$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$: ΤΟ ΚΡΕΜΑΜΕΝΟ ΣΧΟΙΝΙ

του Δημήτρη Καλυκάκη

Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε μια πρόταση διδασκαλίας που εστιάζει και εμβαθύνει στην εκθετική συνάρτηση e^x και ειδικότερα στην άρτια και περιττή της συνιστώσα $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, το γνωστό «υπερβολικό συνημίτονο» και «υπερβολικό ημίτονο» αντίστοιχα και αφορά το μάθημα των μαθηματικών της Β΄ και Γ΄ Λυκείου.

Στόχος μας είναι η επίλυση ενός από τα κλασικά προβλήματα των μαθηματικών: «*Να βρεθεί η καμπύλη η οποία σχηματίζεται από ένα σχοινί που κρέμεται ελεύθερα από δύο σταθερά σημεία*», την οποία πραγματοποιούμε και παρουσιάζουμε αναλυτικά βήμα προς βήμα. Στην πορεία αυτή εμπλέκονται σχεδόν όλες οι έννοιες της Άλγεβρας Β΄ Λυκείου και της Ανάλυσης Γ΄ Λυκείου (τριγωνομετρία, πολυώνυμα, εκθετική/ λογαριθμική συνάρτηση, άρτιες/περιττές συναρτήσεις, αντίστροφη συνάρτηση, μονοτονία, ακρότατα, παράγωγος, ολοκλήρωμα, κ.ά.), παρέχονται ποικίλες ερμηνείες των εννοιών (αλγεβρικές, γεωμετρικές, φυσικές), ενώ γίνεται χρήση της ιστορίας των μαθηματικών και ιδεών από τη φυσική και την αρχιτεκτονική.

Ας πάρουμε όμως τα πράγματα με τη σειρά.

1. Ένα επεισόδιο από την ιστορία των μαθηματικών

Στο τεύχος Μαΐου 1690 του περιοδικού Acta Eruditorum ο Jakob Bernoulli (1654-1705) έγραφε: «Ας θέσουμε τώρα το ακόλουθο πρόβλημα: *Να βρεθεί η καμπύλη η οποία σχηματίζεται από ένα σχοινί που κρέμεται ελεύθερα από δύο σταθερά σημεία.*» Το σχοινί έχει υποτεθεί ότι είναι εύκαμπτο σε όλο το μήκος του και ότι έχει ομοιόμορφο πάχος.

Ο Γαλιλαίος (1564-1642) είχε ήδη ασχοληθεί με το πρόβλημα αυτό και είχε διατυπώσει την εικασία ότι επρόκειτο για παραβολή. Η εικασία του όμως ήταν λανθασμένη. Την λανθασμένη αυτή εικασία κατέρριψε ο Joachim Jungious (1587-1657) με μια εργασία του που δημοσιεύτηκε το 1669 μετά το θάνατό του. Το ίδιο είχε πετύχει και ο ολλανδός μαθηματικός

Christiaan Huygens (1629-1695) με μια αδημοσίευτη εργασία του το 1646 σε ηλικία μόλις δεκαεφτά ετών.

Μέχρι το 1690/91 η καμπύλη η οποία σχηματίζεται από ένα σχοινί που κρέμεται ελεύθερα από δύο σταθερά σημεία, δεν ήταν γνωστή. Το μόνο που ήταν γνωστό ήταν ότι αποκλειόταν να είναι παραβολή. Τον Ιούνιο του 1691 το περιοδικό Acta Eruditorum δημοσίευσε τρεις ορθές λύσεις που είχαν υποβληθεί από τον Christiaan Huygens, τον Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) και τον Johann Bernoulli (1667-1748) - μικρότερο αδελφό του Jakob Bernoulli που είχε θέσει το πρόβλημα. Ο καθένας τους είχε προσεγγίσει το πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο, αλλά όλοι είχαν καταλήξει στη ίδια λύση, τη λεγόμενη «*αλυσοειδή*» καμπύλη (*catenary* στα αγγλικά, που προέρχεται από την λατινική λέξη *catena* - *καδένα* στην νεοελληνική - που σημαίνει αλυσίδα) η οποία είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο:

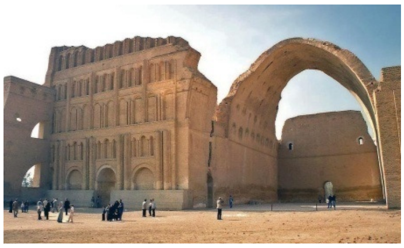
$$\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2\alpha},$$

όπου α μια θετική σταθερά που εξαρτάται από τη φύση του σχοινιού. Για $\alpha = 1$ προκύπτει η συνάρτηση $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ οι ιδιότητες της οποίας, θα συζητηθούν εκτενέστατα στη συνέχεια.

Για τη ιστορία σημειώνουμε ότι ο Huygens ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο «catenaria» σε μια επιστολή του προς τον Leibniz στις 18 Νοεμβρίου 1690. Παρόλα αυτά, ο Thomas Jefferson (1743-1826), ο τρίτος Πρόεδρος των Ηνωμένων Πολιτειών, έχει πιστωθεί την πατρότητα του αγγλικού όρου «catenary» από μια απαντητική επιστολή που έστειλε στο φίλο του Thomas Paine στις 23 Δεκεμβρίου 1788 σχετικά με το σχεδιασμό μιας γέφυρας.

Η αλυσοειδής καμπύλη έχει απεικονιστεί σε μερικά από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου. Ένα από αυτά είναι η αψίδα Gateway Arch στο St. Louis του Μισούρι στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής. Σχεδιάστηκε από τον Φιλανδό αρχιτέκτονα Eero Saarinen (1910-1961), η κατασκευή της ολοκληρώθηκε το 1965 και έχει το ακριβές σχήμα ανεστραμμένης αλυσοειδούς, της οποίας η κορυφή βρίσκεται 192 μέτρα (630 πόδια) πάνω από τις όχθες του Μισισιπή, προσεγγίσιμη με δύο ασανσέρ χωρητικότητας δώδεκα ατόμων το καθένα. Το άνοιγμα της αψίδας είναι όσο και το ύψος της, 192 μέτρα και ολόκληρη η αψίδα ζυγίζει 17.246 τόνους.

Περίφημη επίσης είναι και η αψίδα του Taq-i Kisra, ένα από τα σημαντικότερα μνημεία της Περσίας (Ιράκ). Είναι το μοναδικό ορατό σήμερα μνημείο της αρχαίας πόλης του Κτησιφώντα η οποία ήταν, κατά τους ιστορικούς, η μεγαλύτερη πόλη του κόσμου τον 6^{o} αιώνα μ.Χ. Τα ερείπιά της βρίσκονται 35 χιλιόμετρα νότια της Βαγδάτης. Η αψίδα του Taq-i Kisra ήταν μέρος του βασιλικού ανακτόρου, το οποίο κτίστηκε κατά την περίοδο των διαδόχων της δυναστείας των Σελευκιδών (ύστερη ελληνιστική περίοδος). Η αίθουσα του θρόνου σκεπαζόταν από την αψίδα, που είχε σχήμα ανεστραμμένης αλυσοειδούς, ύψους 30 μέτρων και κάλυπτε έκταση (24μ)x(48μ).



Εκτεταμένη χρήση της ανεστραμμένης αλυσοειδούς στα έργα του έκανε και ο διάσημος Ισπανός-Καταλανός αρχιτέκτονας Antoni Gaudi (1854-1926). Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η φημισμένη καθολική εκκλησία Sagrada Familia στη Βαρκελώνη.

2. Ορισμός, συμβολισμός και γραφική παράσταση του υπερβολικού συνημιτόνου και ημιτόνου

Οι λεγόμενες «*υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις*» ορίζονται και συμβολίζονται ως εξής:

$$coshx = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{(υπερβολικό συνημίτονο)}$$

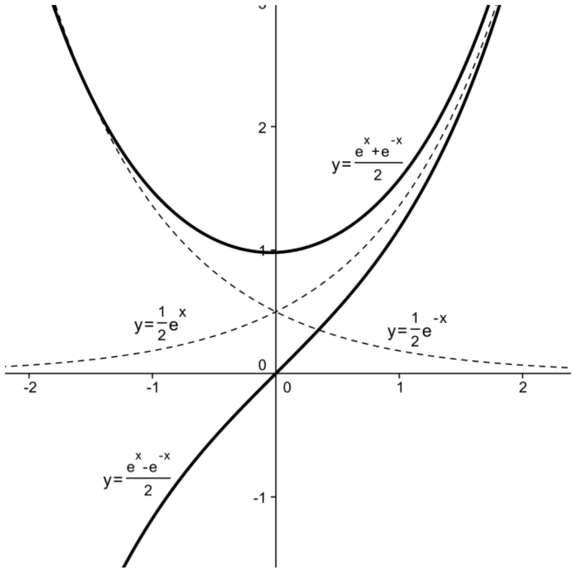
$$sinhx = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{(υπερβολικό ημίτονο)}$$

για κάθε $-\infty < x < +\infty$.

Πρόκειται, όπως θα δούμε στη συνέχεια, για την άρτια και περιττή συνιστώσα, αντίστοιχα, της εκθετικής συνάρτησης e^x. Επίσης, παρακάτω θα εξηγήσουμε γιατί ονομάζονται έτσι οι δύο αυτές συναρτήσεις, ενώ όσο αφορά τον συμβολισμό, αυτός οφείλεται στον Ιταλό Ιησουίτη μοναχό Vincenzo Riccati (1707-1775).

Ο Riccati εισήγαγε για αυτές τον συμβολισμό Chx και Shx ο οποίος παρέμεινε σχεδόν αναλλοίωτος μέχρι τις μέρες μας. Ήταν δε και ο πρώτος που μελέτησε συστηματικά τις ιδιότητες τους. Ο συμβολισμός coshx (cosinus hyperbolicus: υπερβολικό συνημίτονο) και sinhx (sinus hyperbolicus: υπερβολικό ημίτονο) έχει καθιερωθεί διεθνώς. Στα ελληνικά δεν έχει καθιερωθεί άλλος συμβολισμός (όπως το συνx και ημx για το cosx και sinx, αντίστοιχα).

Στο παρακάτω σχήμα παρίσταται η γραφική παράσταση και η ασυμπτωτική συμπεριφορά του υπερβολικού συνημιτόνου και του υπερβολικού ημιτόνου.



Είναι δυνατόν να οριστούν και κλασματικές εκφράσεις των coshx και sinhx (π.χ. η υπερβολική εφαπτομένη ως $\frac{sinhx}{coshx}$, κ.ά.), αλλά αυτές είναι πέρα από το σκοπό της παρούσας εργασίας.

Οι υπερβολικές συναρτήσεις coshx και sinhx παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη τριγωνομετρία του υπερβολικού επιπέδου H^2, στη μιγαδική τριγωνομετρία και στην επίλυση προβλημάτων που αφορούν στην ανάρτηση και ηλεκτρική συμπεριφορά γραμμών μεταφοράς και διανομής ηλεκτρικής ενέργειας.

3. Η αλγεβρική ερμηνεία του υπερβολικού συνημιτόνου και ημιτόνου

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται *άρτια* αν $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ λέγεται *περιττή* αν $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον y-άξονα, ενώ μιας περιττής συνάρτησης ως προς την αρχή των αξόνων. Η μοναδική συνάρτηση που είναι ταυτόχρονα και άρτια και περιττή είναι η μηδενική.

Η αλγεβρική ερμηνεία του υπερβολικού συνημιτόνου και ημιτόνου βασίζεται στην παρακάτω πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1
Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μπορεί να γραφεί, κατά μοναδικό τρόπο, ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης.*
ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε το $f(x)$ με 2 και στη συνέχεια προσθαφαιρούμε το $f(-x)$. Έχουμε λοιπόν,

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι το πρώτο κλάσμα είναι μια άρτια συνάρτηση, ενώ το δεύτερο είναι μια περιττή (άμεση συνέπεια του ορισμού). Η μοναδικότητα της γραφής προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η μοναδική συνάρτηση που είναι ταυτόχρονα και άρτια και περιττή είναι η μηδενική.■

Αν εφαρμόσουμε την παραπάνω πρόταση στην εκθετική συνάρτηση e^x έχουμε,

$$e^x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Με άλλα λόγια, παρατηρούμε ότι το υπερβολικό συνημίτονο $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και το υπερβολικό ημίτονο $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ είναι στη ουσία *η άρτια και η περιττή συνιστώσα, αντίστοιχα, της εκθετικής συνάρτησης*. Σημειώνουμε ότι αυτή η αλγεβρική ερμηνεία των δύο αυτών υπερβολικών συναρτήσεων δεν τονίζεται στη βιβλιογραφία. Στην καλύτερη περίπτωση αναφέρεται αόριστα ότι πρόκειται για γραμμικούς συνδυασμούς εκθετικών συναρτήσεων.

4. Ερμηνεία της ορολογίας και υπερβολικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

Στην παράγραφο αυτή θα εξηγήσουμε γιατί οι συναρτήσεις:

$$coshx = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ (υπερβολικό συνημίτονο)}$$

$$sinhx = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \text{ (υπερβολικό ημίτονο)}$$

α) καλούνται «υπερβολικές» και β) γιατί φέρουν την ονομασία του «συνημιτόνου» και «ημιτόνου», η οποία έχει κατοχυρωθεί για τις γνωστές κυκλικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις $συνx$ και $ημx$.

Ας ξεκινήσουμε από το γιατί καλούνται «υπερβολικές». Αν θέσουμε

$$x = cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$$
$$y = sinh\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$$

τότε έχουμε διαδοχικά,

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\theta}+2+e^{-2\theta}}{4} - \frac{e^{2\theta}-2+e^{-2\theta}}{4} = 1.$$

Το γεγονός αυτό, μαζί με το ότι το υπερβολικό συνημίτονο έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[1, +\infty)$, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το σημείο $(cosh\theta, sinh\theta)$ διατρέχει ολόκληρο το δεξιό σκέλος της *υπερβολής* με εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$, καθώς το θ μεταβάλλεται από $-\infty$ μέχρι $+\infty$.

Αυτό που στην πραγματικότητα κάναμε παραπάνω ήταν ότι χρησιμοποιήσαμε ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης για να αποδείξουμε την υπερβολική τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$cosh^2x - sinh^2x = 1,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία βρίσκεται σε αναλογία με τη γνωστή θεμελιώδη κυκλική τριγωνομετρική ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu^2x + \eta\mu^2x = 1$.

Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα κατάλογο από υπερβολικές τριγωνομετρικές ταυτότητες οι οποίες αντιστοιχούν σε γνωστές κυκλικές τριγωνομετρικές ταυτότητες. Η διαφορά τους είναι μονάχα σε κάποια πρόσημα. Όλες αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης. Η αναλογία αυτή είναι ο λόγος για τον οποίο υιοθετήθηκε τριγωνομετρική ορολογία για τις υπερβολικές συναρτήσεις coshx και sinhx.

Υπερβολικές τριγωνομετρικές ταυτότητες	Κυκλικές τριγωνομετρικές ταυτότητες
$cosh^2x - sinh^2x = 1$	$\sigma\upsilon\nu^2x + \eta\mu^2x = 1$
$\sinh(-x) = -sinhx$	$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$
$\cosh(-x) = coshx$	$\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$
$\sinh(x+y) = sinhx\ coshy + coshx\ sinhy$	$\eta\mu(x+y) = \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu y + \sigma\upsilon\nu x\ \eta\mu y$
$\cosh(x+y) = coshx\ coshy + sinhx\ sinhy$	$\sigma\upsilon\nu(x+y) = \sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu y - \eta\mu x\ \eta\mu y$
$\sinh(2x) = 2\ sinhx\ coshx$	$\text{ημ}(2x) = 2\ \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x$
$\cosh(2x) = cosh^2x + sinh^2x$	$\text{συν}(2x) = \sigma\upsilon\nu^2x - \eta\mu^2x$
$2\ sinh^2x = \cosh(2x) - 1$	$2\ \eta\mu^2x = 1 - \text{συν}(2x)$
$2\ cosh^2x = \cosh(2x) + 1$	$2\ \sigma\upsilon\nu^2x = \text{συν}(2x) + 1$
$(coshx + sinhx)^{\nu} = \cosh(\nu x) + \sinh(\nu x)$ ν: ακέραιος	$(\sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x)^{\nu} = \text{συν}(\nu x) + i\text{ημ}(\nu x)$ ν: ακέραιος

Μια βασική διαφορά μεταξύ των κυκλικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων και των υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι η περιοδικότητα. Η περιοδικότητα είναι εκείνο το χαρακτηριστικό που καθιστά τις κυκλικές συναρτήσεις τόσο σημαντικές για τα μαθηματικά και τις επιστήμες γενικότερα. Οι υπερβολικές συναρτήσεις δεν διαθέτουν αυτή την ιδιότητα.

5. Παράγωγοι και ολοκληρώματα. Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών

Παραγωγίζοντας, ως προς x, τις συναρτήσεις:

$$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

προκύπτει άμεσα ότι,

$$(coshx)' = sinhx$$

$$(sinhx)' = coshx$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ισοδύναμα και ως εξής,

$$\int coshxdx = sinhx + C$$

$$\int sinhxdx = coshx + C.$$

Η ομοιότητα με τους αντίστοιχους τύπους των κυκλικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων $συνx$ και $ημx$ είναι προφανής, με τη διαφορά ότι εδώ δεν υπάρχουν αρνητικά πρόσημα.

Και κάτι τελευταίο: όπως είναι γνωστό, η συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(x) = συνx, x \in \mathbb{R}$ είναι η μοναδική λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} \varphi''(x) = -\varphi(x), \;\; x \in \mathbb{R} \\ \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = 0 \end{cases}$$

Κάτι ανάλογο ισχυριζόμαστε ότι ισχύει και για το υπερβολικό συνημίτονο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Η μοναδική δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *που ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:*

$$\begin{cases} f''(x) = f(x), \ \ x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

είναι η συνάρτηση υπερβολικό συνημίτονο $f(x) = coshx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \ \ x \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε,

$$f''(x) = f(x)$$

ή ισοδύναμα,

$$f''(x) - f'(x) = f(x) - f'(x).$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με e^{-x} έχουμε,

$$f''(x)e^{-x} - f'(x)e^{-x} = f(x)e^{-x} - f'(x)e^{-x}$$

δηλαδή,

$$(f'(x)e^{-x})' = (-f(x)e^{-x})'.$$

Επομένως, από τη συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχει σταθερά C_1 ώστε,

$$f'(x)e^{-x} = -f(x)e^{-x} + C_1.$$

Όμως, $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$. Οπότε, θέτοντας $x = 0$ στη τελευταία σχέση, έπεται $C_1 = 1$ και συνεπώς η σχέση αυτή γράφεται,

$$f'(x)e^{-x} = -f(x)e^{-x} + 1$$

ή ισοδύναμα,

$$f'(x) + f(x) = e^x.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με e^x έχουμε,

$$f'(x)e^x + f(x)e^x = e^{2x}$$

ή ισοδύναμα,

$$(f(x)e^x)' = \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'.$$

Άρα, υπάρχει σταθερά C_2 ώστε,

$$f(x)e^x = \frac{e^{2x}}{2} + C_2.$$

Όμως $f(0) = 1$. Οπότε, θέτοντας $x = 0$ στη τελευταία σχέση, έπεται $C_2 = \frac{1}{2}$ και συνεπώς η σχέση αυτή γράφεται,

$$f(x)e^x = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}$$

δηλαδή,

$$f(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = coshx.$$

Ο.Ε.Δ.■

Προφανώς, ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν για το κυκλικό και το υπερβολικό ημίτονο.

6. Γεωμετρική ερμηνεία της ανεξάρτητης μεταβλητής

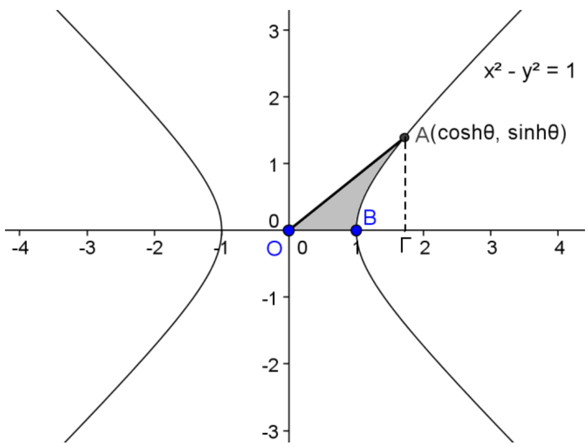
Όπως έχουμε δει ήδη σε προηγούμενη παράγραφο, καθώς το θ μεταβάλλεται από $-\infty$ μέχρι $+\infty$, το σημείο $(cosh\theta, sinh\theta)$ του xy-επιπέδου διατρέχει ολόκληρο το δεξιό σκέλος της υπερβολής με εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$. Η παρακάτω πρόταση παρέχει μια γεωμετρική ερμηνεία για την ανεξάρτητη μεταβλητή θ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Η ανεξάρτητη μεταβλητή θ είναι ίση με το διπλάσιο του εμβαδού του υπερβολικού τομέα OAB.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με γνώμονα το παρακάτω σχήμα έχουμε,



$$(OAB) = (OA\Gamma) - (BA\Gamma) = \frac{O\Gamma \cdot A\Gamma}{2} - \int_{B}^{\Gamma} \sqrt{x^2 - 1} dx$$

δηλαδή,

$$(OAB) = \frac{cosh\theta \cdot sinh\theta}{2} - \int_{1}^{cosh\theta} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

ή ισοδύναμα,

$$(OAB) = \frac{\sinh(2\theta)}{4} - \int_1^{cosh\theta} \sqrt{x^2-1}\, dx.$$

Αν στο τελευταίο ολοκλήρωμα θέσουμε $x = cosht$, οπότε $dx = sinht$ dt και δεδομένου ότι $cosh^2t - sinh^2t = 1$, έχουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_1^{cosh\theta} \sqrt{x^2-1}\, dx$ είναι ίσο με

$$\int_0^{\theta} sinht \cdot sinht\, dt = \int_0^{\theta} sinh^2t\, dt = \int_0^{\theta} \frac{\cosh(2t)-1}{2} dt$$

δηλαδή ίσο με

$$\left[\frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2}\right]_{t=0}^{t=\theta} = \frac{\sinh(2\theta)}{4} - \frac{\theta}{2}.$$

Συνεπώς,

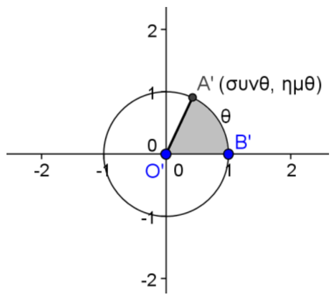
$$(OAB) = \frac{\sinh(2\theta)}{4} - \left[\frac{\sinh(2\theta)}{4} - \frac{\theta}{2}\right] = \frac{\theta}{2}$$

άρα,

$$\theta = 2 \cdot (OAB).$$

Ο.Ε.Δ.■

ΣΧΟΛΙΟ. Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται σε πλήρη αναλογία με ότι συμβαίνει στον τριγωνομετρικό κύκλο, όπου το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑ΄Β΄ είναι ίσο με $\frac{\theta}{2}$.



7. Οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις και οι παράγωγοί τους

Όπως φαίνεται και από την γραφική παράστασή του, το υπερβολικό ημίτονο $sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Άρα έχει αντίστροφη, που συμβολίζεται $sinh^{-1}x$ και ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Από την άλλη, το υπερβολικό συνημίτονο $coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[1, +\infty)$. Άρα έχει αντίστροφη, που συμβολίζεται $cosh^{-1}x$ και ορίζεται στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Είναι δυνατόν να υπολογίσουμε ακριβώς τις αντίστροφες αυτές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα:

ΠΡΟΤΑΣΗ 4

$$sinh^{-1}x = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$cosh^{-1}x = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad x \geq 1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας αποδείξουμε τον πρώτο τύπο. Έστω $f(x) = sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ και $g(x)$ η αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή $g(x) = f^{-1}(x)$, $-\infty < x < +\infty$. Τότε, από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης, για κάθε $-\infty < x < +\infty$, ισχύει:

$$f\big(g(x)\big) = x$$

δηλαδή,

$$\frac{e^{g(x)} - e^{-g(x)}}{2} = x.$$

Κάνοντας απαλοιφή παρανομαστών, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $e^{g(x)}$ και μεταφέροντας όλα στο πρώτο μέλος έχουμε,

$$\left(e^{g(x)}\right)^2 - 2xe^{g(x)} - 1 = 0$$

η οποία είναι μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς $e^{g(x)}$ και συνεπώς, από τον τύπο του ημίσεως, έχουμε,

$$e^{g(x)} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Όμως, η ποσότητα $x - \sqrt{x^2+1}$ είναι μόνιμα αρνητική, ενώ το $e^{g(x)}$ είναι μόνιμα θετικό. Συνεπώς,

$$e^{g(x)} = x + \sqrt{x^2+1}$$

και επομένως,

$$g(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Ο.Ε.Δ.

Όμοια εργαζόμαστε και για την απόδειξη του δεύτερου τύπου.■

ΠΡΟΤΑΣΗ 5

α) $(sinh^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $-\infty < x < +\infty$.

β) $(cosh^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης και των κανόνων παραγώγισης.■

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με μια εξαιρετικά χρήσιμη, για τα παρακάτω, εφαρμογή των όσων έχουμε ήδη αναπτύξει.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6
Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *που έχει συνεχή παράγωγο ισχύει ότι,*

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx = sinh^{-1}\big(f(x)\big) + C.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Εκτελούμε την αντικατάσταση $y = f(x)$, οπότε $dy = f'(x)dx$, και συνεπώς έχουμε,

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = sinh^{-1}y + C = sinh^{-1}(f(x)) + C$$

όπου η προτελευταία ισότητα προκύπτει άμεσα από το σκέλος α) της προηγούμενης πρότασης και τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος.■

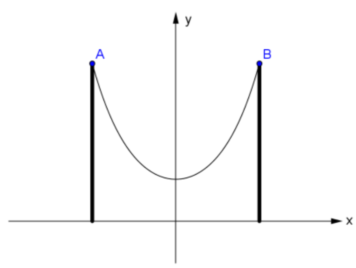
8. Η φυσική ερμηνεία των υπερβολικών συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε την φυσική ερμηνεία του υπερβολικού συνημιτόνου και ημιτόνου όπως συζητήθηκε στη εισαγωγή.

Υπενθυμίζουμε ότι το *μήκος* της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος της είναι συνεχής, δίδεται από τον τύπο: $\int_\alpha^\beta \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΚΡΕΜΑΜΕΝΟΥ ΣΧΟΙΝΙΟΥ
Να βρεθεί η καμπύλη η οποία σχηματίζεται από ένα σχοινί που κρέμεται ελεύθερα από δύο σταθερά σημεία.

Υποθέτουμε ότι το σχοινί είναι εύκαμπτο σε όλο το μήκος του και ότι έχει ομοιόμορφο πάχος (δηλαδή, ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο ανά μονάδα μήκους του σχοινιού). Υποθέτουμε επίσης ότι το σχοινί βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και ότι η μόνη εξωτερική δύναμη που του ασκείται είναι η βαρυτική. Χάριν ευκολίας, τα δύο σταθερά σημεία απ' όπου κρέμεται



το σχοινί, υποτίθενται ισοϋψή (αποδεικνύεται ότι και ισοϋψή να μην είναι, η καμπύλη που σχηματίζεται θα είναι κομμάτι του ίδιου σχήματος). Θα αποδείξουμε τα ακόλουθα τρία αποτελέσματα, μέσα από τα οποία παρέχεται η φυσική ερμηνεία του υπερβολικού συνημιτόνου και υπερβολικού ημιτόνου:

α) Η εξίσωση $y''(x) = \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + (y'(x))^2}$ περιγράφει τη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων που ασκούνται στο σχοινί, όπου α μια θετική σταθερά που εξαρτάται από τη φύση του σχοινιού.

β) Σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, το σχήμα του σχοινιού ταυτίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y(x) = \alpha \cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, η οποία είναι και η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης.

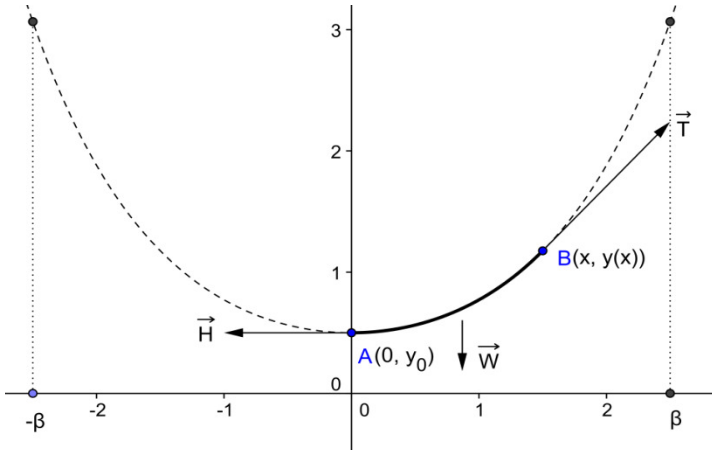
γ) Αν τα δύο σταθερά σημεία απ' όπου κρέμεται το σχοινί έχουν οριζόντια απόσταση 2β, τότε το μήκος του σχοινιού είναι ίσο με $2\alpha \sinh\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α) Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων ώστε το χαμηλότερο σημείο του σχοινιού να είναι το σημείο $A(0, y_0)$, για κάποιο $y_0 > 0$.

Η καμπύλη η οποία σχηματίζεται από το σχοινί, που κρέμεται ελεύθερα από τα δύο σταθερά σημεία, αναμένεται να είναι συμμετρική ως προς τον y-άξονα, αν φυσικά υποθέσομε ότι η βαρύτητα επιδρά το ίδιο και στο δεξί και στο αριστερό ημιεπίπεδο. Οπότε περιορίζουμε το ενδιαφέρον μας στο δεξιό ήμισυ του σχοινιού.

Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο $B(x, y(x))$ του σχοινιού δεξιά του Α. Στο τμήμα ΑΒ επιδρούν τρεις δυνάμεις που βρίσκονται σε ισορροπία: i) η οριζόντια τάση $\vec{H}$ που έλκει το σχοινί προς το Α, ii) το βάρος $\vec{W}$ του τμήματος ΑΒ και iii) η εφαπτομενική τάση $\vec{T}$ που έλκει το σχοινί στο Β. Να σημειωθεί ότι εφόσον η μόνη εξωτερική δύναμη που ασκείται είναι η βαρυτική (η οποία είναι κατακόρυφη) και εφόσον το σύστημα τελεί σε ισορροπία, έπεται ότι η οριζόντια τάση $\vec{H}$ είναι σταθερή σε κάθε σημείο στο δεξιό ήμισυ του σχοινιού.



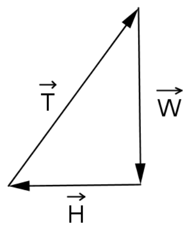
Συνεπώς,

(κλίση της εφαπτομενικής τάσης $\vec{T}$) = $\frac{W}{H}$

δηλαδή,

$$y'(x) = \frac{W}{H}$$

όπου W, H είναι τα μέτρα των $\vec{W}$ και $\vec{H}$, αντίστοιχα.



Όμως, αν *w* είναι το βάρος ανά μονάδα μήκους, τότε:

$$W = w \cdot (\text{μήκος τμήματος AB του σχοινιού})$$

οπότε, $W = w \cdot \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, dt$, άρα, η τελευταία σχέση γράφεται,

$$y'(x) = \frac{w}{H} \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς x έχουμε, βάσει του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού,

$$y''(x) = \frac{w}{H} \sqrt{1 + (y'(x))^2}$$

ή αν θέσουμε $\alpha = \frac{H}{w}$,

$$y''(x) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + (y'(x))^2}.$$

Ο.Ε.Δ.

β) Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων ώστε $y_0 = \alpha = \frac{H}{w}$, δηλαδή το χαμηλότερο σημείο του σχοινιού να βρίσκεται σε υψόμετρο α. Έτσι, έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{1 + (y'(x))^2} \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Θέτουμε $f(x) = y'(x)$, οπότε $f(0) = 0$ και η παραπάνω εξίσωση γράφεται,

$$f'(x) = \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + (f(x))^2}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f(x))^2}} = \frac{1}{a}.$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη ως προς x, έχουμε,

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f(x))^2}}\, dx = \int \frac{1}{a}\, dx$$

οπότε, από τη Πρόταση 6 προκύπτει,

$$sinh^{-1}\big(f(x)\big) = \frac{x}{\alpha} + C_1.$$

Όμως, $f(0) = 0$ και $\sinh(0) = 0$, άρα $C_1 = 0$ και συνεπώς,

$$sinh^{-1}\big(f(x)\big) = \frac{x}{\alpha}$$

δηλαδή,

$$f(x) = sinh\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Αφού, $f(x) = y'(x)$, έπεται ότι,

$$y'(x) = sinh\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

δηλαδή,

$$y(x) = \alpha\ cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right) + C_2.$$

Όμως, $y(0) = \alpha$ και $\cosh(0) = 1$, άρα $C_2 = 0$ και συνεπώς,

$$y(x) = \alpha\ cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Ο.Ε.Δ.

γ) Το μήκος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y(x) = \alpha\, cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, με $-\beta \leq x \leq \beta$, είναι εξ ορισμού ίσο με $\int_{-\beta}^{\beta} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$. Όμως,

$$\int_{-\beta}^{\beta} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = 2 \int_{0}^{\beta} \sqrt{1 + sinh^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)} dx.$$

Επομένως, από τη θεμελιώδη ταυτότητα $cosh^2 x - sinh^2 x = 1$, έχουμε

$$\int_{0}^{\beta} \sqrt{1 + sinh^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)} dx = \int_{0}^{\beta} cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \left[\alpha sinh\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]_{x=0}^{x=\beta}$$

δηλαδή,

$$\int_{0}^{\beta} \sqrt{1 + sinh^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)} dx = \alpha\, sinh\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Συνεπώς, το ζητούμενο μήκος είναι ίσο με $2\alpha\, sinh\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Ο.Ε.Δ.■

9. Βιβλιογραφία

1. Ανδρεαδάκης Σ., κ.ά. (2009). *Άλγεβρα Β΄ Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων
2. Ανδρεαδάκης Σ., κ.ά. (2009). *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων
3. Κουμούσης Β. (2008). *Σχοινοειδής Φορέας. Στοιχεία Γραφοστατικής*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
4. Maor E. (1994). *e: The Story of a Number*. New Jersey: Princeton University Press
5. Spivak M. (1991). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (Μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
6. Swetz F., Fauvel J., Bekken O., Johansson B., Katz V. (1995). *Learn from the Masters*. Washington: The American Association of America
7. Thomas G.B., Finney R.L. (2001). *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Α΄* (Μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης