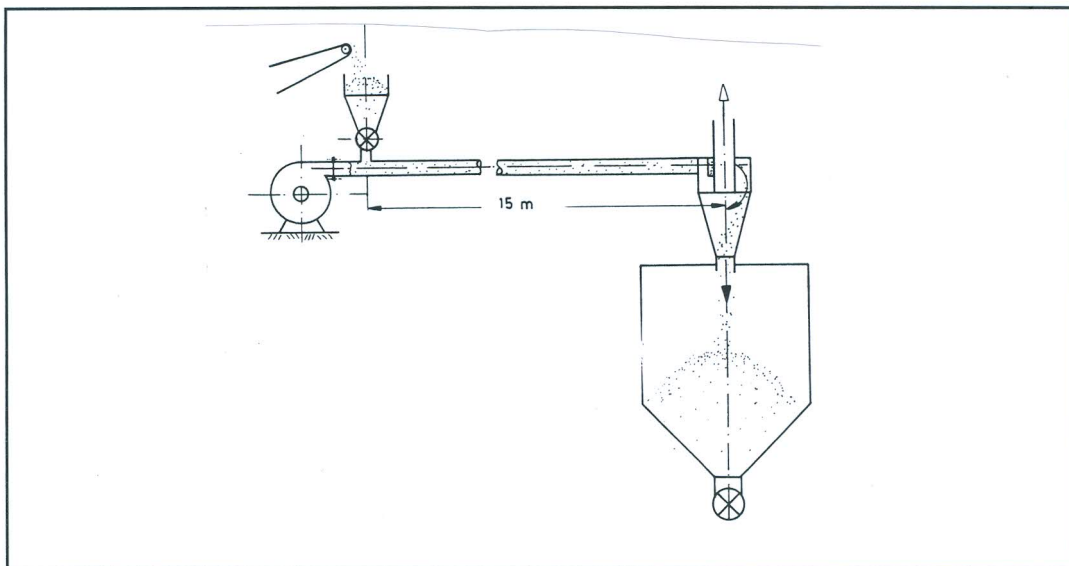


**ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ**

**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ  
ΔΙΦΑΣΙΚΗ ΡΟΗ**



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΠΡΩΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1.1
2.	ΔΙΦΑΣΙΚΗ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΡΟΗ	2.1
2.1.	Γενική θεώρηση διφασικής ροής	2.1
2.1.1.	Ορισμοί μεγεθών της διφασικής ροής	2.2
2.2.	Ομογενής ροή	2.4
2.2.1.	Εξισώσεις συνέχειας και ορμής	2.6
2.2.2.	Περαιτέρω ανάπτυξη της εξίσωσης της ορμής	2.9
2.2.3.	Προσαρμογή της εξίσωσης της ορμής στις πειραματικές εγκαταστάσεις	2.11
2.3.	Μεταβολή της συγκέντρωσης μάζας κατά μήκος του αγωγού	2.13
3.	ΧΩΡΙΣΤΗ ΔΙΦΑΣΙΚΗ ΡΟΗ	3.1
3.1.	Γενικές προϋποθέσεις	3.1
3.2.	Συνέχεια των παροχών μάζας των δύο φάσεων	3.2
3.3.	Το θεώρημα ορμής για τα μίγματα	3.3
3.4.	Ρευστοδυναμική μεταφορά μέσω κεκλιμένου αγωγού	3.5
3.4.1.	Ισολογισμός δυνάμεων στο κλάσμα στερεάς ύλης	3.5
3.4.2.	Ισολογισμός ισχύος για τον φορέα	3.6
3.4.3.	Εξισώσεις κίνησης και απώλειας πίεσης γενικής ισχύος	3.7

3.4.4.	Εξισώσεις απώλειας πίεσης και κίνησης για τις ειδικές περιπτώσεις κατακόρυφης και οριζόντιας ρευστομεταφοράς	3.9
3.5.	Ασυμπίεστη αραιή πνευματική μεταφορά	3.9
3.5.1.	Κατακόρυφη ασυμπίεστη αραιή πνευματική μεταφορά	3.10
3.5.2.	Οριζόντια ασυμπίεστη αραιή πνευματική μεταφορά	3.11
4.	ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΠΤΩΣΗΣ	4.1
4.1.	Γενικής ισχύος σχέση για την ταχύτητα ελεύθερης πτώσης	4.1
4.2.	Ταχύτητα ελεύθερης πτώσης στερεών υλών στον αέρα	4.5
4.3.	Ταχύτητα ελεύθερης πτώσης στερεών υλών στο νερό	4.5
4.4.	Ταχύτητα ελεύθερης πτώσης στερεών υλών σε οποιονδήποτε φορέα	4.5
4.5.	Επίδραση σχήματος κόκκου στην ταχύτητα ελεύθερης πτώσης	4.11
4.6.	Επίδραση του τοιχώματος του αγωγού στην ταχύτητα ελεύθερης πτώσης	4.13
4.7.	Επίδραση της συγκέντρωσης της στερεάς ύλης στην ταχύτητα ελεύθερης πτώσης ή την αντίσταση	4.15
4.7.1.	Επίδραση της συγκέντρωσης της στερεάς ύλης όταν επικρατεί ομοιόμορφη κατανομή στερεάς ουσίας	4.15
4.7.2.	Επίδραση της συγκέντρωσης της στερεάς ύλης στα φαινόμενα απόμειξης	4.17
5.	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ	5.1
6.	ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΣΤΕΡΕΑΣ ΥΛΗΣ	6.1
6.1.	Υδραυλική μεταφορά μέσω αγωγού κεκλιμένου προς τα άνω	6.2
6.2.	Κατακόρυφη υδραυλική μεταφορά	6.3
6.2.1.	Εξίσωση απώλειας πίεσης και εξίσωση κίνησης	6.3
6.2.2.	Πρακτική εφαρμογή των εξισώσεων	6.4
6.2.3.	Διαγράμματα εργασίας στην κατακόρυφη υδραυλική μεταφορά	6.6
6.3.	Οριζόντια υδραυλική μεταφορά	6.8
6.3.1.	Εξισώσεις απώλειας πίεσης και κίνησης	6.8
6.3.2.	Πρακτική εφαρμογή των εξισώσεων	6.8
6.3.3.	Διαγράμματα εργασίας για οριζόντια υδραυλική μεταφορά	6.10
7.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	7.1

# 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πνευματική μεταφορά αποτελεί τον ένα κλάδο της λεγόμενης ρευστοδυναμικής μεταφοράς ή ρευστομεταφοράς. Ο άλλος κλάδος είναι η υδραυλική μεταφορά.

Με τον όρο ρευστοδυναμική μεταφορά χαρακτηρίζεται η δυνατότητα μεταφοράς στερεών υλών με την βοήθεια της ροής των ρευστών. Το ρευστό που μεταφέρει την κατάλληλα τεμαχισμένη στερεά ύλη λέγεται φορέας. Ανάλογα αν ο φορέας είναι υγρό ή αέριο γίνεται η διάκριση ανάμεσα στην υδραυλική ή πνευματική μεταφορά αντίστοιχα.

Η υδραυλική μεταφορά εφαρμόζεται κύρια στην εξόρυξη μεταλλευμάτων, η δε πνευματική μεταφορά εφαρμόζεται σε αλευρόμυλους για τη μεταφορά τόσο των δημητριακών (σιτάρι, καλαμπόκι) όσο και των αλεύρων, σε βιομηχανίες τροφίμων, σε εργοστάσια στιμέντων, σε εγκαταστάσεις μεταφοράς καυσίμου εστιών κόνης, σε μηχανήματα μεταφοράς δομικών υλικών, σε ταχυδρομεία και τηλεγραφεία για τη μεταφορά μεγαλύτερων αντικειμένων.

Οι ερευνητές των ροικών φαινομένων της ρευστοδυναμικής μεταφοράς έχουν ασχοληθεί, μέχρι σήμερα, με τη θεωρητική και πειραματική διερεύνηση της μονοδιάστατης ροής.

Σκοπός της μελέτης των διφασικών ροών, που λαμβάνουν χώρα στη ρευστοδυναμική μεταφορά, είναι η ανεύρεση των συνθηκών εκείνων, για τις οποίες πραγματοποιείται βέλτιστα, από οικονομική άποψη, η ρευστομεταφορά.

## 2

## ΔΙΦΑΣΙΚΗ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΡΟΗ

**2.1 Γενική θεώρηση διφασικής ροής**

Φάση είναι απλά μια από τις καταστάσεις της ύλης και μπορεί να είναι αέρια, υγρή και στερεή. Πολυφασική ροή είναι η ταυτόχρονη ροή διαφόρων φάσεων. Διφασική ροή είναι η απλούστερη περίπτωση της πολυφασικής ροής.

Η διφασική ροή εμφανίζεται τόσο στο φυσικό κόσμο (π.χ. ομίχλη, καπνός, βροχή, σύννεφα, ανεμοθύελλες κ.λ.π.), όσο και στο χώρο της τεχνικής (π.χ. εξάτμιση και συμπύκνωση στις ψυκτικές εγκαταστάσεις, στους σταθμούς παραγωγής ισχύος και σε διάφορες βιομηχανίες όπου γίνεται μεταφορά των διαφόρων υλών με τη βοήθεια ρευστών κ.λ.π.).

Η διφασική ροή υπακούει σε όλους τους βασικούς νόμους της μηχανικής των ρευστών, με τη διαφορά ότι οι εξισώσεις είναι περισσότερο πολύπλοκες από αυτές της μονοφασικής ροής. Για τη διερεύνηση της διφασικής ροής έχουν αναπτυχθεί διάφορα μοντέλα, τα οποία ενώ δεν υπεισέρχονται στις λεπτομέρειες της ροής, δίνουν επιτυχή αποτελέσματα.

Για παράδειγμα στο μοντέλο της ομογενούς ροής οι δύο φάσεις θεωρούνται σαν ένα υποθετικό ρευστό, του οποίου οι ιδιότητες αποτελούν κατά ένα τρόπο το μέσο όρο

των ιδιοτήτων των δυο φάσεων. Στο μοντέλο της διαχωρισμένης ροής οι δύο φάσεις θεωρούνται ότι ρέουν παράλληλα.

Ξεχωριστές εξισώσεις γράφονται για την κάθε φάση ενώ λαμβάνεται υπόψη και η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο φάσεων.

### 2.1.1 Ορισμοί μεγεθών της διφασικής ροής

Ορίζουμε διάφορα μεγέθη, τα οποία χρησιμοποιούμε για τη μελέτη διφασικής ροής. Στα μεγέθη που αναφέρονται στο κύριο συστατικό, που αποτελεί το φορέα τίθεται ο δείκτης  $f$  ενώ στα μεγέθη που αναφέρονται στο συστατικό που είναι διασκορπισμένο στο φορέα τίθεται ο δείκτης  $s$ .

Η ολική παροχή μάζας  $M$  ισούται με το άθροισμα των επί μέρους παροχών,  $M_f$  του φορέα και  $M_s$  του διασκορπισμένου συστατικού:

$$M = M_f + M_s \quad (2.1.1)$$

Ο λόγος των παροχών μάζας  $M_s$  δια  $M_f$  ορίζει το λόγο μίξης  $\mu_m$ :

$$\mu_m = \frac{M_s}{M_f} \quad (2.1.2)$$

Μέση συγκέντρωση μάζας  $c_m$  ορίζεται ο λόγος:

$$c_m = \frac{M_s}{(M_s + M_f)} \quad (2.1.3)$$

Η ολική παροχή όγκου  $V$  ισούται με το άθροισμα των επιμέρους παροχών  $V_f$  και  $V_s$ :

$$V = V_f + V_s \quad (2.1.4)$$

Μέση ογκομετρική συγκέντρωση  $c_v$  ορίζεται ο λόγος:

$$c_v = \frac{V_s}{(V_s + V_f)} \quad (2.1.5)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε άλλα βοηθητικά μεγέθη. Ροή όγκου  $J$  ανά μονάδα επιφανείας.

Για το φορέα ισχύει:

$$J_f = (1 - c_v) u \quad (2.1.6)$$

Για το διασκορπισμένο συστατικό ισχύει:

$$J_s = c_v c \quad (2.1.7)$$

όπου  $u$  και  $c$  είναι οι ταχύτητες του φορέα και του διασκορπισμένου συστατικού αντίστοιχα. Επίσης ισχύει:

$$J = J_f + J_s \quad (2.1.8)$$

Από τις σχέσεις (2.1.6) και (2.1.7) συνεπάγεται ότι:

$$V_f = \int_A J_f dA \quad (2.1.9)$$

$$V_s = \int_A J_s dA \quad (2.1.10)$$

όπου το ολοκλήρωμα αναφέρεται στην επιφάνεια ροής  $A$  και  $dA$  είναι η στοιχειώδης επιφάνεια όπου οι ροές όγκου ανά μονάδα επιφανείας είναι  $J_f$  και  $J_s$ . Αντίστοιχα ορίζεται η ροή μάζας ανά μονάδα επιφανείας:

$$G_{mf} = \rho_f J_f \quad (2.1.11)$$

$$G_{ms} = \rho_s J_s \quad (2.1.12)$$

$$G_m = G_{mf} + G_{ms} \quad (2.1.13)$$

Άλλες σχέσεις που βοηθούν στη μελέτη της διφασικής ροής είναι:

$$u = \frac{J_f}{(1 - c_v)} \quad (2.1.14)$$

$$c = \frac{J_s}{c_v} \quad (2.1.15)$$

$$\frac{J_f}{J_s} = \frac{u}{c} \frac{1 - c_v}{c_v} \quad (2.1.16)$$

$$\frac{G_{mf}}{G_{ms}} = \frac{M_f}{M_s} = \frac{1 - c_m}{c_m} \quad (2.1.17)$$



$$\frac{1-c_m}{c_m} = \frac{u}{c} \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{1-c_v}{c_v} \quad (2.1.18)$$

Η σχετική ταχύτητα ορίζεται ως εξής:

$$u_{sf} = c - u = -u_{fs} \quad (2.1.19)$$

και η ταχύτητα του ρεύματος:

$$u_{fJ} = u - J \quad (2.1.20)$$

$$u_{sJ} = c - J \quad (2.1.21)$$

καθώς και η ροή ρεύματος:

$$J_{fs} = (1-c_v)(u - J) \quad (2.1.22)$$

$$J_{sf} = c_v(c - J) \quad (2.1.23)$$

Οι σχέσεις που ακολουθούν προκύπτουν από τους ανωτέρω ορισμούς:

$$J_{sf} = J_s - c_v(J_f + J_s) = J_s(1-c_v) - c_v J_f \quad (2.1.24)$$

$$J_{fs} = c_v J_f - (1-c_v) J_s \quad (2.1.25)$$

$$J_{sf} = J_{fs} \quad (2.1.26)$$

$$J_{fs} = c_v(1-c_v)(U_f - U_s) = c_v(1-c_v)U_{fs} \quad (2.1.27)$$

## 2.2 Ομογενής ροή

Η θεωρία της ομογενούς ροής είναι η απλούστερη τεχνική για την ανάλυση της διφασικής ροής. Το μίγμα θεωρείται σαν ένα ιδεατό ρευστό, για το οποίο ισχύουν οι εξισώσεις της απλής ροής (μονοφασικής) και στο οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε τους νόμους και τις μεθόδους της Ρευστοδυναμικής. Το βασικό πρόβλημα στην ομογενή ροή είναι να υπολογιστούν οι ιδιότητες του ιδεατού ρευστού, οι οποίες εισερχόμενες στις εξισώσεις της απλής ροής θα δώσουν τα επιθυμητά σωστά αποτελέσματα. Οι ιδιότητες αυτές αποτελούν κατά κάποιο τρόπο τις μέσες τιμές των ιδιοτήτων των δύο συστατικών χωρίς να είναι αναγκαίο να συμπίπτουν με τις ιδιότητες μιας από τις δύο φάσεις.

Ομογενής θεωρείται η ροή όταν το διασκορπισμένο συστατικό είναι ομοιόμορφα κατανομημένο μέσα στο φορέα, δηλαδή η συγκέντρωση μάζας είναι σταθερή σε όλη τη διατομή σε ένα σημείο του αγωγού και οι ταχύτητες των δύο συστατικών είναι ίσες.

Για την ομογενή ροή ισχύουν οι σχέσεις:

$$u = c = U \quad (2.2.1)$$

$$J_s = \frac{V_s}{A} \quad (2.2.2)$$

$$J_f = \frac{V_f}{A} \quad (2.2.3)$$

$$J = \frac{V_f + V_s}{A} \quad (2.2.4)$$

$$G_{mf} = \frac{M_f}{A} \quad (2.2.5)$$

$$G_{ms} = \frac{M_s}{A} \quad (2.2.6)$$

$$G_m = \frac{M_f + M_s}{A} \quad (2.2.7)$$

$$c_v = \frac{V_s}{V_f + V_s} \quad (2.2.8)$$

$$c_m = \frac{M_s}{M_f + M_s} \quad (2.2.9)$$

Η μέση πυκνότητα του μίγματος δίνεται από τις σχέσεις:

$$\rho_m = c_v \rho_s + (1 - c_v) \rho_f \quad (2.2.10)$$

σαν συνάρτηση της ογκομετρικής συγκέντρωσης  $c_v$  και

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{c_m}{\rho_s} + \frac{1 - c_m}{\rho_f} \quad (2.2.11)$$

σαν συνάρτηση της συγκέντρωσης μάζας  $c_m$ .

### 2.2.1 Εξισώσεις συνέχειας και ορμής

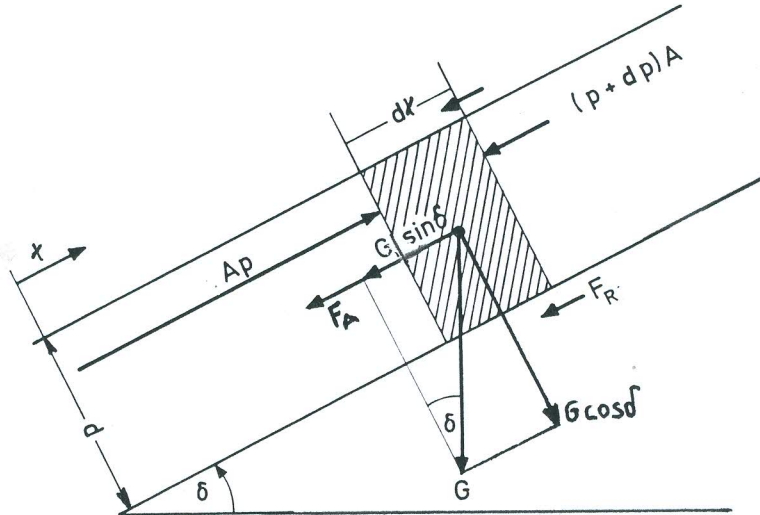
Οι βασικές ρευστοδυναμικές σχέσεις που περιγράφουν την ασυμπίεστη ροή ρευστού σε κλειστό αγωγό, ο οποίος σχηματίζει γωνία  $\delta$  ως προς το οριζόντιο επίπεδο είναι:

**Εξίσωση συνέχειας:**

$$M = \rho_m UA = \text{σταθ} \quad (2.2.12)$$

**Εξίσωση ορμής:**

Σε κλειστό αγωγό ορθογωνικής διατομής  $y \times z$  (σχήμα 2.1), θεωρούμε τμήμα απειροστού μήκους  $dx$ , που περιέχει τη μάζα μίγματος  $M = \rho_m yz dx$ , όπου  $\rho_m$  η πυκνότητα του μίγματος. Στη μάζα επιδρούν οι εξής δυνάμεις:



Σχήμα 2.1. Δυνάμεις που επιδρούν στο στοιχειώδη όγκο  $dV = A dx$  του μίγματος, για ομογενή ροή.

Από το ίδιο το βάρος η δύναμη  $G$

$$G = \rho_m g y z dx \quad (2.2.13)$$

Από την επιτάχυνση η δύναμη  $F_A$  που εμφανίζεται σαν δύναμη αδράνειας

$$F_A = M \frac{dU}{dt} \quad (2.2.14)$$

όπου  $U$  η ταχύτητα του στοιχείου μάζας  $M$ . Η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$F_A = \rho_m yz dx \frac{dU}{dt} = \rho_m yz dx \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = \rho_m yz dx U \frac{dU}{dx} \quad (2.2.15)$$

Δυνάμεις από την πίεση που ασκείται στις επιφάνειες του στοιχείου στις διατομές  $x$  και  $x+dx$

$$PA - (P + dP)A = -dPA \quad (2.2.16)$$

Δυνάμεις τριβής  $F_R$  από την τριβή μεταξύ του μίγματος και της επιφάνειας του αγωγού.

$$F_R = 2\tau_0(zdx + ydx) = \tau_0 \Pi dx \quad (2.2.17)$$

όπου  $\tau_0$  η διατμητική τάση στο τοίχωμα του αγωγού και  $\Pi$  η περίμετρος της διατομής  $A$ .

Η ισορροπία των δυνάμεων στη διεύθυνση του  $x$ -άξονα δίνει:

$$PA - (P + dP)A - \tau_0 \Pi dx - G\eta\mu\delta - F_A = 0 \quad (2.2.18)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχ.(2.2.13) και (2.2.15), η σχ. (2.2.18) γίνεται

$$-dPA - \tau_0 \Pi dx - \rho_m g A dx \eta\mu\delta - \rho_m A dx U \frac{dU}{dx} = 0 \quad (2.2.19)$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της σχ. (2.2.19) με το  $dx$  προκύπτει:

$$-\frac{dP}{dx} A - \tau_0 \Pi - \rho_m g A \eta\mu\delta - \rho_m A U \frac{dU}{dx} = 0 \quad (2.2.20)$$

ή

$$\rho_m A U \frac{dU}{dx} = -\frac{dP}{dx} A - \Pi \tau_0 - \rho_m g A \eta\mu\delta \quad (2.2.21)$$

Επειδή  $\rho_m A U = M$  η σχ.(2.2.21) γίνεται :

$$M \frac{dU}{dx} = -\frac{dP}{dx} A - \Pi \tau_0 - A \rho_m g \eta\mu\delta \quad (2.2.22)$$

Η σχ.(2.2.22) δίνει τη μεταβολή της ορμής κατά μήκος του ορθογωνικού αγωγού συναρτήσει της μεταβολής της πίεσης, της τριβής στο τοίχωμα και των αδρανειακών δυνάμεων του «μίγματος».

Στις παραπάνω εξισώσεις  $M$  είναι η παροχή μάζας του μίγματος  $M = M_f + M_s$ ,  $\rho_m$  η πυκνότητα του όπως δίνεται από τις σχέσεις: (2.2.10) , (2.2.11),  $A$  η διατομή του αγωγού,  $\Pi$  η περίμετρος της διατομής του αγωγού,  $\tau_0$  η διατμητική τάση στο τοίχωμα του αγωγού,  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας, και  $\delta$  είναι η γωνία που σχηματίζει ο αγωγός με το οριζόντιο επίπεδο.

Ξαναγράφουμε την εξίσωση ορμής έτσι ώστε να δίνει την πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού.

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\Pi}{A} \tau_0 - \frac{M}{A} \frac{dU}{dx} - \rho_m g \eta \mu \delta \quad (2.2.23)$$

Οι τρεις όροι του δευτέρου μέλους δίδουν τις συνιστώσες της πίεσης που οφείλεται στη τριβή, την επιτάχυνση και τη βαρύτητα αντίστοιχα.

Ορίζουμε τα ακόλουθα μεγέθη:

Πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού λόγω τριβής:

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_R = \frac{\Pi}{A} \tau_0 \quad (2.2.24)$$

Πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού λόγω επιτάχυνσης:

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_A = \frac{M}{A} \frac{dU}{dx} \quad (2.2.25)$$

Πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού λόγω βαρύτητας:

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_G = \rho_m g \eta \mu \delta \quad (2.2.26)$$

Οπότε η σχέση που δίνει τη πτώση της πίεσης κατά μήκος του αγωγού γράφεται:

$$\frac{dP}{dx} = \left(\frac{dP}{dx}\right)_R + \left(\frac{dP}{dx}\right)_A + \left(\frac{dP}{dx}\right)_G \quad (2.2.27)$$

## 2.2.2 Περαιτέρω ανάπτυξη της εξίσωσης της ορμής

Αναλύοντας τους όρους του δευτέρου μέλους της σχ.(2.2.27) προκύπτει μια αναλυτικότερη έκφραση για την πτώση της πίεσης. Εισάγοντας το συντελεστή τριβής  $C_f$  που αναφέρεται στην τριβή μεταξύ των τοιχωμάτων του αγωγού και του ρευστού, και την υδραυλική διάμετρο του αγωγού,  $D=4A/\Pi$ , η διατμητική τάση στο τοίχωμα είναι:

$$\tau_o = C_f \frac{1}{2} \rho_m U^2 \quad (2.2.28)$$

και ο πρώτος όρος γίνεται :

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_R = 2 C_f \rho_m \frac{U^2}{D} \quad (2.2.29)$$

Με τη χρήση των ροών όγκου και μάζας :

$$U = j = \frac{V_f + V_s}{A} \quad (2.2.30)$$

και

$$\rho_m U = G_m = \frac{M_f + M_s}{A} \quad (2.2.31)$$

η σχ.(2.2.29) γίνεται :

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_R = \frac{2 C_f G_m J}{D} \quad (2.2.32)$$

Θεωρώντας τους ειδικούς όγκους των συστατικών και τη συγκέντρωση μάζας, από τις σχ.(2.2.12) και (2.2.31) προκύπτει:

$$U = \frac{G_m}{\rho_m} = G_m [c_m V_s + (1 - c_m) V_f] = G_m (V_f + c_m V_{fs}) \quad (2.2.33)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2.31) και (2.2.33) στη σχ.(2.2.32) προκύπτει τελικά:

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_R = \frac{2 C_f G_m^2}{D} (V_f + c_m V_{fs}) \quad (2.2.34)$$

Επειδή η ροή μάζας είναι σταθερή και οι δύο φάσεις έχουν την ίδια ταχύτητα προκύπτει για τον όρο της επιτάχυνσης:

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_A = G_m \frac{dU}{dx} \quad (2.2.35)$$

και επειδή

$$U = \frac{M}{\rho_m A} \quad (2.2.36)$$

προκύπτει

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_A = G_m \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{\rho_m A} \right) = G^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\rho_m} \right) - \frac{G_m^2}{\rho_m} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \quad (2.2.37)$$

και

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\rho_m} \right) = \frac{dc_m}{dx} \left( \frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho_f} \right) + c_m \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\rho_s} \right) + (1 - c_m) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\rho_f} \right) \quad (2.2.38)$$

ή συναρτήσει των όγκων:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\rho_m} \right) = V_{fs} \frac{dc_m}{dx} + c_m \frac{dV_s}{dx} + (1 - c_m) \frac{dV_f}{dx} \quad (2.2.39)$$

Επειδή οι ειδικοί όγκοι είναι συνάρτηση της πίεσης η σχ.(2.2.39) γίνεται :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\rho_m} \right) = V_{fs} \frac{dc_m}{dx} + \frac{dP}{dx} \left[ c_m \frac{dV_s}{dP} + (1 - c_m) \frac{dV_f}{dP} \right] \quad (2.2.40)$$

Επομένως ο όρος για την πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού ένεκα της επιτάχυνσης γίνεται :

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_A = G_m^2 \left\{ V_{fs} \frac{dc_m}{dx} + \frac{dP}{dx} \left[ c_m \frac{dV_s}{dP} + (1 - c_m) \frac{dV_f}{dP} \right] - \left[ (V_f + c_m V_{fs}) \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right] \right\} \quad (2.2.41)$$

Ο όρος που αναφέρεται στη πτώση πίεσης λόγω της βαρύτητας είναι :

$$-\left(\frac{dP}{dx}\right)_G = g\eta\mu\delta \frac{1}{V_f + c_m V_{fs}} \quad (2.2.42)$$

Από το συνδυασμό των σχ.(2.2.34), (2.2.41) και (2.2.42) προκύπτει τελικά για τη συνολική πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού :

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{\left[ 2\frac{c_f}{D} G_m^2 (V_f + c_m V_{fs}) + G_m^2 V_{fs} \frac{dc_m}{dx} - G_m^2 (V_f + c_m V_{fs}) \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{9\eta\mu\delta}{V_f + V_{fs}} \right]}{\left\{ 1 + G_m^2 \left[ c_m \frac{dV_s}{dP} + (1 - c_m) \frac{dV_f}{dP} \right] \right\}} \quad (2.2.43)$$

### 2.2.3 Προσαρμογή της εξίσωσης ορμής στις πειραματικές εγκαταστάσεις

Η σχ.(2.2.43) ισχύει για μονοδιάστατη ροή δυο φάσεων σε αγωγό μεταβαλλόμενης διατομής, ο οποίος ευρίσκεται σε κλίση ως προς το οριζόντιο επίπεδο και για συμπιεστά μέσα, τόσο του φορέα όσο και του μεταφερόμενου υλικού.

Οι συνθήκες διεξαγωγής των πειραμάτων όμως είναι διαφορετικές και γι' αυτό το λόγο είναι απαραίτητες διάφορες τροποποιήσεις της σχ.(2.2.43), η οποία ξαναγράφεται εδώ για μεγαλύτερη ευκολία :

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{\left[ 2\frac{c_f}{D} G_m^2 (V_f + c_m V_{fs}) + G_m^2 V_{fs} \frac{dc_m}{dx} - G_m^2 (V_f + c_m V_{fs}) \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{9\eta\mu\delta}{V_f + V_{fs}} \right]}{\left\{ 1 + G_m^2 \left[ c_m \frac{dV_s}{dP} + (1 - c_m) \frac{dV_f}{dP} \right] \right\}} \quad (2.2.43)$$

Στην περίπτωση που ο εξεταζόμενος αγωγός στον οποίο γίνονται οι μετρήσεις, είναι σταθερής διατομής, ο όρος που αναφέρεται στη μεταβολή της διατομής κατά μήκος του αγωγού δύναται να παραληφθεί. Δηλαδή :

$$G_m^2 (V_f + c_m V_{fs}) \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0 \quad (2.2.44)$$

διότι:

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad (2.2.45)$$



Στον παρανομαστή της σχ.(2.2.43) παρουσιάζεται ο όρος :

$$G_m^2 \left\{ c_m \frac{dV_s}{dP} + (1 - c_m) \frac{dV_f}{dP} \right\}$$

ο οποίος μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής :

Επειδή η μεταφερόμενη ύλη είναι στερεά και η πτώση πίεσης κατά μήκος του αγωγού είναι μικρή δεν υπάρχει μεταβολή της πυκνότητας, επομένως και του ειδικού όγκου του στερεού υλικού, ένεκα της πίεσης.

$$\frac{dV_f}{dP} = 0 \quad (2.2.46)$$

Εξάλλου η μεταβολή του ειδικού όγκου του φορέα, (αέρας στην προκειμένη περίπτωση), δύναται να βρεθεί από την καταστατική εξίσωση, των αερίων, αν θεωρηθεί ότι ο αέρας συμπεριφέρεται σαν τέλειο αέριο.

$$PV = RT \quad (2.2.47)$$

$$\Rightarrow V = \frac{RT}{P} \Rightarrow \frac{dV}{dP} = -\frac{RT}{P^2} = -\frac{V}{P} \quad (2.2.48)$$

Επομένως :

$$\frac{dV_f}{dP} = -\frac{V_f}{P} \quad (2.2.49)$$

όπου  $V_f$  ο ειδικός όγκος του αέρα σε ένα σημείο όπου επικρατεί η πίεση  $P$ .

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχ.(2.2.44), (2.2.46) και (2.2.49), η σχ.(2.2.43) καταλήγει στην σχ.(2.2.50), η οποία λαμβάνει υπόψη τις συνθήκες διεξαγωγής των πειραμάτων,

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{\left[ 2 \frac{c_f}{D} G_m^2 (V_f + c_m V_{fs}) + G_m^2 V_{fs} \frac{dc_m}{dx} + \frac{9\eta\mu\delta}{V_f + c_m V_{fs}} \right]}{\left[ 1 - G_m^2 (1 - c_m) \frac{V_f}{P} \right]} \quad (2.2.50)$$

### 2.3 Μεταβολή της συγκέντρωσης μάζας κατά μήκος του αγωγού

Οι μεταβολές στις συνθήκες ροής μέσα στον αγωγό επηρεάζουν την συγκέντρωση μάζας  $c_m$ , η οποία μεταβάλλεται από διατομή σε διατομή. Την μεταβολή αυτή της συγκέντρωσης υπολογίζουμε ως εξής :

Σαν συγκέντρωση  $c_m$  ορίζεται ο λόγος της παροχής  $M_s$  της μεταφερομένης στερεάς ύλης (kg/s) προς την παροχή μάζας  $M$ , (kg/s), του μεταφερομένου «μίγματος».

$$c_m = \frac{M_s}{M} \quad (2.3.1)$$

επομένως :

$$c_m = \frac{\rho_s c A_s}{\rho_s c A_s + \rho_f u A_f} \quad \text{ή} \quad c_m = \frac{\rho_s c c_v A}{\rho_s c c_v A + \rho_f u (1 - c_v) A} \quad (2.3.2)$$

όπου  $c_v$  η ογκομετρική συγκέντρωση ή λόγος πληρότητας και θεωρείται σταθερός σε όλο το μήκος του αγωγού.

Στην ομογενή ροή δεχόμαστε ότι τα σωματίδια κινούνται με την ταχύτητα του ρευστού :

$$u = c = U \quad (2.3.3)$$

Επιπλέον η παροχή μάζας του «μίγματος» είναι σταθερή σε κάθε διατομή.

$$\rho_s c c_v A + \rho_f u (1 - c_v) A = \text{σταθ} \quad (2.3.4)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχ.(2.3.3) και (2.3.4) στη σχ.(2.3.2) έχουμε για δύο γειτονικές διατομές 1 και 2 :

$$c_{m1} = \frac{\rho_{s1} U_1 c_v A}{M} \quad (2.3.5)$$

$$c_{m2} = \frac{\rho_{s2} U_2 c_v A}{M} \quad (2.3.6)$$

$$\frac{c_{m1}}{c_{m2}} = \frac{\rho_{s1} U_1 c_v A}{\rho_{s2} U_2 c_v A} \quad \text{ή} \quad \frac{c_{m1}}{c_{m2}} = \frac{\rho_{s1} U_1}{\rho_{s2} U_2} \quad (2.3.7)$$

Για τη στερεά ύλη όμως ισχύει  $\rho_{s1} = \rho_{s2} = \text{σταθ.}$

Επομένως :

$$\frac{c_{m1}}{c_{m2}} = \frac{U_1}{U_2} \quad (2.3.8)$$

και

$$c_{m2} = c_{m1} \frac{U_2}{U_1} \quad (2.3.9)$$

$$c_{m2} - c_{m1} = c_{m1} \frac{U_2}{U_1} - c_{m1} = c_{m1} \left( \frac{U_2}{U_1} - \frac{U_1}{U_1} \right) \quad (2.3.10)$$

$$\Delta c_{m12} = c_{m1} \frac{U_2 - U_1}{U_1} = c_{m1} \frac{\Delta U_{12}}{U_1} \quad (2.3.11)$$

Διαιρώντας με  $\Delta x$  λαμβάνουμε :

$$\frac{\Delta c_{m12}}{\Delta x_{12}} = c_{m1} \frac{1}{U_1} \frac{\Delta U_{12}}{\Delta x_{12}} \quad (2.3.12)$$

Για απειροστό  $\Delta x_{12}$  η σχ.(2.3.12) γίνεται για την γενική περίπτωση :

$$\frac{dc_m}{dx} = c_m \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \quad (2.3.13)$$

Η σχ.(2.3.13) επιτρέπει τον υπολογισμό της μεταβολής της συγκέντρωσης  $dc_m$  μέσα σε ένα διάστημα  $(x, x+dx)$  όταν είναι γνωστά η συγκέντρωση  $c_m$  και η ταχύτητα  $U$  στο σημείο  $x$  καθώς και η βαθμίδα της ταχύτητας  $dU/dx$  κατά μήκος του αγωγού.

Από την ανωτέρω ανάλυση προκύπτει η ακόλουθη σχέση για την βαθμίδα της πίεσης κατά μήκος του αγωγού.

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{\left[ 2 \frac{c_f}{D} G_m^2 (V_f + c_m V_{fs}) + G_m^2 V_{fs} c_m \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} + \frac{9\eta\mu\delta}{V_f + c_m V_{fs}} \right]}{\left[ 1 - G_m^2 (1 - c_m) \frac{V_f}{P} \right]} \quad (2.3.14)$$

## 3

## ΧΩΡΙΣΤΗ ΔΙΦΑΣΙΚΗ ΡΟΗ

## 3.1 Γενικές προϋποθέσεις

Κατά τη θεώρηση της διφασικής ροής μίγματος ρευστού-στερεού άριστα επιτυχείς έχουν αποδειχθεί βασικές καταστρώσεις, που πραγματεύονται κάθε μια φάση χωριστά δίπλα στην άλλη. Έτσι, στο κεφάλαιο αυτό, η εξαγωγή σημαντικών σχέσεων, όπως η εξίσωση απώλειας πίεσης ή η εξίσωση κίνησης, βασίζεται σε ισολογισμούς όλων των σημαντικών, σε κάθε φάση χωριστά επιδρώντων δυνάμεων ή σε ισολογισμούς ισχύος ή ενέργειας.

Για την απώλεια πίεσης κατά την πνευματική ή υδραυλική μεταφορά στερεάς ουσίας, ισχύει η σχέση :

$$\Delta p = \Delta p_f + \Delta p_{fs} \quad (3.1.1)$$

δηλαδή η ολική απώλεια πίεσης  $\Delta p$  συντίθεται από την απώλεια πίεσης καθαρά του φορέα ροής  $\Delta p_f$  και από ένα πρόσθετο μέρος  $\Delta p_{fs}$  για τη μεταφορά της στερεάς ύλης. Αυτά τα δύο μέρη απώλειας πίεσης συντίθενται με τη σειρά τους από τις δράσεις διαφόρων αιτιών, όπως επιτάχυνση, τριβή, βάρος. Αυτή η αναλυτική μέθοδος είναι αποδοτικότερη έναντι γενικευμένων βασικών καταστρώσεων απώλειας πίεσης, γιατί,

λαμβάνοντας υπόψη τα φυσικά δεδομένα, είναι συχνά δυνατό χωριστά κομμάτια της κατάστρωσης να υπολογιστούν θεωρητικά με ακρίβεια ή ασήμαντες επιδράσεις να διαγνωστούν ευκολότερα σαν αμελητέες.

Για τη μελέτη των πολύπλοκων φαινομένων σε διφασικές ροές πρέπει να γίνουν μερικές προϋποθέσεις, που απλοποιούν τα πράγματα και υποθέσεις που οδηγούν σε ιδεώδεις καταστάσεις. Η διατύπωση των σχέσεων, που περιγράφουν τα ροϊκά φαινόμενα της διφασικής ροής, κερδίζει έτσι σε διαύγεια και απλότητα. Για μεγάλες αποκλίσεις από την πραγματικότητα μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφοροι διορθωτικοί συντελεστές. Οι γενικές προϋποθέσεις είναι :

- Οιονεί μόνιμη ροή
- Ταχύτητα φάσεων σταθερή σε όλη τη διατομή του αγωγού μεταφοράς
- Κατανομή στερεάς ύλης ομοιόμορφη για όλη τη διατομή
- Ισομεγέθη τεμαχίδια στερεάς ύλης (μονοδιασπαρμένα) και σφαιρικά
- Ισόθερμες καταστατικές μεταβολές

### 3.2 Συνέχεια των παροχών μάζας των δυο φάσεων

Για τη μόνιμη μεταφορά στερεάς ύλης, πρέπει η εισρέουσα σε ένα σύστημα μάζα του φορέα και της μεταφερόμενης ύλης να είναι ίση με την εκρέουσα ολική μάζα . Θα πρέπει λοιπόν η ολική παροχή μάζας  $M$  κατά μήκος ενός αγωγού ρευστοδυναμικής μεταφοράς να είναι σταθερή, εάν δεν είναι επιτρεπτές διακλαδώσεις, εναποθέσεις ή μη στεγανότητες, δηλαδή πρέπει να ισχύει η σχέση :

$$M = M_f + M_s = C_1 \quad (3.2.1)$$

Εάν στο μίγμα δεν λαμβάνει χώρα καμμία αλλαγή φάσης, όπως π.χ. εξάτμιση ή συμπύκνωση, τότε θα πρέπει οι μερικές παροχές μάζας, δηλ. η παροχή μάζας κάθε φάσης, να είναι σταθερές. Αυτές οι παροχές συνιστώνται από το κλάσμα όγκου της φάσης, την πυκνότητα και τη ταχύτητα αυτής της φάσης καθώς και τη διατομή του αγωγού μεταφοράς.

Για το φορέα η συνέχεια της μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$M_f = \varepsilon \rho_f A u = C_2 \quad (3.2.2)$$

Για τη μεταφερόμενη ύλη η συνέχεια της μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$M_s = (1 - \varepsilon) \rho_s A c = C_3 \quad (3.2.3)$$

με αδιάστατο βαθμό πληρότητας ή ελεύθερο όγκο:

$$\varepsilon = \frac{V_f}{V_f + V_s} \quad (3.2.4)$$

όπου:  $A$  η διατομή του αγωγού,  $c$  η μέση αξονική ταχύτητα της στερεάς ύλης,  $u$  η μέση αξονική ταχύτητα του φορέα και  $M_f$ ,  $M_s$  οι παροχές μάζας του φορέα και της μεταφερόμενης στερεάς ύλης. Ο όγκος του φορέα και της στερεάς ύλης είναι  $V_f$ ,  $V_s$  και οι πυκνότητες  $\rho_f$  και  $\rho_s$  αντίστοιχα. Ο αδιάστατος βαθμός πληρότητας είναι  $\varepsilon$  και οι  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C_3$  είναι σταθερές.

Κατά μήκος του αγωγού μεταφοράς πρέπει να είναι επίσης σταθερός ο λόγος των δυο παροχών μάζας, που λέγεται λόγος μίξης  $\mu_m$  και ορίζεται από τη σχέση :

$$\mu_m = \frac{M_s}{M_f} = \frac{(1-\varepsilon)\rho_s c A}{\varepsilon \rho_f u A} \quad (3.2.5)$$

Η συγκέντρωση μεταφοράς  $c_T$  που ορίζεται σαν ο λόγος της παροχής όγκου στερεάς ύλης  $V_s$  προς την παροχή ολικού όγκου  $V$  είναι επίσης σταθερή εφόσον οι πυκνότητες των φάσεων είναι σταθερές (υδραυλική μεταφορά). Για τη συγκέντρωση μεταφοράς  $c_T$  ισχύει η σχέση :

$$c_f = \frac{\dot{V}_s}{\dot{V}_s + \dot{V}_f} = \frac{c_v c A}{c_v c A + (1-c_v)uA} \quad (3.2.6)$$

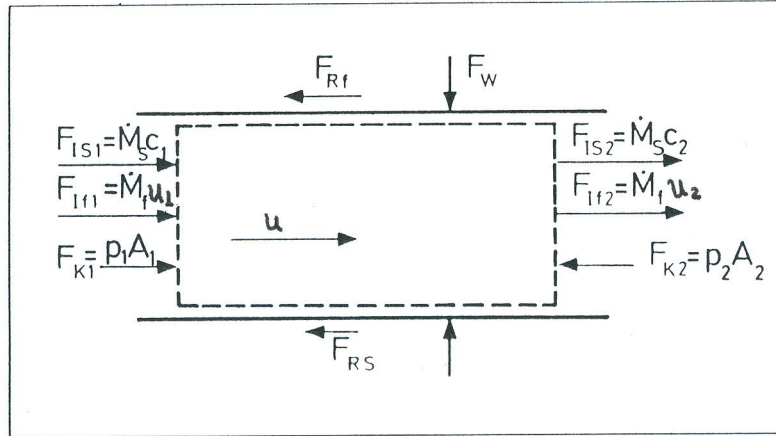
όπου  $c_v$  η συγκέντρωση όγκου, που ορίζεται από τη σχέση :

$$c_v = \frac{V_s}{V_f + V_s} = 1 - \varepsilon \quad (3.2.7)$$

### 3.3 Το θεώρημα ορμής για τα μίγματα

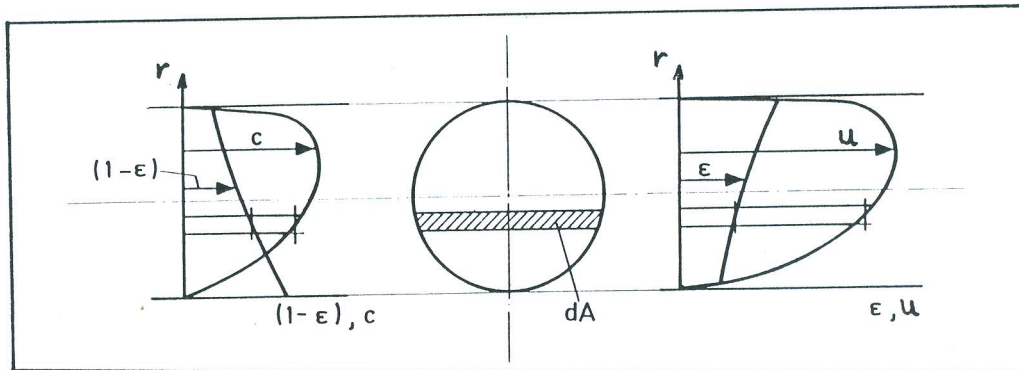
Με την προϋπόθεση σταθερών ταχυτήτων  $u$  και  $c$  των δυο φάσεων επίσης ομοιόμορφη κατανομή της στερεάς ύλης στην επιφάνεια  $A$  (διατομή αγωγού), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1, διατυπώνεται το θεώρημα ορμής για ροή δυο φάσεων ως εξής:

$$\dot{M}_f(u_1 - u_2) + \dot{M}_s(c_1 - c_2) + p_1 A_1 - p_2 A_2 + F_w + F_{RF} + F_{Rs} = 0 \quad (3.3.1)$$



Σχήμα 3.1 Ισορροπία δυνάμεων σε ένα χώρο ελέγχου για τη διατύπωση του θεωρήματος της ορμής στην περίπτωση μιγμάτων.

Εάν δεν είναι σταθερές οι ταχύτητες των δυο φάσεων σε όλη τη διατομή και αν η κατανομή της στερεάς ύλης είναι ανομοιόμορφη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2, θα πρέπει οι ροές ορμής  $M_1 u$  και  $M_s c$  να διορθωθούν με συντελεστές ορμής. Αυτοί οι συντελεστές ορμής πρέπει να υπολογισθούν με ολοκλήρωση πάνω σε όλη τη διατομή  $A$  του αγωγού.



Σχήμα 3.2 Κατανομή συγκέντρωσης όγκου στερεάς ύλης  $c_V=1-\varepsilon$ , αδιάστατου βαθμού πληρότητας  $\varepsilon$ , ταχύτητας φορέα  $u$  και στερεών σωματιδίων  $c$ , στη διατομή του αγωγού ρευστομεταφοράς.

Οι διορθωτικοί συντελεστές ορμής για τον φορέα  $\alpha_f$  και για τη μεταφερόμενη ύλη  $\alpha_s$  δίνονται από τις σχέσεις :

$$\alpha_f = \frac{\int_A \varepsilon(r) u^2(r) dA}{\varepsilon u^2 A} \quad \alpha_s = \frac{\int_A (1-\varepsilon(r)) c^2(r) dA}{(1-\varepsilon) c^2 A} \quad (3.3.2)$$

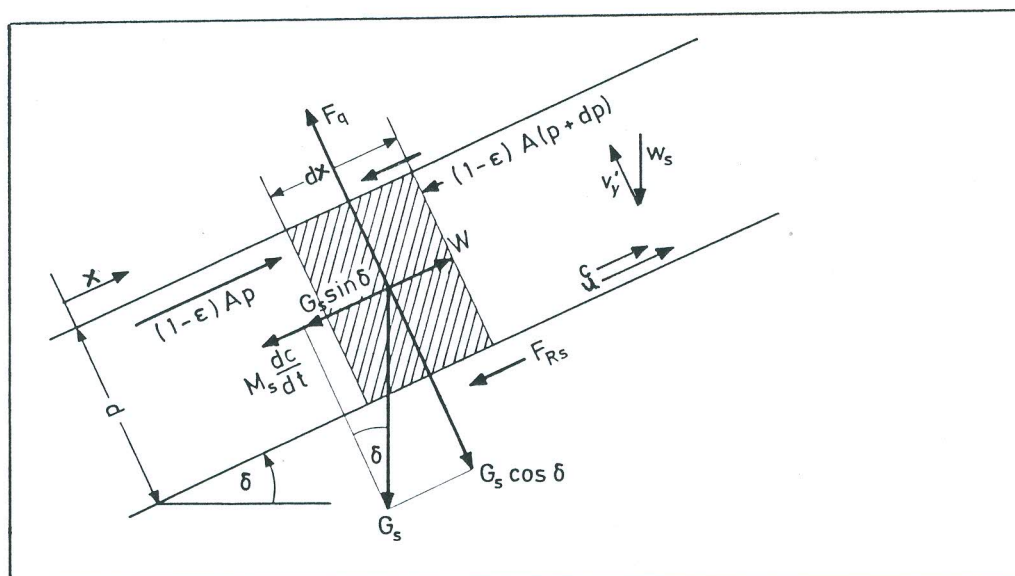
### 3.4 Ρευστοδυναμική μεταφορά μέσω κεκλιμένου αγωγού

Για την παραγωγή των απαραίτητων εξισώσεων απώλειας πίεσης και κίνησης, που περιγράφουν τις διαφασικές ροές είναι σκόπιμο να θεωρούμε ένα μονωμένο στοιχείο όγκου  $dV=Adx$  από την προς τα πάνω κατευθυνόμενη ροή υπό γωνία  $\delta$ , όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.3 και 3.4 και πάνω στο μονωμένο αυτό στοιχείο απειροστού όγκου, για κάθε φάση χωριστά, να καταστρώσουμε ισολογισμούς ισχύος ή δυνάμεων.

Οι επόμενες παράγραφοι διαπραγματεύονται τις γενικά ισχύουσες αρχές υπολογισμού για ροές σταθερού όγκου, δηλαδή ισχύουν το ίδιο για υδραυλική και για ασυμπίεστη πνευματική μεταφορά.

#### 3.4.1 Ισολογισμός δυνάμεων στο κλάσμα στερεάς ύλης

Στο κλάσμα της στερεάς ύλης που περιέχεται στο στοιχείο όγκου  $dV$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3, δρουν από την πλευρά της ίδιας της στερεάς ουσίας το βάρος της  $G_s$  και σε περίπτωση επιτάχυνσης η δύναμη αδρανείας  $M_s dc/dt$ .



Σχήμα 3.3: Οι δυνάμεις που επιδρούν στο κλάσμα της στερεάς φάσης στο στοιχειώδη όγκο  $dV=Adx$ .

Ο φορέας ασκεί, λόγω πίεσης, τη δύναμη  $(1-\epsilon)Ap$  επάνω στην κατειλημμένη από τη στερεά ουσία μετωπική επιφάνεια του στοιχείου όγκου  $dV$  και  $(1-\epsilon)A(p+dp)$  από την άλλη πλευρά. Ο φορέας επίσης, καθώς περιρέει τα τεμαχίδια της στερεάς ύλης, δρα με τη ροϊκή αντίσταση  $W$  πάνω σε αυτά. Το τοίχωμα του αγωγού δρα, κατά την πρόσκρουση των στερεών σωματιδίων πάνω του, με τη δύναμη τριβής  $F_{RS}$  πάνω στη στερεά ύλη. Στην εγκάρσια διεύθυνση ο φορέας ασκεί επιπλέον την εγκάρσια δύναμη  $F_q$ , εάν πρέπει η στερεά ύλη να μεταφερθεί σε αιώρηση.



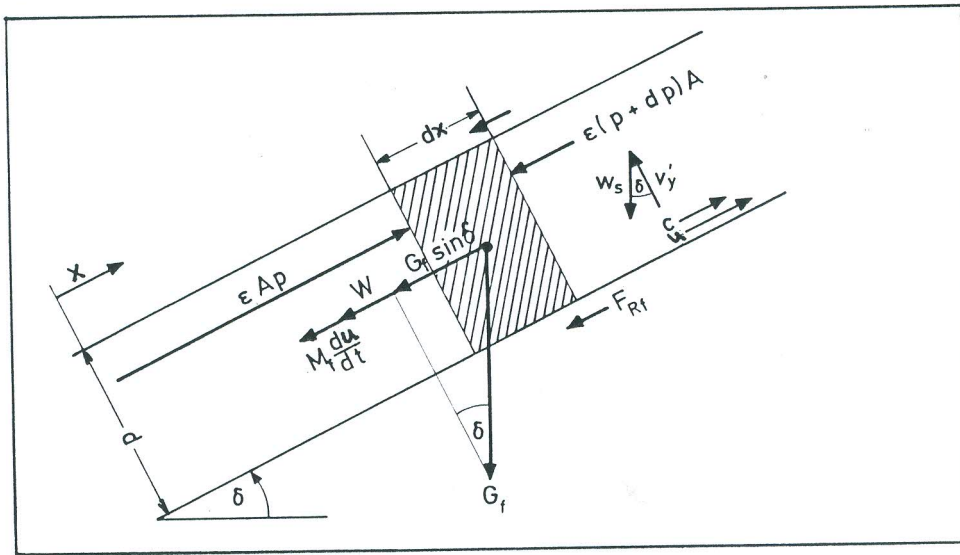
Για την κατάσταση ισορροπίας σε αξονική διεύθυνση πρέπει το άθροισμα όλων των αξονικών συνιστωσών να είναι μηδέν :

$$-G_s \eta \mu \delta - M_s \frac{dc}{dt} - (1 - \epsilon) A dp + W - F_{R_s} = 0 \quad (3.4.1)$$

### 3.4.2 Ισολογισμός ισχύος για τον φορέα

Για τον φορέα είναι πιο σκόπιμο να καταστρωθεί ένας ισολογισμός ισχύος για το στοιχείο όγκου  $dV$ , επειδή σαν φορέας ενέργειας πρέπει να προσφέρει ενέργεια και στην εγκάρσια διεύθυνση. Μπορεί κανείς αυτή την ισχύ των εγκάρσιων δυνάμεων να τη συμπεριλάβει στον ισολογισμό, επειδή η ισχύς είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4 πάνω στο φορέα δρουν το ίδιο το βάρος του και σε περίπτωση επιτάχυνσης η δύναμη αδρανείας  $M_f(du/dt)$ . Στην κατηλειμμένη από τον φορέα μετωπική επιφάνεια του στοιχείου όγκου δρα λόγω πίεσης, η δύναμη  $\epsilon A p$  και  $\epsilon A(p+dp)$  από την άλλη πλευρά. Η στερεά ύλη αντιστέκεται στο φορέα με δύναμη ίση με τη ροϊκή αντίσταση  $W$ , γι' αυτό η ροϊκή αντίσταση στο Σχήμα 3.4 έχει αντίθετη φορά απ' ότι στο Σχήμα 3.3. Τέλος το τοίχωμα του αγωγού ασκεί την αντίσταση τριβής  $F_{Rf}$  πάνω στο φορέα.



Σχήμα 3.4: Οι δυνάμεις που επιδρούν στο κλάσμα του φορέα στο στοιχειώδη όγκο  $dV = A dx$ .

Ο ισολογισμός ισχύος για τον φορέα εξάγεται από το άθροισμα των γινομένων των αξονικών συνιστωσών όλων αυτών των δυνάμεων και των αξονικών ταχυτήτων του φορέα. Επειδή οι εγκάρσιες δυνάμεις  $F_q$  δεν περιλαμβάνονται στην αντίσταση  $W$ , πρέπει, στην περίπτωση της μεταφοράς στερεάς ύλης σε αιώρηση, ένας

πρόσθετος όρος ισχύος να λαμβάνει υπ' όψη την εγκάρσια καταναλισκόμενη ενέργεια. Ο πρόσθετος όρος πρέπει να είναι του μεγέθους :

$$P_q = F_q v = G_s \sigma \nu \delta w_s \sigma \nu \delta = G_s w_s \sigma \nu^2 \delta \quad (3.4.2)$$

όπου  $v$  η εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας του φορέα και  $w_s$  η ταχύτητα ελεύθερης πτώσης των σωματιδίων της στερεάς ύλης.

Ο ισολογισμός ισχύος αποδίδεται από τη σχέση :

$$-G_f \eta \mu \delta u - M_f \frac{du}{dt} u - \varepsilon dp A u - W u - F_{Rf} u - w_s (G_s - V_s \rho_f g) \sigma \nu^2 \delta = 0 \quad (3.4.3)$$

### 3.4.3 Εξισώσεις κίνησης και απώλειας πίεσης γενικής ισχύος

Οι σχ.(3.4.1) και (3.4.3) είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με την πίεση και τη ροϊκή αντίσταση. Εάν απαλείψει κανείς από τη σχ.(3.4.3) το διαφορικό πίεσης  $dp$ , με τη βοήθεια της σχ.(3.4.1), προκύπτει η γενική εξίσωση κίνησης για τη ρευστοδυναμική μεταφορά στερεάς ύλης, μέσω αγωγού κεκλιμένου, προς τα πάνω :

$$W = \varepsilon \left[ G_s \eta \mu \delta + F_{Rs} + M_s \frac{dc}{dt} - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} (G_f \eta \mu \delta + F_{Rf} + M_f \frac{du}{dt} + (G_s - V_s \rho_f g) \sigma \nu^2 \delta \frac{W_s}{u}) \right] \quad (3.4.4)$$

Απαλείφοντας την αντίσταση  $W$  από τις δυο σχ.(3.4.1) και (3.4.3) προκύπτει η γενική εξίσωση απώλειας πίεσης για την κεκλιμένη ρευστομεταφορά προς τα πάνω :

$$dp = -\frac{1}{A} \left[ G_f \eta \mu \delta + F_{Rf} + M_f \frac{du}{dt} + (G_s - V_s \rho_f g) \frac{W_s}{u} \sigma \nu^2 \delta + G_s \eta \mu \delta + F_{Rs} + M_s \frac{dc}{dt} \right] \quad (3.4.5)$$

Στη συνέχεια αναπτύσσονται χωριστά οι διάφοροι όροι των σχ. (3.4.4) και (3.4.5). Για τη δύναμη τριβής που ασκείται κατά τη ροή ρευστού σε αγωγούς ισχύει η σχέση :

$$F_{Rf} = \varepsilon \lambda_f \frac{\rho_f}{2} u^2 \frac{dx}{D} A = \lambda_f M_f \frac{u^2}{2D} \quad (3.4.6)$$

Μια ανάλογη σχέση για τη δύναμη τριβής ισχύει και για τη ροή στερεάς ύλης :

$$F_{Rs} = (1-\varepsilon) \lambda_z^* \frac{\rho_s}{2} c^2 \frac{dx}{D} A = \lambda_z^* M_s \frac{c^2}{2D} \quad (3.4.7)$$

όπου  $\lambda_z^*$  είναι ο συντελεστής τριβής για τη ροή στερεάς ύλης, ο οποίος λαμβάνει υπόψη τις προσκρούσεις των σωματιδίων μεταξύ τους και με το τοίχωμα .

Από τη σχ.(3.4.5) με τη βοήθεια των σχ.(3.4.6) και (3.4.7) και μετά απο διεξοδική ανάπτυξη προκύπτει για την απώλεια πίεσης σε αναλυτική μορφή η γενική εξίσωση :

$$dp = - \left[ \varepsilon \rho_f g dx \eta \mu \delta + \varepsilon \lambda_f \frac{\rho_f}{2} u^2 \frac{dx}{D} + \varepsilon \rho_f u du + (1 - \varepsilon)(\rho_s - \rho_f) g dx \sigma \nu^2 \delta \frac{w_s}{u} + \right. \\ \left. + (1 - \varepsilon) \rho_s g dx \eta \mu \delta + (1 - \varepsilon) \lambda_z^* \frac{\rho_s}{2} c^2 \frac{dx}{D} + (1 - \varepsilon) \rho_s c dc \right] \quad (3.4.8)$$

Κατά τον υπολογισμό αυτό εκφράστηκε το βάρος ή η μάζα κάθε φάσης χωριστά στο στοιχείο όγκου  $dV$  με κλάσμα όγκου και πυκνότητα φάσης. Για τις επιταχύνσεις χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις :

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dx} u \quad (3.4.9)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dc}{dx} c \quad (3.4.10)$$

Από τη σχ.(3.4.4) εξάγεται με την αντίσταση όλων των στερεών σωματιδίων, που περιλαμβάνονται στο στοιχείο όγκου  $dV$ , από τη σχέση:

$$W = c_w \frac{\rho_f}{2} (u - c) |u - c| \frac{\pi d_s^2}{4} \frac{M_s}{\frac{\pi d_s^3}{6} \rho_s} \quad (3.4.11)$$

όπου  $c_w$  ο συντελεστής ροϊκής αντίστασης και  $d_s$  η διάμετρος των στερεών σωματιδίων και με τη βοήθεια των σχ.(3.4.6) και (3.4.7), η γενική εξίσωση κίνησης για τη ρευστομεταφορά στερεάς ύλης σε κεκλιμένο αγωγό, στην αναλυτική μορφή :

$$\frac{3}{4} \frac{c_w}{d_s} \rho_f (u - c) |u - c| = \varepsilon \left[ \rho_s \left( g \eta \mu \delta + \lambda_z^* \frac{c^2}{2D} + c \frac{dc}{dx} \right) - \right. \\ \left. - \rho_f \left( g \eta \mu \delta + \lambda_f \frac{u^2}{2D} + u \frac{du}{dx} \right) - \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} (\rho_s - \rho_f) g \frac{w_s}{u} \sigma \nu^2 \delta \right] \quad (3.4.12)$$

### 3.4.4 Εξισώσεις απώλειας πίεσης και κίνησης για τις ειδικές περιπτώσεις κατακόρυφης και οριζόντιας ρευστομεταφοράς.

Δύο, πολύ συχνά συναντώμενες, ειδικές περιπτώσεις ρευστοδυναμικής (υδραυλικής και πνευματικής) μεταφοράς είναι η κατακόρυφη και η οριζόντια ρευστομεταφορά.

Οι εξισώσεις που ισχύουν στην περίπτωση κατακόρυφης ρευστομεταφοράς για την απώλεια πίεσης και την κίνηση, προκύπτουν από τις σχ.(3.4.8) και (3.4.12) αντίστοιχα, για κλίση του αγωγού μεταφοράς  $\delta=90^0$ , είναι δε οι εξής :

$$dp = - \left[ \varepsilon \rho_f g dx + \varepsilon \lambda_f \frac{\rho_f}{2} u^2 \frac{dx}{D} + \varepsilon \rho_f u du + (1-\varepsilon) \rho_s g dx + (1-\varepsilon) \lambda_z^* \frac{\rho_s}{2} c^2 \frac{dx}{D} + (1-\varepsilon) \rho_s c dc \right] \quad (3.4.13)$$

$$\frac{3}{4} \frac{c_w}{d_s} \rho_f (u-c) |u-c| = \varepsilon \left[ \rho_s \left( g + \lambda_z^* \frac{c^2}{2D} + c \frac{dc}{dx} \right) - \rho_f \left( g + \lambda_f \frac{u^2}{2D} + u \frac{du}{dx} \right) \right] \quad (3.4.14)$$

Για την περίπτωση οριζόντιας ρευστομεταφοράς, για γωνία κλίσης αγωγού  $\delta=0^0$ , από τη σχ.(3.4.8) προκύπτει η γενική εξίσωση απώλειας πίεσης :

$$dp = - \left[ \varepsilon \lambda_f \frac{\rho_f}{2} u^2 \frac{dx}{D} + \varepsilon \rho_f u du + (1-\varepsilon) (\rho_s - \rho_f) g dx \frac{w_s}{u} + (1-\varepsilon) \lambda_z^* \frac{\rho_s}{2} c^2 \frac{dx}{D} + (1-\varepsilon) \rho_s c dc \right] \quad (3.4.15)$$

Απο τη σχ.(3.4.12) προκύπτει για  $\delta = 0^0$  η γενική εξίσωση κίνησης για οριζόντια μεταφορά:

$$\frac{3}{4} \frac{c_w}{d_s} \rho_f (u-c) |u-c| = \varepsilon \left[ \rho_s \left( \lambda_z^* \frac{c^2}{2D} + c \frac{dc}{dx} \right) - \rho_f \left( \lambda_f \frac{u^2}{2D} + u \frac{du}{dx} \right) - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} (\rho_s - \rho_f) g \frac{w_s}{u} \right] \quad (3.4.16)$$

### 3.5 Ασυμπίεστη αραιή πνευματική μεταφορά

Για τον υπολογισμό της ασυμπίεστης πνευματικής μεταφοράς μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι γενικά ισχύουσες εξισώσεις απώλειας πίεσης και κίνησης, που

δίνονται από τις σχ.(3.4.8) και (3.4.12) . Απαιτείται μόνο να ληφθούν υπόψη οι ειδικές προϋποθέσεις και να γίνουν οι επιτρεπόμενες απλουστεύσεις.

Πριν από οποιαδήποτε απλούστευση, είναι σκόπιμο να εισάγουμε στους όρους των σχ.(3.4.8) και (3.4.12), που αφορούν τη στερεά ύλη, το λόγο μίξης  $\mu_m$ , με τη σχ.(3.2.5).

Κατά την ασυμπίεστη αραιή πνευματική μεταφορά πρέπει να τεθεί γενικά για τον αδιάστατο βαθμό πληρότητας (ή ελεύθερο όγκο)  $\varepsilon=1$ . Επίσης είναι δυνατόν οι όροι των σχ.(3.4.8) και (3.4.12) που αφορούν το βάρος του φορέα και την επιτάχυνση του να θεωρηθούν αμελητέοι και να παραληφθούν, συγκρινόμενοι με τα αντίστοιχα μεγέθη της στερεάς ύλης. Η άνοση, που ασκεί ο φορέας στα σωματίδια, αμελείται και παραλείπεται επίσης.

Έτσι η σχ.(3.4.8) παίρνει, για την ασυμπίεστη αραιή πνευματική μεταφορά μέσω αγωγού κεκλιμένου προς τα πάνω, μετά την ολοκλήρωση, την ακόλουθη απλούστερη μορφή :

$$\Delta p = - \left( \lambda_f \frac{\rho_f}{2} u^2 \frac{\Delta x}{D} + \mu_m \rho_f \frac{u}{c} g \Delta x \beta + \mu_m \lambda_z^* \frac{\rho_f}{2} u c \frac{\Delta x}{D} + \mu_m \rho_f u c \right) \quad (3.5.1)$$

όπου  $\beta$  ο συντελεστής βάρους που δίνεται από τη σχέση :

$$\beta = \eta \mu \delta + \frac{w_s}{u} \sigma \nu^2 \delta \quad (3.5.2)$$

Για την κατάσταση σταθερής ταχύτητας μπορεί να απαλειφθεί από την εξίσωση κίνησης και η επιτάχυνση της στερεάς ύλης. Έτσι η σχ.(3.4.12) απλουστεύεται στη σχέση :

$$\frac{3}{4} \frac{c_w}{d_s} \rho_f (u - c) |u - c| = \rho_s \left( \eta \mu \delta + \lambda_z^* \frac{c^2}{2D} \right) - \lambda_f \rho_f \frac{u^2}{2D} - \mu_m \rho_f \frac{w_s}{c} g \sigma \nu^2 \delta \quad (3.5.3)$$

### 3.5.1 Κατακόρυφη ασυμπίεστη αραιή πνευματική μεταφορά

Για την κατακόρυφη ασυμπίεστη αραιή πνευματική μεταφορά η εξίσωση απώλειας πίεσης προκύπτει από τη σχ.(3.5.1) με γωνία κλίσης του αγωγού μεταφοράς  $\delta=0^0$  και δίνεται από τη σχέση :

$$\Delta p = -\left(\lambda_f \frac{\rho_f}{2} u^2 \frac{\Delta x}{D} + \mu_m \rho_f \frac{u}{c} g \Delta x + \mu_m \lambda_z^* \frac{\rho_f}{2} u c \frac{\Delta x}{D} + \mu_m \rho_f u c\right) \quad (3.5.4)$$

Η εξίσωση κίνησης προκύπτει από τη σχ.(3.5.3) :

$$\frac{3}{4} \frac{c_w}{d_s} \rho_f (u - c) |u - c| = \rho_s \left( g + \lambda_z^* \frac{c^2}{2D} \right) - \lambda_f \rho_f \frac{u^2}{2D} \quad (3.5.5)$$

Αντί της σχ. (3.5.5) για την εξίσωση κίνησης, συχνά αρκεί η χρήση της απλής σχέσης :

$$c = u - w_s \quad (3.5.6)$$

Αυτό ισχύει ιδιαίτερα όταν τα προοριζόμενα για πνευματική μεταφορά υλικά είναι ιδιαίτερα λεπτόκοκκα, που μεταφέρονται με μικρές ταχύτητες, επειδή σε αυτή την περίπτωση η τριβή δεν ασκεί καμιά αξιόλογη επίδραση. Το τελευταίο μέρος της σχ.(3.5.5) μπορεί τότε να παραληφθεί.

### 3.5.2 Οριζόντια ασυμπίεστη αραιή πνευματική μεταφορά

Για την οριζόντια ασυμπίεστη αραιή πνευματική μεταφορά, από τη σχ.(3.5.1) για την απώλεια πίεσης, με  $\delta=0^0$  προκύπτει η σχέση :

$$\Delta p = -\left(\lambda_f \frac{\rho_f}{2} u^2 \frac{\Delta x}{D} + \mu_m \rho_f \frac{w_s}{c} g \Delta x + \mu_m \lambda_z^* \frac{\rho_f}{2} u c \frac{\Delta x}{D} + \mu_m \rho_f u c\right) \quad (3.5.7)$$

Για την εξίσωση κίνησης από τη σχ.(3.5.3) προκύπτει η σχέση :

$$\frac{3}{4} \frac{c_w}{d_s} \rho_f (u - c) |u - c| = \rho_s \lambda_z^* \frac{c^2}{2D} - \lambda_f \rho_f \frac{u^2}{2D} + \mu_m \rho_f \frac{w_s}{c} g \quad (3.5.8)$$

Αντί της σχ.(3.5.8) για την εξίσωση κίνησης, συχνά αρκεί η χρήση της απλής σχέσης :

$$c = \frac{u}{1 + w_s \sqrt{\frac{\lambda_z^*}{2Dg}}} \quad (3.5.9)$$

Αυτό ισχύει ιδιαίτερα όταν τα προοριζόμενα για πνευματική μεταφορά υλικά είναι ιδιαίτερα λεπτόκοκκα, που μεταφέρονται με μικρές ταχύτητες επειδή σε αυτή την περίπτωση η τριβή δεν ασκεί καμμία αξιόλογη επίδραση. Τότε οι δυο τελευταίοι όροι της σχ. (3.5.8) μπορούν να παραληφθούν. .