δεν υπάρχει.
4. i) ψευδής    ii) ψευδής    iii) ψευδής  
 iv) Αληθής    v) ψευδής    vi) Αληθής.
5.  $\lambda = 3$  ή  $\lambda = -2$ .

**§ 1.5 Α' Ομάδας**

1. i) 5    ii) -1    iii)  $2^{20}$     iv) 0    v)  $-\frac{1}{2}$

**§ 1.5 Β' Ομάδας**

1. i) 7/12    ii) 0    iii) 1/2.  
 2. i) δεν υπάρχει    ii) 5    iii) 7    iv) 3.  
 3. i) 0    ii) 1    iii) 1.  
 4. i) -2    ii) 0.

**§ 1.6 Α' Ομάδας**

1. i)  $+\infty$     ii)  $-\infty$     iii) δεν υπάρχει.  
 2. i) δεν υπάρχει    ii) δεν υπάρχει  
 iii) δεν υπάρχει.

**§ 1.6 Β' Ομάδας**

1.  $-\infty$ .  
 2. i) Αποδείξτε ότι  
 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \epsilon \varphi x = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \epsilon \varphi x = -\infty$ .  
 ii) Ομοίως.  
 3. Για  $\lambda = 2, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3/2$ .  
 Για  $\mu = 0, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$ .

4. i) 0 ii)  $-\infty$  iii)  $+\infty$ .

### § 1.7 Α' Ομάδας

1. i)  $-\infty$  ii)  $-\infty$  iii) 0 iv)  $+\infty$ .

v)  $1/2$  vi) 0 vii) 0 viii) 2.

2. i)  $+\infty$  ii)  $+\infty$  iii)  $+\infty$  iv)  $+\infty$

v) 0.

3. i) 1 ii) 0 iii)  $-1$  iv) 0

v)  $4i$  vi)  $+\infty$ .

### § 1.7 Β' Ομάδας

1. i) Για  $\mu < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,

$$\mu > 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\mu = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

ii) Για  $\mu = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ,

$$\mu = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \mu \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ -\infty, & \mu \in (0, 1) \end{cases}.$$

2. Για  $\lambda < 1$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,

$$\lambda > 1 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ και}$$

$$\lambda = 1 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5/2.$$

Όστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  μόνο αν  $\lambda = 1$

3.  $\alpha = \beta = 1$ .

4. i) 1 ii)  $\sqrt{3} + 1$  iii)  $+\infty$ .

### § 1.8 Α' Ομάδας

1. i) 1 ii) 1.

2. i) συνεχής ii) συνεχής iii) συνεχής.

3. i) Μη συνεχής στο  $-1$ .

ii) Μη συνεχής στο 2.

iii) Μη συνεχής στο 1.

iv) Συνεχής.

4. i) Μη συνεχής στο 1 ii) συνεχής.

5. Είναι όλες συνεχείς ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

6. Για τη συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x - x + 1$  να εφαρμόσετε το Θεώρημα του Bolzano στο  $[0, \pi]$ .

7. i)  $\alpha = 0$  ii)  $\alpha = 4i$  iii)  $\alpha = 1$

iv)  $\alpha = 1$ .

8. Να εφαρμόσετε διαδοχικά το Θεώρημα του Bolzano στα  $[\lambda, \mu]$  και  $[\mu, \nu]$ .

9. Εργαστείτε όπως στο σχόλιο του Θεωρήματος Bolzano.

10. i)  $[-1, 0]$  ii)  $(0, 2)$  iii)  $[1, 2)$

iv)  $(1, 2]$ .

### § 1.8 Β' Ομάδας

1.  $\kappa = -1$ .

2.  $(\alpha = 4, \beta = 1)$  ή  $(\alpha = -3, \beta = 8)$ .

3. i)  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$ , οπότε  
 $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ .

4. Εφαρμόσετε Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση  $\Phi(x) = f(x) - g(x)$  στο  $[0, 1]$ .

5. α) Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση  $f(x) = (x - 2)(x^4 + 1) + (x^6 + 1)(x - 1)$  στο  $[1, 2]$ .

β) Όμοια για τη συνάρτηση

$$f(x) = e^x(x-2) + (x-1) \ln x.$$

6. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  στο  $(0, +\infty)$  έχει μια ακριβώς λύση.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  στο  $(0, +\infty)$  έχει μια ακριβώς λύση.

i)  $y = 0$  ii) Δεν ορίζεται  
iii)  $y = x + 1$  ή  $y = x + 1$ .

7. i) α)  $x = 1$  ή  $-1$

β) Η συνάρτηση  $f$  στο  $(-1, 1)$  δεν μη-δενίζεται και είναι συνεχής.

$$\gamma) f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad x \in [-1, 1] \text{ ή}$$

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad x \in [-1, 1]$$

ii) α)  $x = 0$

β) η  $f$  στο  $(-\infty, 0)$  συνεχής και δεν μη-δενίζεται. Ομοίως και στο  $(0, +\infty)$  γ)  
 $f(x) = x$  ή  $f(x) = -x$  ή  $f(x) = |x|$  ή  $f(x) = -|x|$ .

8. i)  $OB: y = x, AG: y = -x + 1$ .

ii) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις  $f(x) - x = 0$  και  $f(x) + x - 1 = 0$  στο  $[0, 1]$  έχουν κάποια λύση.

9. i)  $d = d(x) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f(x)-y_0)^2},$   
 $x \in [\alpha, \beta].$

ii) Να εφαρμόσετε το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής για την  $d$  στο  $[\alpha, \beta]$ .

**2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

**§ 2.1 Α' Ομάδας**

1. i) 0 ii) -2 iii) 0

2. i) 0 ii) Δεν παραγωγίζεται  
iii)  $1 \leq y \leq 1$

3.  $g'(0) = f(0)$ .

4. i) Δεν είναι συνεχής στο 0 και άρα δεν παραγωγίζεται  
ii) Δεν παραγωγίζεται στο 1.

5. Από την άσκηση 1

i)  $y = 1$  ii)  $y = 2$  iii)  $x + 3$  ii)  $y = 0$ .

Από την άσκηση 2

**§ 2.1 Β' Ομάδας**

1.  $f'(0) = -1$ .

2.  $f'(1) = 3$ .

3.  $f'(0) = 1$ .

4.  $f'(0) = 1/2$ .

5. Με κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε ότι  $f'(0) = 1$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , οπότε  $f(0) = 0$  και με κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε  $f'(0) = 1$ .

7. i)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , οπότε  $f(0) = 0$ .

8. i) Είναι

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = -\frac{f(x_0 + (-h)) - f(x_0)}{-h}$$

κ.τ.λ.

ii) Είναι

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f(x_0 - h) + f(x_0)}{h},$$

κ.τ.λ.

9. i) το Β. ii) το Γ.

i ii)  $t = 2$  αλλάζει το Β,  $t = 4$  το Α και  $t = 5$  το Β

iv) το Α v) το Β vi) το Α.

**§ 2.2 Α' Ομάδας**

1. i) -4 ii) 1/6

iii)  $-\frac{1}{2}$  iv)  $1/e$  v) 2.

2. i) Δεν παραγωγίζεται στο 1.

$$\text{ii) } f'(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

iii) Δεν παραγωγίζεται στο 2.

iv) Δεν παραγωγίζεται στο 2/3.

3.  $f'(x_1) = f'(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$  άτοπο αφού  $x_1 \neq x_2$ , ενώ για την  $f(x) = x^3$  υπάρχουν τα  $(x_1, x_1^3)$ ,  $(-x_1, -x_1^3)$ .

$$4. f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2, 0) \\ -2, & x \in (0, 2) \\ 0, & x \in (2, 4) \\ 4, & x \in (4, 6) \\ -4/3, & x \in (6, 9) \end{cases}.$$

5. Ευθ. τμήμα με κλίση 2 για  $x \in [0, 2]$ , ευθύγραμμο τμήμα με κλίση  $-1$ , για  $x \in [2, 4]$  και ευθ. τμήμα με κλίση 1 για  $x \in [4, 8]$ .

### § 2.2 Β' Ομάδας

1.  $\alpha = -1$ ,  $\beta = \pi$ .

2. Η εξίσ. εφαπτ. της  $C_f$  στο  $(\xi, f(\xi))$  είναι

$$y = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}x + \frac{\sqrt{\xi}}{2} \text{ η οποία διέρχεται από το } B(-\xi, 0).$$

3.  $N(2\alpha, -8\alpha^3)$  και  $f'(-2\alpha) = 4f'(\alpha)$ .

4. i) Είναι  $A(2\xi, 0)$ ,  $B\left(0, \frac{2}{\xi}\right)$  και  $M\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right)$ .  
ii) 2.

### § 2.3 Α' Ομάδας

1. i)  $f'(x) = 7x^6 - 4x^3 + 6$

ii)  $f'(x) = 6x^2 + \frac{1}{x}$

iii)  $f'(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

iv)  $f'(x) = -\eta\mu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

2. i)  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$ .

ii)  $f'(x) = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$ .

iii)  $f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ .

iv)  $f'(x) = \frac{1 - \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2}$ .

v)  $f'(x) = x(\eta\mu 2x + x\sigma\upsilon\nu 2x)$

3. i)  $f'(x) = \frac{e^x \left( \ln x - \frac{1}{x} \right)}{(\ln x)^2}$ .

ii)  $f'(x) = \frac{-4\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 2x}$ .

iii)  $f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x}$ .

iv)  $f'(x) = \frac{4(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$ .

4. i)  $f'(x) = \begin{cases} 4x + 3, & x < 0 \\ 6\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right), & x > 0, \end{cases}$

ενώ δεν παραγωγίζεται στο 0.

ii)  $f'(x) = \begin{cases} 2x + \sigma\upsilon\nu x, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ .

5. i)  $(-2, -4)$  και  $(2, 4)$ .

ii)  $\left(1, \frac{1}{e}\right)$ .

iii)  $(-1, -2)$ ,  $(1, 2)$ .

6.  $f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  και

$g'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}$ ,  $x \in [0, +\infty) - \{1\}$ .

Οι συναρτήσεις  $f'$ ,  $g'$  δεν είναι ίσες αφού δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

7.  $f'(1)g'(1) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ .

8.  $\alpha = 2$ .

9. i)  $(-2, 3)$  και  $(2, 7)$ .

ii)  $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-10\sqrt{3} + 45}{9}\right)$  και

$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{10\sqrt{3} + 45}{9}\right)$ .

10.  $y = 2x - 1$  και

$y = -2x - 1$ .

11.  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0$ .

12. i)  $f'(x) = \frac{-24(x+1)}{x^7(3x+4)^3}$ .

ii)  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .

iii)  $f'(x) = \text{συν}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

iv)  $f'(x) = \frac{-(1+x^2)}{x(1-x^2)}$ .

v)  $f'(x) = e^{-x^2}(-2x)$ .

13. i)  $f'(2) = 20$ .

ii)  $f'(4) = \frac{5}{6}$ .

iii)  $f'\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{6+\sqrt{3}\pi}{48}\right)$ .

iv)  $f'(3) = 5$ .

14. i)  $f'(x) = x^{\ln x} 2 \ln x \frac{1}{x}$ .

ii)  $f'(x) = 2^{5x-3} \cdot 5 \ln 2$ .

iii)  $f'(x) = (\ln x)^x \left( \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right)$ .

iv)  $f'(x) = e^{\text{συν}x} (\text{συν}x - \eta\mu^2x)$ .

15.  $f'(x) = \eta\mu 2x$  και

$f''(x) = 2\text{συν}2x$ , οπότε ισχύει η ισότητα.

**§ 2.3 Β' Ομάδας**

1. Το κοινό σημείο είναι το  $(1, 1)$  και ισχύει  $f'(1) \cdot g'(1) = -1$ .

2. Τα κοινά σημεία είναι  $(1, 1)$

και  $(-2, -8)$ .

Η  $y = 3x - 2$  εφάπτεται στο  $(1, 1)$ .

3.  $\alpha = 0, \beta = -1$ .

4. Η  $y = x + 1$  εφάπτεται της  $C_g$  στο σημείο  $(-1, 0)$ .

5.  $f(x) = x^3 4 - x^2 9 - x + 4$ .

6. Έστω ότι υπάρχει το  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  και καταλήγουμε σε αδύνατο σύστημα.

7. i) Προσθέτουμε και αφαιρούμε στον αριθμητή την ποσότητα  $xf'(a)$ .

ii) Προσθέτουμε και αφαιρούμε στον αριθμητή την ποσότητα  $e^x f'(a)$ . Να λάβετε

υπόψιν ότι το  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$  είναι η παράγωγος της  $h(x) = e^x$  στο  $a$ .

8.  $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$ .

9. i)  $f'(x) = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}$ ,  $x \neq 0$  και δεν παραγωγίζεται στο 0. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $(0, 0)$  είναι η  $x = 0$ .



ii)  $f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ,  $x \neq 0$  και  $f'(0) = 0$ . Η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $(0, 0)$  είναι η  $y = 0$ .

10. Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $A(1, f(1))$  είναι η  $y = x - 1 + f(1)$  που εφάπτεται της  $C_g$  στο  $(0, g(0))$ .

11. i)  $f'(0) = 1$ .

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η  $y = x + 1$  που σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

### § 2.4 Α' Ομάδας

1.  $E'(1) = -48\pi \text{ cm}^2/\text{s}$

$V'(1) = -72\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

2.  $\frac{25}{81\pi} \text{ cm/s}$ .

3.  $x \in (20 - \sqrt{220}, 20 + \sqrt{220})$ .

4. i)  $x(t) = 15t$ ,  $y(t) = 0$  t.

ii)  $d'(t) = 25 \text{ km/h}$ .

5.  $(2, 1)$ .

### § 2.4 Β' Ομάδας

1.  $425 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

2.  $(2\ln 5 + 2) \text{ cm}^2/\text{s}$ .

3.  $0,75 \text{ m/s}$ .

4.  $0,25 \text{ rad/min}$ .

5.  $0,2 \text{ m/s}$ .

6.  $2 \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$

7. i)  $-\frac{1}{25} \text{ rad/sec}$ .

ii)  $-\frac{\sqrt{2,75}}{25} \text{ m/s}$ .

8.  $3\sqrt{3} \text{ m/s}$ .

### § 2.5 Α' Ομάδας

1. i) 1      ii)  $\frac{\pi}{6}$  ή  $\frac{\pi}{2}$

iii)  $\frac{\pi}{2}$       iv) δεν ισχύει.

2. i) 2      ii)  $\frac{\pi}{4}$

iii)  $\zeta \in (-3, -1)$  και  $\zeta = 1$ .

3. Έχουμε  $g'(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha}$  και

$0 < \alpha < x_0 < \beta$  οπότε  $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{x_0} < \frac{1}{\alpha}$ .

### § 2.5 Β' Ομάδας

1. i) Θ. Bolzano στα διαστήματα  $[-1, 0]$  και  $[0, 1]$ .

ii) Θ. Rolle στο  $[x_1, x_2]$  όπου  $x_1, x_2$  οι ρίζες της  $f$  στα διαστήματα  $(-1, 0)$  και  $(0, 1)$ .

2. i) Θ. Rolle στο  $[0, 1]$ .

ii)  $\epsilon f x = 1 - x \Leftrightarrow f'(x) = 0$  που έχει ρίζα στο  $(0, 1)$ .

3. i) Υποθέτουμε ότι η εξίσωση  $f(x) - x = 0$  έχει 2 ρίζες  $x_1, x_2$  και εφαρμόζουμε Θ. Rolle για τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x$ ,  $x \in [x_1, x_2]$ .

ii) Εφαρμογή του ερωτήματος i) με

$$f(x) = \eta \mu \frac{x}{2}.$$

4. i)  $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 \geq 0$ .

ii) Θ.Μ.Τ. στο  $[\alpha, \beta]$ .

5. Θ.Μ.Τ. στο  $[0, 4]$ .

6. Δείξτε ότι  $f(0) \leq 0$  και  $f(0) \geq 0$ .

7. Υποθέτουμε ότι έχουν τρία κοινά σημεία με τεταγμένες  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$  και εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$  στα διαστήματα  $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$ .

**§ 2.6 Α' Ομάδας**

1.  $\varphi'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ , οπότε  $\varphi(x) = c$ .

2. i) Γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

ii) Γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, -1], [2, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-1, 2]$ .

iii) Γνησίως αύξουσα στο  $[-1, 1]$  και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα  $(-\infty, -1]$  και  $[1, +\infty)$ .

4. i) Γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-\infty, 1]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ .

ii) Γνησίως αύξουσα στο  $(0, 1]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ .

iii) Γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  και σταθερή με τιμή μηδέν στο  $[\pi, 2\pi]$ .

5. i)  $f'(x) = 5(x^4 + 1) > 0$  και

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 > 0, x \in (0, +\infty).$$

ii) Η  $f$  έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ , ενώ η  $g$  το διάστημα  $(-3, +\infty)$ .

iii) Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών των συναρτήσεων και είναι γνησίως αύξουσες.

6. i)  $f'(x) = e^x + \frac{1}{1+x} > 0$ .

ii)  $f(0) = 0$  και η  $f$  γνησίως αύξουσα.

**§ 2.6 Β' Ομάδας**

1. Με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής βρίσκουμε ότι  $f'(x_0) = 0, x_0 \in \mathbb{R}$ .

2. i)  $f'(x) = \beta(x^2 - 1) < 0$  για κάθε  $x \in (-1, 1)$ .

ii)  $[\alpha - 2, \alpha + 2]$

iii) Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$  και είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-1, 1)$ .

3. i)  $t = 1$  ή  $t = 4$ .

ii) Αριστερά όταν  $t \in (0, 4)$  και δεξιά όταν  $t \in (4, 5)$ .

iii) Η ταχύτητα αυξάνεται στα διαστήματα  $[0, 1]$  και  $[3, 5]$  και μειώνεται στο διάστημα  $(1, 3)$ .

$$4. V'(t) = -\frac{100t}{(t+2)^3} < 0$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 25$  και το σύνολο τιμών της  $V$  είναι το  $(25, 50]$ .

5. i)  $f'(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{(x^2 - 1)^2} > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .

ii) Όταν  $x$  ανήκει σε καθένα των διαστημάτων  $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$  η  $f$  παίρνει τιμές στο  $\mathbb{R}$  και επειδή η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα  $f(x) = \alpha$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$ , έχει 3 ρίζες.

6.  $\alpha \geq 3$ .

7. i)  $f'(x) = \chi \eta \mu x > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

ii) Ισχύει  $f(x) > f(0), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  αφού  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

iii)  $f'(x) = \frac{\sigma \nu \chi \cdot x - \eta \mu \chi}{x^2} < 0$  λόγω του ερωτήματος ii).

$$8. \text{ i) } f'(x) = \frac{(\sin x - 1)^2 (2 \sin x + 1)}{\sin^2 x} > 0$$

$$\text{για } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

ii) Επειδή  $f(0) = 0$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ , ισχύει  $f(x) \geq f(0)$ .

7. Είναι  $E(x) = -x^2 + 40x$ ,  $x \in (0, 40)$   
και μέγιστο το  $E(20) = 400$ .

$$8. \frac{4}{3} \text{ mgr.}$$

$$9. \text{ i) } (EZ)^2 = 2x^2 + 4. \text{ ii) } 1.$$

10. 30 μονάδες.

### § 2.7 Α' Ομάδας

1. Στο  $x = 1$  τοπικό μέγιστο και στο  $x = 3$  τοπικό ελάχιστο.

2. α) i) Γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

ii) Τοπικό μέγιστο το  $g(1) = 4$  και τοπικό ελάχιστο το  $g(3) = 0$ .

iii) Τοπικό μέγιστο το  $h(0) = -1$  και τοπικό ελάχιστο το  $h(1) = -2$ .

β) i) Μια ρίζα στο  $\mathbb{R}$  ως συνεχής και γνησίως αύξουσα.

ii) Μια ρίζα στο  $(-\infty, -1]$ , μια στο  $[-1, 1]$  και μια στο  $[1, +\infty)$ .

iii) Μια ρίζα στο  $[1, +\infty)$ .

3. i) Το  $f(0) = 0$  τοπικό ελάχιστο, το  $f(1) = 1$  τοπικό μέγιστο.

ii) Ελάχιστο το  $g(2) = -1$ .

4. i) Ελάχιστο το  $f(0) = 1$ .

ii) Ελάχιστο το  $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ .

5.  $\alpha = 1, \beta = 0$ , τοπικό μέγιστο το  $f(-1) = 3$  και τοπικό ελάχιστο  $f(1) = -1$ .

6. Είναι  $p(x) = 2\left(x + \frac{400}{x}\right)$ ,  $x > 0$  και ελάχιστο το  $p(20) = 80$ .

### § 2.7 Β' Ομάδας

1. i) Γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ .

ii) Μια ακριβώς ρίζα στο  $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ .

2. i) Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

ii) Γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ . Ελάχιστο το  $\varphi(1) = 0$ .

iii) Κοινό σημείο  $(1, 0)$ , κοινή εφαπτομένη την  $y = x - 1$ .

3. i) α) Η  $f(x) = e^x - x - 1$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$  οπότε  $f(x) > f(0)$ .

β) Η  $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

ii) α) Αν  $f(x) = \sin x - 1 + \frac{1}{2}x^2$ , τότε  $f''(x) =$

$-\sin x + 1$  οπότε η  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Άρα  $f'(x) > f'(0)$ , οπότε και  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος

α) βρίσκουμε ότι η  $g(x) = \eta \mu x + \frac{1}{6}x^3 - x$ ,  
 $x \in \mathbb{R}$

είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

iii) α) Αν  $f(x) = (1+x)^v - 1 - vx, x \geq 0$  τότε  
 $f'(x) = v[(1+x)^{v-1} - 1] > 0$ .

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) βρίσκουμε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = (1+x)^v - 1 - vx - \frac{v(v-1)}{2}x^2$$

είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

4. Η  $f'(x) = 0$  είναι αδύνατη στο  $\mathbf{R}$ .

5. Θεωρούμε την  $h(x) = f(x) - g(x)$ , οπότε

$$f'(\zeta) = g'(\zeta) \text{ με } \zeta \in (x_1, x_2).$$

6. Είναι  $f'(a) = f'(b) = f'(c) = 0$  και  $\Theta$ . Rolle στα διαστήματα  $[a, b]$  και  $[b, c]$ .

7. ii)  $x = \frac{4}{11}(9 - 4\sqrt{3}) \cong 0,75 \text{ m}$ .

8. i)  $(MA)^2 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + x$  και  $M(4, 2)$ .

ii)  $\lambda_{\infty} \cdot \lambda_{AM} = -1$ .

9.  $\frac{200}{\pi}$  και 100.

10. Οι εισπράξεις είναι

$$E(x) = x(1500 - 5x).$$

$$E'(x) = 0, \text{ οπότε } x = 150.$$

11. i)  $t = 200 \text{ s}$  ii)  $t \cong 55,6 \text{ s}$ .

12. i)  $E = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot HB$ , όπου  $HB$  ύψος τραπεζίου. Είναι  $HB = 2\eta\mu\theta$  και  $H\Gamma = 2\sigma\eta\theta$ .

ii)  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

13. ii) 75.

14. Η πυκνότητα του καπνού είναι

$$r = r_1 + r_2$$

$$= k \frac{p}{x^2} + k \cdot \frac{8p}{(12-x)^2}, k \in \mathbf{R}.$$

Σε 4 km από το εργοστάσιο  $E_1$ .

### § 2.8 Α' Ομάδας

1. i) Κοίλη στο  $(-\infty, 1]$ , κυρτή στο  $[1, +\infty)$  και το  $(1, 0)$  σημείο καμπής.

ii) Κοίλη στα  $(-\infty, -2], (0, 2]$ , κυρτή στα  $[-2, 0]$  και  $[2, +\infty)$ , ενώ τα σημεία καμπής είναι  $\left(-2, -\frac{5}{4}\right)$  και  $\left(2, \frac{5}{4}\right)$ .

2. i) Κοίλη στο  $(-\infty, 2]$ , κυρτή στο  $[2, +\infty)$ , ενώ το  $\left(2, \frac{2}{e}\right)$  είναι σημείο καμπής.

ii) Κοίλη στο  $(0, e]$ , κυρτή στο  $[e, +\infty)$ , ενώ το  $(e, -3e^2)$  είναι σημείο καμπής.

iii) Κοίλη στο  $(-\infty, 0], [1, +\infty)$ , κυρτή στο  $[0, 1]$ , και τα  $(0, 1), (1, 3)$  σημεία καμπής.

3. i) Κυρτή στα  $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right], \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ ,

κοίλη στο  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  και τα

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$  σημεία καμπής.

ii) Κοίλη στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  και κυρτή στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ , ενώ το  $(0, 0)$  είναι σημείο καμπής.

iii) Κοίλη στο  $(-\infty, 0]$ , κυρτή στο  $[0, +\infty)$  και το  $(0, 0)$  σημείο καμπής.

iv) Κοίλη στο  $(-\infty, 0]$ , κυρτή στο  $[0, +\infty)$  και το  $(0, 0)$  είναι σημείο καμπής.

v) Κυρτή στο  $(-\infty, 0]$ , κοίλη στο  $[0, +\infty)$  και το  $(0, 0)$  σημείο καμπής.

4. • - γνησίως αύξουσα στα  $[-1, 1]$ ,  $[4, 8]$ .

- γνησίως φθίνουσα στα  $[1, 4]$ ,  $[8, 10]$ .

• - κοίλη στα  $[0, 2]$ ,  $[5, 6]$  και  $[7, 10]$ .

- κυρτή στα  $[-1, 0]$ ,  $[2, 5]$  και  $[6, 7]$ .

• - Τα 1, 8 είναι θέσεις τοπικών μεγίστων.

- Τα  $-1, 4, 10$  είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων.

• - Τα 0, 2, 5, 6, 7 είναι θέσεις σημείων καμπής.

5. i) Όταν  $t \in [0, t_2]$  κινείται αριστερά και όταν  $t \in [t_2, +\infty)$  δεξιά.

ii) Η ταχύτητα αυξάνεται στο διάστημα  $[t_1, t_3]$  και μειώνεται σε καθένα από τα διαστήματα  $[0, t_1]$  και  $[t_3, +\infty)$ .

### § 2.8 Β' Ομάδας

1.  $A\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ,  $B(0, 0)$  και  $\Gamma\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ .

Τα  $A, \Gamma$  έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

2.  $(\alpha, 2 - \alpha^2)$ .

3.  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

4. i) Τοπικό μέγιστο το  $f(\emptyset = 2$ , τοπικό ελάχιστο το  $f(\mathcal{Z} = -2$  και σημείο καμπής το  $(1, 0)$ .

ii)  $\lambda_{AB} = \lambda_{AT} = -2$ .

5. Η  $f''$  δεν μηδενίζεται στο  $(-2, 2)$ .

### § 2.9 Α' Ομάδας

1. i)  $x = 2$ . ii)  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .

iii) δεν υπάρχουν iv)  $x = 0$ .

2. i)  $y = 1$ . ii)  $y = 0$  στο  $+\infty$ .

3. i)  $y = x$ ,  $x = 1$ .

i)  $y = x + 2$ ,  $x = 2$ .

iii)  $y = x + \frac{1}{2}$  στο  $+\infty$  και

$y = -x - \frac{1}{2}$  στο  $-\infty$ .

4. i) 1. ii)  $\frac{1}{2}$ . iii) 0.

### § 2.9 Β' Ομάδας

1. i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x-1)) = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$ .

ii) Η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  και άρα βρίσκεται πάνω από την  $\varepsilon_1$  κοντά στο  $-\infty$  και πάνω από την  $\varepsilon_2$  κοντά στο  $+\infty$ .

2. i)  $y = 0$ . ii)  $y = 0$ .

3.  $\alpha = 1, \beta = 1$ .

4. Χρησιμοποιήστε τους κανόνες de L' Hospital.

5. Χρησιμοποιήστε τους κανόνες de L' Hospital.

6. i) 1, 0. iii)  $x = 0$ .

### § 2.10 Α' Ομάδας

1. i) Είναι  $f''(x) = 6x^2 - 2x + 3$ ,  $f''(x) = 6x - 6$  και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .

- ii)  $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$ ,  
 $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$ , ασύμπτωτες  
 $y = 1, x = 1$  και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .
2. i)  $f'(x) = \frac{x^2-1}{x}$ ,  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ , ασύμπτωτες  
 $x = 0$  και  $y = x$  και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .
- ii) Ομοίως.
3.  $f'(x) = 1 + \sin x$ ,  $f''(x) = -\eta\mu x$  και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  στο  $[-\pi, \pi]$ .

6. i)  $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2\ln x-3}{x^3}$  και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$ .
- ii) Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[e, +\infty)$ , οπότε  
 $f(\alpha) > f(\alpha+1) \Leftrightarrow \alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^\alpha$
- iii) Να λογαριθμήσετε την ισότητα  $2^x = x^2$ . Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, e]$ , οπότε παίρνει την τιμή  $x = 2$  μια φορά. Ομοίως στο  $[e, +\infty)$  παίρνει την τιμή  $x = 4$  μια φορά.
7. i) Να πάρετε τη συνάρτηση  $f(x) = \alpha^x + \beta^x$  και να εφαρμόσετε το θεώρημα του Fermat.
- ii) Να πάρετε τη συνάρτηση  $f(x) = \alpha^x - x - 1$  και να εφαρμόσετε το Θ. Fermat.

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**  
**2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

**Γ' Ομάδας**

1. i)  $f'(1) = g'(1)$ .
- ii) Να πάρετε τη διαφορά  $\varphi(x) = g(x) - f(x)$  και να εξετάσετε το πρόσημό της.
2. Να πάρετε τη συνάρτηση  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ .
3.  $E'(\theta) = \sin 2\theta + \sin \theta$ .  
 Μέγιστο το  $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ .
4. Το εμβαδόν του τομέα είναι  $E = \frac{1}{2}r^2\theta$  ή  
 $E(r) = 10r - r^2$ . Μέγιστο το  $E(\mathfrak{F}) = 25$ .
5. iii)  $\theta = \frac{\pi}{4}$  και το μήκος της σκάλας είναι  
 $2\sqrt{2} \cong 2,8$  m.

8. i)  $f''(x) = e^x > 0$ ,  $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ .
- i)  $y = x + 1$  και  $y = x - 1$ .
- iii) η  $f$  είναι κυρτή, ενώ η  $g$  είναι κοίλη.
- iv) Να πάρετε τη διαφορά  $f(x) - g(x)$ .
9. i)  $\lambda(1+ n\lambda)$ . ii)  $\lambda = e$
- iii) Θεωρείστε τη διαφορά  $g(x) - \lambda x$  που είναι η  $f'(x)$ .
10. i)  $f'(0) = 0$  ii)  $x = \frac{1}{k\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ .
- iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$  και  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$ .
11. A. i)  $\psi'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ , οπότε  $\psi(x) = c$   
 i)  $\varphi'(x) = 0$  και  $\varphi(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ .
- B. ii) Να λάβετε υπόψιν το ερώτημα A.

12. i)  $\det(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = 0$ .

ii) Να εφαρμόσετε τους κανόνες de L'Hospital.

13. A. i) Αν  $OA$  το ύψος του τριγώνου  $OPA$ ,

$$\text{τότε } \eta\mu \frac{\theta}{2} = \frac{l}{4}$$

i)  $S = vt$ , οπότε  $S = 4t$

$$B. l'(t) = 4\sigma\upsilon\nu t.$$

α) 2 km/h β) 0 km/h γ) -2 km/h.

14. Συνολικό κόστος

$$K(x) = 600 + \frac{1000}{x} + 10(x+1).$$

Πρέπει να προσλάβει 10 εργάτες.

### 3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

#### § 3.1 Α' Ομάδας

1. i)  $\frac{x^4}{4} - \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + c$

ii)  $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + c$

iii)  $\frac{6}{5}x^{5/2} + c$

iv)  $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + c$

v)  $e^x - 3\ln|x| + \frac{1}{2}\eta\mu 2x + c$

vi)  $\epsilon\phi x + \sigma\phi x + c$

vii)  $x + \ln|x+2| + c$ .

2.  $f(x) = 2\sqrt{x} - 5$ .

3.  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4$ .

4.  $f(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$ .

5. 19 εκατ.

6.  $K(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 100$ .

7. 352 χιλ.

#### § 3.1 Β' Ομάδας

1.  $T(t) = ae^{-kt} + T_0$

2. 9.976 ευρώ.

3. 814,4 ευρώ.

4.  $f'(x) = g'(x) + c_1$  κ.τ.λ.

#### § 3.2 Α' Ομάδας

1. i)  $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$

ii)  $\frac{1}{4}e^{2x}(6x^2 - 10x + 7) + c$

iii)  $\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{x^4}{16} + c$

iv)  $(-x^2 + 1/2)\sigma\upsilon\nu 2x + x\eta\mu 2x + c$

v)  $2x\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x + c$

vi)  $x \ln x - x + c$

vii)  $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$

viii)  $\frac{1}{5}e^x(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) + c$

ix)  $\frac{1}{2}e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + c$ .

2. i)  $-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x + c$

ii)  $\frac{1}{32}(4x^2 - 16x + 7)^4 + c$

iii)  $\frac{-1}{6(x^2 + 6x)^3} + c$

iv)  $\frac{2}{3}(2 + x^3)^{1/2} + c$

v)  $\frac{2}{15}(x+1)^{3/2}(3x-2) + c$ .

3. i)  $-\sigma\upsilon\nu e^x + c$  ii)  $\ln(e^x + 1) + c$

iii)  $2\sqrt{\ln x} + c$

iv)  $\ln(\ln(e^x + 1)) + c$

v)  $\text{συν}\frac{1}{x} + c.$

ii)  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c.$

iii)  $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\eta\mu 4x + c.$

6. i)  $\frac{1}{2}\text{συν}x - \frac{1}{6}\text{συν}3x + c$

ii)  $\frac{1}{4}\eta\mu 2x + \frac{1}{16}\eta\mu 8x + c$

iii)  $\frac{1}{4}\eta\mu 2x - \frac{1}{12}\eta\mu 6x + c.$

7. i)  $\ln|x^2 - 3x + 2| + c$

ii)  $-5\ln|x-1| + 8\ln|x-2| + c$

iii)  $\frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x+1| + 4\ln|x+2| + c$

iv)  $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.$

**§ 3.2 Β' Ομάδας**

1. i)  $-\ln(1 + \text{συν}^2x) + c$

ii)  $-\frac{1}{2}[\ln(\text{συν}x)]^2 + c$

iii)  $e^{\eta\mu x} + c.$

2. i)  $-\frac{2}{9}\left(\frac{x^3+1}{x^3}\right)^{3/2} + c$

ii)  $\sqrt{x^2+1} + c$

iii)  $\frac{1}{2}(x^2+1)[\ln(x^2+1)-1] + c.$

3. i)  $\frac{x^3}{3}(\ln x^2 - \frac{2}{3}) + c$

ii)  $t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t + c$

iii)  $e^x\eta\mu e^x + \text{συν}e^x + c.$

4. i)  $-\ln|\text{συν}x| + c$  και

$x\epsilon\phi x + \ln|\text{συν}x| + c$

ii)  $-\frac{1}{\eta\mu x} + c$  και

$-\sigma\phi x - \frac{1}{\eta\mu x} + c$

iii)  $\frac{\text{συν}^3x}{3} - \text{συν}x + c$  και

$\eta\mu x - \frac{\eta\mu^3x}{3} + c.$

5. i)  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c$

**§ 3.3 Α' Ομάδας**

1. i)  $y = \frac{1}{2x^2+c}$  ii)  $y^2 - x^2 = c$

iii)  $y = ce^{x^2}$  iv)  $y = \ln(\eta\mu x + c).$

2. i)  $y = -\frac{3}{2} + ce^{2x}$  ii)  $y = e^{-x} + ce^{-2x}$

iii)  $y = 2x + ce^{-x} + 2$

iv)  $y = ce^{-x^2} + 1/2.$

3.  $y = \frac{-3}{2x^2+1}$

4.  $y = \frac{2}{3}.$

5. i)  $y = 1 - \frac{4}{e^{6\phi x}}$

ii)  $y = \frac{x \ln x - x + 21}{x+1}.$



**§3.3 Β' Ομάδας**

1.  $I(t) = \frac{1}{2}(\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t) + \frac{1}{2}e^{-t}$ .

2.  $y^2 = 2x$ .

3.  $y = x^2 + cx$ .

4.  $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ .

5.  $y(t) = \frac{\beta}{\alpha - \lambda} \cdot \frac{1}{e^{\lambda t}} + \frac{c}{e^{\alpha t}}$ .

6.  $\partial(t) = T + (\partial_0 - T)e^{-\kappa t}$ .

7. ii)  $P(t) = \frac{m}{\kappa} + \left(P_0 - \frac{m}{\kappa}\right)e^{\kappa t}$ ,  $\kappa > 0$ .

8. i)  $\frac{dV}{dt} = 100\pi y'$

ii)  $y(t) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{100}t + 6\right)^2$

iii)  $t = 120\sqrt{5}$  sec.

9.  $E(t) = E_0 e^{\frac{t-t_1}{Rc}}$ .

10. i) α)  $I(t) = 5 + \frac{c}{e^{3t}}$ , β) 5

ii)  $I(t) = \frac{5}{4}(\eta\mu 3t - \sigma\upsilon\nu 3t) + \frac{c}{e^{3t}}$ .

2. Εφαρμόζουμε ιδιότητες.

4. 1

5. i)  $-\eta\mu x \cdot |\eta\mu x| i$  ii)  $-\frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{2x}$

6. i)  $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

ii) χρησιμοποιείστε το (i).

**§3.5 Β' Ομάδας**

1. 10.

2.  $f'(x) = 0$ .

3. Τοπ. ελάχιστο το  $f(2) = 0$ .

4.  $\int_0^x f(t)dt + xf(x)$ .

5.  $F(x) = 0$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

6. De l' Hospital.

7. i)  $4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$  ii)  $-\sigma\upsilon\nu 1$ .

8. i)  $\frac{5}{3}$  ii)  $2 - \frac{\pi^2}{2}$  iii)  $\frac{11}{6}$ .

9. i) 4 ii)  $\frac{e-2}{e}$

iii)  $5\ln 10 - \frac{9}{2}\ln 9 - \frac{1}{2}$ , iv)  $-\frac{1}{5}(e^{\pi/2} + 1)$ .

10.  $\frac{\pi^2}{8}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$ ,  $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$ .

11.  $f(0) = 1$ .

12. κατά παράγοντες.

**§3.4 Α' Ομάδας**

1. i) -11 ii) 4 iii) -2 iv) 15.

2.  $\ln \frac{1}{t} = \ln 1 - \ln t$ .

3.  $\kappa = 4$ .

4. i) 22 ii) -12

**§3.5 Α' Ομάδας**

1. i) 6 ii)  $3 - \frac{2}{\sqrt{e}}$  i)  $\frac{29}{6}$

1.  $\vec{f} = 1$ .

3.  $\frac{\alpha + \beta}{2}$ .

**§3.6 Β' Ομάδας**

1.  $\bar{f} = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}, \bar{g} = \frac{1}{\alpha\beta}.$

2. α)  $\frac{PR^2}{6nl}$  β)  $v_{μσγ} = \frac{PR^2}{4nl}.$

**§3.7 Α' Ομάδας**

1.  $\frac{14}{3}$  τ.μ.

2. i)  $\frac{3^5}{4}$  τ.μ. ii)  $\sqrt{3}$  τ.μ.

3.  $\frac{9}{2}$  τ.μ.

4.  $\frac{37}{12}$  τ.μ.

5.  $\frac{125}{6}$  τ.μ.

**§3.7 Β' Ομάδας**

1.  $y = 6x - 3, E = \frac{1}{4}$  τ.μ.

2.  $4 + \frac{8}{3}\sqrt{2}$  τ.μ.

3.  $\frac{11}{12}$  τ.μ.

4.  $\frac{1}{6}$  τ.μ.

5. i)  $1 + e(\ln\lambda - 1)$  ii)  $+\infty.$

6.  $\frac{2}{\ln 3} + \frac{3}{2}$  τ.μ.

7.  $\frac{7}{4}$  τ.μ.

8. i)  $y = x, y = -x + \pi$  ii)  $\frac{\pi^2}{4} - 2.$

9. α)  $\frac{1}{3}$  τ.μ. β)  $x = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3}.$

10.  $\frac{1}{2}.$

11. i)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  ii)  $\frac{1}{6}$  τ.μ.

12. i)  $y = -2x + 2, y = 2x - 6$

ii)  $E_1 = \frac{4}{3}, E_2 = \frac{2}{3}.$

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ  
3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

**Γ' Ομάδας**

1. ii)  $\frac{\pi}{4} \ln 3.$

2. i)  $-\ln\sqrt{3}$  ii)  $\ln\sqrt{3}.$

3.  $\ln|u+1| - \ln|u+2| + c$

i)  $\ln|\eta\mu x + 1| - \ln|\eta\mu x + 2| + c$

ii)  $\ln(e^x + 1) - \ln(e^x + 2) + c.$

4. i)  $\frac{1}{2v+2}$

ii)  $\frac{1}{2} \ln 2, \frac{1}{2}(1 - \ln 2), \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}.$

5. Τα μέλη της ισότητας έχουν ίσες παραγώγους.

6. i)  $D_f = [1, +\infty) D_g = [1, +\infty).$

7. i)  $F(x) + G(x) = e^x - 1,$

$F(x) - G(x) = \frac{e^x}{5} (\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) - \frac{1}{5}$

ii)  $I = \frac{3}{5} e^\pi (e^\pi - 1), J = \frac{2}{5} e^\pi (e^\pi - 1).$

$$8. \alpha = \sqrt[3]{4}.$$

$$9. \text{ i) } 0 < \lambda < 1, E(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - 1,$$

$$\lambda > 1, E(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

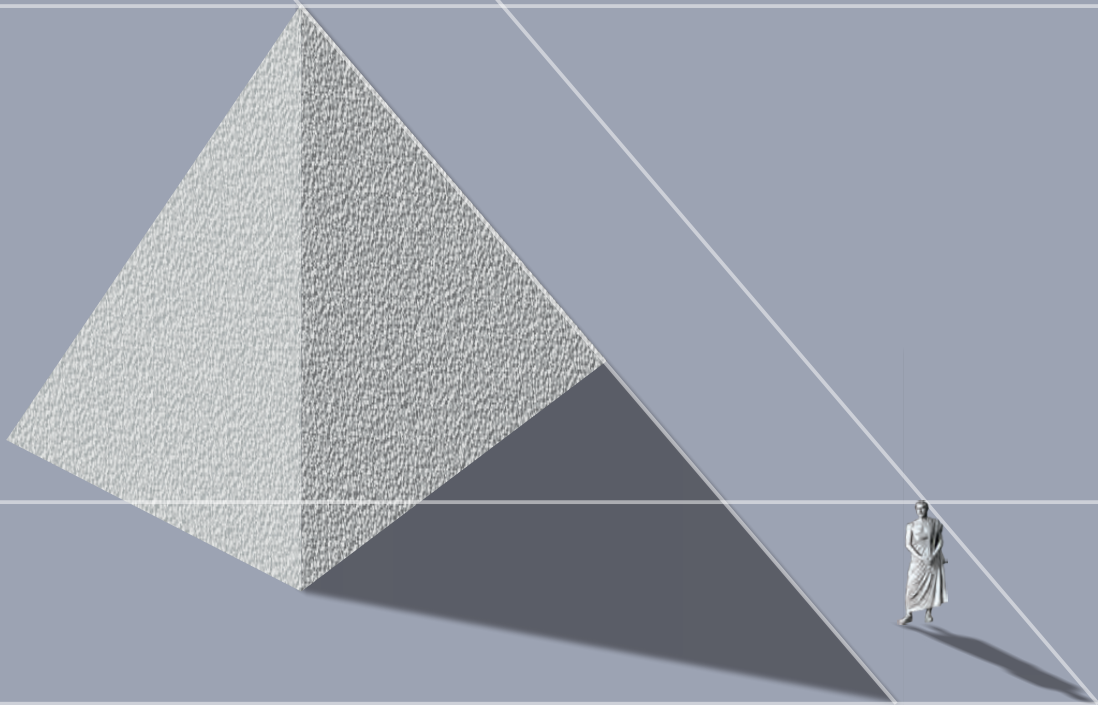
$$\text{ ii) } \lambda = 2 \quad \text{ iii) } +\infty \text{ και } 1.$$

$$10. \text{ i) } \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \geq 0.$$



Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α΄).

*Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.*

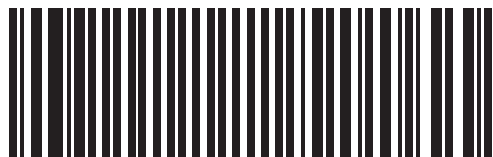


Κωδικός Βιβλίου: 0-22-0181

ISBN 978-960-06-2430-4



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ & ΕΚΔΟΣΕΩΝ



(01) 000000 0 22 0181 8